$\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-LaTeX

NIELSEN

SAN

Abstract. a

1. 0

Grupos propiamente discontinuos de transformaciones fraccionales lineales con círculo principal en el sentido de la teoría de automorfismos.

transformaciones en el plano hiperbólico, caracterización de grupos discontinuos de los anteriores.

Las lineas rectas y ángulos se trataran como en el sentido de poincaré.

Todas las cosecuencias geométricas se entenderan en el sentido no-euclidio.

Utilizaremos el modelo del disco de Poincaré S^1 cuyo interior le denominaremos D y cuya frontera le denominaremos E.
Se llamarán puntos finales a los extremos de una recta situados en el círculo infinito.

Identificaremos tres tipos de relaciones entre las rectas, a saber, concurrentes, paralelas y divergentes.

Las rectas `paralelas` son dos rectas que tienen un punto final en común.

Las rectas `concurrentes` son las que se intersectan en D.

Las rectas `divergentes` son las que no se intersectan en nigun lugar.

Dibujos

Los `orociclos` son circulos tangeentes a algún punto en la frontera E de S^1. Estos no son geodésicas.

Los `hiperciclos` se forman dada una recta L y un punto $\mathbf{P}$ fuera de ella se considera el lugar geométrico de todos los puntos a distancia $d_H(\mathbf{P}, L)$ de L y del mismo lado de P (Cualquier geodésica determina dos lados). De igual manera los hyperciclos no son geodésicas.

Transformaciones isométricas

Dividiremos las transformaciones isométricas en dos grupos, los que preservan la orientación y los que no. En el grupo de los que preservan la orientacíon distinguimos tres tipos distintos de transformaciones;

Las transformaciones `parabólicas` tienen un punto fijo en E y dado un orociclo K tangente en dicho punto fijo a E, esta transformación tiene un desplazamiento fijo en K. Dibujo

Las tranformaciones `elípticas` tienen un punto fijo en D y un ángulo fijo ϕ de rotación en torno al punto fijo. Dibujo

Las transformaciones `hiperbólicas` tienen dos puntos fijos en E y una recta invariante, la recta que pasa por dichos puntos fijos a la cual llamaremos eje de la transformación. Dibujo

G es un grupo de transformaciones isométricas, un punto invariante para G si es fijo bajo todos los elementos de G, de una manera similar pensamos en una recta invariante.

Un par de conjuntos M y M' en $D + E$ son equivalentes respecto a G si existe $f \in G$ tal que $M = fM'$. El total de conjuntos equivalentes de M se denota como la familia GM llamada clase de equivalencia de M, en esta familia si $f_1, f_2 \in G$ y $f_1 \neq f_2$ entonces $f_1 M \neq f_2 M$ sin importar que como conjunto sean iguales.

Decimos que G es discontinuo en un punto $x \in D$,si x no es un punto de acumulación de la clase Gx, si esto sucede Gx no tiene puntos de acumulación en D (Prueba), esto implica que si G es discontinuo en un punto de D entonces es discontinuo en todo D. (prueba).

Las únicas isometrías de H^+ que preservan la orientación son las de $PSL(2, \mathbb{R})$, las transformaciones mencionadas con anterioridad se encuentran en este grupo.

Si $f \in PSL(2, \mathbb{R})$ y g alguna otra transformación no necesariamente en $PSL(2, \mathbb{R})$ entonces gfg^{-1} es del mismo tipo que f.

Llamaremos `reversiones` a las transformaciones que invierten la orientación, las reversiones son las `reflexiones` respecto a una recta, y las reflexiones compuestas con elementos hiperbolicos a las que llamaremos `h-reflexion`.

La reflexión respecto a una recta hiperbólica es la reflexión respecto a una circunferencia euclidiana.

Teorema principal

Theorem 1.1. *Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de transformaciones isométricas en el plano hiperbólico sin puntos ni lineas invariantes sea* *discontinuo en D es que los puntos fijos de los elementos elipticos del grupo, si los hay, no se acumulen en D*

La condición de que no tenga puntos ni rectas invariantes es necesaria.

contraejemplo

Si G es un grupo de elementos parabólicos con un mismo punto fijo al infinito.

