Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: **Фундаментальные науки**
Кафедра: **Прикладная математика**

<u>Отчет по лабораторным работам</u>
по дисциплине «Методы оптимизации»

Преподаватель: Чередниченко А.В.
Студент: Егоров. А.Д.
Группа: ФН2-52Б.

Москва, 2022

Содержание

1. Методы прямого поиска

1.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

- параметров точности поиска;
- начальной точки;
- выпуклости;
- овражности функции (параметра α в функции Розенброка).

Используемые методы:

- метод циклического покоординатного поиска
- метод Хука-Дживса
- метод Розенброка

Целевые функции:

- $2x^2+4xy+5y^2-4\sqrt{5}(x+y)+35$
- $f(x,y)=\alpha(x^2-y)^2+(x-1)^2$

Заданная точность:

- $\epsilon=0{,}01$
- $\epsilon=0{,}000001$

1.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Тип функции	Начальная точка	Точность	Метод	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Квадратичная функция	[-1, -2]	0.01	Метод Розенброка	[-0.0, -2.24]	-45.00	4	232
	[0, 0]	0.01	Метод Розенброка	[0.0, -2.24]	-45.00	4	232
	[-2, 5]	0.01	Метод Розенброка	[-0.0, -2.24]	-45.00	7	406
	[-10, 18]	0.01	Метод Розенброка	[0.0, -2.24]	-45.00	11	638
	[-1, -2]	0.01	Метод Хука-Дживса	[-0.0, -2.24]	-45.00	20	131
	[0, 0]	0.01	Метод Хука-Дживса	[-0.0, -2.24]	-45.00	20	129
	[-2, 5]	0.01	Метод Хука-Дживса	[-0.0, -2.24]	-45.00	24	299
	[-10, 18]	0.01	Метод Хука-Дживса	[-0.0, -2.24]	-45.00	25	351
	[-1, -2]	0.01	Метод покоординатного спуска	[-0.0, -2.23]	-45.00	5	508
	[0, 0]	0.01	Метод покоординатного спуска	[-0.0, -2.23]	-45.00	7	684
	[-2, 5]	0.01	Метод покоординатного спуска	[-0.0, -2.23]	-45.00	9	871
	[-10, 18]	0.01	Метод покоординатного спуска	[-0.0, -2.23]	-45.00	10	958

Таблица 1. Результаты вычислений квадратичной функции
в зависимости от начальной точки и метода

Тип функции	**Начальная точка**	**Точность**	**Метод**	**Точка минимума функции**	**Значение функции в точке минимума**	**Количество итераций**	**Количество вычислений функции**
Функция Розенброка	[-10, 18]	0.01	Метод покоординатного спуска	[0.92, 0.85]	0.010000	142	14155
	[-10, 18]	0.01	Метод Хука-Дживса	[0.87, 0.74]	0.020000	311	13283
	[-10, 18]	0.01	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	31	1798
	[-2, 5]	0.01	Метод покоординатного спуска	[0.92, 0.85]	0.010000	36	3569
	[-2, 5]	0.01	Метод Хука-Дживса	[0.88, 0.76]	0.010000	36	1343
	[-2, 5]	0.01	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	15	870
	[-1, -2]	0.01	Метод покоординатного спуска	[0.92, 0.85]	0.010000	27	2775
	[-1, -2]	0.01	Метод Хука-Дживса	[0.92, 0.83]	0.010000	20	605
	[-1, -2]	0.01	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	9	522
	[0, 0]	0.01	Метод покоординатного спуска	[0.92, 0.85]	0.010000	26	2688
	[0, 0]	0.01	Метод Хука-Дживса	[0.88, 0.75]	0.020000	14	391
	[0, 0]	0.01	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	7	406

Таблица 2. Результаты вычислений функции Розенброка
в зависимости от начальной точки, alpha = 5

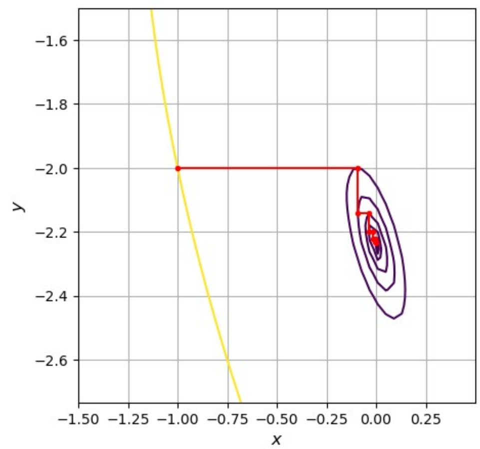


Рис. 1. Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом циклического покоординатнаго спуска при начальной точке (-1, -2)

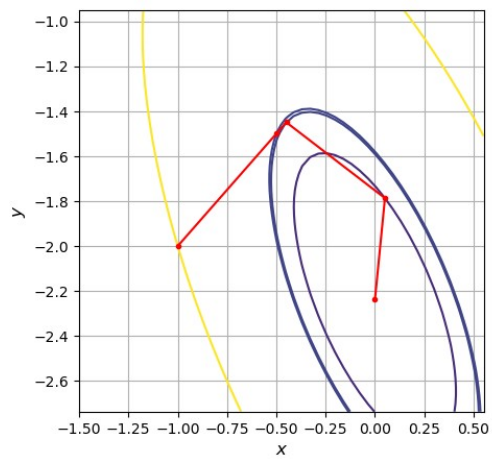


Рис. 2. Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом Хука-Дживса при начальной точке (-1, -2)

