Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ №7, 8

НА ТЕМУ:

Симплекс — метод и методы последовательной безусловной минимизации

Студент ФН2-52Б (Группа) — (Подпись, дата) — А. М. Бобрун (И. О. Фамилия)

Преподаватель — (Подпись, дата) — А. В. Чередниченко (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

1. Лабораторная работа №7 3

1.1. Постановка задачи 3

1.2. Тестовые примеры и результаты расчетов 4

1.3. Выводы 8

2. Лабораторная работа №8 9

2.1. Постановка задачи 9

2.2. Тестовые примеры и результаты расчетов 10

2.3. Выводы 19

Список использованных источников 20

1. Лабораторная работа №7

1.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума и минимальное значение целевой функции. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

- параметров точности поиска;
- начальной точки;
- выпуклости;
- овражности функции (параметра α в функции Розенброка).

Используемые методы:

- регулярный симплекс;
- нерегулярный симплекс (метод Нелдера-Мида).

Целевые функции:

- $f_1(x, y) = 6x^2 - 4xy + 4\sqrt{5}(x + 2y) + 3y^2 + 22$;
- $f_2(x, y) = \left(x^2 - y\right)^2 + (x - 1)^2$;
- $f_3(x, y) = 75\left(x^2 - y\right)^2 + (x - 1)^2$.

Заданная точность:

- $\varepsilon = 0.01$;
- $\varepsilon = 0.000001$.

1.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Входные данные	Точка минимума	Наименьшее значение функции	Количество итераций	Количество вычисленных функций
Квадратичная функция, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = -2.23$ $y = -4.45$	-28	19	22
Квадратичная функция, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = -2.23607$ $y = -4.47213$	-28	32	28
Функция Розенброка $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.98$ $y = 0.96$	0	21	26
Функция Розенброка $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.999994$ $y = 0.999987$	0	180	318
Функция Розенброка $\alpha = 75$, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.66$ $y = 0, 44$	0.1	19	22
Функция Розенброка $\alpha = 75$, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.999459$ $y = 0.998917$	0	11304	22566

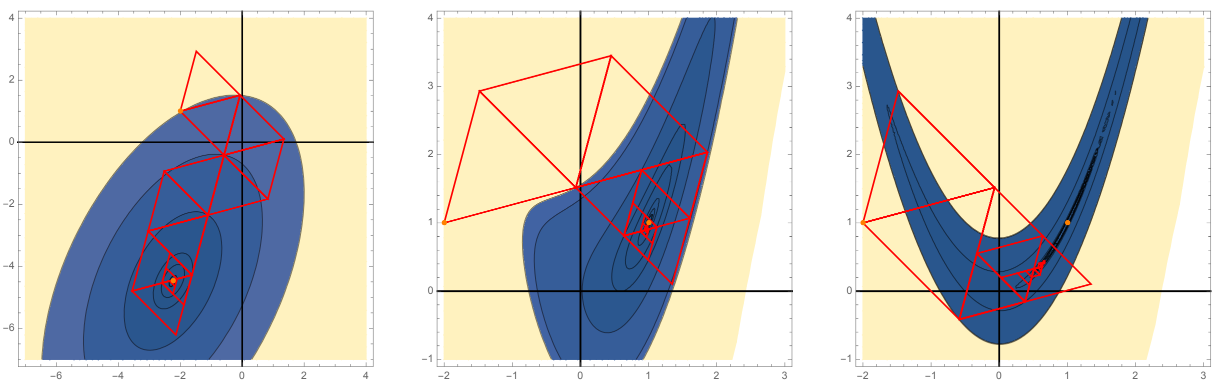
Таблица 1. Результаты вычислений для регулярного симплекса при начальной длине ребра $l = 2$ и коэффиценте редукции $\delta = \frac{1}{2}$ в зависимости от функции и точности