Si G es un grupo de elementos hiperbólicos con una recta fija dada.

ninguno de los anteriores contiene elementos elipticos sin embargo ninguno es discontinuo en D. (prueba?)

Si G contiene reversiones y $H \subseteq G$ y además $H \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene que H es subgrupo de G y además es normal y de índice 2, es normal ya que si $f \; inH$ para cualquier elemento $g \in G$ se tiene que gfg^{-1} es del mismo tipo que f por lo que $gfg^{1} \in H$, es de índice 2 y para ver esto basta probar que si $f, g \in G - H$ entonces $f \cong g$ equivalentemente que $fg^{-1} \in H$, dado que f, g revierten orientación se tiene que fg^{-1} conserva la orientación y por lo tanto esta en H.

Una clase de equivalengia Gx es la suma de las clases Hx y Hgx con g una reversión en G ($H \cup Hg = G \Rightarrow Hx \cup Hgx = Gx$), por lo que se concluye que G y H son ambos discontinuos en D o ambos no lo son.

En otras palabras H es discontinuo en D si y solo si G lo es.

Si G no tiene rectas ni puntos invariantes tampoco los tiene H. Supongamos que H deja invariantes un punto en $D + E$, pero ningún otro punto (y por tanto ninguna recta), como G no deja puntos invariantes, existe $g \in G$ tal que $gc \neq c$ luego el subgrupo gHg^{-1} dea invariante gc pero ningun otro punto en $D + E$ pero como $H \lhd G$ se tiene que gHg^{-1} y como $gc \neq c$ implica que H fija c y gc lo cual es una contradicción, concluimos que H no deja puntos invariantes. Un razonamiento analogo nos ensea que H no deja rectas invariantes.

Desde ahora G denotará un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos ni rectas invariantes.

Theorem 1.2 (caso 1)**.** *Cuando G tiene elementos elipticos -Enunciado teorema-*

Prueba;

Primero probaremos que si los centros de los elementos elipticos se acumulan $\Rightarrow$ G no es discontinuo en D

Supongamos que los puntos fijos de los elementos elipticos se acumulan en D (tiene un punto de acumulación en D), es posible encontrar una sucesión de puntos fijos que convergan al punto de acumulación digamos x(por ser espacio métrico)y sean estos $y_1, y_2, ...$ y $f_1, f_2, ...$ los respectivos elementos elípticos. Por un lado $d_H(y_i, x) \leq \varepsilon$ para i adecuada, considerando $\{f_i x\}$ podemos notar que

$$d_H(f_i x, x) \leq d_H(f_i x, y_i) + d_H(y_i, x) = 2d_H(y_i, x)$$

lo anterior debido a que f_i fija y_i y que es una isometría. Luego entonces $f_i x \to x$, es decir Gx se acumula en x por tanto G no es discontinuo en x y por lo tanto no lo es en D.

Si los puntos fijos de los elementos elípticos no se acumulan $\Rightarrow$ G es discontinuo en D.

elegimos un elemento elíptico f y sea c su punto fijo, como G no tiene puntos invariantes existe $g \in G$ tal que $gc \neq c$ y además gc es punto fijo de gfg^{-1} que es de igual manera un elemento elíptico. Sea $G(c)$ el subgrupo de G de elementos elípticos con punto fijo c entonces $\sharp G(c) < \infty$, para ver esto notemos 2 cosas;

(1) hgc es punto fijo de algún elemento elíptico en G a saber $hgfg^{-1}h^{-1}$
(2) $d_H(gc, c) = d_H(hgc, hc) = d_H(hgc, c)$

esto implica que el conjunto $G(c)gc$ esta contenido en una circunferencia con centro c, si $G(c)gc$ es infinito y dado que la circunferencia es compacta $G(c)gc$ tendria un punto de acumulación en dicha circunferencia lo cual contradice nuestra hipótesis, entonces necesariamente $\sharp G(c) < \infty$, luego se tiene que Gc se compone de puntos fijos de elementos elípticos (gc es punto fijo de gfg^{-1}) en G.

