**Министерство науки и высшего образования РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**

**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

Факультет: **Фундаментальные науки**

Кафедра: **Прикладная математика**

**Отчет по лабораторным работам**

**по дисциплине «Методы оптимизации»**

Преподаватель: Чередниченко А.В.

Студент: Егоров. А.Д.

Группа: ФН2-52Б.

Москва, 2022

Содержание

[1. Методы прямого поиска 3](#__RefHeading___Toc4290_2199285784)

[1.1. Постановка задачи 3](#__RefHeading___Toc4292_2199285784)

[1.2. Тестовые примеры и результаты расчетов 4](#__RefHeading___Toc4294_2199285784)

[1.3. Вывод 10](#__RefHeading___Toc4296_2199285784)

[2. Лабораторная работа №7 11](#__RefHeading___Toc4298_2199285784)

[2.1. Постановка задачи 11](#__RefHeading___Toc4300_2199285784)

[2.2. Тестовые примеры и результаты расчетов 12](#__RefHeading___Toc4302_2199285784)

[2.3. Выводы 16](#__RefHeading___Toc4304_2199285784)

[3. Методы последовательной безусловной минимизации 17](#__RefHeading___Toc4306_2199285784)

[3.1. Постановка задачи 17](#__RefHeading___Toc4308_2199285784)

[3.2. Тестовые примеры и результаты расчетов 18](#__RefHeading___Toc4310_2199285784)

[3.3. Вывод 26](#__RefHeading___Toc4312_2199285784)

[Общие выводы 27](#__RefHeading___Toc4314_2199285784)

# 1. Методы прямого поиска

## 1.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

* параметров точности поиска;
* начальной точки;
* выпуклости;
* овражности функции (параметра в функции Розенброка).

Используемые методы:

* метод циклического покоординатного поиска
* метод Хука-Дживса
* метод Розенброка

Целевые функции:

Заданная точность:

## 1.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

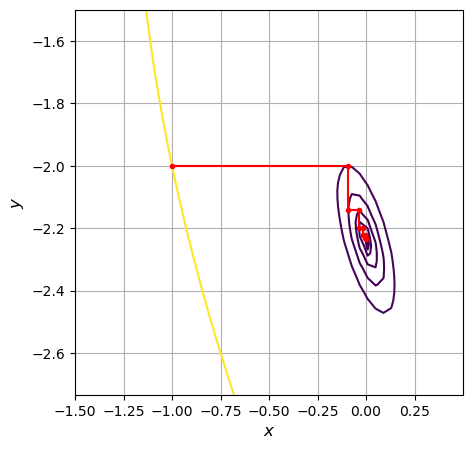
Таблица 1 - Результаты вычислений квадратичной функции   
в зависимости от начальной точки и метода

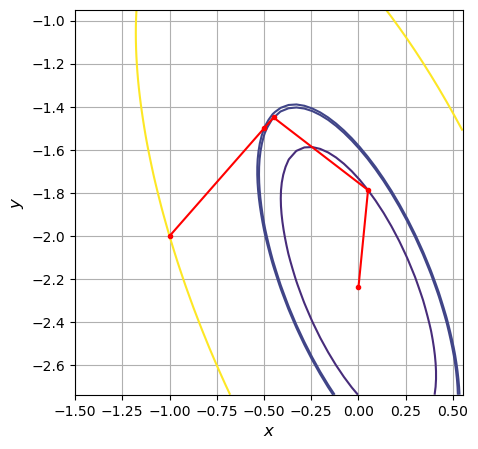
| Начальная  точка | Точность | Метод | Точка минимума функции | Значение функции в точке минимума | Количество итераций | Количество вычислений функции |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод Розенброка | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 4 | 232 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод Розенброка | [0.0, -2.24] | -45.00 | 4 | 232 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод Розенброка | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 7 | 406 |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод Розенброка | [0.0, -2.24] | -45.00 | 11 | 638 |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод  Хука-Дживса | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 20 | 131 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод  Хука-Дживса | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 20 | 129 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод  Хука-Дживса | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 24 | 299 |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод  Хука-Дживса | [-0.0, -2.24] | -45.00 | 25 | 351 |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [-0.0, -2.23] | -45.00 | 5 | 508 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [-0.0, -2.23] | -45.00 | 7 | 684 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [-0.0, -2.23] | -45.00 | 9 | 871 |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [-0.0, -2.23] | -45.00 | 10 | 958 |

Таблица 2 - Результаты вычислений функции Розенброка в зависимости

от начальной точки, alpha = 5

| Начальная точка | Точность | Метод | Точка минимума функции | Значение функции в точке минимума | Количество итераций | Количество вычислений функции |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.92, 0.85] | 0.010000 | 142 | 14155 |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [0.87, 0.74] | 0.020000 | 311 | 13283 |
| [-10, 18] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 31 | 1798 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.92, 0.85] | 0.010000 | 36 | 3569 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [0.88, 0.76] | 0.010000 | 36 | 1343 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 15 | 870 |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.92, 0.85] | 0.010000 | 27 | 2775 |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [0.92, 0.83] | 0.010000 | 20 | 605 |
| [-1, -2] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 9 | 522 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.92, 0.85] | 0.010000 | 26 | 2688 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [0.88, 0.75] | 0.020000 | 14 | 391 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 7 | 406 |

Рисунок 1 - Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом  
циклического покоординатнаго спуска при начальной точке (-1, -2)

 Рисунок 2 - Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом   
Хука-Дживса при начальной точке (-1, -2)

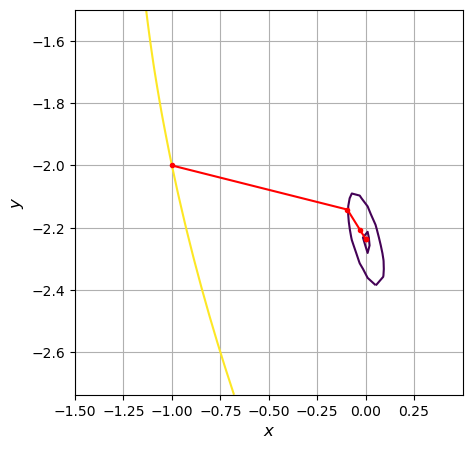


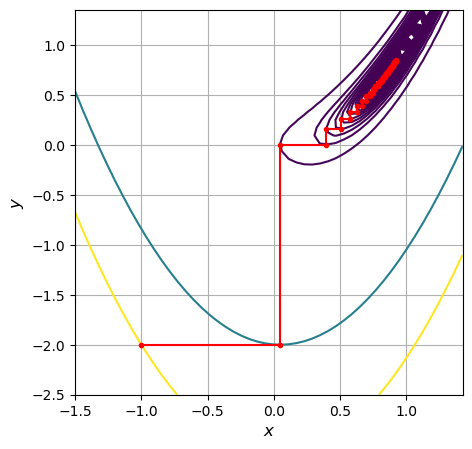
Рисунок 3 - Визуализация нахождения минимума квадратичной функции методом   
Розенброка при начальной точке (-1, -2)

