



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

CARACTERIZACIÓN DE NIELSEN DE GRUPOS DISCRETOS DE $PSL(2, \mathbb{R})$

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Santiago Manuel Pérez Pérez

DIRIGIDA POR:
Dr. Angel Cano Cordero
Instituto de Matemáticas Cuernavaca, UNAM

México D.F., Marzo de 2017



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

CARACTERIZACIÓN DE NIELSEN DE GRUPOS DISCRETOS DE $PSL(2, \mathbb{R})$

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Santiago Manuel Pérez Pérez

DIRIGIDA POR:
Dr. Angel Cano Cordero
Instituto de Matemáticas Cuernavaca, UNAM

México D.F., Marzo de 2017

Resumen

Cuando tenemos una ecuación diferencial de grado n , sabemos gracias a un teorema de Cauchy que posee n soluciones linealmente independientes en un punto $b \in \mathbb{C}$, si tomamos una de estas soluciones y la continuamos analíticamente por un lazo anclado en b obtenemos una solución que depende de las n soluciones linealmente independientes dadas, gracias a este hecho, podemos de igual manera asociar un grupo a la ecuación diferencial dada, este grupo visto en $GL(2, \mathbb{C})$ contiene las matrices, llamadas matrices de conexión , que relacionan a la solución original y a la continuación analítica de la solución. Dado un conjunto de soluciones alrededor de un punto $b \in \mathbb{C}$ y a la continuación analítica a travez de los lazos en el grupo fundamental $\Pi_1(b, \mathbb{C})$ el grupo de matrices de las que se habló anteriormente es llamado el grupo de monodromía.

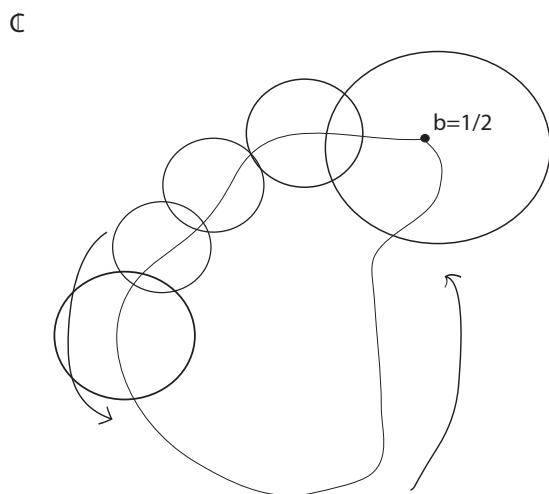


Figura 1: Continuación analítica

El grupo de monodromía nos da información importante de la ecuación diferencial. En general hallar la monodromía relativa a una ecuación diferencial no es una tarea sencilla . Nos proponemos hallar y dar de

manera explícita el grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica.

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0$$

Por medio de una combinación de técnicas recopiladas de numerosos textos (de manera particular en [KIY]), además de dar un conjunto de soluciones para esta ecuación en el punto $b = \frac{1}{2}$.

El grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica tiene una estructura de grupo de Schottky cuando tomamos los exponentes puramente imaginarios, los exponentes dados por

$$1 - c = i\theta_0, c - a - b = i\theta_1, a - b = i\theta_2$$

Con $\theta_i > 0$.

Podemos describir la monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica por medio de reflexiones respecto a círculos $C(c, r)$ (donde c es real)

$$\psi(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{\bar{s} - c} + c$$

Y con estas reflexiones asociarle un grupo de Schottky, todo esto siguiendo los pasos de Takashi Ichikawa y Masaaki Yoshida en una publicación titulada ".N SCHOTTKY GROUPS ARISING FROM THE HYPERGEOMETRIC EQUATION WITH IMAGINARY EXPONENTS"(IY03).

El grupo de Schottky Λ_θ asociado a la ecuación hipergeométrica con exponentes imaginarios nos sirve de ejemplo en un teorema sobre grupos de isometrias del plano hiperbólico que actúan de manera discontinua en el cual se destaca su prueba casi completamente geométrica propuesta en un artículo de W. Fenchel y J. Nielsen llamado ".N DISCONTINUOUS GROUPS OF ISOMETRIC TRANSFORMATIONS OF THE NON-EUCLIDIAN PLANE" publicado en el año de 1948 ([FN]), aunque dado que tenemos 3 parametros $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, en realidad hemos dado muchos ejemplos que cumplen de igual manera este propósito.

Para obtener este resultado usamos la noción de grupo *elemental* que definimos enseguida.

Definición 0.0.1 *Un grupo es elemental si su conjunto límite esta formado a lo más por dos puntos*

La característica que realmente es de interés para nosotros es que un grupo sea NO-elemental, dicho grupo es por lo tanto un grupo cuyo conjunto límite esta formado por mas de dos puntos. En [FN] tenemos la siguiente definición;

Definición 0.0.2 *Un grupo G se dice discontinuo en un punto $x \in \mathbb{D}$ si x no es un punto de acumulación de la clase Gx*

Nuestro objetivo es encontrar ejemplos de grupos que actuen de manera discontinua en \mathbb{D} y verificar en ellos las condiciones del teorema de Nielsen. Los grupos de Schottky que hallamos son discretos y además son No-elementales estas características implican que se cumple en \mathbb{D} la siguiente definición;

Definición 0.0.3 *Sea X un espacio topológico arbitrario y G un grupo de homeomorfismos de X en X . Se dice que G actúa discontinuamente en X si y solo si para cada subconjunto compacto K de X se tiene,*

$$g(K) \cap K = \emptyset$$

Excepto para un número finito de g's en G

Los ejemplos que encontramos satisfacen lo que deseamos gracias a un teorema que podemos encontrar en [Bea], pero también gracias a que 0.0.3 implica 0.0.2, de esta manera sabemos de antemano que nuestros grupos actúan de manera discontinua pero también nos interesa indagar las condiciones que el teorema de Nielsen requiere y deducir algunas propiedades ya que la demostración de este teorema en [FN] aclara el comportamiento geométrico de los grupos de transformaciones hiperbólicas.

El capítulo 1 y 2 nos dan las bases para el desarrollo de este trabajo. El capítulo 1 esta basado en las definiciones necesarias como continuidad analítica , grupos Klenianos y de Schottky así como una introducción de la ecuación diferencial hipergeométrica.

En el capítulo 2 hablamos de la monodromía en general, el esquema de Riemann, calculamos la monodromía de la ecuación hipergemoétrica y hallamos el grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica.

En el capítulo 3 construimos el grupo de schottky asociado al grupo de monodromía a través de los dominios fundamentales dados en ([IY03])dicho grupo generado por reflexiones nos servira como ejemplo para el teorema principal.

En el capítulo 4 probamos el teorema de Nielsen en 2 partes, la primera parte se prueba de manera sencilla bajo el supuesto de que en el grupo $G < PSL(2, \mathbb{R})$ existen elementos elípticos, la segunda parte supone que no existen elementos elípticos en el grupo y se utilizan 5 lemas para probar el teorema, estos lemas destacan mayormente por sus demostraciones puramente geométricas así como la demostración del teorema, al final probamos que el grupo de Schottky encontrado aplica en el teorema de Nielsen.

Índice general

Índice de figuras	vii
1 Preliminares	1
1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones	1
1.2 Continuación analítica	4
1.3 Grupos Klenianos y grupos de Schottky	5
1.4 Monodromía de la ecuación hipergeométrica	7
1.5 Ecuaciones lineales	7
1.6 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares	8
1.7 Ecuaciones Fuchsianas	10
1.8 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica	10
1.9 Monodromía	12
1.10 Monodromía de la ecuación hipergeométrica	15
1.11 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica	17
2 Grupo de Schottky de la ecuación hipergeométrica	19
2.1 Dominios fundamentales	19
2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones	22
2.3 El grupo de Schottky asociado al grupo de Monodromía	24
3 El teorema de Nielsen	25
3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes	30
3.2 El lema del conmutador de los elemertos hiperbólicos	32
3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos	35
3.4 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos con ejes paralelos	36
3.5 El lema del elemento elíptico	37
3.6 El teorema de Nielsen	39
3.7 Un ejemplo de un grupo discreto	43

ÍNDICE GENERAL

A Apéndice	45
A.1 Igualdades trigonométricas	45
A.2 Teorema de Cauchy	47
A.3 Mapeo y principio de reflexión de Schwarz	47
Bibliografía	49

Índice de figuras

1	Continuación analítica	i
1.1	Lazo anclado en un punto en $\mathbb{C} - \{0, 1\}$	6
1.2	Lazos anclados en $b = \frac{1}{2}$	14
2.1	Dominios fundamentales	20
2.2	Círculos C_1, C_2, C_3	23
3.1	Rectas hiperbólicas concurrentes, paralelas y divergentes respectivamente.	26
3.2	Representación de los puntos importantes en las transformaciones hiperbólicas	27
3.3	Figura 3.3	31
3.4	Figura 3.4	32
3.5	Cuadrilatero de Lambert	33
3.6	Figura 3.6	34
3.7	Pentágono con 4 ángulos rectos	35
3.8	Figura 3.8	36
3.9	Figura 3.9	36
3.10	Figura 3.10	37
3.11	Figura 3.11	38
3.12	Figura 3.12	39
3.13	Hiperciclo punteado	40
3.14	Figura 3.14	41
3.15	Ejes de f y g paralelos y divergentes	42
3.16	Figura 3.16	43
3.17	Figura 3.17	44
A.1	Cuadrilatero con 3 ángulos rectos	46
A.2	Pentágono con 4 ángulos rectos	47
A.3	Principio de reflexión de Schwarz	48

CHAPTER

1

Preliminares

1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones

Consideremos la siguiente serie :

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n$$

En donde x es una variable compleja , $(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1)$, y $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Esta serie es la llamada serie hipergeométrica. El coeficiente n -ésimo de esta serie al que llamaremos A_n esta dado por

$$A_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) \cdot b(b+1) \cdots (b+n-1)}{c(c+1) \cdots (c+n-1) \cdot 1(1+1) \cdots (n)}$$

De esta igualdad obtenemos:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)} \tag{1.1}$$

Usando el criterio del cociente podemos notar que el radio de convergencia de esta serie es 1, cuando a o b son negativos la serie es finita. De cualquier modo tenemos que dicha serie define una función holomorfa en x en al menos el disco de radio 1 centrado en 0 y también es holomorfa en (a, b, c) si $c \neq 0, -1, -2, \dots$

1. PRELIMINARES

Nuestro interés por la serie definida anteriormente viene del hecho que dicha serie es una solución de la ecuación diferencial hipergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0$$

A la cual denotamos $E(a, b, c; x)$ y la referimos como la serie hipergeométrica con parámetros (a, b, c) . Para ver que $F(a, b, c; x)$ es una solución de $E(a, b, c)$ procedemos como Euler e introducimos el operador $D = x\frac{d}{dx}$, a continuación enunciamos algunas propiedades que son útiles:

1. $Dx^n = nx^n$
2. $f(D)x^n = f(n)x^n$ donde f es un polinomio de coeficientes constantes

La propiedad número 1 es clara de la definición, para la propiedad número 2 debemos dejar en claro como funciona el operador D^n al aplicarlo a x^n . Cuando $n = 2$ tenemos que $D^2x^n = x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}(x^n)) = x\frac{d}{dx}(x \cdot nx^{n-1}) = x\frac{d}{dx}(nx^n) = x \cdot n^2x^{n-1} = n^2x^n$, en general se tiene por un proceso análogo al anterior que $D^m x^n = n^m x^n$. Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Donde $a_n \neq 0$, un polinomio de grado n y por $f(D)$ entendemos el operador

$$f(D) = \sum_{i=0}^n a_i D^i$$

Entendiendo D^i como la composición del operador D i -veces consigo mismo. Aplicamos este operador a x^n y obtenemos

$$f(D)x^n = (\sum_{i=0}^n a_i D^i)x^n = \sum_{i=0}^n a_i D^i(x^n) = \sum_{i=0}^n a_i n^i x^n = f(n)x^n$$

Gracias a este operador D podemos escribir la ecuación diferencial hipergeométrica en términos de dicho operador para obtener;

$$E(a, b, c) : [(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{x}]u = 0$$

Con esta nueva presentación verificamos que la serie $F(a, b, c; x)$ es una solución de dicha ecuación.