Si $gc \in Gc$ se tiene $\sharp G(c) = \sharp G(gc)$ ya que se tiene la biyección ... (mejorar prueba)

2. 1

Lemma 2.1 (lema 1)**.** *Sean f y g elementos hiperbólicos cuyos ejes son divergentes y cuyos desplazamientos λ miden lo mismo pero tienen sentidos opuestos, y sea δ la distancia entre sus ejes, entonces fg es elíptico, parabólico o hiperbólico dependiendo de*

$$senh\frac{1}{2}\delta senh\frac{1}{2}\lambda \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Prueba.

Como los ejes son divergentes existe una normal común a ambos y a esta recta le llamamos s', denotemos a los ejes de f y g como A_f y A_g respectivamente, entonces la normal que mencionamos antes corta a A_f en a y a A_g en a' y elegimos b, b' en A_f y A_g respectivamente de tal manera que $d_H(a,b) = d_H(a',b') = \frac{1}{2}\lambda$ y además en la dirección que se desplaza f. Sean s, s'' las rectas normales a A_f, A_g en b, b' y por abuso de notación las reflexiones respecto a estas rectas y s' se denotaran de la misma manera.

Queremos ver que tenemos la relación $f = ss'$, es claro que ss' preserva A_f ya que s' lo preserva y s también por ser normal a este eje (las circunferencias ortogonales son invariantes bajo inversiones respecto a ellas), para ver que tiene el mismo sentido que f basta ver hacia donde desplaza un punto y es facil tomando a que queda fijo bajo s' y bajo s se desplaza en la misma dirección que f, por último hay que verificar que $d_H(x, ss'x) = \lambda$ pero como ss' preserva la orientación y tiene dos puntos fijos (los puntos finales del eje fijo) necesariamente tiene que ser un alemento hiperbólico y para saber cuanto mide su desplazamiento de nuevo basta verificarlo para un punto en la recta fija y tomando a de nuevo a notamos que $d_H(a, ss'a) = d_H(a, sa) = \lambda$, en conclusión $f = ss'$ y un proceso analogo nos permite probar que $g = s's''$ (dibujos).

Queremos saber ahora que tipo de transformación es fg, por lo anterior tenemos que $fg = ss's's'' = ss''$, ahora todo depende de la posición de los ejes de f y g.

Caso 1.[las rectas se intersectan el algún punto de $D + E$](dibujo)

Sea m el punto medio del segmento aa', la normal a s' que pasa por m bisecta el ángulo que forman los ejes en el punto de intersección p (dibujo), para ver esto reflejamos las rectas l y σ respecto de l obtenemos l y s'', como la reflexión es conforme el ángulo entre l y s'' es el mismo que el ángulo entre l y s. Es claro que el punto de intersección p sera el punto fijo de la transformación y sea $\frac{1}{2}\phi_{fg}$ el ángulo entre s y s' (la inversion respecto a dos circunferencias es una rotacion con angulo el doble del angulo de esta interseccion) (dibujo).

Luego $abpm$ es un cuadrilatero con 3 ángulos rectos y el ángulo restante agudo (cuadrilatero de lambert) cuyas medidas son $\frac{1}{4}\phi_{fg}$ con lados $\frac{1}{2}\delta$ y $\frac{1}{2}\lambda$ por lo cual tenemos (dibujo) $senh\frac{1}{2}\delta senh\frac{1}{2}\lambda = cos\frac{1}{4}\phi_{fg} \leq 1$ y es igual a 1 en el caso de que se intersecten en el infinito ($\phi = 0$)y en dado caso la transformación seria parabólica.