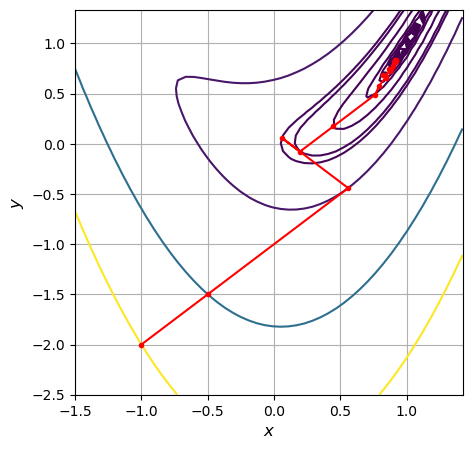
Таблица 3 - Результаты вычислений функции Розенброка  
в зависимости от начальной точки, alpha = 50

| Начальная точка | Точность | Метод | Точка минимума функции | Значение функции в точке минимума | Количество итераций | Количество вычислений функции |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.6, 0.36] | 0.160000 | 280 | 29744 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [-2.0, 4.0] | 9.000000 | 9 | 42 |
| [-2, 5] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 27 | 1566 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод покоординатного спуска | [0.57, 0.33] | 0.180000 | 24 | 2519 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод Хука-Дживса | [0, 0] | 1.000000 | 1 | 0 |
| [0, 0] | 0.01 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 12 | 696 |

Таблица 4 - Результаты вычислений функции Розенброка  
в зависимости от заданной точности, alpha = 50

| Начальная точка | Точность | Метод | Точка минимума функции | Значение функции в точке минимума | Количество итераций | Количество вычислений функции |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [-1, -2] | 0.001 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 15 | 1020 |
| [-1, -2] | 0.000001 | Метод Розенброка | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 16 | 1376 |
| [-1, -2] | 0.001 | Метод Хука-Дживса | [0.863, 0.744] | 0.019000 | 59 | 2147 |
| [-1, -2] | 0.000001 | Метод Хука-Дживса | [0.999799, 0.999596] | 0.000000 | 1245 | 52953 |
| [-1, -2] | 0.001 | Метод покоординатного спуска | [0.92, 0.846] | 0.006000 | 239 | 26953 |
| [-1, -2] | 0.000001 | Метод покоординатного спуска | [0.999911, 0.999822] | 0.000000 | 1572 | 203436 |

Рисунок 4 - Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом  
циклического покоординатнаго спуска при начальной точке (-1, -2)

Рисунок 5 - Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом   
Хука-Дживса при начальной точке (-1, -2)

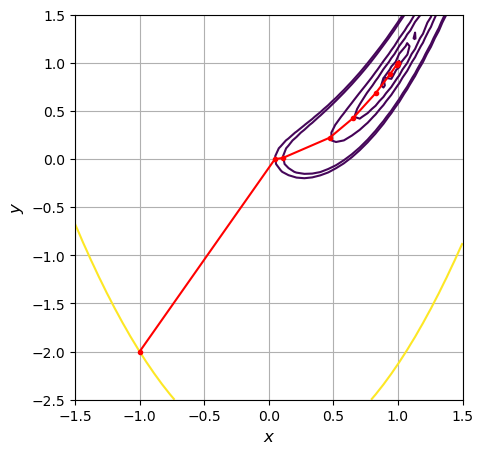


Рисунок 6 - Визуализация нахождения минимума функции Розенброка методом   
Розенброка при начальной точке (-1, -2)

## 1.3. Вывод

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы три метода:

* метод циклического покоординатного спуска
* метод Хука-Дживса
* метод Розенброка

Достоинством данных методов является то, что нам не требуется дифференцируемость функции. Однако из-за этого появляются и недостатки: трудность с оценкой эффективности методов и их точность. Метод покоординатного спуска является самым простым для реализации, однако его простота делает его не самым эффективным по количеству вычислений функции. Методы Хука-Дживса и Розенброка является эффективнее по данному параметру. Наиболее выгодным является метод Хука-Дживса.

Следует отметить, что при сильно овражной функции и маленькой точности методы ПС и Хука-Дживса ищут минимум не точно: из таблиц 3, 4 видно, что данные численные методы могут не дать точного результата относительно значения, вычисленного аналитического (метод ПС сошелся к точке [0.6, 0.36], Хука-Дживса к [-2.0, 4.0]). Для получения более точного результата на сильно овражной функции следует пользоваться методом Розенброка.

Выбор точки сильно влияет на количество итераций и вычислений функции. Из   
таблицы 2 мы можем видеть, что функции Розенброка в начальных точках [0, 0] и [-10, 18] для метода ЦПС количество итераций отличается примерно в 7 раз, вычислений функции — в 7 раз, метода Хука-Дживса количество итераций отличается примерно в 22 раза, вычислений функции — в 33 раза, для метода Розенброка количество итераций отличается примерно в 4 раза, вычислений функции — в 4 раза. Так же для методов ЦПС и Хука-Дживса выбор точки влияет на полученное значение точки минимума: методы могут не сойтись к требуемой точке.

# 2. Лабораторная работа №7

## 2.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

* параметров точности поиска;
* начальной точки;
* выпуклости;
* овражности функции (параметра в функции Розенброка).

