МТС

Домашнее задание

Математика — Домашнее задание 4

А. Д. Егоров

2023 г.

Оглавление

1. Задача №1

Условие

Правильная монетка подбрасывается до тех пор пока не выпадет n орлов подряд. Найти математическое ожидание необходимого числа бросков.

Решение

Пусть ξ_k — число бросков необходимых для k орлов подряд, p — вероятность выпадения орла, тогда запишем следующую формулу:

$$E\xi_k = p(E\xi_{k-1} + 1) + (1 - p)\left(E\xi_{k-1} + 1 + E\xi_k\right). \tag{1}$$

Рассмотрим данную формулу: для того, чтобы получить k орлов, необходимо до этого выбить $k-1$ орла и сделать еще один бросок. Отсюда в формуле появляется составляющая $E\xi_{k-1} + 1$. Логично, что при броске, следующим за $k-1$, может выпасть решка, тогда придется начинать процесс выбивания орла заново (отсюда прибавка $E\xi_k$ в третьей скобке). Вероятность успешного исхода равна p (вероятности выпадения орла), вероятность провала равна $1-p$, соответственно. Выразим $E\xi_k$ через $E\xi_{k-1}$:

$$E\xi_k = \frac{1}{p}(E\xi_{k-1} + 1).$$

Получилась рекурсивная формула. Подставим в нее значения $k = \overline{1,n}$:

$$E\xi_1 = \frac{1}{p}(E\xi_0 + 1) = \frac{1}{p},$$

т. к. мат. ожидание количества бросков для получения 0 орлов подряд равно 0,

$$E\xi_2 = \frac{1}{p}(E\xi_1 + 1) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p},$$
$$E\xi_3 = \frac{1}{p}(E\xi_2 + 1) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p},$$
$$\cdots,$$
$$E\xi_n = \frac{1}{p}(E\xi_{n-1} + 1) = \frac{1}{p^n} + \frac{1}{p^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Видно, что получается сумма геометрической прогрессии, и, так как монетка правильная, т. е. $p = \dfrac{1}{2}$, получим

$$E\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p^k} = \frac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p^n} - 1)}{\frac{1}{p} - 1} = 2(2^n - 1).$$

2. Задача №2

Условие

Авария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y, которая так же равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найти математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

Решение

X, Y — случайные величины, отвечающие за распределения точек X, Y. Из условия: $X \sim \mathrm{R}\,[0, L]$, $Y \sim \mathrm{R}\,[0, L]$, т. е. функции плотности распределения X, Y следующие: $f_X = f_Y = \dfrac{1}{L}$. Так как сказано, что X и Y являются независимыми случайными величинами, то верна следующая формула для функции плотности совместного распределения X, Y:

$$f_{XY} = f_X f_Y = \frac{1}{L^2}$$

Нас интересует расстояние между точками $|X - Y|$, а точнее его математическое ожидание $E|X - Y|$, найдем его:

$$E|X - Y| = \int_0^L \int_0^L |x - y| \frac{1}{L^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^L |x - y| \, \mathrm{d}y = \int_0^x (x - y) \, \mathrm{d}y + \int_x^L (y - x) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{L^2} - Lx + x^2,$$
$$\int_0^L \left(\frac{1}{L^2} - Lx + x^2 \right) \, \mathrm{d}x = \frac{L^3}{3}.$$

Подставим и получим

$$E|X - Y| = \frac{1}{L^2} \frac{L^3}{3} = \frac{L}{3}.$$

3. Задача №3

Условие

Таблица 1. Совместный закон распределения случайных величин X и Y

$X \backslash Y$	0	1	3
0	0.15	0.05	0.3
-1	0	0.15	0.1
-2	0.15	0	0.1

Найти:

- законы распределения случайных величин X, Y,
- EX, EY, DX, DY, cov(X, Y), corr(X, Y) а также EV, DV, где V = 6X − 4Y + 3.

Решение

Для нахождения частного закона распределения случайной величины X просуммируем значения в строках, а для Y суммируем значения в столбцах.