Caso 2

En el caso que los ejes sean divergentes, existe una recta normal a ambos y se tiene que la recta l bisecta al segmento entre s y s' de esta recta normal, entonces para estar seguros probaremos;

(1) Esta recta normal es el eje de fg
(2) En efecto l bisecta al segmento entre s y s' de esta recta normal

Para (1) Probaremos que fg es hiperbólica viendo que tiene dos puntos fijos y que se encuentran en la normal mencionada antes. Sean x y x' los puntos finales de dicha recta normal y notemos que $s''x = x'$ ya que $s''x$ debe cumplir que esta sobre la recta normal a s'' y que $d_H(x, s'') = d_H(s''x, s'')$ pero $d_H(x, s'') = \infty$, por la misma razón $sx' = x$ entonces $ss''x = x$ y tambien se cumple $ss''x' = x'$ por lo tanto fg tiene 2 puntos fijos y su eje es la recta que los une, que en este caso es la normal mencionada. (dibujo)

Para (2) queremos probar que $d_H(x, y) = d_H(y, x')$ donde y es el punto de intersección de la normal con l, al reflejar respecto de l y notando que $x \mapsto x'$ bajo s y $d_H(x, y) = d_H(y, sx)$ tenemos el resultado.

Finalmente tenemos las rectas s'', A_g, s, l y A_{fg} y estas forman un pentagono con 4 ángulos rectos y con lados $\frac{1}{2}\lambda_{fg}, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\lambda$ (dibujo) luego tenemos (apendice)

$$senh\frac{1}{2}\delta senh\frac{1}{2}\lambda = cosh\frac{1}{4}\lambda_{fg} > 1$$

□

3. 2

Lemma 3.1 (lema 2)**.** *Sean f y g dos elementos hiperbólicos con ejes A_f y A_g y desplazamientos iguales λ, y con ángulo de intersección ϕ entonces el conmutador $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$ es elíptico , parabólico o hiperbólico dependiendo si*

$$sen\phi senh^2\frac{1}{2}\lambda \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Prueba.

Sea s' el punto de intersección de A_f y A_g, sea s el punto sobre A_f tal que $d_H(s', s) = \frac{1}{2}\lambda$ y trazado siguiendo la dirección de A_f, y sea s'' el punto sobre A_g tal que $d_H(s', s'') = \frac{1}{2}\lambda$ y trazado siguiendo la misma dirección que A_g.(dibujo)

Y tomemos las rotaciones de ángulo π respecto a estos puntos y las denotaremos igual que denotamos a sus puntos fijos.

Queremos primero probar que $f = ss'$, para esto deseamos ver que puntos fija ss'. La rotación por angulo π funciona de la siguiente manera; dado un punto x se traza la recta que va de x al centro de rotación c el rotado de x llamemosle y esta sobre la misma recta y $d_H(x,c) = d_H(y,c)$, con este proceso podemos ver que ss' fija los mismos puntos que f por lo tanto el eje de f es el mismo ee de ss' solo falta ver cuanto es el desplazamiento de ss' y como antes, basta verificarlo para un punto y en esta ocasión tomamos el punto s' y tenemos que $d_H(s, ss'(s')) = d_H(s, s(s')) = 2d_H(s', s) = 2(\frac{1}{2}\lambda) = \lambda$ por lo tanto $f = ss'$. Un proceso analogo nos ensea que $g = s's''$ y como $s's'$ es la indentidad tenemos que $fg = ss''$, más aún $f^{-1} = s's, g^{-1} = s''s'$ y entonces $f^{-1}g^{-1} = s'ss''s' = s'fgs' = s'fgs'^{-1}$, luego ss' es un elemento hiperbólico con recta invariante la recta que pasa por s y s'' y desplazamiento $2d_H(s, s'')$, más aún $f^{-1}g^{-1}$ es hiperbólico obtenido de fg conjungando por s' tenemos entonces;

(1) $f^{-1}g^{-1}$ tiene un desplazamiento con la misma medida que fg
(2) su eje $A_{f^{-1}g^{-1}}$ se obtiene de A_{fg} rotando por s'.