1.1 La ecuación diferencial hipergeométrica y sus soluciones

Podemos escribir

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n = \sum A_n x^n$$

Y evaluamos

$$\begin{aligned} & [(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D) \frac{1}{x}] \sum A_n x^n \\ &= \sum [(a+D)(b+D)A_n x^n - (c+D)(1+D)A_n x^{n-1}] \\ &= \sum [(a+n)(b+n)A_n x^n - (c+n-1)(1+n-1)A_n x^{n-1}] \\ &= \sum [(a+n)(b+n)A_n x^n - (c+n)(1+n)A_n x^n] = 0 \end{aligned}$$

La última igualdad se da gracias a que obtenemos una serie telescopica. Esta serie tiene singularidades en 0, 1 e ∞ , nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones en los puntos singulares como hicimos anteriormente con $x = 0$. Denotaremos a la solución $F(a, b, c; x)$ como $f_0(x; 0)$.

Queremos hallar otra solución en $x = 0$ pero para esto necesitamos calcular la aplicación del operador D al término $x^s u$;

$$D(x^s u) = s x^s u + x^s D u = x^s (s + D) u$$

esto es $Dx^s = x^s(s + D)$, con este cálculo podemos obtener una expresión equivalente para

$$[(a+D)(b+D) - (c+d)(1+d) \frac{1}{x}] x^{1-c}$$

La expresión anterior es equivalente a

$$x^{1-c} [(a+1-c+D)(b+1-c+D) - (1+D)(2-c+D) \frac{1}{x}]$$

y esto nos dice que

$$x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c : x)$$

Es también una solución de $E(a, b, c)$. Aunque la serie anterior esta definida solamente cuando $2 - c$ no es un entero negativo o cero (cuando es $c = 1$ la serie coincide con $F(a, b, c; x)$) esto no afecta nuestra solución ya que tomamos $1 - c \in i\mathbb{R}$ en cuyo caso siempre esta definida. A esta ultima solución la denotamos por $f_0(x; 1 - c)$.

1. PRELIMINARES

Queremos hallar también soluciones alrededor del punto singular $x = 1$, llevamos a cabo una transformación de la variable x en $1 - x$ abusando de la notación, y verificamos como luce ahora

$$E(a, b, c) = x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu$$

Bajo esta transformación el primero y el tercer término no cambian, pero el segundo término ahora es

$$-\{c - (a+b+1)(1-x)\} = a+b+1 - c - (a+b+1)x$$

Entonces podemos notar que la ecuación transformada es de nuevo la ecuación hipergeométrica con parámetros $(a, b, a+b+1-c)$ y a menos que $c-a-b$ sea entero obtenemos como antes dos soluciones pero ahora alrededor de $x = 1$

$$F(a, b, a+b+1-c; 1-x), \quad (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-x)$$

En nuestro caso tomamos $c-a-b \in i\mathbb{R}$ por lo que las soluciones anteriores siempre están definidas en su radio de convergencia. A las soluciones anteriores las denotamos $f_1(x; 0)$ y $f_1(x; c-a-b)$ respectivamente.

1.2 Continuación analítica

La continuación analítica nos da una forma de extender el dominio sobre el cual una función analítica está definida, si tomamos la serie de potencias,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \tag{1.2}$$

Esta serie de potencias generalmente es válida en un radio de convergencia dado, en ciertos casos f tiene una serie de potencias que es válida mas allá del radio de convergencia esperado, y esta serie de potencias puede servir para definir la función f fuera de su dominio de definición original.

Sean f_1, f_2 funciones analíticas en dominios Λ_1, Λ_2 respectivamente, supongamos además que la intersección $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ es no vacía y $f_1 = f_2$ en $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, en este caso llamamos a f_2 la continuación analítica de f_1 a Λ_2 y viceversa, Aún más si dicha extensión existe es única.

Para dar una definición formal supongamos que f es analítica en una vecindad U_{z_0} de z_0 y $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un camino en D basado en z_0 .

Definición 1.2.1 Sea $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con las siguientes propiedades:

1.3 Grupos Klenianos y grupos de Schotkky

1. $f^*(t) = f(\gamma(t))$ para t cercano a a (en $[a, b]$).
2. Para cada $t' \in [a, b]$, hay una función $h_{t'}(z)$ analítica en un disco $D_{t'}$ sobre $\gamma(t')$ con $h_{t'}(\gamma(t)) = f^*(t)$ para t cercano a t' en $[a, b]$

Si tal f^* existe esto nos define $h_{t'}(z)$. Esta es la continuación analítica de f a t' . Es una función analítica en alguna vecindad de $\gamma(t')$. Nos interesa realmente la función $h_b(z)$ analítica en una vecindad de $\gamma(b)$. Le llamamos $f_\gamma(z) = f_\gamma$, la continuación analítica de f (a lo largo de γ).

Nuestro interés en la continuación analítica radica en la manera de hallar el grupo de monodromía, si tenemos un punto $a \in \mathbb{C}$ y una vecindad U_a en la cual tenemos un conjunto de soluciones linealmente independientes, la monodromía que mas adelante analizamos con más detalle tiene relación con la continuación analítica de las soluciones de una ecuación diferencial a través de lazos anclados en a y sus clases (es decir el grupo fundamental) y las matrices que relacionan a estas soluciones.

Cuando tratamos con la ecuación hipergeométrica, el teorema fundamental de Cauchy nos dice que para cada punto $x_0 \neq 0, 1$ existen dos soluciones holomorfas linealmente independientes alrededor de x_0 , en otras palabras, el conjunto de estas soluciones forman un espacio lineal bidimensional sobre \mathbb{C} . Cualquiera de estas soluciones se puede continuar analíticamente a lo largo de cualquier lazo en $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Las soluciones en general no son univaluadas. Si γ es un lazo anclado en x_0 y u_1 una solución no cero, y u_2 otra solución que no es múltiplo constante de u_1 y sean $\gamma^* u_1$ y $\gamma^* u_2$ las continuaciones analíticas a través de γ , como $\gamma^* u_1, \gamma^* u_2$ siguen siendo soluciones linealmente independientes se tiene que existe una matriz $M(\gamma) \in GL(2, \mathbb{C})$ que relaciona a estas soluciones, esta matriz se llama la matriz de conexión de (u_1, u_2) a lo largo de γ .

Las matrices de conexión juegan un papel fundamental en nuestra búsqueda del grupo de monodromía.

1.3 Grupos Klenianos y grupos de Schotkky

De entre los ejemplos de subgrupos discretos de isometrías hiperbólicas conocidos, los grupos de Schotkky son ejemplos clásicos de estos, al ser nuestro objetivo dar un ejemplo de un grupo de Schotkky tenemos la obligación de dar una definición e introducir brevemente algunos resultados interesantes.

Definición 1.3.1 *Un grupo de Schotkky es un grupo generado por transformaciones de Möbius $g_1, \dots, g_k, k \geq 1$ junto con una colección de pares de regiones disjuntas en $\widehat{\mathbb{C}}$, digamos $C_1, B_1, \dots, C_k, B_k$, acotadas por curvas de jordan, tal que*

1. PRELIMINARES

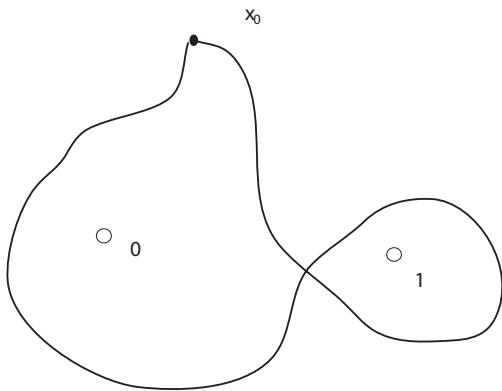


Figura 1.1: Lazo anclado en un punto en $\mathbb{C} - \{0, 1\}$

$g_i(C_i) = \widehat{\mathbb{C}} - \bar{B}_i$ para toda $i = 1, \dots, k$, el conjunto g_1, \dots, g_k es llamado un conjunto de generadores Schottky, los dominios C_i, B_i un conjunto fundamental de dominios y el entero k el género del grupo de Schottky.

Todos los grupos de Schottky son grupos finitamente generados tal que todos sus elementos no triviales son loxodrómicos, cuando decimos elementos no triviales nos referimos a todos excepto la identidad.

Un grupo de Schottky es clásico si las curvas de jordan correspondientes a algún conjunto de generadores se pueden escoger como círculos.

Un grupo de Schottky también puede ser caracterizado de la siguiente manera

Teorema 1.3.2 Un grupo $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo de Schottky si y solo si G es finitamente generado, y un grupo Kleniano puramente loxodrómico que es isomorfo a un grupo libre.

En nuestro caso la noción de grupo de Schottky que usamos es la siguiente: Consideremos una familia de pares de 2-discos disjuntos D_1, \dots, D_s en la 2-esfera cuyas fronteras son los círculos C_1, \dots, C_s y sean $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ inversiones en estos s círculos y sea G el grupo generado por estas inversiones. Le llamamos a G un grupo de Schottky. El subgrupo de índice 2 de longitud par es un grupo de Schottky clásico.

El término grupo Kleniano se utiliza para referirse a cualquier subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas siendo cierto o no que su región de discontinuidad sea vacía.