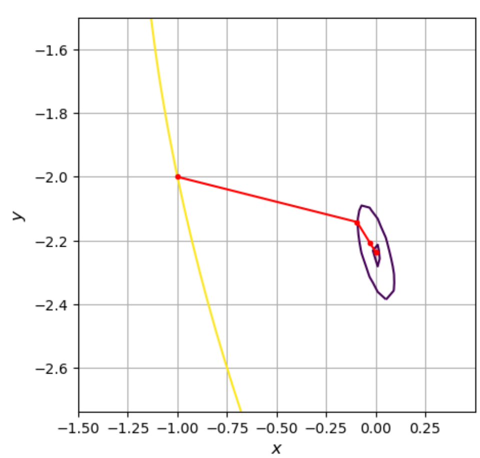


Рис. 3. Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом Розенброка при начальной точке (-1, -2)

Тип функции	Начальная точка	Точност ь	Метод	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Функция Розенброка	[-10, 18]	0.010000	Метод покоординатного спуска	[0.6, 0.36]	0.160000	1275	138369
	[-10, 18]	0.010000	Метод Хука-Дживса	[-4.81, 23.18]	33.800000	11	87
	[-10, 18]	0.010000	Метод Розенброка	[-5.43, 29.48]	41.340000	5	290
	[-2, 5]	0.010000	Метод покоординатного спуска	[0.6, 0.36]	0.160000	280	29744
	[-2, 5]	0.010000	Метод Хука-Дживса	[-2.0, 4.0]	9.000000	9	42
	[-2, 5]	0.010000	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	27	1566
	[-1, -2]	0.010000	Метод покоординатного спуска	[0.57, 0.33]	0.180000	25	2605
	[-1, -2]	0.010000	Метод Хука-Дживса	[0.77, 0.59]	0.050000	13	355
	[-1, -2]	0.010000	Метод Розенброка	[0.01, 0.0]	0.980000	2	116
	[0, 0]	0.010000	Метод покоординатного спуска	[0.57, 0.33]	0.180000	24	2519
	[0, 0]	0.010000	Метод Хука-Дживса	[0, 0]	1.000000	1	0
	[0, 0]	0.010000	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	12	696

Таблица 3. Результаты вычислений функции Розенброка
в зависимости от начальной точки, alpha = 50

Тип функции	**Начальная точка**	**Точность**	**Метод**	**Точка минимума функции**	**Значение функции в точке минимума**	**Количество итераций**	**Количество вычислений функции**
Функция Розенброка	[-1, -2]	0.001000	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	15	1020
	[-1, -2]	0.000001	Метод Розенброка	[1.0, 1.0]	0.000000	16	1376
	[-1, -2]	0.001000	Метод Хука-Дживса	[0.863, 0.744]	0.019000	59	2147
	[-1, -2]	0.000001	Метод Хука-Дживса	[0.999799, 0.999596]	0.000000	1245	52953
	[-1, -2]	0.001000	Метод покоординатного спуска	[0.92, 0.846]	0.006000	239	26953
	[-1, -2]	0.000001	Метод покоординатного спуска	[0.999911, 0.999822]	0.000000	1572	203436

Таблица 4. Результаты вычислений функции Розенброка
в зависимости от заданной точности, alpha = 50

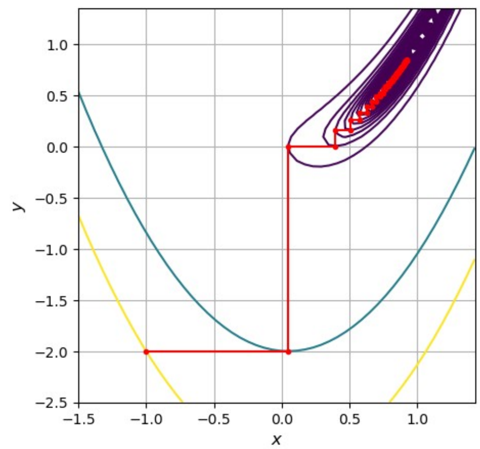


Рис. 4. Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом циклического покоординатнаго спуска при начальной точке (-1, -2)

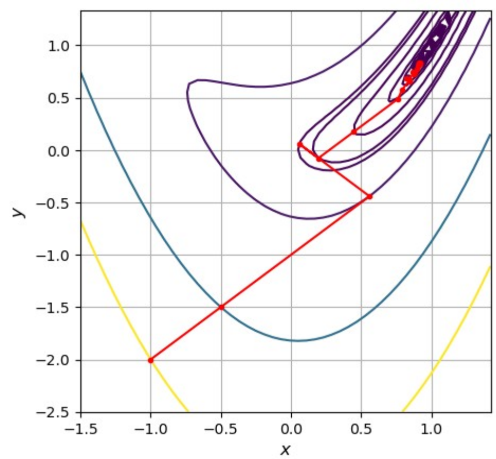


Рис. 5. Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом Хука-Дживса при начальной точке (-1, -2)

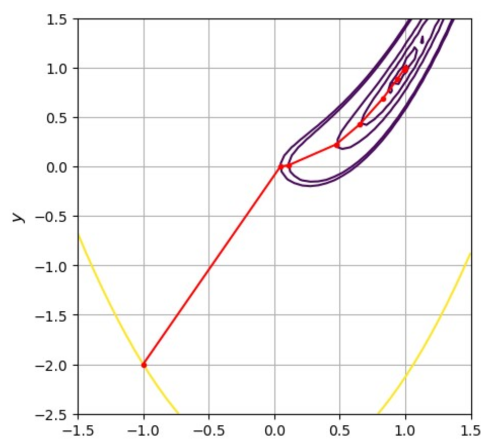


Рис. 6. Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом Розенброка при начальной точке (-1, -2)