Para probar (1) queremos ver cuanto mide $d_H(x, s'fgs'x)$ y tenemos que $d_H(x, s'fgs'x) = d_H(s'x, fg(s'x))$ y esta última cantidad es el desplazamiento de fg.

(2) se cumple ya que $f^{-1}g^{-1}(s'A_{fg}) = s'fgs'(s'A_{fg}) = s'fg(A_{fg}) = s'A_{fg}$.

Entonces estos ejes son divergentes y sus correspondientes transformaciones tienen sentidos opuestos, aplicamos entonces el **lema 1** a fg y a $f^{-1}g^{-1}$ entonces $[f,g]$ es elíptico , parabólico o hiperbólico según sea

$$senh\eta senh\frac{1}{2}\lambda_{fg} \lesseqgtr 1$$

(dibujo)

Donde η es la perpendicular desde s' en el triángulo $ss's''$ y por trigonometría hiperbólica (apendice) se cumple $senh\eta senh\frac{1}{2}\lambda_{fg} = sen\phi senh^2\frac{1}{2}\lambda$ □

4. 3

Lemma 4.1 (lema 3)**.** *Sean f, g elementos parabólicos con puntos fijos c_f y c_g entonces el conmutador $[f,g]$ es hiperbólico.*

Prueba.

(dibujo) Sea s' la recta que une c_f y c_g y denotemos la reflexión respecto a esta recta también como s'. Sea O_f un oriciclo dado con punto al infinito c_f, y $x \in O_f$ y sea x' el punto medio de la recta (falta probar que existen las rectas cuyas reflexiones nos dan la trasnsformacion buscada)

Tenemos entonces que $f = ss$, y analogamente obtenemos que existe s'' tal que $g = s's''$ luego tenemos $[f,g] = ss''s'ss''s' = (ss''s')^2$, la composición de reflexiones conserva el sentido por lo tanto la composición de 3 reflexiones invierte el sentido y es por tanto una reflexión o una h-reflexión entonces su cuadrado es la identidad o un elemento hiperbolico, como f y g no permutan (porque?) no puede ser una la identidad por lo tanto es un elemento hiperbólico. □

5. 4

Lemma 5.1 (lema 4)**.** *Sean f y g elementos hiperbólicos con ejes paralelos y con punto común u, entonces el conmutador $[f, g]$ es un elemento parabólico con centro en u*

(dibujo)

Prueba.

Primero veamos que $f \neq gf^{-1}g^{-1}$, es claro que $gf^{-1}g^{-1}$ fija u ya que tanto f como g lo fijan, sea x el punto final del eje de f distinto de u, es claro que g^{-1} no fija este punto, y $gx \neq u$ (puesto que $g^{-1}u \neq x$) concluimos con esto $f \neq gf^{-1}g^{-1}$, claramente su desplazamiento mide lo mismo (debido a que g es isometria) pero con sentidos opuestos (ya que $gf^{-1}g^{-1}$ respeta el sentido de f^{-1}). (dibujo) (inconcluso).

6. 5

Lemma 6.1 (lema 5)**.** *Si en un grupo $G < PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos invariantes, 2 ejes de elementos hiperbólicos son paralelos entonces el grupo contiene un elemento elíptico*

Prueba.

Del **lema 4** tenemos que G contiene elementos parabólicos y con punto en común u como centro.

Consideremos un Orociclo K con punto en el infinito u, sobre K el elemento parabólico tiene un desplazamiento fijo .

Sea $S_u < G$ el subgrupo de G que consta de elementos parabólicos con punto en el infinito u y sea $x \in K$, la clase de equivalencia $S_u x$ es un subconjunto de K y podemos distinguir dos casos.

(1) Los puntos forman una sucesión de puntos equidistantes cuando S_u es dinscontinuo.
(2) El conjunto de puntos es denso en todo K cuando S_u no es discontinuo.