Si el lector desea conocer todos estos conceptos en profundidad se sugiere revisar la bibliografía, especialmente [ACS], para nuestros propósitos lo visto anteriormente es suficiente.

1.4 Monodromía de la ecuación hipergeométrica

En este capítulo presentamos conceptos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales así como definiciones y teoremas que son útiles para calcular la monodromía de la ecuación hipergeométrica, enunciamos los teoremas sin demostración. Para las demostraciones podemos dirigirnos a [KIY].

En el caso más general podemos considerar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\frac{du_j}{dz} = f_i(z, u) \quad (j = 1, \dots, r) \quad (1.3)$$

Con la variable independiente z y el vector de incógnitas $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, donde el vector $f = (f_1, \dots, f_r)$ es holomorfo en un dominio $D \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$

Teorema 1.4.1 *Para cada $(a, b) \in D$ hay una solución única u de 1.3 holomorfa en una variedad de a , tal que*

$$u(a) = b \quad (1.4)$$

Teorema 1.4.2 *Si el sistema 1.3 y el valor inicial 1.4 depende de manera holomorfa de un sistema de parámetros $s = (s_1, \dots, s_r)$, entonces la solución es holomorfa en x y en s*

El motivo de definir un sistema de este tipo es que todo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden, se puede reducir a un sistema del tipo 1.3.

1.5 Ecuaciones lineales

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria;

$$\frac{d^r u}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1} u}{dz^{r-1}} + \dots + a_r(z) u = 0 \quad (1.5)$$

Donde las a'_j s son holomorfas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, introducimos nuevas variables;

$$u_0 = u \quad u_i = \frac{d^i u}{dz^i} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

La ecuación 1.5 se puede reescribir de la forma :

$$\frac{du_i}{dz} = \sum_{j=0}^{r-1} a_i^j(z) u_j \quad (i = 0, \dots, r-1) \quad (1.6)$$

1. PRELIMINARES

Teorema 1.5.1 Para cada punto $a \in D$ y cualesquiera complejos b_0, \dots, b_{r-1} hay una única solución holomorfa de 1.5 tal que

$$\frac{d^i u}{dz^i}(a) = b_i \quad i = 0, \dots, r-1$$

Dicha solución tiene una continuación analítica a lo largo de cualquier curva en D .

Si los coeficientes de la ecuación 1.5 son holomorfos en $\{z \mid 0 < |z - a| < \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$ y al menos una es meromorfa y no holomorfa en $\{z \mid |z - a| < \epsilon\}$, entonces el punto a es un punto singular de 1.5.

Definición 1.5.2 Un punto singular a de 1.5 es regular si

$$(z - a)^k a_k(z), \quad (k = 1, \dots, r)$$

Son holomorfas en a .

1.6 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares

Consideremos $z = 0$ un punto singular regular de la ecuación 1.5 (en el caso de la ecuación hipergeométrica $z = 0$ es un punto singular regular). Como en 1.1 introducimos el operador;

$$D = z \frac{d}{dz}$$

Este operador se relaciona con $\frac{d}{dz}$ de la siguiente manera,

$$z^k \frac{d^k}{dz^k} = D(D-1) \cdots (D-k+1) \quad (1.7)$$

Para $k \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} z^r \left\{ \frac{d^r}{dz^r} + a_1(z) \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \cdots + a_r(z) \right\} &= \sum_{k=0}^r z^{r-k} a_{r-k}(z) D(D-1) \cdots (D-k+1) \\ &= D^r + \left\{ za_1(z) - \frac{(r-1)(r)}{2} \right\} D^{r-1} + \cdots \end{aligned}$$

Donde $a_0 = 1$. La ecuación 1.5 se puede reescribir en la forma

1.6 Comportamiento alrededor de puntos singulares regulares

$$Lu = 0$$

Donde L es un operador de la forma;

$$L = \sum_{i=0}^r b_i(z) D^{r-i}$$

Donde $b_0(z) = 1$, y $b_1(z), \dots, b_r(z)$ estan dados por series convergentes. Escribimos;

$$b_i(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j, \quad 0 \leq i \leq r \quad (1.8)$$

En particular, $b_{00} = 1, b_{0j} = 0, \quad (j \geq 1)$, escribiendo ;

$$u = z^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 = 1$$

Calculamos Lz :

$$\begin{aligned} Lz &= \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} z^j D^{r-i} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^r b_{ij} (s+k)^{r-i} c_k z^{s+k+j} \\ &= z^s \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^r b_{i,n-k} (s+k)^{r-i} c_k \right\} z^n \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta $Dz^\alpha = \alpha z^\alpha$, escribimos;

$$f(s) = \sum_{i=0}^r b_{i,0} s^{r-i} = \sum_{i=0}^r b_i(0) s^{r-i}$$

Definición 1.6.1 *La ecuación algebraica*

$$f(s) = 0 \quad (1.9)$$

Se llama la ecuación característica en el punto singular regular $z = 0$. Las raíces de 1.9 son llamados los exponentes característicos.

1. PRELIMINARES

1.7 Ecuaciones Fuchsianas

Lema 1.7.1 *Una ecuación diferencial*

$$\{D^r + b_1(z)D^{r-1} + \cdots + b_r(z)\}u = 0$$

Es regular singular en $z = 0$ si y solo si $b_j, (1 \leq j \leq r)$ son holomorfas en $z = 0$

La ecuación 1.5 con coeficientes racionales es *Fuchsiana* si cada punto singular en \mathbb{C} es regular, y si después de un cambio de variable z en $t = \frac{1}{z}$, la ecuación transformada tiene un punto singular regular en $t = 0$. Los exponentes de $t = 0$ son llamados los exponentes de 1.5 en el infinito.

Proposición 1.7.2 (Una caracterización de las ecuaciones Fuchsianas) *La ecuación 1.5 es Fuchsiana con singularidades regulares en $z_1, \dots, z_m, z_{m+1} = \infty$ si y solo si los coeficientes tienen la siguiente forma:*

$$a_k(z) = \frac{p_k(z)}{\prod_{i=1}^m (z - z_i)^k}, \quad (k = 1, \dots, r)$$

Donde cada $p_k(z)$ es un polinomio de grado a lo más $k(m - 1)$.

Definición 1.7.3 *Un esquema de Riemann es una tabla donde se representan los puntos singulares z_1, \dots, z_{m+1} y los exponentes en s_i^1, \dots, s_i^r en z_i , el esquema de Riemann de 1.5 se expresa como*

$$\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_{m+1} \\ s_1^1 & \dots & s_{m+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ s_1^r & \dots & s_{m+1}^r \end{pmatrix}$$

1.8 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica

Para nuestra ecuación hipergeométrica

$$(1 - z)z \frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a + b + 1)z\} \frac{du}{dz} - abu = 0 \quad (1.10)$$

Deseamos hallar el esquema de Riemann correspondiente, esto nos sirve para hallar la monodromía mas adelante por medio de las identidades de Gauss – Kummer ([KIY]).

1.8 Esquema de Riemann de la ecuación hipergeométrica

Los puntos singulares de nuestra ecuación son $1, 0, \infty$, y esto lo podemos ver transformando la ecuación 1.10 a la forma estándar;

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\{c - (a + b + 1)z\}}{z(z - 1)} \frac{du}{dz} - \frac{ab}{z(z - 1)} u = 0$$

Y obtenemos $a_1(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{z(z-1)}$ y $a_2(z) = \frac{-ab}{z(z-1)}$, podemos ver que los puntos singulares son $0, 1$ e ∞ (mostramos después que ∞ también es un punto singular pero consideremos por ahora que esto es cierto). Estos puntos también son regulares como podemos verificar;

Para $z = 0$

$$za_1(z) = z\left(\frac{c - (a + b + 1)z}{z(1 - z)}\right) = \frac{c - (a + b + 1)z}{1 - z}$$

Y

$$z^2 a_2(z) = z^2 \left(\frac{-ab}{z(1 - z)}\right) = \frac{-abz}{1 - z}$$

Y ambas son holomorfas en $z = 0$, análogamente verificamos que $z = 1$ es un punto singular regular (El caso $z = \infty$ se deja al final). Tenemos entonces 3 puntos singulares regulares para la ecuación 1.10, lo que deseamos ahora es hallar los exponentes en cada punto.

Para $z = 0$ recordemos que los exponentes son las raíces de la ecuación 1.9, la cual esta dada en este caso por

$$f(s) = \sum_{i=0}^2 b_i(0)s^{r-i}$$

Y en este caso $b_1(z) = za_1(z) - 1$ y $b_2(z) = z^2 a_2(z)$, es decir $b_1(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{1-z} - 1$ y $b_2(z) = \frac{-ab}{1-z}$ y por tanto;

$$f(s) = s^2 + b_1(0)s + b_2(0) = s^2 + (c - 1)s + 0$$

Cuyas raíces son 0 y $c - 1$. Para encontrar los exponentes en $z = 1$ hacemos un proceso similar y escribimos;

$$D_1 = (z - 1) \frac{d}{dz}$$

Y se cumple la misma relación de antes entre D_1 y $\frac{d}{dz}$, luego;

1. PRELIMINARES

$$(z-1)\left\{\frac{d^r}{dz^r} + a_1(z)\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \cdots + a_r(z)\right\} = D_1^r + \left\{(z-1)a_1(z) - \frac{(r-1)(r)}{2}\right\}D_1^{r-1} + \cdots$$

Si llamamos f_1 a la ecuación característica de 1.5 en $z = 1$, tenemos en este caso $b_1(z) = (z-1)a_1(z) - 1$ y $b_2(z) = (z-1)^2a_2(z)$ entonces;

$$f_1(s) = s^2 + b_1s + b_2(1) = s^2 + \{c - (a+b+1) + 1\}s = s^2 - (c-a-b)s$$

Cuyas raíces son 0 y $c-a-b$. Basta hallar los exponentes para $z = \infty$, hacemos una transformación $t = \frac{1}{z}$ y definimos $\theta \frac{t}{dt}$ y notamos que $D = -\theta$, obtenemos entonces;

$$z^r \left\{ \frac{d^r}{dz^r} + a_1(z)\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} + \cdots + a_r(z) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-(r-k)} a_{r-k} \left(\frac{1}{t}\right) (-1)^k \theta(\theta+1) \cdots (\theta+k-1)$$

En nuestro caso, para $r = 2$ la ecuación es

$$\theta^2 + (1 - t^{-1}a_1(\frac{1}{t}))\theta + t^{-2}a_2(\frac{1}{t})$$

Donde $-t^{-1}a_1(\frac{1}{t}) = \frac{a+b+1-ct}{t-1}$ y $t^{-2}a_2(\frac{1}{t}) = \frac{-ab}{t-1}$ de aquí vemos dado que ambas son holomorfas en 0 que $z = \infty$ es un punto regular singular. Entonces si f_∞ denota la ecuación característica de 1.10 con el cambio de variable en $t = 0$, tenemos;

$$f_\infty(s) = s^2 + (-a-b)s + ab$$

Cuyas raíces son a y b , por tanto los exponentes en $z = \infty$ de 1.10 son a y b . Concluimos con el esquema de *Riemann* de la ecuación hipergeométrica esta dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

1.9 Monodromía

Si consideramos de nuevo la ecuación 1.5, es posible asociarle una clase de conjugación en $GL(2, \mathbb{C})$ a la cual llamamos la monodromía de 1.5. Consideremos el grupo fundamental $\Pi_1(D, b)$ donde D es una vecindad en la cual los coeficientes

de 1.5 son holomorfas y $b \in D$.

