Домашнее задание

Математика — Домашнее задание 3

А. Д. Егоров

2023 г.

Оглавление

1. Задача №1

Условие

Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс A (мало рискует), класс B (рискует средне), класс C (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у неё, 30% принадлежат классу A, 50% – классу B, 20% – классу C. Вероятность того, что в течение года водитель класса A попадёт хотя бы в одну автокатастрофу, равна 0,01; для водителя класса B эта вероятность равна 0,03, а для водителя класса C – 0,1. Мистер Джонс страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в автокатастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу A?

Решение

Пусть $H = \{$человек страхует машину и в течении года попадет в ДТП$\}$, а $H_i = \{$человек из i-ого класса страхует машину и в течении года попадет в ДТП$\}$. Получаем, что $P(H) = P(H_A) + P(H_B) + P(H_C) = 0.3 \cdot 0.01 + 0.5 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.038$. Тогда вероятность, что человек принадлежит классу A, при условии, что он попал в аварию, следующая:

$$\frac{P(H_A)}{P(H)} = \frac{0.003}{0.038} \approx 0.0789.$$

2. Задача №2

Условие

Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью исхода 1. Если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае - в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

Решение

Положим, что для того, чтобы дойти до точки m потребовалось сделать k шагов вправо и, соответственно, $n-k$ шагов влево. Также допустим, что точка m находится справа от точки 0, т. е. $k \geqslant n-k$, тогда $m = k-(n-k)$ или $k = \dfrac{n+m}{2}$. Тогда для того, чтобы найти вероятность попадания из точки 0 в точку m за n шагов, воспользуемся формулой вероятности для биномиального закона $Bi(n,p)$:

$$P(\{\text{из т. 0 в т. } m \text{ за } n \text{ шагов}\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} (1-p)^{\frac{n-m}{2}}.$$

Аналогично для случая, когда точка m слева от 0:

$$P(\{\text{из т. 0 в т. } m \text{ за } n \text{ шагов}\}) = C_n^{\frac{n-m}{2}} p^{\frac{n-m}{2}} (1-p)^{\frac{n+m}{2}}.$$

3. Задача №3

Условие

Плотность распределения $p(x)$ некоторой случайной величины имеет вид

$$p(x) = \frac{C}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

где С – константа. Найти значение этой константы с и вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\pi, \pi)$.

Решение

Для нахождения константы воспользуемся условием нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = 1,$$

отсюда получим, что $C = \dfrac{2}{\pi}$. Тогда вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\pi, \pi)$, будет следующая:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2/\pi}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\left(\mathrm{e}^{\pi}\right) - \mathrm{arctg}\left(\mathrm{e}^{-\pi}\right)\right) \approx 0.945013.$$

4. Задача №4

Условие

Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(2 < X < 3)$.

Решение

Из условия нормировки найдем константу A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \int_{1}^{4} A\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = 1,$$

отсюда $A = \dfrac{3}{14}$. Тогда функция распределения с. в. X имеет вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, \mathrm{d}y = \int_{1}^{x} \frac{3}{14}\sqrt{y}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{7}\left(x^{3/2} - 1\right),$$

а вероятность $P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \dfrac{1}{7}\left(3^{3/2} - 2^{3/2}\right)$.

5. Задача №5

Условие

При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1.5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

Решение

Число сбоев $\lambda = 1.5$, поток простейший (пуассоновский случайный процесс), тогда вероятность события $A = \{$в течении суток произойдет хотя бы 1 сбой$\}$, будет следующая:

$$P(A) = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.77687,$$

где X — случайная величина, отвечающая за число сбоев.