Para probar (1), sea $d = min\{d_H(x, fx) | f \in S_u\}$ este minimo existe por que si no es asi se tendria un punto de acumulación lo cual por hipótesis no es posible. Si $y \in S_u x$ es claro que $min\{d_H(y, fy) | f \in S_u\} = d$ y de esto concluimos que el conjunto de puntos es equidistante de distancia d.

Para el caso (2) por hipótesis tenemos que $S_u x$ se acumula en x y queremos ver que se acumula en todo K. Sea $k \in K$ un punto arbitrario y $B_\varepsilon(k) = \{z \in D | d_H(k,z) < \varepsilon\}$ y tomemos $B_\varepsilon(k) \cap K$, queremos ver que esxiste $x \in S_u x$ tal que $d_H(k,x) < \varepsilon$, si dicha x no existe entonces los desplazamientos en K de los elementos de S_u estarian acotados inferiormente por ε lo cual implicaria que S_u es discontinuo lo que contradice la hipótesis, por lo tanto S_u en denso en todo K.

Ahora supongamos que estamos en el caso (1) y sea g_0 el elemento con el menos desplazamiento respecto de K (dibujo) y f un elemento hiperbólico en G tal que su eje A_f tiene a u como punto fijo y cuyo sentido es tal que se aleja de u (existe?), entonces fg_0f^{-1} fija u y es un elemento parabólico y por tanto $fg_0f^{-1} \in S_u$.

La imagen de A_f bajo fg_0f^{-1} es claramente la misma que la de su imagen bajo fg_0, la recta fg_0A^f se encuentra entre A_f y g_0A_f (Por que?-figura hiperciclo), luego el desplazamiento de fg_0f^{-1} es menor que el de g_0 lo cual es una contradicción, por lo tanto $S_u x$ es denso en K, es decir los desplazamientos de los elementos de S_u son tan pequeos como se quiera.

Como G no tiene a u como punto invariante, sea $g \in G$ tal que $gu \neq u$. Sean f_1, f_2 elementos hiperbólicos pertenecientes a los dos ejes del lema, al menos uno de los elementos hiperbólicos gf_jg^{-1} no deja invariante u, ya que g solo puede mover u a los más a uno de los puntos extremos de A_{f_j}. Entonces existe en G un elemento hiperbólico f que no deja u invariante. Elijamos ahora un orociclo K tal que intersecte A_f (dibujo) y elejimos h tal que su desplazamiento respecto a K ayude a que los ejes A_f y A_{hf} de f y $f' = hfh^{-1}$ respectivamente se intersecten en un ángulo arbitrariamente pequeo (?), e particular elegimos h tal que

$$sen\phi senh^2 \frac{1}{2}\lambda_f < 1$$

ya que $senh^2 \frac{1}{2}\lambda_f$ es fijo y $sen\phi \to 0$ cuando $\phi \to 0$, y del **lema 2** se sigue que $[f.f']$ es elíptico. $\square$

7. 6

Ahora sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos invariantes y sin elementos elípticos.

Antes que nada veamos que G no es abeliano. Si los ejes son divergentes y $fg = gf$ entonces $fgf^{-1} = g$, pero no es posible ya que fgf^1 fija fx, fy con x, y puntos fijos de g, pero esto implica $fx = y$ y $fy = x$ pero esto implica $f^2x = x$, pero f^2 fija los mimos puntos que f por tanto no puede fijar los puntos de g. (dibujo).

Es analogo si los ejes son paralelos ya que f no puede intercambiar x y y al mismo tiempo. (dibujo).

(considerar el caso de una parabolico e hiperbolico y 2 parabolicos)

Más aún debe haber elementos hiperbólicos en G, de otro modo solo tendría elementos parabólicos que por hipótesis no tendrias un punto fijo en común y el **lema 3** implicaria una contradicción en este caso.

Sea f hiperbólico en G y A_f su eje y λ_f la medida de su desplazamiento, sea $g \in G$ tal que $fg \neq gf$, entonces $f' = gf^{\pm 1}g^{-1}$ es una traslación con el mismo desplazamiento que f y con eje $gA_f \neq A_f$ (Por no ser permutables) [Si $A_f = gA_f \Rightarrow gfg^{-1} = f$ o $gfg^{-1} = f^{-1}$ el caso 1 no es posible, checar el caso 2].