Используемые методы:

* регулярный симплекс
* нерегулярный симплекс

Целевые функции:

Заданная точность:

## 2.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Таблица 5 - Результаты вычислений для регулярного симплекса при начальной длине ребра l = 2 и коэффициенте редукции delta = 0.5 в зависимости от функции и точности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип функции** | **Начальная точка** | **Точность** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| Квадратичная функция | [-1, -2] | 0.01 | [-0.0, -2.27] | -45.00 | 14 | 12 |
| Квадратичная функция | [-1, -2] | 0.000001 | [0.0, -2.236068] | -45.000000 | 40 | 38 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-1, -2] | 0.01 | [0.86, 0.74] | 0.02 | 55 | 94 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-1, -2] | 0.000001 | [0.999976, 0.999952] | 0.000000 | 966 | 1890 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-1, -2] | 0.01 | [0.57, 0.32] | 0.19 | 15 | 14 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-1, -2] | 0.000001 | [0.99964, 0.999279] | 0.000000 | 8078 | 16114 |

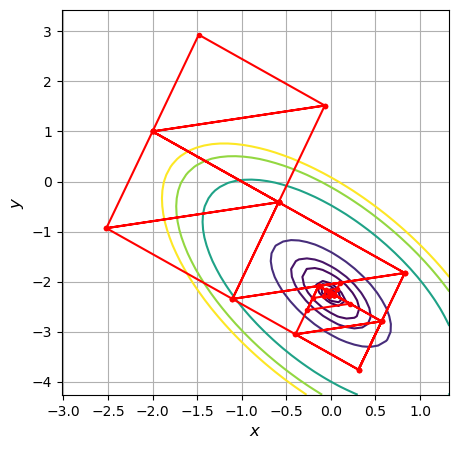
Таблица 6 - Результаты вычислений для нерегулярного симплекса при начальной длине ребра   
l = 2 и коэффициентах отражения alpha = 1, растяжения beta = 2, сжатия gamma = 0.5, редукции delta = 0.5 в зависимости от функции и точности

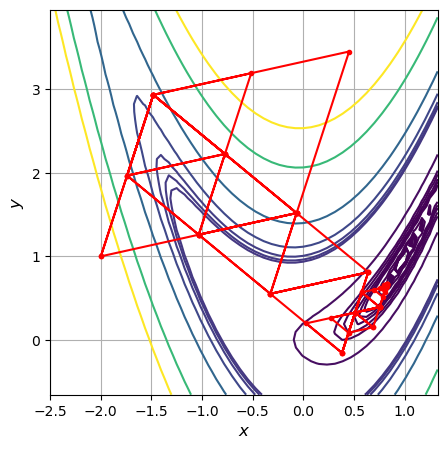
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип функции** | **Начальная точка** | **Точность** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| Квадратичная функция | [-1, -2] | 0.01 | [-0.0, -2.27] | -45.000000 | 13 | 120 |
| Квадратичная функция | [-1, -2] | 0.000001 | [0.000462, -2.236667] | -44.999999 | 28 | 250 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-1, -2] | 0.01 | [0.83, 0.68] | 0.03 | 19 | 170 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-1, -2] | 0.000001 | [0.999662, 0.998938] | 0.000001 | 60 | 530 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-1, -2] | 0.01 | [0.76, 0.57] | 0.06 | 17 | 150 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-1, -2] | 0.000001 | [0.999118, 0.998338] | 0.000001 | 158 | 1390 |

Таблица 7 - Результаты вычислений для функции Розенброка для регулярного симплекса и нерегулярного симплекса при начальной длине ребра l = 2, коэффициентах отражения alpha = 1, растяжения beta = 2, сжатия gamma = 0.5, редукции delta = 0.5 в зависимости от начальной точки

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Начальная точка** | **Метод** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| [-10, 1] | Регулярный симплекс | 27 | 38 |
| [-10, 1] | Нерегулярный симплекс | 26 | 228 |
| [-2, 5] | Регулярный симплекс | 15 | 14 |
| [-2, 5] | Нерегулярный симплекс | 57 | 500 |
| [-1, -2] | Регулярный симплекс | 15 | 14 |
| [-1, -2] | Нерегулярный симплекс | 17 | 150 |
| [0, 0] | Регулярный симплекс | 51 | 86 |
| [0, 0] | Нерегулярный симплекс | 26 | 230 |
| [10, 10] | Регулярный симплекс | 22 | 28 |
| [10, 10] | Нерегулярный симплекс | 71 | 628 |

Рисунок 7 - Визуализация метода регулярного симплекса при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)

а)

б)

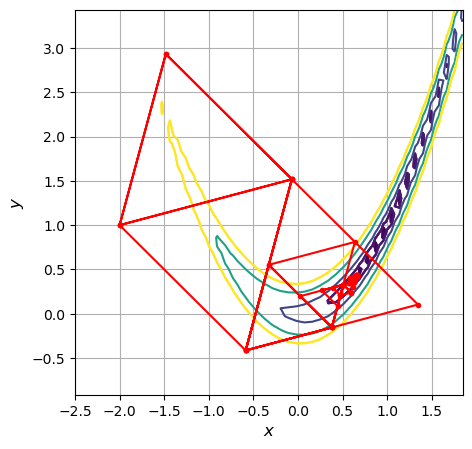
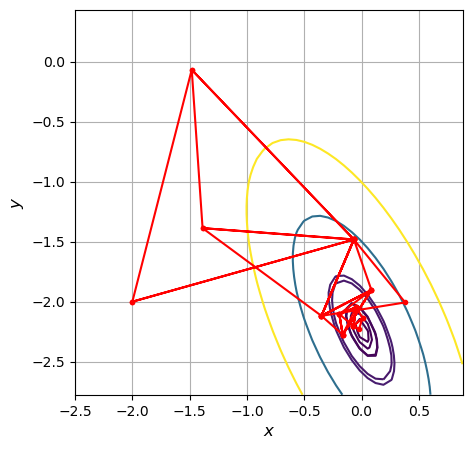
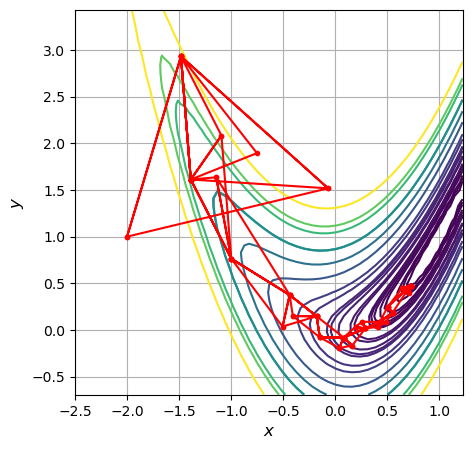
в)