1.3. Вывод

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы три метода:

- метод циклического покоординатного спуска
- метод Хука-Дживса
- метод Розенброка

Достоинством данных методов является то, что нам не требуется дифференцируемость функции. Однако из-за этого появляются и недостатки: трудность с оценкой эффективности методов и их точность. Метод покоординатного спуска является самым простым для реализации, однако его простота делает его не самым эффективным по количеству вычислений функции. Методы Хука-Дживса и Розенброка является эффективнее по данному параметру. Наиболее выгодным является метод Хука-Дживса.

Следует отметить, что при сильно овражной функции и маленькой точности методы ПС и Хука-Дживса ищут минимум не точно. Для точного поиска (методом Розенброка) следует жертвовать производительностью.

2. Лабораторная работа №7

2.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

- параметров точности поиска;
- начальной точки;
- выпуклости;
- овражности функции (параметра α в функции Розенброка).

Используемые методы:

- регулярный симплекс
- нерегулярный симплекс

Целевые функции:

- $2x^2+4xy+5y^2-4\sqrt{5}(x+y)-35$
- $f(x,y)=\alpha(x^2-y)^2+(x-1)^2$

Заданная точность:

- $\epsilon=0,01$
- $\epsilon=0,000001$

2.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Тип функции	Начальная точка	Точность	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Квадратичная функция	[-1, -2]	0.01	[-0.0, -2.27]	-45.00	14	12
Квадратичная функция	[-1, -2]	0.000001	[0.0, -2.236068]	-45.000000	40	38
Функция Розенброка, a = 1	[-1, -2]	0.01	[0.86, 0.74]	0.02	55	94
Функция Розенброка, a = 1	[-1, -2]	0.000001	[0.999976, 0.999952]	0.000000	966	1890
Функция Розенброка, a = 50	[-1, -2]	0.01	[0.57, 0.32]	0.19	15	14
Функция Розенброка, a = 50	[-1, -2]	0.000001	[0.99964, 0.999279]	0.000000	8078	16114

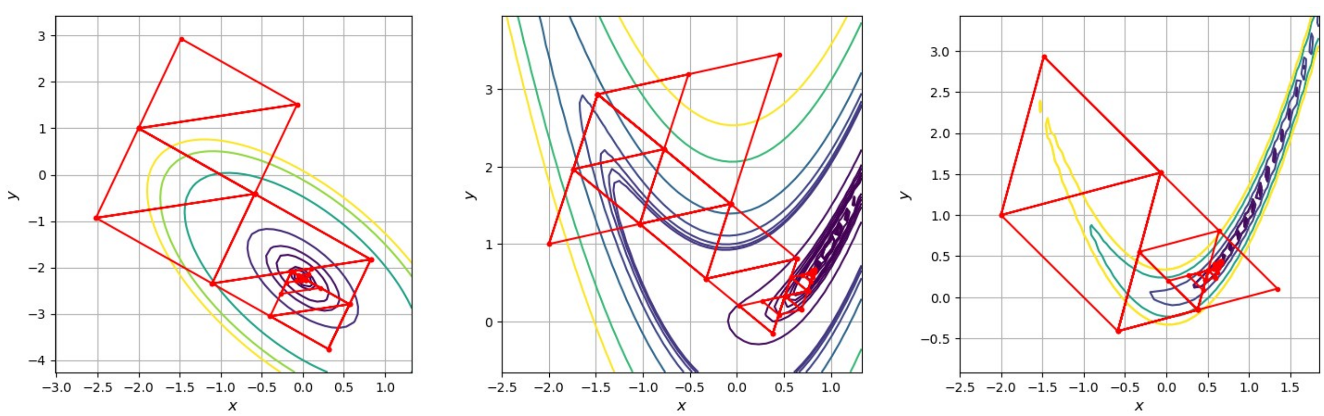
Таблица 5. Результаты вычислений для регулярного симплекса
при начальной длине ребра l = 2 и коэффициенте редукции delta = 0.5
в зависимости от функции и точности

Тип функции	**Начальная точка**	**Точность**	**Точка минимума функции**	**Значение функции в точке минимума**	**Количество итераций**	**Количество вычислений функции**
Квадратичная функция	[-1, -2]	0.01	[-0.0, -2.27]	-45.000000	13	120
Квадратичная функция	[-1, -2]	0.000001	[0.000462, -2.236667]	-44.999999	28	250
Функция Розенброка, a = 1	[-1, -2]	0.01	[0.83, 0.68]	0.03	19	170
Функция Розенброка, a = 1	[-1, -2]	0.000001	[0.999662, 0.998938]	0.000001	60	530
Функция Розенброка, a = 50	[-1, -2]	0.01	[0.76, 0.57]	0.06	17	150
Функция Розенброка, a = 50	[-1, -2]	0.000001	[0.999118, 0.998338]	0.000001	158	1390

Таблица 6. Результаты вычислений для нерегулярного симплекса
при начальной длине ребра l = 2 и коэффициентах отражения alpha = 1,
растяжения beta = 2, сжатия gamma = 0.5, редукции delta = 0.5
в зависимости от функции и точности

