Домашнее задание

Математика — Домашнее задание 1

А. Д. Егоров

2023 г.

Оглавление

1. Задача №1

Условие

Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 5, \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$. При каком коэффициенте α векторы $\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{q} = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Решение

Векторы должны быть перпендикулярны, т. е. $\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \dfrac{\pi}{2}$ или $\cos\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0$. Воспользуемся следующей формулой:

$$\cos\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{p}|\,|\boldsymbol{q}|}, \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 0.$$

Вычислим скалярное произведение $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\alpha\boldsymbol{a} + 17\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{a}) + (17\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a}) - (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (17\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$$
$$= 3\alpha|\boldsymbol{a}|^2 + (51 - \alpha)|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 17|\boldsymbol{b}|^2 = 0.$$

Выразим α:

$$\alpha(3|\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) = 17|\boldsymbol{b}|^2 - 51|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$
$$\alpha = \frac{17|\boldsymbol{b}|^2 - 51|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{(3|\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))}.$$

Подставляя числа из условия в полученную формулу для α, получим

Ответ: $\alpha = 40$.

2. Задача №2

Условие

Множество $\mathbf{G} = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \mid x_i \geqslant 0, i = \overline{1,n}\}$. Проверить является ли $\mathbf{G}$ линейным пространством (ЛП), если операции сложения и умножения определены следующим образом:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \ldots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \ldots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Решение

Возьмем элементы $x, y, z \in \mathbf{G}$. Операция суммирования (1) оставляет элемент в пространстве $\mathbf{G}$ (произведение положительных величин — положительная величина), так и умножение (1) оставляет элемент в пространстве $\mathbf{G}$ (возведение положительного числа в степень — положительное число). Проверим аксиомы ЛП:

1. Коммутативность операции сложения для $\mathbf{G}$ очевидна.
2. Ассоциативность операции сложения для $\mathbf{G}$ очевидна.
3. Нулевой элемент $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x})$ — вектор из единиц.
4. Для любого элемента найдется противоположный $(\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0})$ — вектор из нулей.
5. Проверим останется ли элемент u, определенный как $u = \beta(\alpha x + y)$, т. е. являющийся линейной комбинацией элементов из $\mathbf{G}$, в пространстве $\mathbf{G}$:

$$u = \beta(\alpha x + y) = \begin{pmatrix} (x_1^\alpha \cdot y_1)^\beta \\ (x_2^\alpha \cdot y_2)^\beta \\ \ldots \\ (x_n^\alpha \cdot y_n)^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha\beta} \cdot y_1^\beta \\ x_2^{\alpha\beta} \cdot y_2^\beta \\ \ldots \\ x_n^{\alpha\beta} \cdot y_n^\beta \end{pmatrix} = \beta\alpha x + \beta y.$$

Обозначим $u_i = (x_i^\alpha \cdot y_i)^\beta,\ i = \overline{1,n}$, рассмотрим данные элементы:

$$x_i^{\alpha\beta} \geqslant 0, y_i^\beta \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad u_i \geqslant 0,$$

получается, что

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,n} \quad \Rightarrow \quad u \in \mathbf{G}.$$

Линейная комбинация элементов из $\mathbf{G}$ не выводит элемент из простанства $\mathbf{G}$. Аксиомы линейного пространства выполнены, следовательно, $\mathbf{G}$ — линейное пространство.

3. Задача №3

Условие

Доказать, что для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и любых чисел α, β, γ вектора $\alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}$, $\gamma\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{z}$, $\beta\boldsymbol{z} - \gamma\boldsymbol{x}$ линейно зависимы.

Решение

Составим систему из данных векторов и попытаемся свести ее к единичной матрице:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & \gamma & -\alpha \\ -\gamma & 0 & \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha/\gamma \\ 1 & 0 & -\beta/\gamma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha/\gamma \\ 0 & \beta/\alpha & -\beta/\gamma \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha/\gamma \\ 0 & 1 & -\alpha/\gamma \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha/\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя строчка обнулилась, следовательно, для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и любых чисел α, β, γ векторы $\alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}$, $\gamma\boldsymbol{y} - \alpha\boldsymbol{z}$, $\beta\boldsymbol{z} - \gamma\boldsymbol{x}$ линейно зависимы.

4. Задача №4

Условие

Проверить является ли система векторов $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$ базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, и найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе. По известному координатному вектору $\boldsymbol{y}_e$ найти вектор $\boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{e}_1 = (-2, 3, 0)^T,\ \boldsymbol{e}_2 = (2, -3, 4)^T,\ \boldsymbol{e}_3 = (-2, 0, -3)^T,$$
$$\boldsymbol{x} = (-4, 3, 7)^T,\ \boldsymbol{y}_e = (4, 4, 3)^T.$$

Решение

Составим матрицу перехода к базису $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$ и линейными преобразованиями попытаемся свести ее к единичной:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$ действительно образуют базис в $\mathbb{R}^3$. Теперь разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{x}_e = A^{-1} \cdot \boldsymbol{x} = \left(\frac{7}{2},\ \frac{5}{2},\ 1\right)^T.$$

Найдем вектор $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y} = A \cdot \boldsymbol{y}_e = (-6,\ 0,\ 7)^T.$$

5. Задача №5

Условие

Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства $\mathbf{V}$, заданного следующим образом ($\mathbf{P}_n$ — пространство многочленов степени 4):

$$V = \{p(x) \in \mathbf{P}_4 \mid p(1) + p(-1) = 0\}$$

Решение

Любой многочлен $p(x) \in \mathbf{P}_4$ определен как

$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \zeta x^3 + \theta x^4,$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \zeta,\ \theta$ — независимые коэффициенты при соответствующих степенях многочлена. Базис в $\mathbf{P}_4$ задается множеством $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$. Следовательно, размерность пространства $\mathbf{P}_4$ равна 5.

Для пространства $\mathbf{V}$ необходимо, чтобы многочлен удовлетворял равенству: $p(1) + p(-1) = 0$. Подставим $p(x)$ в уравнение и упростим:

$$\begin{gathered} \alpha + \beta + \gamma + \zeta + \theta + \alpha - \beta + \gamma - \zeta + \theta = 0, \\ 2\alpha + 2\gamma + 2\theta = 0, \\ \alpha + \gamma + \theta = 0. \end{gathered}$$

Получается. что один из коэффициентов $\alpha,\ \gamma,\ \theta$ определяется через 2 других. Пусть θ будет зависимым коэффициентом, т. е.

$$\theta = \theta(\alpha, \gamma) = -(\alpha + \gamma).$$

Тогда многочлены $q(x)$, принадлежащие пространству $\mathbf{V}$, выглядят следующим образом:

$$q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \zeta x^3 - (\alpha + \gamma)x^4.$$

Перегруппируем относительно коэффициентов и окончательно получим

$$q(x) = \alpha(1 - x^4) + \beta x + \gamma(x^2 - x^4) + \zeta x^3. \tag{2}$$

Из (2) следует, что базис $\mathbf{V}$ можно задать множеством $\{1 - x^4,\ x,\ x^2 - x^4,\ x^3\}$ и размерность данного пространства равна 4.