Входные данные	Точка минимума	Наименьшее значение функции	Количество итераций	Количество вычисленных функций
Квадратичная функция, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = -2.23$ $y = -4.45$	-28	18	96
Квадратичная функция, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = -2.23609$ $y = -4.47311$	-28	30	162
Функция Розенброка $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 1.01$ $y = 1.01$	0	15	84
Функция Розенброка $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 1.00026$ $y = 1.00115$	0	36	192
Функция Розенброка $\alpha = 75$, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.75$ $y = 0,56$	0.06	55	294
Функция Розенброка $\alpha = 75$, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 1]$	$x = 0.981937$ $y = 0.964099$	0.0	124	654

Таблица 2. Результаты вычислений для нерегулярного симплекса при начальной длине ребра $l = 2$, коэффицентах отражения $\alpha = 1$, растяжения $\beta = 2$, сжатия $\gamma = 1/2$, редукции $\delta = \frac{1}{2}$ в зависимости от функции и точности

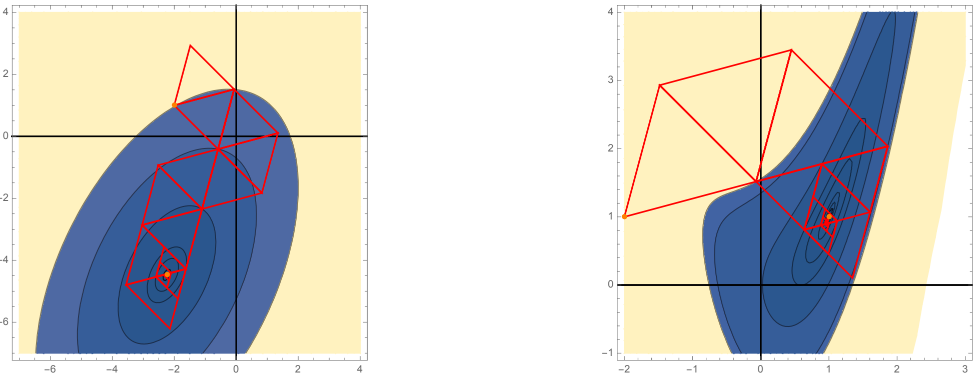
Начальная точка	$[-2, 1]$	$[-2, 10]$	$[-10, 1]$	$[10, 10]$	$[0, 0]$
	Метод регулярного сиплекса				
Количество итераций	21	335	41	544	22
Количество вычисленых функций	26	654	66	1072	28
	Метод нерегулярного сиплекса				
Количество итераций	15	27	37	35	10
Количество вычисленых функций	84	144	196	184	54

Таблица 3. Результаты вычислений для функции Розенброка $f_2(x, y)$ для регулярного симплекса и нерегулярного симплекса при начальной длине ребра $l = 2$, коэффицентах отражения $\alpha = 1$, растяжения $\beta = 2$, сжатия $\gamma = 1/2$, редукции $\delta = \frac{1}{2}$ в зависимости от начальной точки



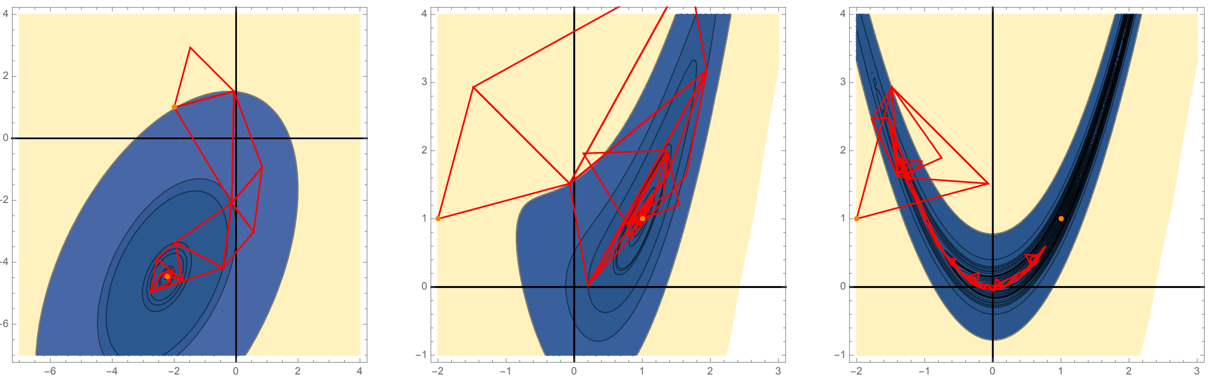
а) б) в)