$A_f, A_{f'}$ no pueden ser paralelas por el **lema 5**, si son divergente sea δ la distancia entre ellas y elijamos f' tal que el exponente de f haga f y f' con desplazamientos opuestos, por las condiciones impuestas en G, ff' no es elíptico y del **lema 1** obtenemos

$$(1)\ senh\frac{1}{2}\delta senh\frac{1}{2}\lambda_f \geqq 1$$

Si $A_f, A_{f'}$ son concurrentes sea ϕ su ángulo de intersección, dado que $[f, f']$ no es una rotación, del **lema 2** tenemos

$$(2)\ sen\phi senh^2\frac{1}{2}\lambda_f \geqq 1$$

Estas desigualdades se aplican a g fijo y f variando (que cumplan la condición) (dibujo)

Sea A un eje de un elemento hiperbólico en G, los elementos hiperbólicos que comparten este eje forman un subgrupo abeliano S_A de G, sea $g \in G$ un elemento que no tenga como eje a A, es decir que no permuta con los elementos de S_A, se tiene que $gA \neq A$ y cuya distancia a A digamos $d_H(gA, A) = \delta$ o corta a A en un ángulo ϕ dependiendo si A_g y A son divergentes o concurrentes, dependiendo cual sea el caso aplicaremos (1) o (2).

Si f varia sobre todos los elementos de S_A, podemos notar que todos tienen desplazamiento mayor que un número positivo distinto de 1 (por que?) (por las condiciones 1 y 2 la cota inferior no puede ser 1)

Entonces S_A es discontinuo. Sea λ_0 el desplazamiento mas pequeo de elementos de S_A (si existe).

Podemos aplicar las mismas desigualdades para $f \in S_A$ fijo y g variando sobre los representantes $g_1, g_2, ...$ de las clases de $S_A < G$ ($g_1 \backsim g_2 \Leftrightarrow g_1 S_A = g_2 S_A \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in S_A$).

Remark 7.1. Si $g_1 \backsim g_2 \Rightarrow g_1 A = g_2 A$ ya que $g_1 g_2^{-1} = f \in S_A \Rightarrow g_1 g_2^{-1} A = fA \Rightarrow g_1 g_2^{-1} A = A \Rightarrow g_2^{-1} A = g_1^{-1} A$

Entonces los ejes de los elementos hiperbólicos $f_v = g_v f g_v^{-1}$ varian sobre los diferentes ejes de la clase de equivalencia GA de A.

Dado que f_v tiene el mismo desplazamiento λ_f que f para todo índice v, de (1) y (2) obtenemos que $senh\frac{1}{2}\delta$ y $sen\phi$ tienen una cota inferior por lo que δ y ϕ también la tienen según sean divergentes o concurrentes los ejes $g_v A$, esto implica que los ejes no se acumulan en D (dibujo)

Sea $x \in A$. Todo punto en Gx esta en algún elemento del conjunto $g_v A$. Para un eje dado los puntos Gx que se encuentran en este eje forman una sucesión de puntos equidistantes a distancia λ [Los puntos en $Gx \cap g_v A$ son los puntos gx, hx tal que $g \backsim h$, luego para $gx, hx \in g_v A \Rightarrow d_H(gx, hx) = d_H(x, g^{-1}hx), g^{-1}h \in S_A \Rightarrow \lambda_{g^{-1}h} \geqq \lambda_0$] (dibujo).

Luego un círculo con centro x y radio $\frac{1}{2}\lambda_0$ no puede contener mas de un punto de dicha sucesión en su interior, entonces el número de puntos en Gx dentro de este círculo es a lo m'as igual al número de ejes $g_v A$ que cortan al círculo, este número es finito ya que los ejes $g_v A$ no se acumulan en D, $\therefore$ x no es punto de acumulación de Gx. $\square$

References