Рисунок 8 - Визуализация метода нерегулярного симплекса при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)

а)

б)

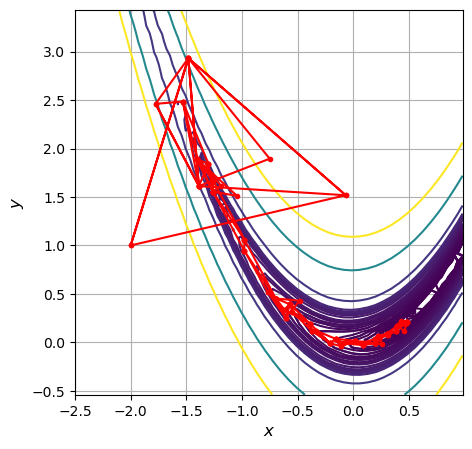
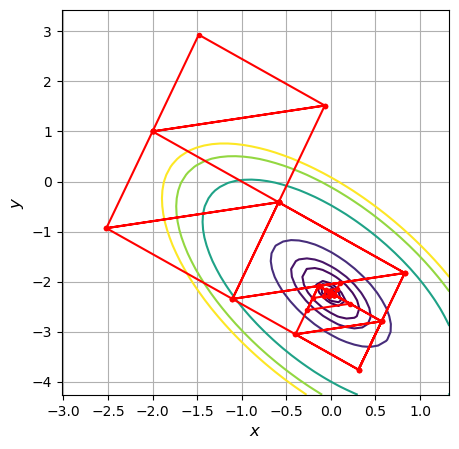
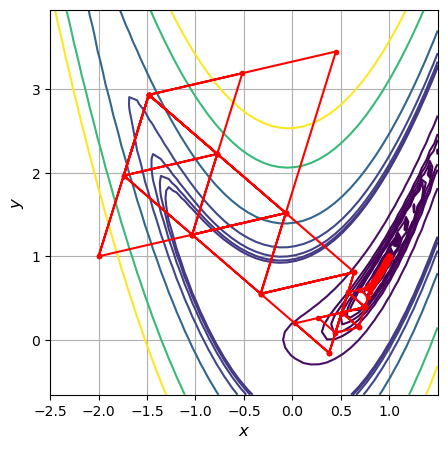
в)

Рисунок 9 - Визуализация метода регулярного симплекса при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)

а)

б)

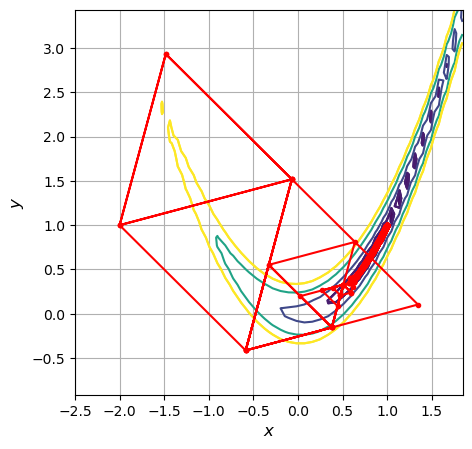
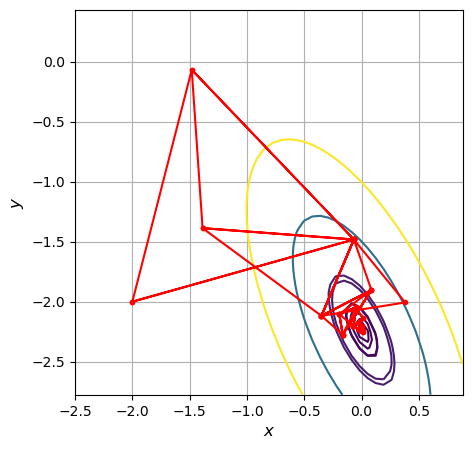
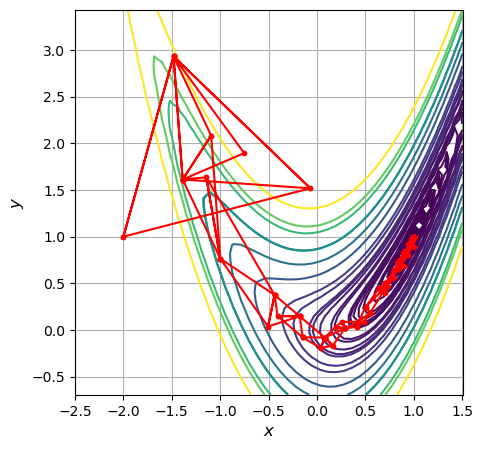
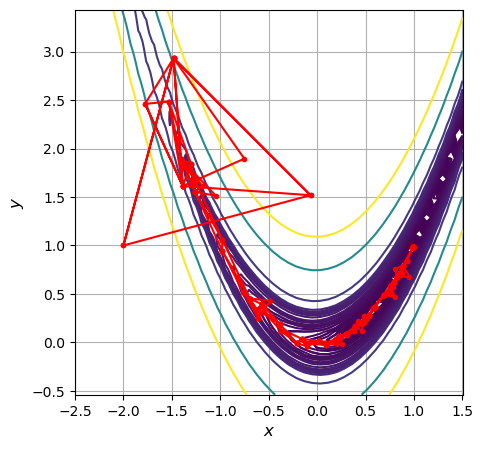
в)

Рисунок 10. Визуализация метода нерегулярного симплекса при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (alpha = 1), в) функции Розенброка (alpha = 50)

а)

б)

в)

## 2.3. Выводы

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы два метода:

* Регулярный симплекс,
* Нерегулярный симплекс (метод Нелдера-Мида).

Во всех методах с заранее заданной точностью были получены точка минимума и минимальное значение в этой точке.

Из таблиц 5, 6 видно, что при поиске точки минимума для квадратичной функции оба методы показывают хорошие результаты, но эффективнее оказался поиск с помощью регулярного симплекса, так как требовал меньшего количества вычислений функции, так как в случае нерегулярного симплекса много вычислений уходит на одномерную минимизацию.