Рис. 1. Визуализация метода регулярного симплекса при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



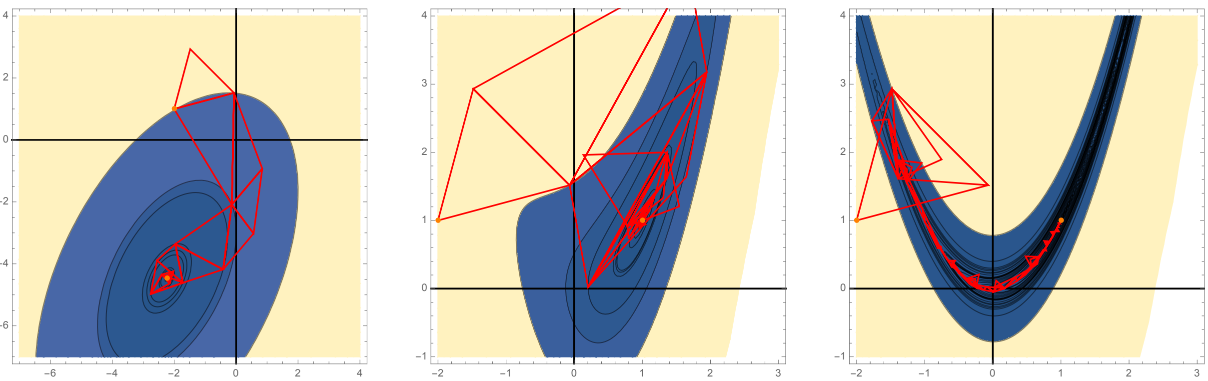
а) б)

Рис. 2. Визуализация метода регулярного симплекса при $\varepsilon = 0.000001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$



а) б) в)

Рис. 3. Визуализация метода нерегулярного симплекса при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



а) б) в)

Рис. 4. Визуализация метода нерегулярного симплекса при $\varepsilon = 0.00001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$

1.3. Выводы

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы два метода:

- Регулярный симплекс,
- Нерегулярный симплекс (метод Нелдера-Мида).

Во всех методах с заранее заданной точностью были получены точка минимума и минимальное значение в этой точке.

При поиске точки минимума для квадратичной функции оба методы показывают хорошие результаты, но эффективнее оказался поиск с помощью регулярного симплекса, так как требовал меньшего количества вычислений функции, так как случае нерегулярного симплекса много вычислений уходит на одномерную минимизацию. При поиске точки минимума для функции Розенброка лучшие результаты у метода нерегулярного симплекса: метод регулярного симплекса требовал меньшего вычисления функций при малой точности, но при увеличении точности гораздо эффективнее было использование нерегулярного симплекса.

К плюсами данных методов можно отнести то, что для их реализации не требуется находить градиенты или матрицы Гесса, а их поиск, в свою очередь, порой является весьма нетривиальной задачей.

2. Лабораторная работа №8

2.1. Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо найти с заданной точностью точку минимума, принадлежащей заданному допустимому множеству, и минимальное значение целевой функции в ней. При исследовании для каждой функции брать два параметра точности поиска. Также для каждой функции и каждого параметра точности поиска взять две различные начальные точки. Выявить влияние на стоимость методов (количество вычисленных значений целевой функции)

- параметров точности поиска;
- начальной точки;
- выпуклости;
- овражности функции (параметра α в функции Розенброка).