Sea U una vecindad simplemente conexa de $b \in D$ y sea $\mathfrak{F} = (u_1, \dots, u_n)$ un sistema fundamental de soluciones en U . Si $\alpha \in \Pi_1(D, b)$ sea γ un representante y $\gamma_*(F)$ la continuación analítica de \mathfrak{F} a lo largo de γ . El teorema de monodromía para la continuación analítica ([KIY]) implica que $\gamma_*\mathfrak{F}$ depende en la clase de homotopía α , podemos escribir entonces $\alpha_*\mathfrak{F}$ en lugar de $\gamma_*\mathfrak{F}$. Ya que 1.5 es lineal, $\alpha_*\mathfrak{F}$ es también un sistema fundamental de soluciones de 1.5 en U y hay una única matriz invertible $M(\alpha; \mathfrak{F}) \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que

$$\alpha_*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}M(\alpha; \mathfrak{F}) \quad (1.11)$$

Ya que $e_*\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ y $(\alpha\beta)_*\mathfrak{F} = \alpha_*(\beta_*)\mathfrak{F}$ para $\alpha, \beta \in \Pi_1(D, b)$ tenemos

$$M(e, \mathfrak{F}) = I, M(\alpha\beta; \mathfrak{F}) = M(\alpha; \mathfrak{F})M(\beta; \mathfrak{F})$$

Esto implica que el mapeo

$$\rho_{\mathfrak{F}} : \Pi_1(D, b) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \alpha \mapsto M(\alpha; \mathfrak{F})$$

Es un homomorfismo. Llamamos a $\rho_{\mathfrak{F}}$ la representación de monodromía y a $\rho_{\mathfrak{F}}(\Pi_1(D, b)) \subset GL(n, \mathbb{C})$ el grupo de monodromía de 1.5 respecto al sistema fundamental de soluciones \mathfrak{F} . Si \mathfrak{G} es otro sistema de soluciones en otro punto a y denotamos también por \mathfrak{G} la continuación analítica de este a lo largo de una curva que une a y b , existe una matriz $C \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}C$ y tenemos

$$\mathfrak{G}M(\alpha; \mathfrak{G}) = \alpha_*\mathfrak{G} = (\alpha_*\mathfrak{F})C = \mathfrak{F}M(\alpha; \mathfrak{F})C = \mathfrak{F}C^{-1}M(\alpha; \mathfrak{F})C$$

Es decir

$$M(\alpha; \mathfrak{F}) = C^{-1}M(\alpha; \mathfrak{G})C$$

En otras palabras

$$\rho_{\mathfrak{G}}(\alpha) = C^{-1}\rho_{\mathfrak{F}}(\alpha)C, \text{ para } \alpha \in \Pi_1(D, b) \quad (1.12)$$

la representación de monodromía no solo depende de la ecuación diferencial 1.5, depende de igual manera del sistema fundamental de soluciones. Notemos que de cualquier manera que 1.12 implica que cada par de representaciones de monodromía de 1.5 son conjugadas, tal que la clase de conjugación de la representación de monodromía se determina únicamente por la ecuación diferencial 1.5. A esta clase de conjugación la llamamos *La Monodromia* de 1.5. entonces el grupo de

1. PRELIMINARES

monodromía $\rho_{\mathfrak{F}}(\Pi_1(D, b))$ de 1.5 respecto de cualquier \mathfrak{F} pertenece a la misma clase de conjugación, que tambiéñ llamamos *La Monodromia de 1.5*.

Cuando 1.5 es una ecuación diferencial fuchsiana en la esfera de Riemann con puntos singulares regulares en $p_1, \dots, p_m, p_{m+1} = \infty$, se toma $D = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$. Para cada $j = 1, \dots, m$, sea U_j un disco abierto en $D \cup \{p_j\}$ centrado en p_j , y sea l_j un lazo en $U_j \setminus \{p_j\}$ con punto base $q_j \in U_j \setminus \{p_j\}$ que encierra p_j una vez en sentido antihorario, y sea \mathfrak{F}_j un sistema fundamental de soluciones de 1.5 en una vecindad simplemente conexa de b y γ_j , ($j = 1, \dots, m$) arcos con punto inicial b y punto final q_j . Las matrices de conexión $C_j \in GL(n, \mathbb{C})$, ($j = 1, \dots, m$) se definen por

$$\gamma_{j*} \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_j C_j \quad (1.13)$$

Problema 1.9.1 *Problema de matrices de conexión* Para una ecuación diferencial lineal dada, sean $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_j$ y C_j como antes. Encontrar una expresión explícita de las C_j .

Las matrices de circuito M_j alrededor de p_j se pueden definir por

$$l_{j*} \mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}_j M_j \quad (1.14)$$

Ya que los generadores del grupo de monodromía respecto a \mathfrak{F} están dados por

$$C_j^{-1} M_j C_j,$$

Notamos que el problema de monodromía es parte del problema de conexión.

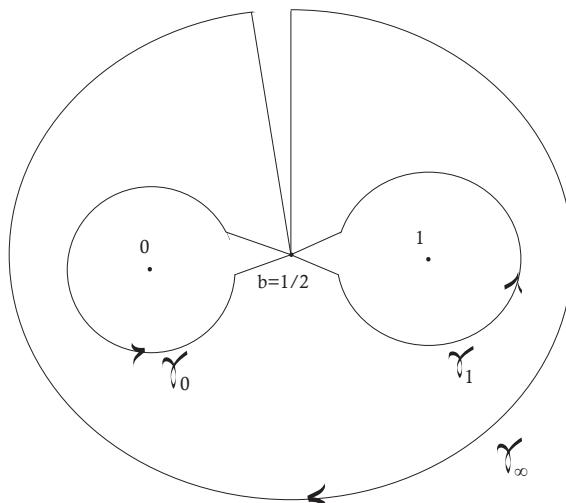


Figura 1.2: Lazos anclados en $b = \frac{1}{2}$

1.10 Monodromía de la ecuación hipergeométrica

El problema de hallar la monodromía respectiva a una ecuación diferencial es un problema complicado, afortunadamente existen métodos que nos permiten hallar (en ciertos casos) la monodromía de la ecuación hipergeométrica y también el grupo de monodromía para soluciones particulares. En los siguientes capítulos hallamos la monodromía de la ecuación hipergeométrica y uno de los grupos de monodromía respecto de las soluciones dadas en 1.1.

1.10 Monodromía de la ecuación hipergeométrica

En esta sección encontramos la monodromía de la ecuación hipergeométrica a través de su esquema de Riemann por medio de propiedades locales y la relación de Fuchs, utilizando fuertemente que la ecuación hipergeométrica resulta ser irreducible.

Sea $G = \pi_1(D, b)$ y $\gamma_j \in G$, ($j = 0, 1, \infty$), lazos en b . Sea $\rho : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$ una representación de monodromía del esquema de Riemann

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \rho_1 & \sigma_1 & \tau_1 \\ \rho_2 & \sigma_2 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

Dado que

$$\rho(\gamma_1 \cdot \gamma_0) = \rho(\gamma_\infty)^{-1} \quad (1.15)$$

ya que

$$\gamma_\infty^{-1} = \gamma_1 \gamma_0 y \gamma_0 \gamma_1 \quad (1.16)$$

es conjugado a $\gamma_1 \gamma_0$, tenemos;

$$\{\varepsilon(\rho_1), \varepsilon(\rho_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\gamma_0) \quad (1.17)$$

$$\{\varepsilon(\sigma_1), \varepsilon(\sigma_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\sigma_1) \quad (1.18)$$

$$\{\varepsilon(-\tau_1), \varepsilon(-\tau_2)\} \text{ conjunto de eigenvalores de } \rho(\sigma_0 \sigma_1) \quad (1.19)$$

Donde $\varepsilon(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$. La clase de conjugación de ρ , es decir la monodromía de $RE(\rho, \sigma, \tau)$ esta casi determinada por los eigenvalores, y esta completamente determinada si la monodromía es irreducible.

Definición 1.10.1 *La ecuación de Riemann $RE(\rho, \sigma, \tau)$ se dice irreducible si la monodromía es irreducible*

Teorema 1.10.2 *La ecuación de Riemann es irreducible si y solo si*

$$\rho_i + \sigma_j + \tau_k \notin \mathbb{Z}, (i, j, k = 1, 2)$$

1. PRELIMINARES

Bajo esta condición la representación ρ se expresa hasta conjugación por las siguientes matrices:

$$\rho(\gamma_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\rho_1) & 1 \\ 0 & \varepsilon(\rho_2) \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma_1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon(\sigma_1) & 0 \\ b & \varepsilon(\sigma_2) \end{pmatrix}$$

Y el número b está dado por $b = \varepsilon(-\tau_1) + \varepsilon(-\tau_2) - \varepsilon(\rho_1 + \sigma_1) - \varepsilon(\rho_2 + \sigma_2)$, y $\varepsilon(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$. Todas las representaciones obtenidas al intercambiar ρ_1, ρ_2 y/o σ_1, σ_2 son mutuamente conjugadas.

En nuestro caso tenemos el esquema de Riemann;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix}$$

Y verificamos si satisface las condiciones del teorema, tenemos los siguientes casos:

1. $0+0+a=a$
2. $0+c-a-b+b=c-a$
3. $0+c-a-b+a=c-b$
4. $1-c+0+a=1-c+a$
5. $1-c+0+b=1-c+b$
6. $1-c+c-a-b+b=1-a$
7. $0+0+b=b$
8. $1-c+c-a-b+a=1-b$

Queremos calcular $a, c-a, c-b, 1-c+a, 1-c+b, 1-a, b, 1-b$, y estamos considerando que los exponentes $1-c, c-a-b, a-b$ son imaginarios puros, por lo que basta probar que ninguno de los anteriores están en \mathbb{Z} .