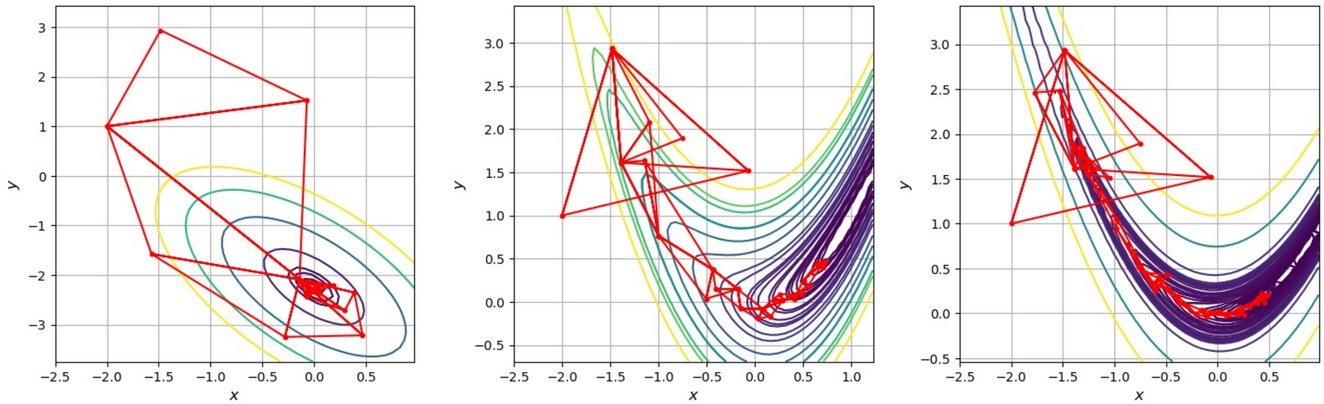
Начальная точка	**Метод**	**Количество итераций**	**Количество вычислений функции**
[-10, 1]	Регулярный симплекс	27	38
[-10, 1]	Нерегулярный симплекс	26	228
[-2, 5]	Регулярный симплекс	15	14
[-2, 5]	Нерегулярный симплекс	57	500
[-1, -2]	Регулярный симплекс	15	14
[-1, -2]	Нерегулярный симплекс	17	150
[0, 0]	Регулярный симплекс	51	86
[0, 0]	Нерегулярный симплекс	26	230
[10, 10]	Регулярный симплекс	22	28
[10, 10]	Нерегулярный симплекс	71	628

Таблица 7. Результаты вычислений для функции Розенброка
для регулярного симплекса и нерегулярного симплекса при начальной длине ребра
l = 2, коэффициентах отражения alpha = 1, растяжения beta = 2, сжатия gamma = 0.5,
редукции delta = 0.5 в зависимости от начальной точки



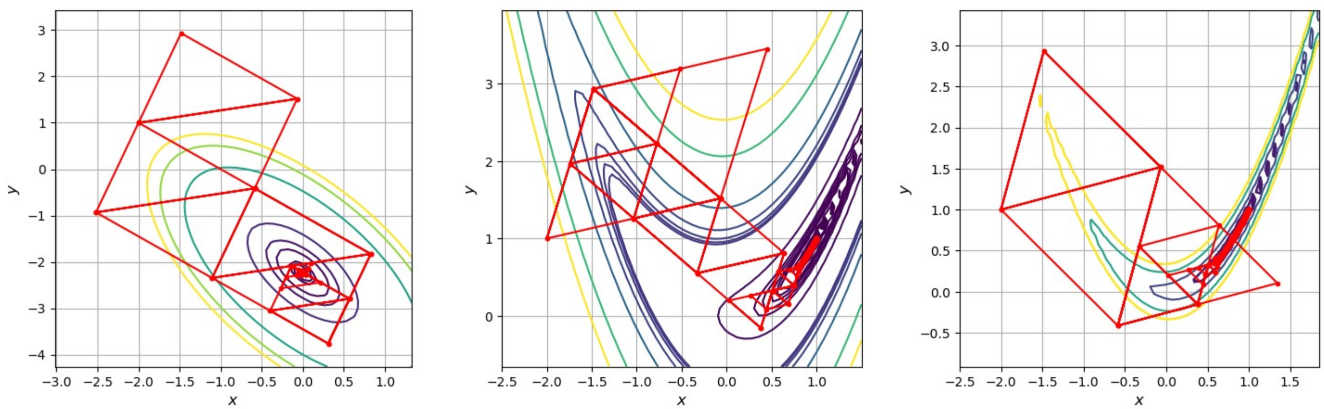
а) *б)* *в)*

Рис. 7. Визуализация метода регулярного симплекса при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)