При поиске точки минимума для функции Розенброка лучшие результаты оказались у метода нерегулярного симплекса: метод регулярного симплекса требовал меньшего числа вычисления функций при малой точности, но точку минимума выдавал не точно относительно аналитического решения (таблица 5: точка полученная точка [0.57, 0.32]). При увеличении точности результаты улучшаются для обоих методов (найденная точка ближе к теоретической: из таблиц 5, 6: [0.99964, 0.999279] — регулярный, [0.999118, 0.998338] — нерегулярный), но эффективнее использовать нерегулярный симплекс, т. к. число вычислений для него меньше, чем для регулярного (число вычислений отличается примерно в 11 раз).

Выбор точки влияет на число итераций и вычислений функции соответственно: чем дальше точка от минимума функции, тем соответственно больше итераций: т.к. требуется построить большее число симплексов (таблица 7).

К плюсами данных методов можно отнести то, что для их реализации не требуется находить градиенты или матрицы Гесса, а их поиск, в свою очередь, порой является весьма нетривиальной задачей.

# 3. Методы последовательной безусловной минимизации

## 3.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

* параметров точности поиска;
* начальной точки;
* выпуклости;
* овражности функции (параметра в функции Розенброка).

Используемые методы:

* метод внутренних штрафных функций;
* метод внешних штрафных функций.

Для каждой задачи искать решение в заданном допустимом множестве

* A:
* B:

Целевые функции:

Заданная точность:

## 3.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Таблица 8 - Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества A в зависимости от функции и точности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип функции** | **Начальная точка** | **Точность** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.01 | [0.0, 0.0] | -34.99 | 22 | 3891 |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.000001 | [0.0, 0.0] | -34.999999 | 49 | 17408 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.01 | [1.02, 1.04] | 0.00 | 12 | 4260 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.000001, 1.000001] | 0.000000 | 26 | 15492 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.01 | [1.95, 3.81] | 0.91 | 12 | 2068 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.000044, 1.000088] | 0.000000 | 26 | 15465 |

Таблица 9 - Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип функции** | **Начальная точка** | **Точность** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.01 | [0.0, -2.24] | -45.00 | 2 | 646 |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.000001 | [0.0, -2.236068] | -45.000000 | 2 | 646 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.01 | [1.0, 1.0] | 0.00 | 2 | 1441 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1656 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.01 | [1.0, 1.0] | 0.00 | 2 | 2492 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 2697 |

Таблица 10 - Результаты вычислений для метода внешних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Тип функции** | **Начальная точка** | **Точность** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.01 | [0.0, -2.24] | -45.00 | 2 | 646 |
| Квадратичная функция | [-2, 2] | 0.000001 | [0.0, -2.236068] | -45.000000 | 2 | 646 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.01 | [1.0, 1.0] | 0.00 | 2 | 1441 |
| Функция Розенброка,  a = 1 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1656 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.01 | [1.0, 1.0] | 0.00 | 2 | 2492 |
| Функция Розенброка,  a = 50 | [-2, 2] | 0.000001 | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 2697 |

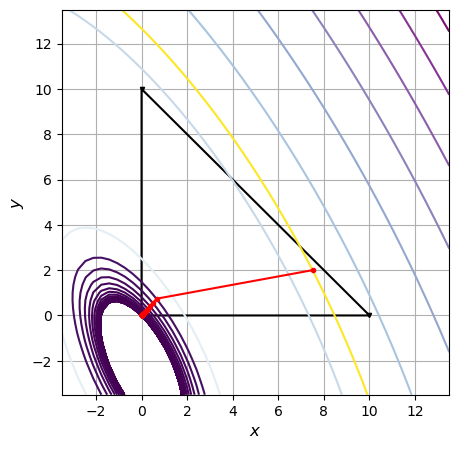
Таблица 11 - Результаты вычислений для функции Розенброка (a = 50) для методов внутренних и внешних штрафных функций на множестве A в зависимости от начальной точки

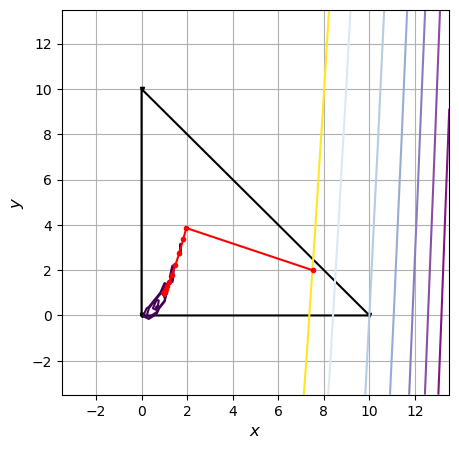
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Начальная точка** | **Метод** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| [-7, 0] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 273 | 59802 |
| [-7, 0] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1702 |
| [-2, 2] | Метод внутренних штрафных функций | [1.000044, 1.000088] | 0.000000 | 26 | 15465 |
| [-2, 2] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 3 | 2565 |
| [0.1, 0.1] | Метод внутренних штрафных функций | [1.000044, 1.000088] | 0.000000 | 26 | 15602 |
| [0.1, 0.1] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1798 |
| [4, 2.5] | Метод внутренних штрафных функций | [1.000044, 1.000088] | 0.000000 | 26 | 15411 |
| [4, 2.5] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1652 |
| [5, 2] | Метод внутренних штрафных функций | [1.000044, 1.000088] | 0.000000 | 26 | 15436 |
| [5, 2] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1595 |

Таблица 12 - Результаты вычислений для функции Розенброка (a = 50) для методов внутренних и внешних штрафных функций на множестве B в зависимости от начальной точки

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Начальная точка** | **Метод** | **Точка минимума функции** | **Значение функции в точке минимума** | **Количество итераций** | **Количество вычислений функции** |
| [-7, 0] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1735 |
| [-7, 0] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1735 |
| [-2, 2] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 2697 |
| [-2, 2] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 2697 |
| [0.1, 0.1] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1834 |
| [0.1, 0.1] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1834 |
| [4, 2.5] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1683 |
| [4, 2.5] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1683 |
| [5, 2] | Метод внутренних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1643 |
| [5, 2] | Метод внешних штрафных функций | [1.0, 1.0] | 0.000000 | 2 | 1643 |

Рисунок 11 - Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве А при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