No es difícil verificar que $b = \frac{1-i(\theta_0+\theta_1+\theta_2)}{2} \notin \mathbb{R}$. Para a tenemos;

$$a = \frac{1-i(\theta_0+\theta_1-\theta_2)}{2}$$

Y podemos ver que $a \notin \mathbb{R}$ o $a = \frac{1}{2}$ de cualquier modo $a \notin \mathbb{Z}$. Para $c-a$ se tiene;

1.11 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica

$$c - a = \frac{1 + i(-\theta_0 + \theta_1 - \theta_2)}{2}$$

Por lo que de nuevo $c - a \notin \mathbb{R}$ o $c - a = \frac{1}{2}$, y de cualquier modo $c - a \notin \mathbb{Z}$. Para $c - b$ se tiene;

$$c - b = \frac{1 + i(\theta_2 + \theta_1 - \theta_0)}{2}$$

Entonces $c - b \notin \mathbb{R}$ o $c - b = \frac{1}{2}$ y en cualquier caso $c - b \notin \mathbb{Z}$. Para $1 - c + a$ notamos que $1 - c + a = -(c - a - 1)$ y $c - a - 1 = -\frac{1}{2}$ o $c - a - 1 \notin \mathbb{R}$. En los casos restantes un proceso análogo nos enseña que ninguno de los números considerados esta en \mathbb{Z} .

Invocamos el teorema 1.10.2 al esquema de Riemann que hallamos para nuestra ecuación, y obtenemos que las matrices que generan la monodromia de la ecuación hipergeométrica con exponentes imaginarios puros son:

$$\rho(\gamma_0) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{2\pi i(1-c)} \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma_1) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & e^{2\pi i(c-a-b)} \end{pmatrix}$$

Con $b = e^{-2\pi i a} + e^{-2\pi i b} - 1 - e^{2\pi i(1-a-b)}$, y la monodromía de la ecuación hipergeométrica es generada por $\rho(\gamma_0), \rho(\gamma_1)$ en $GL(2, \mathbb{C})$.

1.11 Grupo de monodromía con las soluciones dadas por la serie hipergeométrica

En este capítulo pretendemos dar a conocer el grupo de monodromía con el par de sistemas fundamentales de soluciones hallados en 1.1, utilizando las identidades de *Gauss – Kummer*. El enfoque principal en este capítulo es exponer las herramientas necesarias para ese propósito y los resultados principales que llevan a una expresión del grupo de monodromía con los sistemas fundamentales de soluciones dadas. Los teoremas y resultados de este capítulo pueden encontrarse en [KIY] así como sus demostraciones, y se remite al lector a dicha bibliografía para un desarrollo más profundo de lo expresado aquí.

Queremos resolver el problema de conexión utilizando las identidades de *Gauss – Kummer* y encontrar generadores para el grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeométrica con las soluciones dadas en 1.1. Los sistemas fundamentales de soluciones son $(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$ y $(f_1(x; 0), f_1(x; c - a - b))$, queremos encontrar una relación entre estos sistemas.

1. PRELIMINARES

Teorema 1.11.1 *Si ninguno de los exponentes c o $c - a - b$ es un entero entonces*

$$(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c)) = (f_1(x; 0), f_1(x; c - a - b))P$$

Donde P es la matriz definida por

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \\ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix}$$

Y Γ es la función Gamma.

En nuestro caso los exponentes $1 - c$ y $c - a - b$ están en $i\mathbb{R}$ por lo que c y $c - a - b$ cumplen las condiciones del teorema.

Los lazos en la fig. 1.2 nos sirven para hacer la continuación analítica del sistema fundamental de soluciones $(f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$ y gracias al teorema anterior sabemos que tendremos una matriz conjugada bajo P que será generador de nuestro grupo de monodromía.

Teorema 1.11.2 *Sea γ_v , ($v = 0, 1$) lazos con punto inicial y final $b = \frac{1}{2}$ definidos en 1.2, supongamos que ni c ni $c - a - b$ son enteros. La continuación analítica del sistema fundamental de soluciones $\mathfrak{F} = (f_0(x; 0), f_0(x; 1 - c))$ a lo largo de γ_v esta dada por*

$$\gamma_{v*}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}A_v, (v = 0, 1)$$

Donde A_v son matrices definidas por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(-c) \end{pmatrix}, \quad A_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(c - a - b) \end{pmatrix} P$$

Donde P esta dada por 1.11.1 y $\varepsilon(\cdot) = \exp(2\pi i \cdot)$. El grupo de monodromía respecto al sistema fundamental de soluciones \mathfrak{F} esta generado por A_0 y A_1 .

CHAPTER
2

Grupo de Schottky de la ecuación hipergeométrica

Nuevamente consideramos la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu = 0$$

Cuyos exponentes son

$$1 - c = i\theta_0, \quad c - a - b = i\theta_1, \quad a - b = i\theta_2$$

Donde supondremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0$. Para cualesquiera dos soluciones linealmente independientes u_1 y u_2 tenemos el mapeo multivaluado

$$s : \mathbb{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \mathbb{P} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

llamado el mapeo de Schwarz.

2.1 Dominios fundamentales

En [SY01] se pueden encontrar un dominio F_x en \mathbb{C} y un dominio F_s en $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que el mapeo

$$s|_{F_x} : F_x \rightarrow F_s$$

2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Es un biholomorfismo y el mapeo s se puede recuperar via el mapeo restringido $s|_{f_x}$ a traves del principio de reflexión de Schwarz ([SY01]), estos se llaman dominios fundamentales para el mapeo de Schwarz.

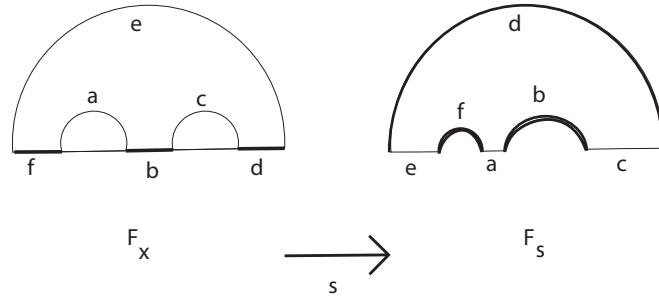


Figura 2.1: Dominios fundamentales

Denotemos por $C(c, r)$ el círculo en el plano s con centro c y radio r y considerense los tres círculos disjuntos en el plano s

$$C_1 = C(0, 1), C_2 = C(0, T), C_3 = C(-C, R)$$

Donde $T = e^{\theta_1\pi}, r = e^{-\theta_0\pi}$

$$C = \frac{\xi(1 - r^2)}{\xi^2 - r^2}, R = \frac{r(1 - \xi^2)}{\xi^2 - r^2}, \xi = \left(\frac{\cosh\theta_2\pi + \cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi}{\cosh\theta_2\pi + \cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cuando $\theta_2 = 0$

$$\cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi = \frac{1 + (rt)^2}{2rT}$$

y

$$\cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi = \frac{r^2 + T^2}{2rT}$$

Y tambiéen $\cosh\theta_2\pi = 1$ por lo que

2.1 Dominios fundamentales

$$\xi^2|_{\theta_2=0} = \frac{1 + \frac{1+(rt)^2}{2rT}}{1 + \frac{r^2+T^2}{2rT}} = \frac{\frac{2rT+1+(rt)^2}{2rT}}{\frac{2rT+r^2+T^2}{2rT}} = \frac{T^2 + 2rT + 1}{r^2 + 2rT + T^2} = \frac{(rT + 1)^2}{(r + T)^2}$$

Entonces $\xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr+1}{T+r}$

Ya que $T > 1$ y $r < 1$ tenemos por un lado $r^2 < 1$ entonces $Tr + r^2 < Tr + 1$, es decir, $r(T + r) < Tr + 1$, entonces; $r < \frac{Tr+1}{T+r}$.

Por otro lado; $r < 1$ y también $T - 1 > 0$ por lo que $(T - 1)r < T - 1$ entonces $Tr - r < T - 1$ y luego $Tr + 1 < T + r$ por lo que $\frac{Tr+1}{T+r} < 1$ Dado que ξ como una función de $\theta_2 \geq 0$ incrementa de manera monótona a 1 y

$$1 > \xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr+1}{T+r} > r$$

tenemos

$$\begin{aligned} C - R - 1 &= \frac{\xi(1 - r^2)}{\xi^2 - r^2} - \frac{r(1 - \xi^2)}{\xi^2 - r^2} - 1 = \frac{\xi - \xi r^2 - r + r\xi^2 - \xi^2 - r^2}{\xi^2 - r^2} \\ &= \frac{\xi - r + \xi r(-r + \xi) - (\xi - r)(\xi + r)}{\xi^2 - r^2} \\ &= \frac{(\xi - r)(1 + \xi r - (\xi + r))}{(\xi + r)(\xi - r)} \\ &= \frac{1 + \xi r - (\xi + r)}{\xi + r} = \frac{(1 - r)(1 - \xi)}{\xi + r} > 0 \\ T - C - R &= \frac{(T + r)\xi - (Tr + 1)}{\xi - r} > 0 \end{aligned}$$

y tenemos

$$-T < -C - R < -C + R < -1 < 1 < T$$

Comentario 2.1.1 Existe una relación entre el número ξ y los elementos de la matriz P en el teorema 1.11.1 y una relación entre dichos elementos, estas relaciones son importantes para verificar más adelante que en efecto podemos decir que el grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica es un grupo de Schottky, Las relaciones son las siguientes;

$$P = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{|A|}{|B|}$$

Y también $A = \bar{D}$, $B = \bar{C}$

2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

El dominio en el semi-plano superior, acotado por C_1, C_2, C_3 y el eje real, puede servir como un dominio fundamental F_s , y tiene la forma de un puente de doble arco como en la figura 2.1. El dominio fundamental F_x también tiene la forma de un puente de doble arco como en la figura 2.1, y esta acotado por tres segmentos reales y tres curvas que no son parte de circunferencias.

2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones

Gracias a estos dominios fundamentales y el principio de reflexión de Schwarz (A) aplicado a lo largo de los lados, el grupo de monodromía de la ecuación diferencial se puede describir como sigue. La reflexión con respecto al círculo $C(c, r)$ donde c es real, esta dada por

$$\psi(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{\bar{s} - c}$$

Sea $\bar{\Lambda}$ el grupo generado por las tres reflexiones respecto a los círculos C_1, C_2, C_3 , respectivamente. El grupo de monodromía Λ_θ de la ecuación hipergeométrica es el subgrupo de $\bar{\Lambda}$, de índice 2 que consiste de las palabras pares de ψ_1, ψ_2, ψ_3 .

Por otro lado, para el círculo $C(c, r)$ definimos la transformación fraccional lineal de orden 2 que fija los dos puntos de intersección del círculo y el eje real:

$$\gamma(c, r) : s \mapsto \frac{r^2}{s - c} + c$$

Sea Γ_θ , el grupo generado por tres involuciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ con respecto a los círculos C_1, C_2, C_3 , respectivamente. El grupo de monodromía Λ_θ es el subgrupo de Γ_θ , de índice 2 que consiste de las palabras pares de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Sea $\omega(\subset \mathbb{P}^1)$ el dominio de discontinuidad de Γ_θ y el grupo de Schottky Λ_θ .