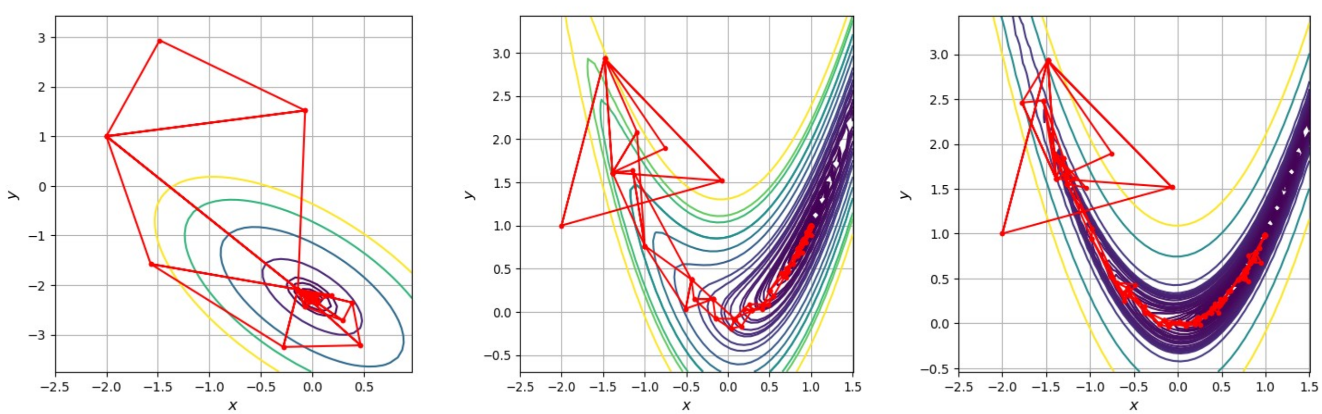
а) *б)* *в)*

Рис. 8. Визуализация метода нерегулярного симплекса при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)



а) *б)* *в)*

Рис. 9. Визуализация метода регулярного симплекса при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)



а) *б)* *в)*

Рис. 10. Визуализация метода нерегулярного симплекса при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)

1.3. Выводы

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы два метода:

- Регулярный симплекс,
- Нерегулярный симплекс (метод Нелдера-Мида).

Во всех методах с заранее заданной точностью были получены точка минимума и минимальное значение в этой точке.

При поиске точки минимума для квадратичной функции оба методы показывают хорошие результаты, но эффективнее оказался поиск с помощью регулярного симплекса, так как требовал меньшего количества вычислений функции, так как случае нерегулярного симплекса много вычислений уходит на одномерную минимизацию. При поиске точки минимума для функции Розенброка лучшие результаты у метода нерегулярного симплекса: метод регулярного симплекса требовал меньшего вычисления функций при малой точности, но при увеличении точности гораздо эффективнее было использование нерегулярного симплекса.

К плюсами данных методов можно отнести то, что для их реализации не требуется находить градиенты или матрицы Гесса, а их поиск, в свою очередь, порой является весьма нетривиальной задачей.

3. Методы последовательной безусловной минимизации

3.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

- параметров точности поиска;
- начальной точки;
- выпуклости;
- овражности функции (параметра α в функции Розенброка).

Используемые методы:

- метод внутренних штрафных функций;
- метод внешних штрафных функций.

Для каждой задачи искать решение в заданном допустимом множестве

- A: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ x + y \leq 10;$
- B: $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} \leq 10$.

Целевые функции:

- $6x^2 - 4xy + 3y^2 + 4\sqrt{5}(x + 2y) - 35$
- $f(x, y) = \alpha (x^2 - y)^2 + (x - 1)^2$

Заданная точность:

- $\epsilon = 0{,}01$
- $\epsilon = 0{,}000001$

3.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Тип функции	Начальная точка	Точность	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.01	[0.0, 0.0]	-34.99	22	3891
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.000001	[0.0, 0.0]	-34.999999	49	17408
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.01	[1.02, 1.04]	0.00	12	4260
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.000001	[1.000001, 1.000001]	0.000000	26	15492
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.01	[1.95, 3.81]	0.91	12	2068
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.000001	[1.000044, 1.000088]	0.000000	26	15465

Таблица 8. Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества A в зависимости от функции и точности

Тип функции	Начальная точка	Точность	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.01	[0.0, -2.24]	-45.00	2	646
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.000001	[0.0, -2.236068]	-45.000000	2	646
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.01	[1.0, 1.0]	0.00	2	1441
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.000001	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1656
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.01	[1.0, 1.0]	0.00	2	2492
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.000001	[1.0, 1.0]	0.000000	2	2697

Таблица 8. Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

Тип функции	Начальная точка	Точность	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.01	[0.0, -2.24]	-45.00	2	646
Квадратичная функция	[-2, 2]	0.000001	[0.0, -2.236068]	-45.000000	2	646
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.01	[1.0, 1.0]	0.00	2	1441
Функция Розенброка, a = 1	[-2, 2]	0.000001	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1656
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.01	[1.0, 1.0]	0.00	2	2492
Функция Розенброка, a = 50	[-2, 2]	0.000001	[1.0, 1.0]	0.000000	2	2697

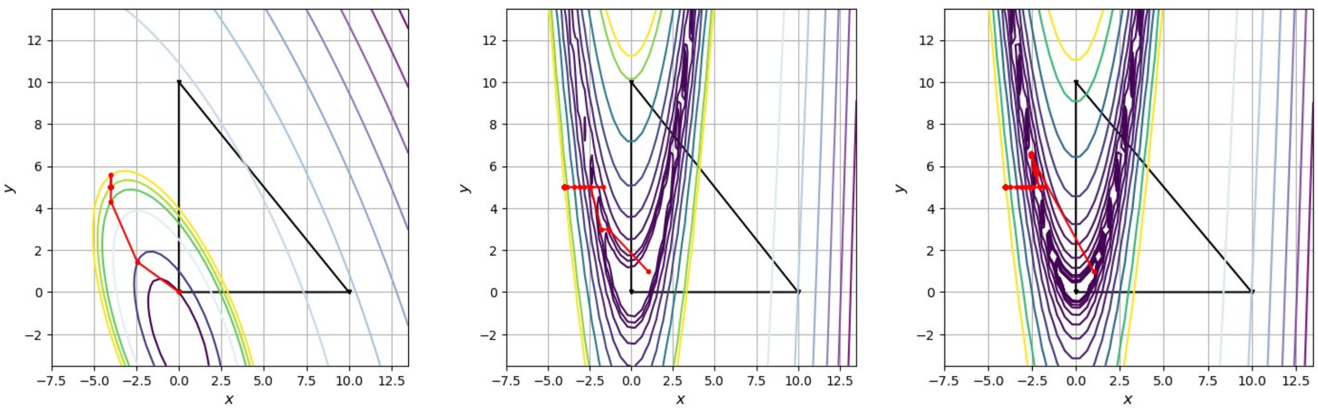
Таблица 9. Результаты вычислений для метода внешних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