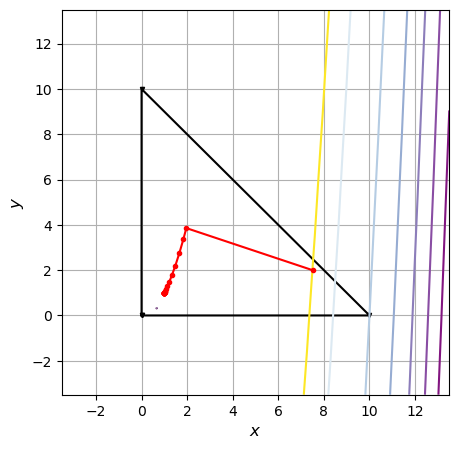
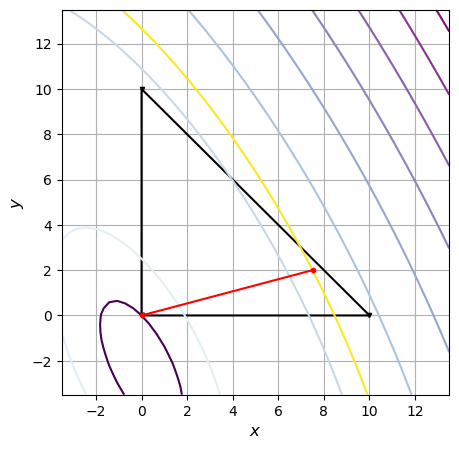
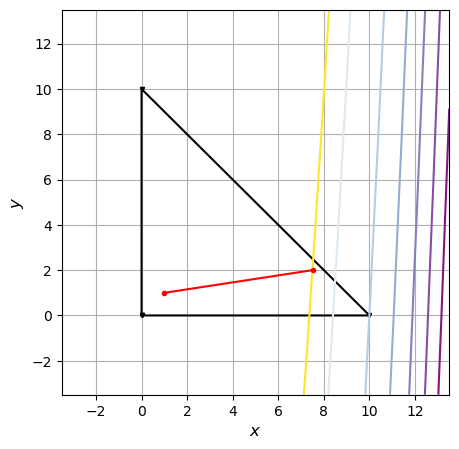
в)

Рисунок 12 - Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве А при eps = 0.01   
для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

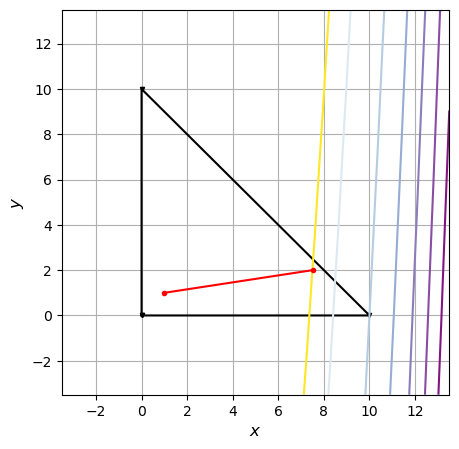
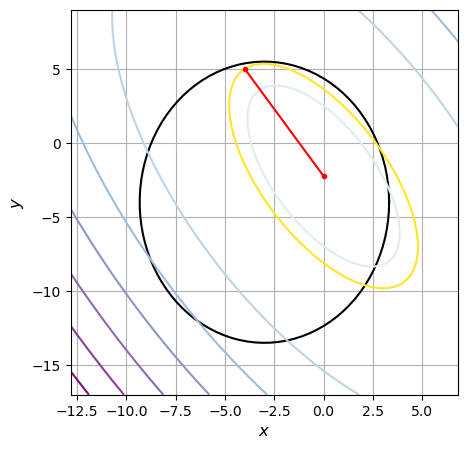
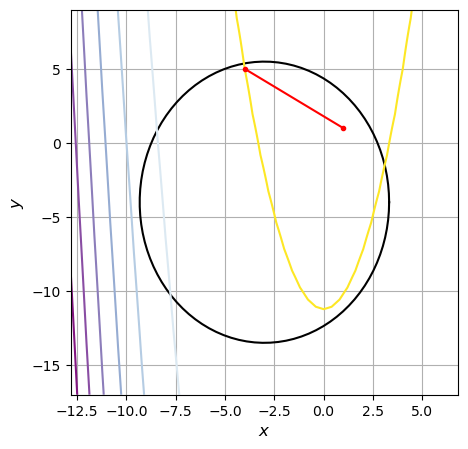
в)

Рисунок 13 - Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве B   
при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

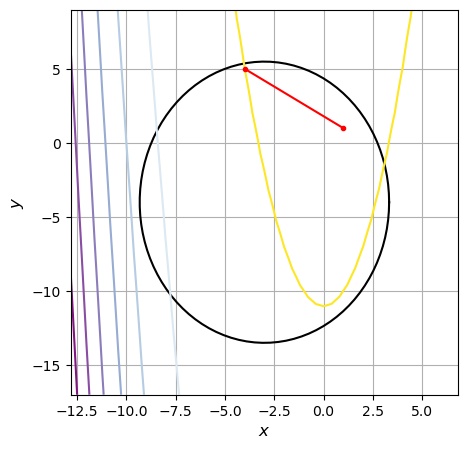
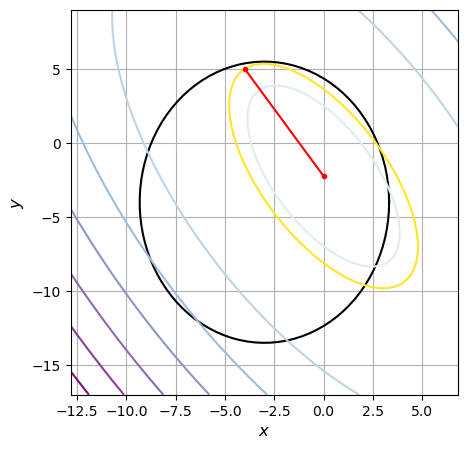
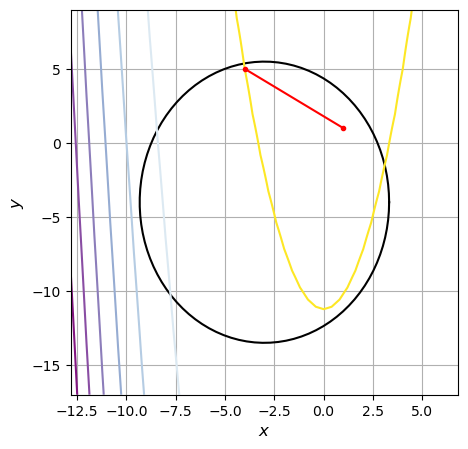
в)