Esta representación tiene algunos problemas, aunque la ecuación hipergeométrica es simétrica respecto de $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, los tres círculos C_1, C_2, C_3 no lo son. Por ejemplo si $\theta_2 \rightarrow 0$ los círculos C_2 y C_3 se tocan, y si $\theta_1 \rightarrow 0$ entonces C_3 tiende a un punto y C_1 y C_2 coinciden, más aún ya que C_1 y C_2 son concéntricos. Hacemos un cambio de coordenadas como sigue :

$$s \mapsto \frac{(3 + T^2)s + 1 + 3T^2}{4(s + T^2)}$$

entonces los diámetros de los círculos en el eje real están dados por

$$C_1 : [s_4, s_5], C_2 : [s_1, s_6], C_3 : [s_2, s_3]$$

Donde

$$s_1 = -\frac{(1 - T)^2}{4T}, s_2 = -\frac{(T - 1)^3 - (3 + T^2)(T - C - R)}{4(T^2 - T + T - C - R)}$$

2.2 El grupo de monodromía generado por reflexiones

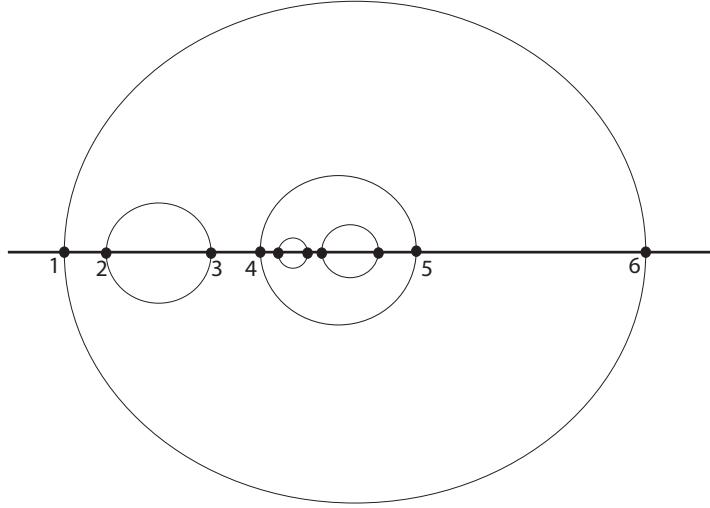


Figura 2.2: Círculos C_1, C_2, C_3

$$s_3 = -\frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-(C-R-1))} + \frac{1}{2}, s_4 = \frac{1}{2}$$

$$s_5 = 1, s_6 = \frac{(1+T)^2}{4T}$$

Notemos que $s_1 < s_2 < \dots < s_6$, Ahora podemos probar lo siguiente,

Proposición 2.2.1 Si $\theta_1 = 0$ entonces C_1 y C_2 se tocan en un punto. Si $\theta_2 = 0$ entonces C_2 y C_3 se tocan en un punto. Si $\theta_0 = 0$, entonces C_3 y C_1 se tocan en un punto

Prueba.

Cuando $\theta_1 = 0$, notemos que en este caso $T = e^{\theta_1\pi}$ y dado que $\theta_1 = 0$ se tiene que $T = 1$, también recordemos que $C_1 : [s_4, s_5]$ y $C_2 : [s_1, s_6]$ y dado que $s_5 = 1$ y $s_6 = \frac{(1+T^2)^2}{4T} = \frac{(1+1^2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ concluimos que C_1 y C_2 se tocan en 1.

Si $\theta_2 = 0$, primero veremos que $T-C-R = 0$, como $\theta_2 = 0$ entonces $\xi = \frac{Tr+1}{T+r}$ esto implica que $(T+r)\xi = Tr + 1$ y como $T - C - R = \frac{(T+r)\xi-(Tr+1)}{\xi-r} = \frac{Tr+1-(Tr+1)}{\xi-r} = 0$, Ahora bien $s_1 = -\frac{1-T^2}{4T}$ y $s_2 = -\frac{(T-1)^3-(3+T^2)(T-C-R)}{4(T^2-T+T-C-R)} = -\frac{(T-1)^3}{4(T^2-T)} = -\frac{(T-1)^2(T-1)}{4T(T-1)} = -\frac{(T-1)^2}{4T} = s_1$ por lo que C_2 y C_3 se tocan en s_1 .

Por último si $\theta_0 = 0$ tenemos $r = e^{-\theta_0\pi}$ en este caso $r = 1$ mostremos que $C - R - 1 = 0$. De las deducciones anteriores $C - R - 1 = \frac{(1-r)(1-\xi)}{\xi+r}$, Entonces $C - R - 1 = 0$ ya que $r = 1$, entonces $s_3 = \frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-C-R-1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ya que

2. GRUPO DE SCHOTTKY DE LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$C - R - 1 = 0$ y dado que $C_3 : [s_2, s_3]$ y $C_1 : [s_4, s_5]$ por los calculos anteriores obtuvimos $s_4 = s_3$ (recordando que $s_4 = \frac{1}{2}$), Concluyendo con la prueba. \square

2.3 El grupo de Schottky asociado al grupo de Monodromía

Si ahora tomamos como antes las reflexiones ψ_1, ψ_2, ψ_3 , definimos las siguientes transformaciones;

$$\gamma_1 = \psi_2\psi_1, \quad \gamma_2 = \psi_1\psi_3$$

Y tomamos los círculos C_1, C_3 y $C'_1 = \psi_2(C_1), C'_3 = \psi_1(C_3)$, luego por definición tenemos;

$$\gamma_1(C_1) = C'_1, \quad \gamma_2(C_3) = C'_3$$

Además tenemos que el exterior de C_1 se mapea al interior de C'_1 y el exterior de C_3 se mapea al interior de C'_3 , por la definición tenemos un grupo de *Schottky* de genus 2 (genero 2). Para el grupo de *Schottky* anterior tenemos que sus transformaciones estan dadas también por;

$$\gamma_1 = sT^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T^2} \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \frac{s+C}{-Cs+R^2-C^2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & C \\ -C & R^2-C^2 \end{pmatrix}$$

Y notando que $C = \frac{|A||B|(1-r^2)}{|A|^2-|B|^2r^2}$ y $R^2 - C^2 = \frac{|A|^2r^2-|B|^2}{|A|^2-|B|^2r^2}$ podemos ver que son conjugadas bajo P a las matrices del grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica 1.11.2.

CHAPTER
3

El teorema de Nielsen

En este capítulo proponemos un teorema sobre la acción discontinua de grupos de transformaciones que pretendemos aplicar al caso del grupo de monodromía de la ecuación hipergeométrica.

Todo en este capítulo es pensado en el sentido de Poincaré y hacemos un breve recordatorio de los conceptos que ocupamos durante el mismo.

Tratamos de dar una caracterización de los grupos propiamente discontinuos de transformaciones lineales fraccionales con círculo principal en el sentido de la teoría de automorfismos. Representamos al plano hiperbólico como una región circular en el plano complejo, este modelo llamado el disco de poincaré se divide en dos partes de $\{z|z| \leq 1\}$, el interior le denominamos $D = \{z|z| < 1\}$ y la frontera la denominamos $E = \{z|z| = 1\}$. Todas las cosecuencias geométricas las entendemos en el sentido no-euclídeo. También denotamos por \mathbb{H}^+ al modelo hiperbólico del semiplano.

Llamamos puntos finales a los extremos de una recta situados en el círculo infinito, e identificamos tres tipos de relaciones entre las rectas, a saber; concurrentes, paralelas y divergentes.

Definición 3.0.1 *Las rectas Paralelas son dos rectas que tienen un punto final en común.*

Las rectas Concurrentes son las que se intersectan en D.

Las rectas Divergentes son las que no se intersectan en ningún lugar.

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

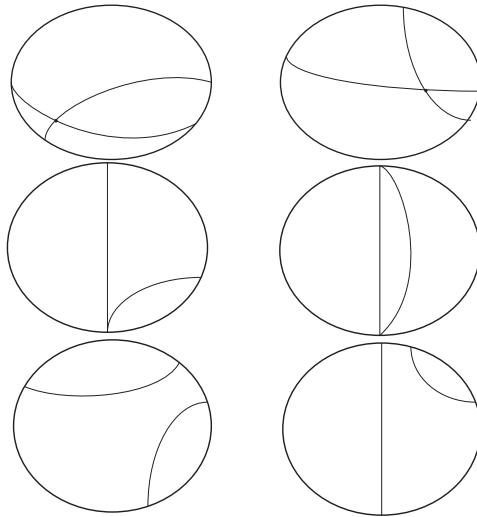


Figura 3.1: Rectas hiperbólicas concurrentes, paralelas y divergentes respectivamente.

Los **Horociclos** son círculos tangentes a algún punto en la frontera E de S^1 . Es importante dejar en claro que los Horociclos no son geodésicas.

Los **hiperciclos** se forman por una recta L y un punto \mathbf{P} fuera de ella, el hiperciclo es el lugar geométrico de todos los puntos a distancia $d_H(\mathbf{P}, L)$, de L y del mismo lado de P . d_H es la distancia hiperbólica. De igual manera los hiperciclos no son geodésicas.

Dividiremos las transformaciones isométricas en dos grupos, las que preservan la orientación y las que no. En el grupo de las que preservan la orientación distinguimos tres tipos distintos de transformaciones;

Definición 3.0.2 *Las transformaciones **parabólicas** tienen un punto fijo en E y dado un horociclo K tangente en dicho punto fijo a E , esta transformación tiene un desplazamiento fijo en K .*

*Las transformaciones **elípticas** tienen un punto fijo en D y un ángulo fijo ϕ de rotación en torno al punto fijo.*

*Las transformaciones **hiperbólicas** tienen dos puntos fijos en E y una recta invariante, la recta que pasa por dichos puntos fijos la llamamos eje de la transformación.*

Si G es un grupo de transformaciones isométricas, un punto invariante para G es un punto fijo bajo todos los elementos de G , de una manera similar pensamos en

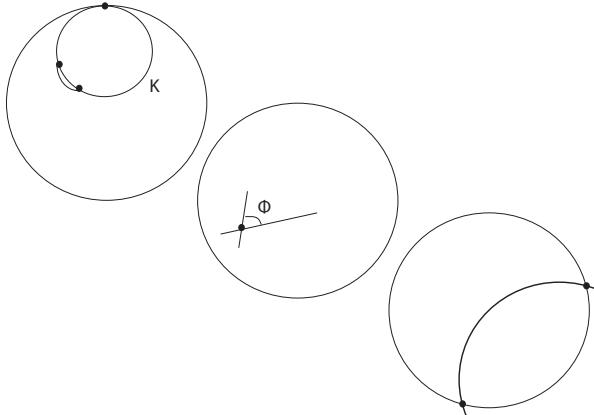


Figura 3.2: Representación de los puntos importantes en las transformaciones hiperbólicas

una recta invariante.