Используемые методы:

- метод внутренних штрафных функций (барьерных функций);
- метод внешних штрафных функций.

Целевые функции:

- $f_1(x, y) = 6x^2 - 4xy + 4\sqrt{5}(x + 2y) + 3y^2 + 22$;
- $f_2(x, y) = \left(x^2 - y\right)^2 + (x - 1)^2$;
- $f_3(x, y) = 75\left(x^2 - y\right)^2 + (x - 1)^2$.

Заданная точность:

- $\varepsilon = 0.01$;
- $\varepsilon = 0.000001$.

Заданное допустимое множество:

- $A: \quad x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geqslant 10$;
- $B: \quad \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} \leq 10$.

2.2. Тестовые примеры и результаты расчетов

Входные данные	Точка min.	Min. значение	Кол. итераций	Колличество вычисленний		
				функций	градиентов	матриц Гессе
Квад. ф., $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.002$ $y = 0.001$	22.06	20	21	97	97
Квад. ф., $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.002608$ $y = 0.001847$	22.5646	20	21	118	118
Ф. Розенброка 1 , $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1.01$ $y = 1.02$	0	14	15	49	49
Ф. Розенброка 1, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1.00009$ $y = 1.00021$	0	20	21	77	77
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1.01$ $y = 1.02$	0	14	15	82	82
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1.00009$ $y = 1.00018$	0	20	21	124	124

Таблица 4. Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества A в зависимости от функции и точности

Входные данные	Точка min.	Min. значение	Кол. итераций	Колличество вычисленний		
				функций	градиентов	матриц Гессе
Квад. ф., $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = -2.23$ $y = -4.47$	-28	10	11	6	6
Квад. ф., $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = -2.23607$ $y = 4.47214$	-28	20	21	20	20
Ф. Розенброка 1 , $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.98$ $y = 0.97$	0	11	12	19	19
Ф. Розенброка 1, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.999988$ $y = 0.999972$	0	20	21	44	44
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.98$ $y = 0.97$	0	11	12	33	33
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.999988$ $y = 0.999975$	0	20	21	64	64

Таблица 5. Результаты вычислений для метода внутренних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

Входные данные	Точка min.	Min. значение	Кол. итераций	Колличество вычисленний		
				функций	градиентов	матриц Гессе
Квад. ф., $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = -0.0002$ $y = -0.0005$	21.98	10	11	11	11
Квад. ф., $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0$ $y = 0$	22	23	24	24	24
Ф. Розенброка 1 , $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.99$ $y = 0.99$	0	2	3	5	5
Ф. Розенброка 1, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	7	7
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 0.99$ $y = 0.99$	0	2	3	11	11
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	12	12

Таблица 6. Результаты вычислений для метода внешних штрафных функций и для допустимого множества A в зависимости от функции и точности

Входные данные	Точка min.	Min. значение	Кол. итераций	Колличество вычисленний		
				функций	градиентов	матриц Гессе
Квад. ф., $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = -2.23$ $y = -4.47$	-28	2	21	1	1
Квад. ф., $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = -2.23607$ $y = -4.447214$	-28	2	3	1	1
Ф. Розенброка 1 , $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	6	6
Ф. Розенброка 1, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	7	7
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.01$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	5	5
Ф. Розенброка 75, $\varepsilon = 0.000001$, $[x, y] = [-2, 2]$	$x = 1$ $y = 1$	0	2	3	5	5