Рисунок 14 - Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве B   
при eps = 0.01 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

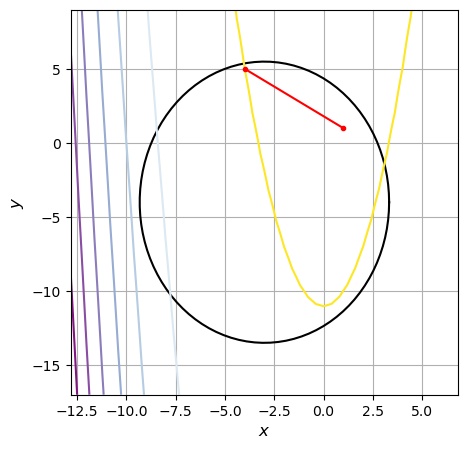
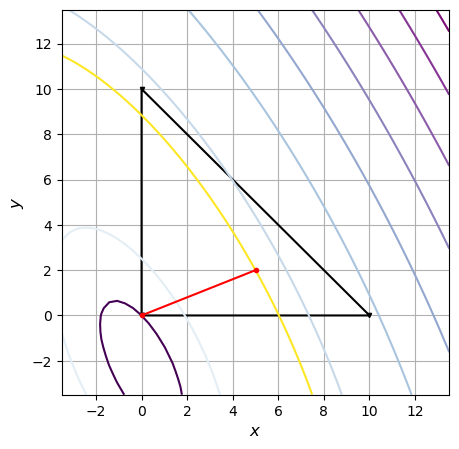
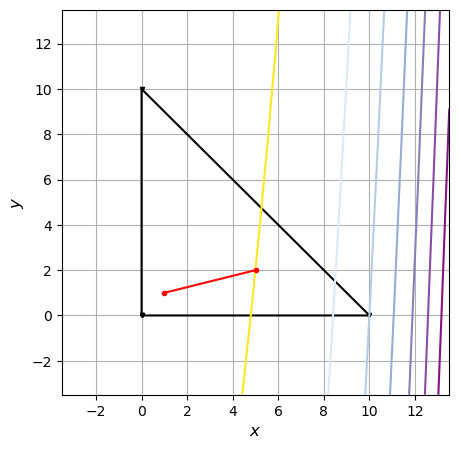
в)

Рисунок 15 - Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве А при eps = 0.01   
для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

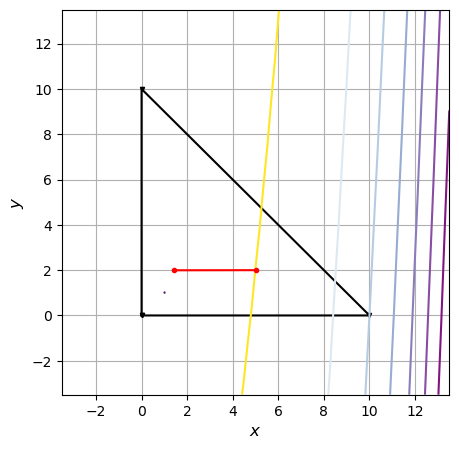
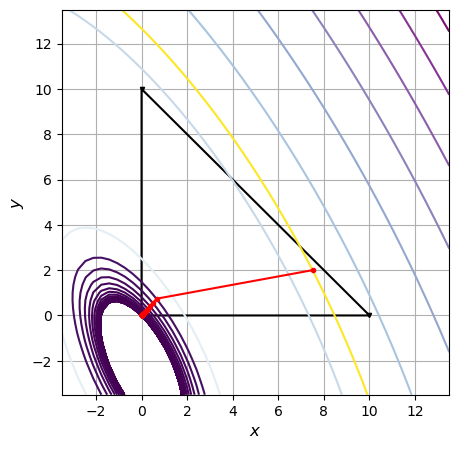
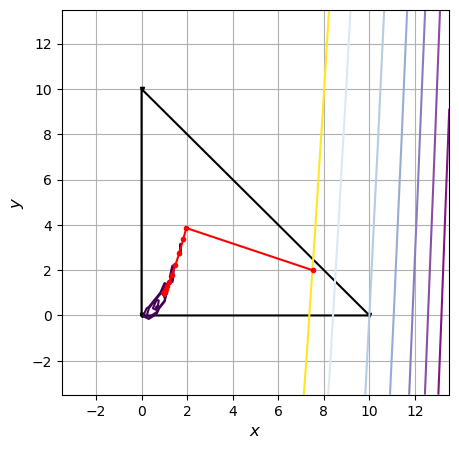
в)

Рисунок 16 - Визуализация метода внутренних штрафных функций на множестве А   
при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1),   
в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

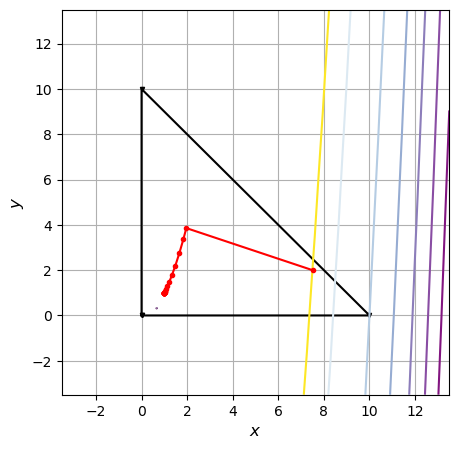
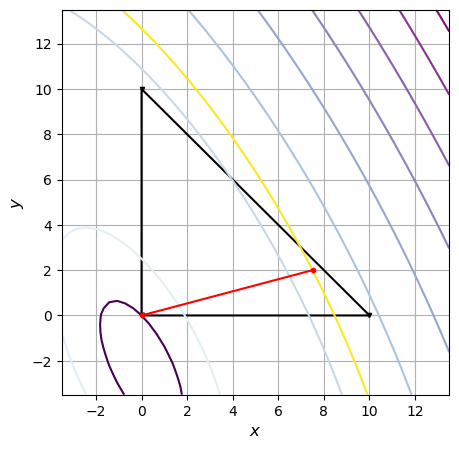
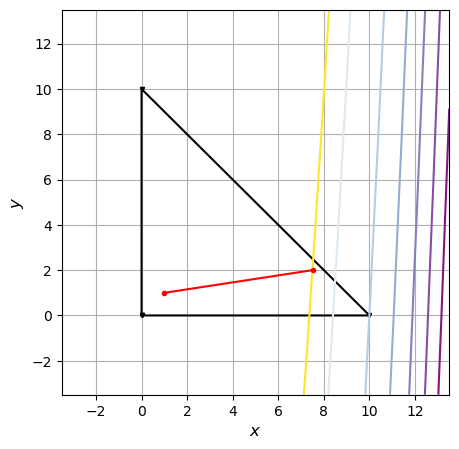
в)