Начальная точка	Метод	Точка минимума функции	Значение функции в точке минимума	Количество итераций	Количество вычислений функции
[-7, 0]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	273	59802
[-7, 0]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1702
[-2, 2]	Метод внутренних штрафных функций	[1.000044, 1.000088]	0.000000	26	15465
[-2, 2]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	3	2565
[0.1, 0.1]	Метод внутренних штрафных функций	[1.000044, 1.000088]	0.000000	26	15602
[0.1, 0.1]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1798
[4, 2.5]	Метод внутренних штрафных функций	[1.000044, 1.000088]	0.000000	26	15411
[4, 2.5]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1652
[5, 2]	Метод внутренних штрафных функций	[1.000044, 1.000088]	0.000000	26	15436
[5, 2]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1595

Таблица 10. Результаты вычислений для функции Розенброка (a = 50) для методов внутренних и внешних штрафных функций на множестве A в зависимости от начальной точки

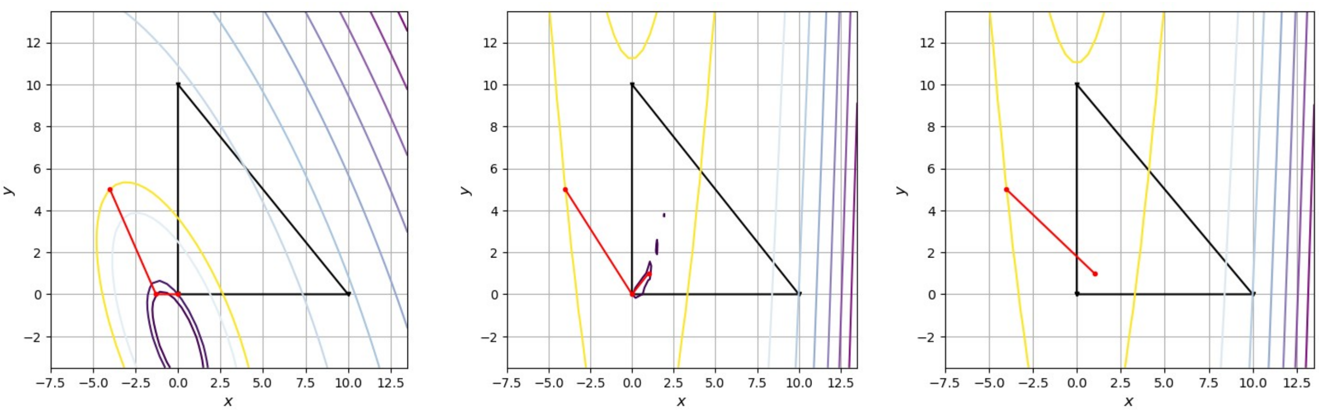
Начальная точка	**Метод**	**Точка минимума функции**	**Значение функции в точке минимума**	**Количество итераций**	**Количество вычислений функции**
[-7, 0]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1735
[-7, 0]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1735
[-2, 2]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	2697
[-2, 2]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	2697
[0.1, 0.1]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1834
[0.1, 0.1]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1834
[4, 2.5]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1683
[4, 2.5]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1683
[5, 2]	Метод внутренних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1643
[5, 2]	Метод внешних штрафных функций	[1.0, 1.0]	0.000000	2	1643

Таблица 11. Результаты вычислений для функции Розенброка (a = 50) для методов внутренних и внешних штрафных функций на множестве B в зависимости от начальной точки



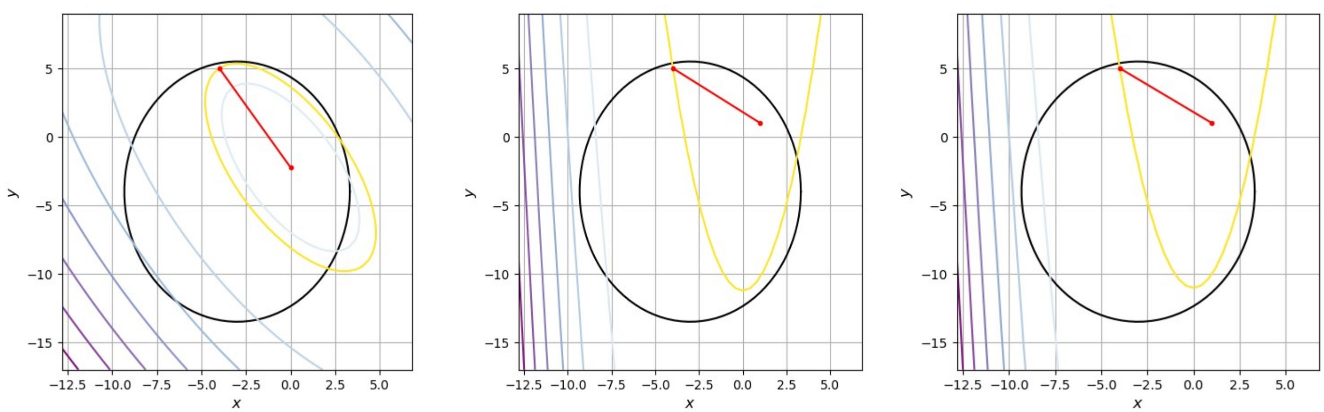
а) б) в)