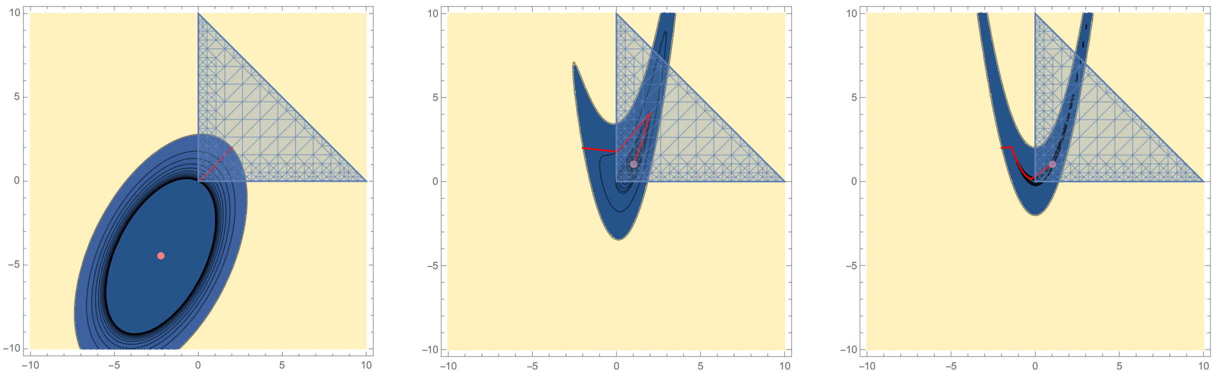
Таблица 7. Результаты вычислений для метода внешних штрафных функций и для допустимого множества B в зависимости от функции и точности

Начальная точка	$[-2, 2]$	$[2, 4]$	$[2, 2]$
Количество	Метод внутренних штрафных функций на A		
Итераций	14	14	14
Вычисленных функций	15	15	15
Вычисленных градиентов	49	23	25
Вычисленных матриц Гессе	49	23	25
Количество	Метод внешних штрафных функций на A		
Итераций	2	2	2
Вычисленных функций	3	3	3
Вычисленных градиентов	5	2	4
Вычисленных матриц Гессе	5	2	4

Таблица 8. Результаты вычислений для функции Розенброка $f_2(x, y)$ для методов внутренних и внешних штрафных функций на допустимом множестве A в зависимости от начальной точки

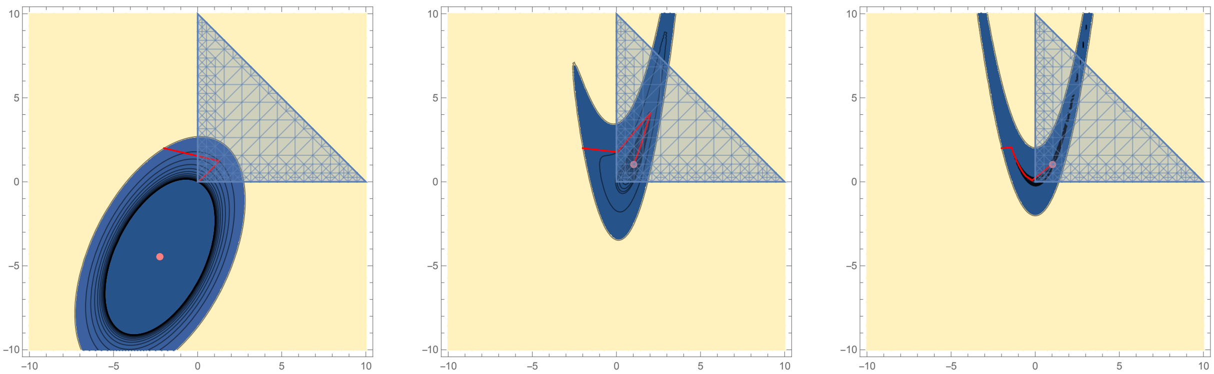
Начальная точка	$[-2, 2]$	$[2, 4]$	$[2, 2]$
Количество	Метод внутренних штрафных функций на B		
Итераций	11	11	11
Вычисленных функций	12	12	12
Вычисленных градиентов	19	25	32
Вычисленных матриц Гессе	19	25	32
Количество	Метод внешних штрафных функций на B		
Итераций	2	2	2
Вычисленных функций	3	3	3
Вычисленных градиентов	6	8	7
Вычисленных матриц Гессе	6	8	7