Рисунок 17 - Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве A   
при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

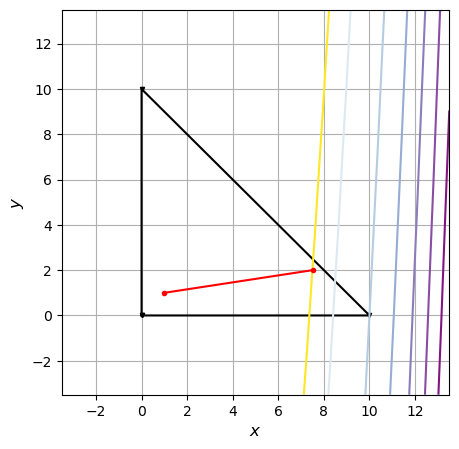
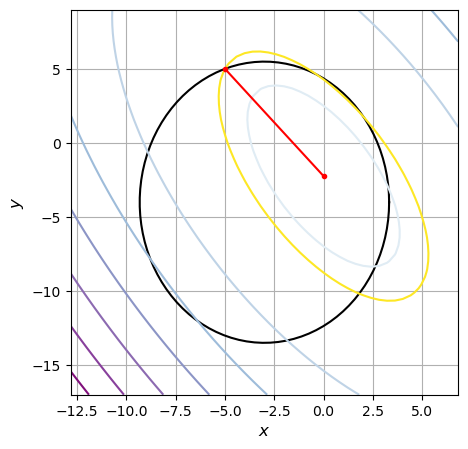
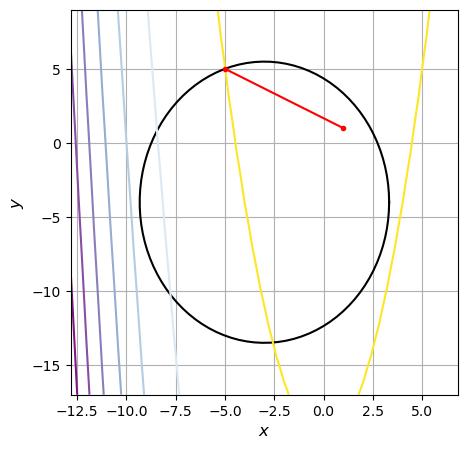
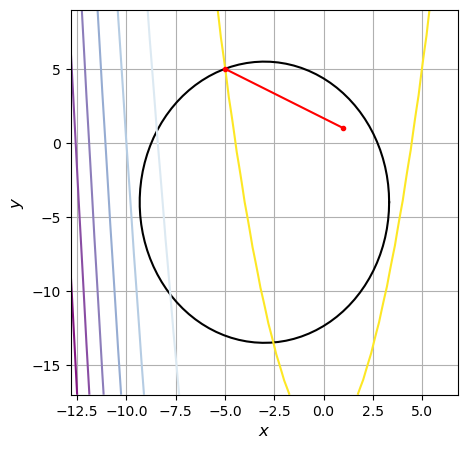
в)

Рисунок 18 - Визуализация метода внешних штрафных функций на множестве B   
при eps = 0.000001 для а) квадратичной функции, б) функции Розенброка (a = 1), в) функции Розенброка (a = 50)

а)

б)

в)

## 3.3. Вывод

Таким образом, в лабораторной работе по «методам последовательной безусловной минимизации» мы рассмотрели методы минимизации функции, заданной на допустимом множестве:

* метод внутренних штрафных функций;
* метод внешних штрафных функций.

Данные алгоритмы основаны на добавлении к основной функции функций штрафа. Принципиальная разница заключается в составлении этих самых штрафных функций. Для метода внешних функций они составлены таким образом, что сходимость решения не чувствительна к начальной точке (если начальная точка находится в области, то метод сходится за 2 итерации), в отличие от метода внутренних штрафов, для которых с изменением начальной точки может возрасти число вычислений функции (из таблицы 12, сравнивая точки [5, 2] и [0.1, 0.1], можно увидеть, что с изменением точки число вычисленных функций увеличилось примерно в 1,2 раза).

Для метода внутренних штрафных функций точность влияет на количество вычислений функции (при увеличении точности с 0.01 до 0.000001 итерации увеличились примерно в 2 раза, когда количество вычислений функции выросло в 5 раз). Для метода внешних штрафных функций на квадратичной функции повышение точности никак не повлияло на число итераций и вычислений функции, но на функции Розенброка хоть и число итераций не изменилось, но возросло количество вычислений функции — примерно в 1.2 раза (таблицы 9, 10).

В методах штрафных функций, для поиска минимума чистую заданную функцию для минимизации, а с некоторой добавкой. Для метода внешних штрафных функций внутри заданной области функция совпадает с исходной, а т. к. мы используем метод Розенброка, то метод сходится за 2 итерации.

# Общие выводы

По итогу выполнения лабораторных работ по курсу «Методы оптимизации» мною были изучены и реализованы в среде компьютерной алгебры следующие методы оптимизации: методы одномерной минимизации, методы градиентного спуска, метод циклического покоординатного спуска, симплекс-методы и методы безусловной оптимизации. Оптимизация проводилась для функций двух видов: квадратичная функция и функция Розенброка, которая имеет «овражную» структуру. Были выявлены плюсы и минусы различных методов. Например, для поиска минимума квадратичной функции метод Ньютона имеет наименьшее количество итераций, а именно всего одну итерацию. А для функции Розенброка эффективен метод Розенброка, который на каждой итерации строит новый ортогональный базис, благодаря чему находит оптимальное направление спуска.