Рис. 11. Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве A при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



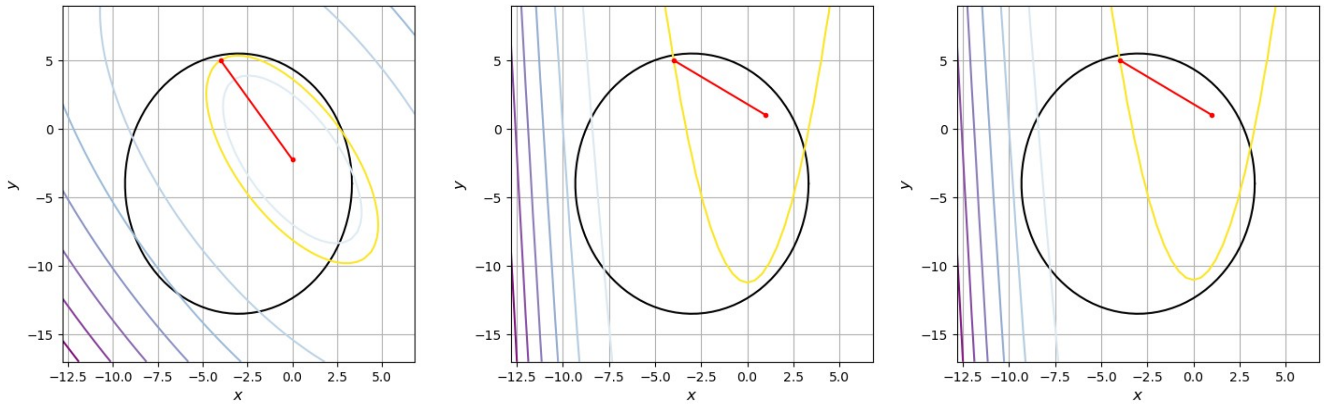
а) б) в)

Рис. 12. Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве A при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



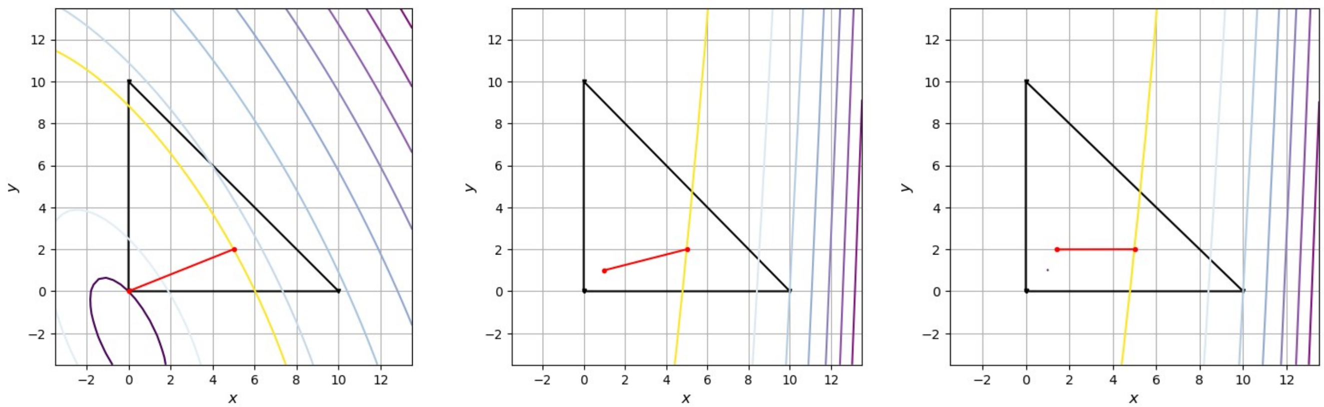
а) б) в)

Рис. 13. Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве B при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