Таблица 9. Результаты вычислений для функции Розенброка $f_2(x, y)$ для методов внутренних и внешних штрафных функций на допустимом множестве B в зависимости от начальной точки



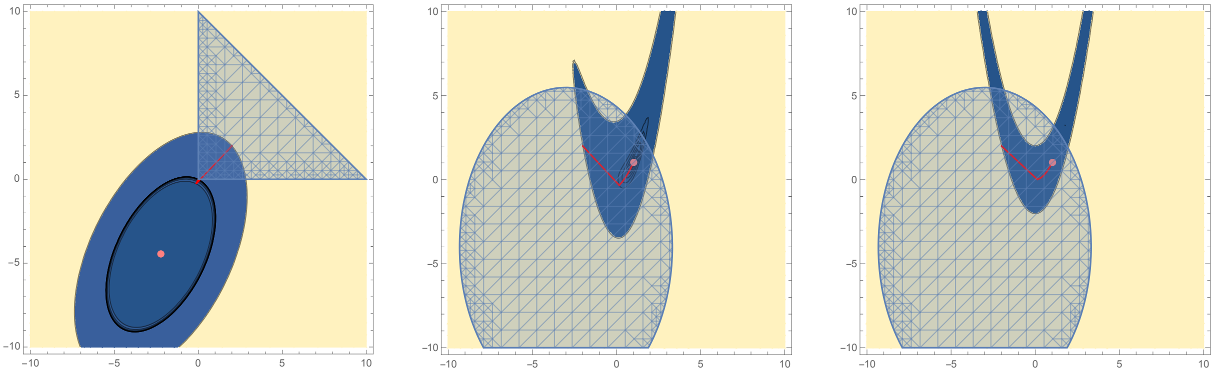
а) б) в)

Рис. 5. Визуализация метода внутренних штрафных функций на допустимом множестве A при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



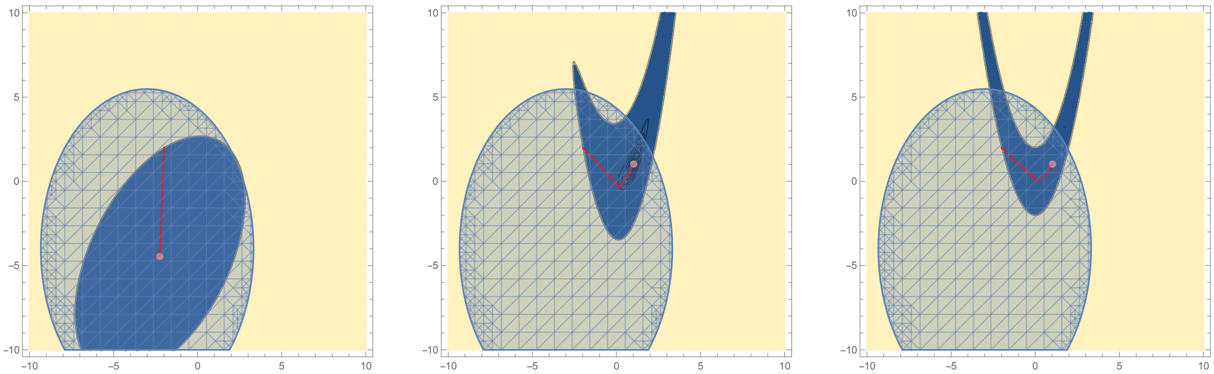
а) б) в)

Рис. 6. Визуализация метода внутренних штрафных функций на допустимом множестве A при $\varepsilon = 0.000001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



