Домашнее задание

Математика — Домашнее задание 2

А. Д. Егоров

2023 г.

Оглавление

1. Задача №1

Условие

Найти обратную матрицы методом присоединённой матрицы (методом алгебраических дополнений):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Решение

Для нахождения обратной матрицы к матрице $\boldsymbol{A}$ методом алгебраических дополнений воспользуемся следующей формулой:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}^{*T}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A}^*$ — матрица алгебраических дополнений матрицы $\boldsymbol{A}$. Найдем определитель матрицы (1):

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19. \tag{3}$$

Найдем алгебраические дополнения A^*_{ij} (элементы в матрице $\boldsymbol{A}^*$):

$$A^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \widehat{\boldsymbol{A}}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где n — размер матрицы $\boldsymbol{A}$, $\widehat{\boldsymbol{A}}$ — матрица, полученная из матрицы $\boldsymbol{A}$ исключением i-ой строки и j-ого столбца. Считая, по формуле получим:

$$\begin{aligned} A^*_{11} &= 1, & A^*_{12} &= 9, & A^*_{13} &= -13, \\ A^*_{21} &= -1, & A^*_{22} &= 10, & A^*_{23} &= -25, \\ A^*_{31} &= -3, & A^*_{32} &= 11, & A^*_{33} &= -18, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 \\ -1 & 10 & -25 \\ -3 & 11 & -18 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Подставим (3), (5) в (2) и получим ответ:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}.$$

2. Задача №2

Условие

Решить матричное уравнение:

$$\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{B}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

Из (6) видно, что для того, чтобы выполнялось равенство, должно быть верно следующее:

$$\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{EB} = \boldsymbol{B},$$

где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица. Следовательно, $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$, т. е.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Находим обратную матрицу к $\boldsymbol{A}$ и получаем ответ:

$$\boldsymbol{X} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -5 & -8 & -7 \\ 2 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Задача №3

Условие

Найти ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ при различных значениях параметра λ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Линейными преобразованиями сведем матрицу $\boldsymbol{A}$ к верхнетреугольной матрице с единицами на диагонали (для строки с параметром λ нельзя выполнять элементарные преобразования, которые могут сократить параметр или возвести его в степень):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0 & -2 & -5 & -0.5 \\ 0 & 6 & 15 & 1.5 \\ 0 & 4-\lambda & 10-2\lambda & 1-1.5\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-2.5(4-\lambda)-2\lambda & 1-0.25(4-\lambda)-1.5\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{2} & -\dfrac{5\lambda}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если $\lambda = 0$, то $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 2$, в противном случае $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$.

4. Задача №4

Условие

Исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9, \end{cases}$$

Решение

Перепишем в матричном виде $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -6 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Составим совместную матрицу $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 3-\lambda & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Если $\lambda \neq 8$, то решение следующее:

$$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 8$. Продолжим преобразовывать систему:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

тогда решение имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2x_3, \\ x_2 = -1 - x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

5. Задача №5

Условие

Найти собственные значения и вектора для данной матрицы:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},$$

Решение

Найдем корни характеристического уравнения $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$, где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица, λ — параметр, относительно которого решается уравнение:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 3 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 = 0,$$

получим, что собственные значения для $\boldsymbol{A}$ следующие:

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Найдем собственные векторы $\boldsymbol{v}_i$, $i = \overline{1,3}$:

1. $\lambda_{1,2} = -1$:

$$\boldsymbol{A} - (-1)\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\boldsymbol{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2\,x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, пусть $x_3 = 1$, тогда $\boldsymbol{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $\lambda_3 = 3$:

$$\boldsymbol{A} - (3)\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & -2 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.5\,x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, пусть $x_3 = 2$, тогда $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Задача №6

Условие

Произвести сингулярное разложение матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -7/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -7/3 & -2/3 \\ -5/3 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Цель получить разложение $\boldsymbol{A}$ такое, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T$ Найдем матрицу $\boldsymbol{AA}^T$:

$$\boldsymbol{AA}^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем корни λ уравнения $\left|\boldsymbol{AA}^T - \lambda \boldsymbol{E}\right| = 0$, они будут следующие:

$$\lambda_1 = 16,\ \lambda_{2,3} = 4,\ \lambda_4 = 0.$$

Собственные векторы, соответствующие им:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, сингулярные значения (корни не нулевых собственных значений матрицы $\boldsymbol{AA}^T$) будут иметь вид

$$\sigma_1 = 4,\ \sigma_{2,3} = 2.$$

Пусть столбцы матрицы $\boldsymbol{U}$ — нормированные собственные векторы $\boldsymbol{AA}^T$:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix},$$

и тогда (для сохранения верного размера итоговой матрицы)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $\boldsymbol{U}$ ортогональная, то верно следующее:

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A})^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

После вычислений получим, что

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 1/3 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T, \quad \text{где}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 1/3 & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$