Un par de conjuntos de puntos M y M' en $D + E$ son equivalentes respecto a G si existe $f \in G$ tal que $M = fM'$. El total de conjuntos equivalentes de M se denota como la familia GM llamada clase de equivalencia de M , en esta familia si $f_1, f_2 \in G$ y $f_1 \neq f_2$ entonces $f_1M \neq f_2M$ sin importar que como conjunto sean iguales.

Definición 3.0.3 Decimos que G es discontinuo en un punto $x \in D$, si x no es un punto de acumulación de la clase Gx , si esto sucede Gx no tiene puntos de acumulación en D

Proposición 3.0.4 Si G es discontinuo en x , G no tiene puntos de acumulación en D .

Prueba:

Supongamos que G es discontinuo en x , existe m tal que $\forall i, j$, $d_H(g_i x, g_j x) > m$, de otro modo x sería un punto de acumulación de Gx . Sea y un punto arbitrario de D y sea U_r una vecindad de y de radio $r < m$, entonces a lo más hay un punto g_x de Gx en U_r , si tomamos $V_{r'}$ vecindad de y con $r' < d_H(g_x, y)$, esa vecindad no contiene puntos de Gx . \square

Esto implica que si G es discontinuo en un punto de D entonces es discontinuo en todo D .

Las únicas isometrías de \mathbb{H}^+ que preservan la orientación son las de $PSL(2, \mathbb{R})$, las transformaciones mencionadas con anterioridad se encuentran en este grupo. Si

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

$f \in PSL(2, \mathbb{R})$ y g otra transformación entonces gfg^{-1} es de la misma clase que f .

Llamaremos **reversiones** a las transformaciones que invierten la orientación, las reversiones son las **reflexiones** respecto a una recta, y las reflexiones compuestas con elementos hiperbólicos a las que llamamos **h-reflexiones**.

La reflexión respecto a una recta hiperbólica es la reflexión respecto a una circunferencia euclíadiana.

Teorema 3.0.5 [Teorema de Nielsen] *Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de transformaciones isométricas en el plano hiperbólico sin puntos ni líneas invariantes sea discontinuo en D es que los puntos fijos de los elementos elípticos del grupo, si los hay, no se acumulen en D*

La condición de que no tenga puntos ni rectas invariantes es necesaria, como podemos ver en los siguientes casos.

1. Si G es un grupo de elementos parabólicos con un mismo punto fijo al infinito.
2. Si G es un grupo de elementos hiperbólicos con una recta fija dada.

Ninguno de los anteriores contiene elementos elípticos sin embargo ninguno es discontinuo en D .

Si G contiene reversiones y H es un subgrupo de G y además $H \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ se tiene que H es normal y de índice 2. Es normal ya que si $f \in H$ para cualquier elemento $g \in G$ se tiene que gfg^{-1} es del mismo tipo que f por lo que $gfg^{-1} \in H$, es de índice 2, para ver esto basta probar que si $f, g \in G - H$ entonces $f \cong g$ equivalentemente que $fg^{-1} \in H$, dado que f, g revierten orientación se tiene que fg^{-1} conserva la orientación y por lo tanto esta en H .

Una clase de equivalencia Gx es la suma de las clases Hx y Hgx con g una reversión en G ($H \cup Hg = G \Rightarrow Hx \cup Hgx = Gx$), por lo que se concluye que G y H son ambos discontinuos en D o ambos no lo son. En otras palabras H es discontinuo en D si y solo si G lo es.

Proposición 3.0.6 *Si G no tiene rectas ni puntos invariantes tampoco los tiene H .*

Prueba:

Supongamos que H deja invariantes un punto en $D + E$, pero ningún otro punto (y por tanto ninguna recta), como G no deja puntos invariantes, existe $g \in G$ tal

que $gc \neq c$ luego el subgrupo gHg^{-1} deja invariante gc pero ningun otro punto en $D + E$ pero como $H \triangleleft G$ se tiene que $gHg^{-1} = H$ y como $gc \neq c$ implica que H fija c y gc lo cual es una contradicción, concluimos que H no deja puntos invariantes. Un razonamiento análogo nos enseña que H no deja rectas invariantes.

□

Desde ahora G denotará un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos ni rectas invariantes.

Ahora probamos el **Teorema 3.0.5** para el caso cuando el grupo tiene elementos elípticos.

Prueba:

Primero probaremos que si los puntos fijos de los elementos elípticos se acumulan $\Rightarrow G$ no es discontinuo en D

Supongamos que los puntos fijos de los elementos elípticos se acumulan en D (tiene un punto de acumulación en D), es posible encontrar una sucesión de puntos fijos que convergen al punto de acumulación digamos x (por ser espacio métrico) y sean estos y_1, y_2, \dots y f_1, f_2, \dots los respectivos elementos elípticos. Por un lado $d_H(y_i, x) \leq \epsilon$ para i adecuada, considerando $\{f_i x\}$ podemos notar que

$$d_H(f_i x, x) \leq d_H(f_i x, y_i) + d_H(y_i, x) = 2d_H(y_i, x)$$

Lo anterior debido a que f_i fija y_i y que es una isometría. Luego entonces $f_i x \rightarrow x$, es decir Gx se acumula en x por tanto G no es discontinuo en x y por lo tanto no lo es en D .

Si los puntos fijos de los elementos elípticos no se acumulan en $D \Rightarrow G$ es discontinuo en D .

Sea c un punto fijo de algún elemento elíptico en G . Basta notar que Gc contiene solo puntos fijos de elementos elípticos de G , observando que para $g(c) \in Gc$ el elemento $gfg^{-1} \in G$ lo deja fijo si f es un elemento elíptico que fija c , luego c no es un punto de acumulación de Gc ya que los puntos fijos de elementos elípticos no se acumulan, entonces G es discontinuo en c y por lo tanto G es discontinuo en D .

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes

Lema 3.1.1 Sean f y g elementos hiperbólicos cuyos ejes son divergentes y cuyos desplazamientos λ miden lo mismo pero tienen sentidos opuestos, y sea δ la distancia entre sus ejes, entonces fg es elíptico, parabólico o hiperbólico dependiendo de

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \delta \operatorname{senh} \frac{1}{2} \lambda \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Prueba:

Como los ejes son divergentes existe una normal común a ambos y a esta recta le llamamos s' , denotemos a los ejes de f y g como A_f y A_g respectivamente, entonces la normal que mencionamos antes corta a A_f en a y a A_g en a' (Fig. 3.3) y elegimos b, b' en A_f y A_g respectivamente de tal manera que $d_H(a, b) = d_H(a', b') = \frac{1}{2}\lambda$ y además en la dirección que se desplaza f . Sean s, s'' las rectas normales a A_f, A_g en b, b' y por abuso de notación las reflexiones respecto a estas rectas y s' se denotaran de la misma manera. (Fig. 3.4)

Queremos ver que tenemos la relación $f = ss'$, es claro que ss' preserva A_f ya que s' lo preserva y s también por ser normal a este eje (las circunferencias ortogonales son invariantes bajo inversiones entre ellas), para ver que tiene el mismo sentido que f basta ver hacia donde desplaza un punto y es fácil si tomamos a que queda fijo bajo s' y bajo s se desplaza en la misma dirección que f , por último hay que verificar que $d_H(x, ss'x) = \lambda$ pero como ss' preserva la orientación y tiene dos puntos fijos (los puntos finales del eje fijo) necesariamente tiene que ser un elemento hiperbólico y para saber cuánto mide su desplazamiento de nuevo basta verificarlo para un punto en la recta fija y tomando de nuevo a notamos que $d_H(a, ss'a) = d_H(a, sa) = \lambda$, en conclusión $f = ss'$ y un proceso análogo nos permite probar que $g = s's''$.

Queremos saber ahora qué tipo de transformación es fg , por lo anterior tenemos que $fg = ss's's'' = ss''$, ahora todo depende de la posición de los ejes de f y g .

Caso 1. [las rectas se intersectan en algún punto de $D + E$]

Sea m el punto medio del segmento aa' , la normal a s' que pasa por m bisecta

3.1 El lema de los elementos hiperbólicos con ejes divergentes

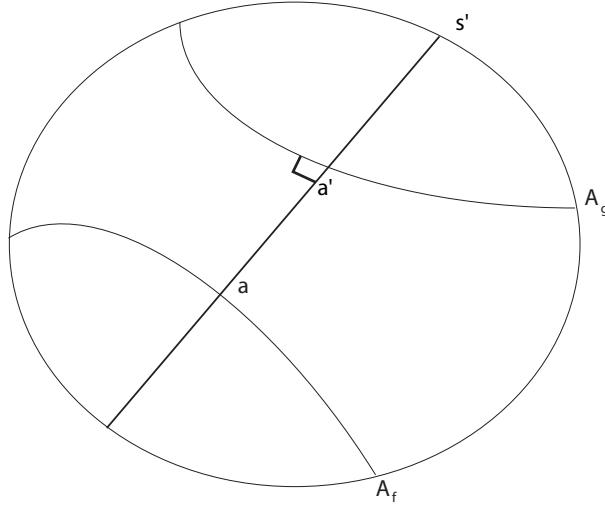


Figura 3.3: Figura 3.3

el ángulo que forman los ejes en el punto de intersección p (3.4), para ver esto reflejamos las rectas l y σ respecto de l obtenemos l y s'' , como la reflexión es conforme el ángulo entre l y s'' es el mismo que el ángulo entre l y s . Es claro que el punto de intersección p sera el punto fijo de la transformación, sea $\frac{1}{2}\phi_{fg}$ el ángulo entre s y s' (la inversión respecto a dos circunferencias es un elemento elíptico con ángulo el doble del ángulo de esta intersección).

Luego $abpm$ es un cuadrilatero con 3 ángulos rectos y el ángulo restante agudo (cuadrilatero de Lambert Fig. 3.5) cuyas medidas son $\frac{1}{4}\phi_{fg}$ con lados $\frac{1}{2}\delta$ y $\frac{1}{2}\lambda$ por lo cual tenemos $\operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}\delta \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2}\lambda = \cos^2 \frac{1}{4}\phi_{fg} \leq 1$ y es igual a 1 en el caso de que se intersecten en el infinito ($\phi = 0$) y en dado caso la transformación seria parabólica.