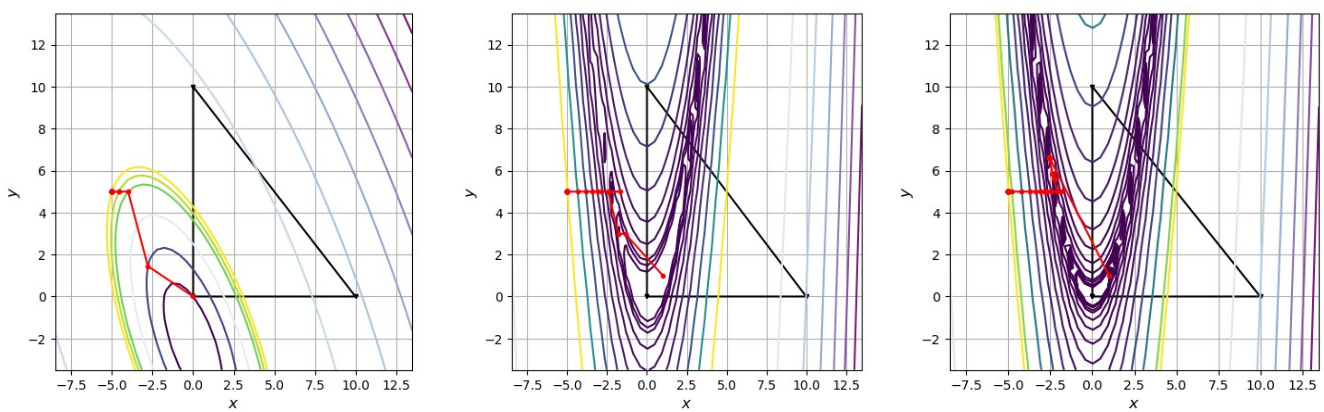
а) *б)* *в)*

Рис. 14. Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве B при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



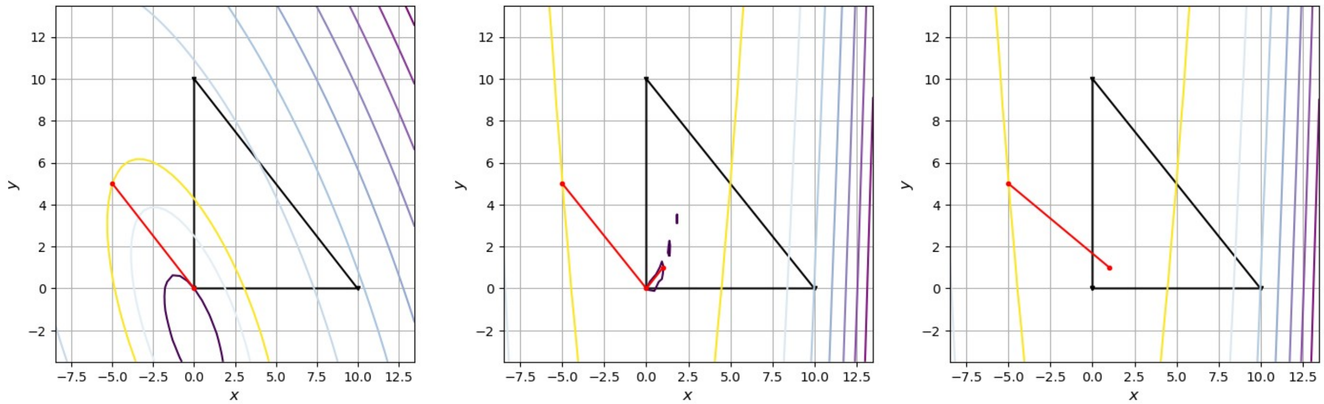
а) *б)* *в)*

Рис. 15. Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве A при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



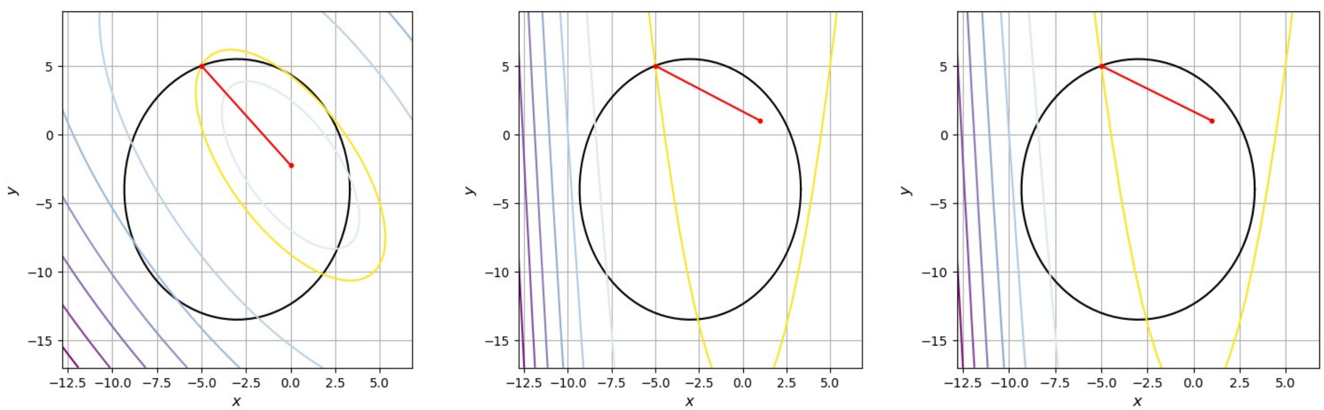
а) *б)* *в)*

Рис. 16. Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве A при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



а) б) в)

Рис. 17. Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве А при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)



а) б) в)

Рис. 18. Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве B при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

3.3. Вывод

Таким образом, в лабораторной работе по «методам последовательной безусловной минимизации» мы рассмотрели методы минимизации функции, заданной на допустимом множестве:

- метод внутренних штрафных функций;
- внешних штрафных функций.

Оба метода относятся к более общему методу – методу барьерных функций. Данные алгоритмы основаны на добавлении к основной функции функций штрафа. Принципиальная разница заключается в составлении этих самых штрафных функций. Для метода внешних функций они составлены таким образом, что сходимость решения не чувствительна к начальной точке, в отличие от метода внутренних штрафов, для которой необходимо, чтобы начальная точка была внутри допустимой области.