Таблица 2. Закон распределения случайной величины X

X	0	-1	-2
$P(X)$	0.5	0.25	0.25

Таблица 3. Закон распределения случайной величины Y

Y	0	1	3
$P(Y)$	0.3	0.2	0.5

Для нахождения мат. ожидания и дисперсии воспользуемся следующими формулами:

$$E\xi = \sum_{i=0}^{n} p(\xi_i)\xi_i, \quad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=0}^{n} p(\xi_i)\xi_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} p(\xi_i)\xi_i\right)^2,$$

где ξ — случайная величина, ξ_i — значение этой случайной величины. Для случайных величин X и Y получим

$$EX = -1 \cdot 0.25 - 2 \cdot 0.25 = -0.75, \quad DX = 1 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.25 - (0.75)^2 = 0.6875,$$

$$EY = 1.7, \quad DY = 1.81.$$

Найдем ковариацию и коэффициент корреляции:

$$cov(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY), \quad corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}},$$

$$EXY = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} p_{ij}X_iY_j = 1 \cdot (-1) \cdot 0.15 + 3 \cdot (-1) \cdot 0.1 + 3 \cdot (-2) \cdot 0.1 = -1.05,$$

$$cov(X,Y) = -1.05 - (-0.75) \cdot 1.7 = 0.225,$$

$$corr(X,Y) = \frac{0.225}{\sqrt{0.6875}\sqrt{1.81}} = 0.2017.$$

Теперь найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины V:

$$EV = E(6X - 4Y + 3) = 6EX - 4EY + 3 = -8.3,$$

$$DV = D(6X - 4Y + 3) = D(6X - 4Y) = D(6X) + D(4Y) - 2cov(6X, 4Y) =$$

$$= 36D(X) + 16D(Y) - 48cov(X,Y) = 36 \cdot 0.6875 + 16 \cdot 1.81 - 48 \cdot 0.225 = 42.91.$$

4. Задача №4

Условие

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты n независимых повторных наблюдений над дискретной случайной величиной ξ, принимающей значения из множества $\Upsilon = \{0, 1\}$ с вероятностями:

$$P(\xi = 0) = \frac{1-\theta}{2}, \quad P(\xi = 1) = \frac{1+\theta}{2}, \quad -1 < \theta < 1.$$

Найти оценку максимального правдоподобия (МП) для θ.

Решение

Имеем закон распределения $Bern(\frac{1-\theta}{2})$, с учетом, что было проведено n испытаний, функция максимального правдоподобия будет следующая:

$$L(\underline{x}, \theta) = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{\sum_{j=1}^{n} x_j} \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{n-\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

прологарифмируем и получим

$$\ln L(\underline{x}, \theta) = \sum_{j=1}^{n} x_j \ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + (n - \sum_{j=1}^{n} x_j) \ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right).$$

Продифференцируем по θ и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial \ln L(\underline{x}, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{2}{1-\theta}\right) + \frac{1}{2}(n - \sum_{j=1}^{n} x_j) \left(\frac{2}{1+\theta}\right) = 0,$$

отсюда получим, что $\theta_{ML} = 1 - 2\overline{x}$.

5. Задача №5

Условие

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты n независимых повторных наблюдений над случайной величиной ξ, плотность распределения которой имеет вид

$$f(x,\,\theta) = pf_1(x,\,\theta) + (1-p)f_2(x,\,\theta),$$

$$f_1(x,\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x \leqslant \theta, \\ 0, & else, \end{cases} \qquad f_2(x,\,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta < x \leqslant 1, \\ 0, & else, \end{cases}$$

Найти оценки неизвестных параметров p, θ методом моментов.

Решение

Найдем истинные моменты первого и второго порядка:

$$X^1 = \int_0^1 f(x,\theta)\,\mathrm{d}x = p\int_0^\theta f_1(x,\theta)\,\mathrm{d}x + (1-p)\int_\theta^1 f_2(x,\theta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-p+\theta),$$

$$X^2 = \int_0^1 x^2 f(x,\theta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+\theta+\theta^2 - p(1+\theta)),$$

приравняем их к соответствующим им выборочным моментам:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(1-p+\theta) = \overline{X}, \\ \dfrac{1}{3}(1+\theta+\theta^2-p(1+\theta)) = \overline{X^2}, \end{cases}$$

— система из 2-х уравнений и 2-х неизвестных, решив ее, получим ответ:

$$p = \frac{1-2\overline{X}+4\overline{X}^2-3\overline{X^2}}{1-2\overline{X}}, \quad \theta = \frac{2\overline{X}-3\overline{X^2}}{1-2\overline{X}}.$$