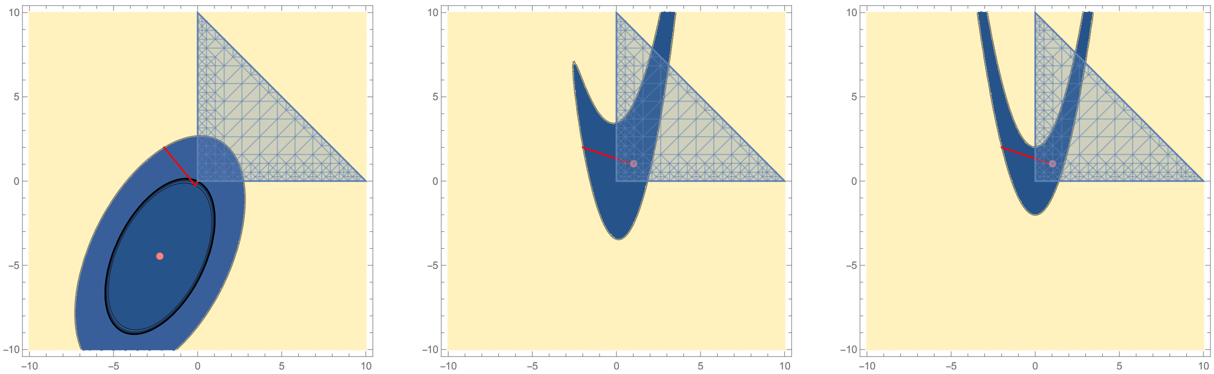
а) б) в)

Рис. 7. Визуализация метода внутренних штрафных функций на допустимом множестве B при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



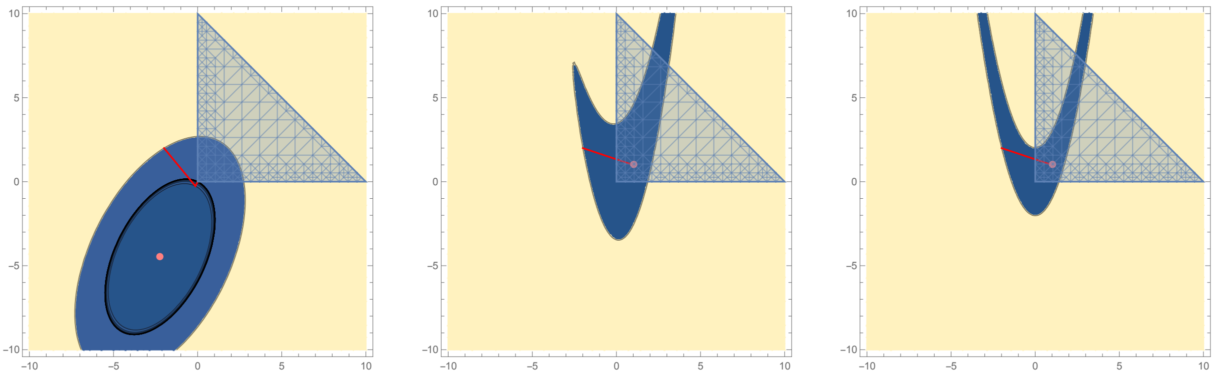
а) б) в)

Рис. 8. Визуализация метода внутренних штрафных функций на допустимом множестве B при $\varepsilon = 0.000001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



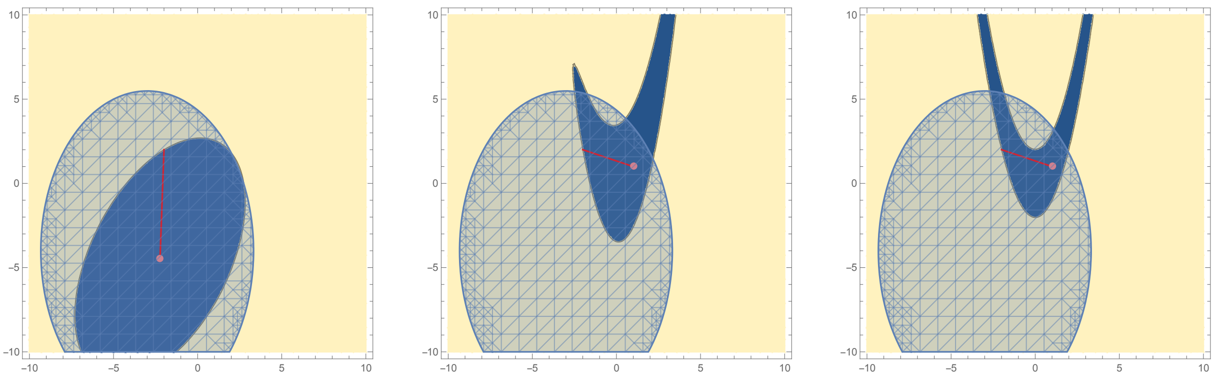
а) б) в)

Рис. 9. Визуализация метода внешних штрафных функций на допустимом множестве A при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



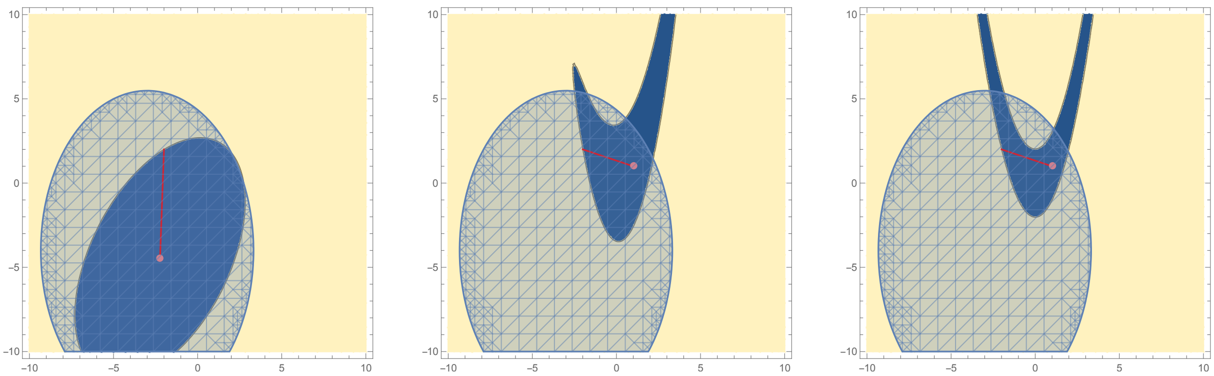
а) б) в)

Рис. 10. Визуализация метода внешних штрафных функций на допустимом множестве A при $\varepsilon = 0.000001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



а) б) в)

Рис. 11. Визуализация метода внешних штрафных функций на допустимом множестве B при $\varepsilon = 0.01$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$



а) б) в)

Рис. 12. Визуализация метода внешних штрафных функций на допустимом множестве B при $\varepsilon = 0.000001$ для а) квадратичной функции $f_1(x, y)$, б) функции Розенброка $f_2(x, y)$ в) функции Розенброка $f_3(x, y)$

2.3. Выводы

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы два метода:

- Метод внутренних штрафных функций (барьерных функций);
- Метод внешних штрафных функций.

Во всех методах с заранее заданной точностью были получены точка минимума и минимальное значение в этой точке. В случае нахождения точки минимума функции внутри допустимого множества поиска алгоритмы быстро к ней сходятся. Метод внешних штрафных функций сходится даже быстрее, так как исследуемая функция не меняется в допустимой области. В случае нахождения точки минимума функции за границей допустимого множества алгоритмы сходятся медленнее к наименьшей точке на границе. При этом метод внутренних штрафных функций сходится изнутри области, а внешних — снаружи. Первая итерация методов делает большой шаг в сторону точки минимума, а следующие уточняют её положение с изменением штрафной функции.

Список использованных источников

1. Аттетков А. В. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В.С. Зарубин – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.