Caso 2

En el caso que los ejes sean divergentes, existe una recta normal a ambos y se tiene que la recta l bisecta al segmento entre s y s' de esta recta normal, entonces basta probar que;

1. Esta recta normal es el eje de fg
2. En efecto l bisecta al segmento entre s y s' de esta recta normal

Para (1) Probaremos que fg es hiperbólica viendo que tiene dos puntos fijos y que se encuentran en la normal mencionada antes. Sean x y x' los puntos finales de dicha recta normal y notemos que $s''x = x'$ ya que $s''x$ debe cumplir que esta

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

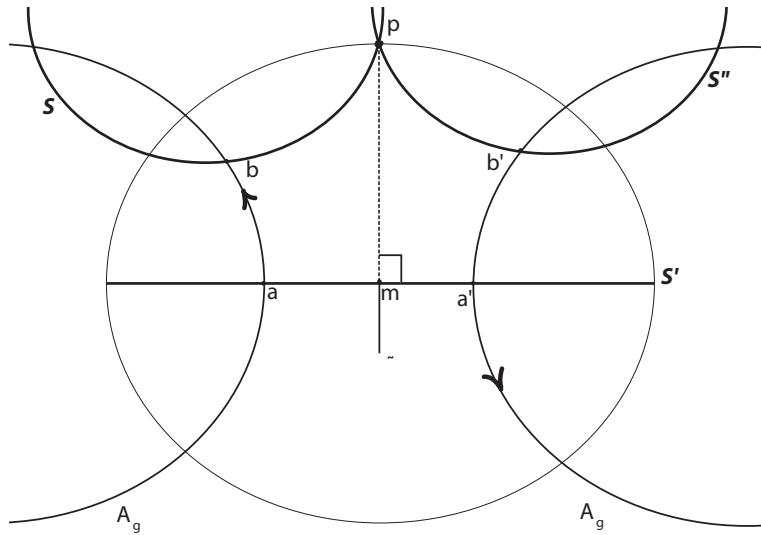


Figura 3.4: Figura 3.4

sobre la recta normal a s'' y que $d_H(x, s'') = d_H(s''x, s'')$ pero $d_H(x, s'') = \infty$, por la misma razón $sx' = x$ entonces $ss''x = x$ y tambien se cumple $ss''x' = x'$ por lo tanto fg tiene 2 puntos fijos y su eje es la recta que los une, que en este caso es la recta normal mencionada (Fig. 3.6).

Para (2) queremos probar que $d_H(x, y) = d_H(y, x')$ donde y es el punto de intersección de la normal con l , al reflejar respecto de l y notando que $x \mapsto x'$ bajo s y $d_H(x, y) = d_H(y, sx)$ tenemos el resultado.

Finalmente tenemos las rectas s'', A_g, s, l y A_{fg} y estas forman un pentágono con 4 ángulos rectos y con lados $\frac{1}{2}\lambda_{fg}$, $\frac{1}{2}\delta$, $\frac{1}{2}\lambda$ (Fig. 3.7) y podemos concluir (A)

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2}\delta \operatorname{senh} \frac{1}{2}\lambda = \cosh \frac{1}{4}\lambda_{fg} > 1$$

□

3.2 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos

Lema 3.2.1 Sean f y g dos elementos hiperbólicos con ejes A_f y A_g y desplazamientos iguales λ , y con ángulo de intersección ϕ . El conmutador $[f, g] = fgf^{-1}g^{-1}$ es elíptico, parabólico o hiperbólico dependiendo de

3.2 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos

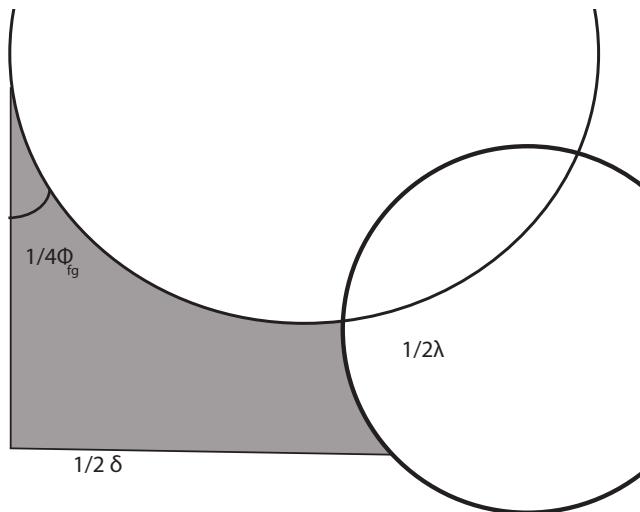


Figura 3.5: Cuadrilatero de Lambert

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\lambda\right)\operatorname{sen}\phi \begin{cases} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{cases}$$

Prueba:

Sea s' el punto de intersección de A_f y A_g , sea s el punto sobre A_f tal que $d_H(s', s) = \frac{1}{2}\lambda$ y trazado siguiendo la dirección de A_f , y sea s'' el punto sobre A_g tal que $d_H(s', s'') = \frac{1}{2}\lambda$ y trazado siguiendo la misma dirección que A_g (Fig. 3.8).

Y consideremos los elementos elípticos de ángulo π respecto a estos puntos y los denotaremos igual que denotamos a sus puntos fijos.

Queremos primero probar que $f = ss'$, para esto deseamos ver los puntos que deja fijos ss' . El elemento elíptico con ángulo π funciona de la siguiente manera; dado un punto x se traza la recta que va de x al punto fijo c , la imagen de x bajo el elemento elíptico llamemosle y esta sobre la misma recta y $d_H(x, c) = d_H(y, c)$, con este proceso podemos ver que ss' fija los mismos puntos que f por lo tanto el eje de f es el mismo que el de ss' solo falta ver cuánto es el desplazamiento de ss' , como antes, basta verificarlo para un punto y en esta ocasión tomamos el punto s' , tenemos que $d_H(s, ss'(s')) = d_H(s, s(s')) = 2d_H(s', s) = 2(\frac{1}{2}\lambda) = \lambda$ por lo tanto $f = ss'$. Un proceso análogo nos enseña que $g = s's''$ y como $s's'$ es la identidad entonces $fg = ss''$, más aún $f^{-1} = s's$, $g^{-1} = s''s'$ y entonces $f^{-1}g^{-1} = s'ss''s' = s'fgs' = s'fgs'^{-1}$, luego ss' es un elemento hiperbólico con

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

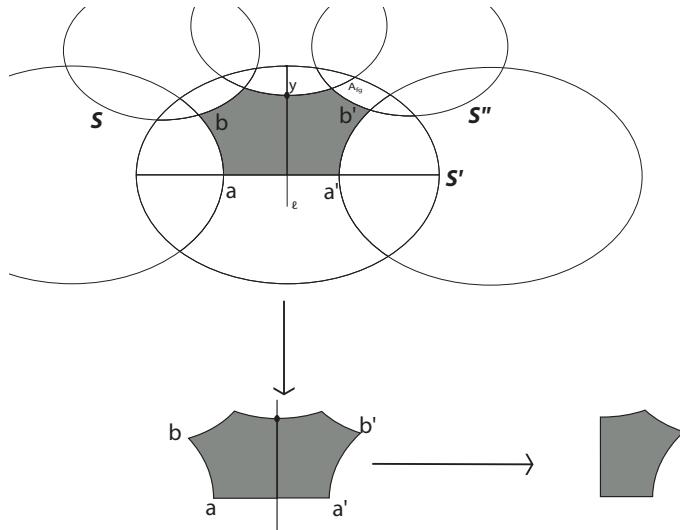


Figura 3.6: Figura 3.6

recta invariante igual a la recta que pasa por s y s'' y desplazamiento $2d_H(s, s'')$, más aún $f^{-1}g^{-1}$ es hiperbólico obtenido de fg conjungando por s' , tenemos entonces;

1. $f^{-1}g^{-1}$ tiene un desplazamiento con la misma medida que fg
2. su eje $A_{f^{-1}g^{-1}}$ se obtiene de A_{fg} rotando por s' .

Para probar (1) queremos ver cuánto mide $d_H(x, s'fgs'x)$ y tenemos que $d_H(x, s'fgs'x) = d_H(s'x, fg(s'x))$ y esta última cantidad es el desplazamiento de fg .

(2) se cumple ya que $f^{-1}g^{-1}(s'A_{fg}) = s'fgs'(s'A_{fg}) = s'fg(A_{fg}) = s'A_{fg}$.

Entonces estos ejes son divergentes y sus correspondientes transformaciones tienen sentidos opuestos, aplicamos entonces el **lema 3.1.1** a fg y a $f^{-1}g^{-1}$ entonces $[f, g]$ es elíptico, parabólico o hiperbólico según sea

$$\operatorname{senh} \eta \operatorname{senh} \frac{1}{2} \lambda_{fg} \leq 1$$

Donde η es la perpendicular desde s' en el triángulo $ss's''$ (Fig. 3.9) y por trigonometría hiperbólica (A) se cumple $\operatorname{senh} \eta \operatorname{senh} \frac{1}{2} \lambda_{fg} = \operatorname{senh} \phi \operatorname{senh} \frac{1}{2} \lambda \square$

3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos

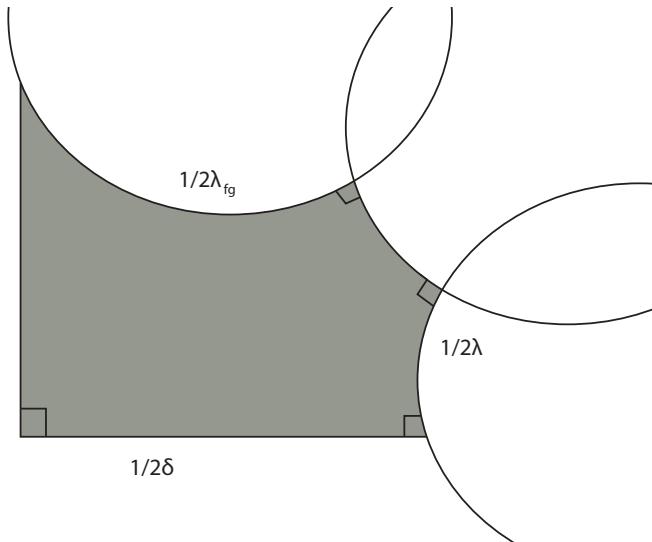


Figura 3.7: Pentágono con 4 ángulos rectos

3.3 El lema del conmutador de los elementos parabólicos

Lema 3.3.1 Sean f, g elementos parabólicos con puntos fijos c_f y c_g entonces el conmutador $[f, g]$ es hiperbólico.

Prueba.

Sea s' la recta que une c_f y c_g y denotemos la reflexión respecto a esta recta también como s' . Sea O_f un horocírculo dado con punto al infinito c_f , y $x \in O_f$, tomamos s en el conjunto de geodésicas que pertenece al haz parabólico con punto fijo c_f ([Bea]).

Tenemos entonces que $f = ss'$, y analógicamente obtenemos que existe s'' tal que $g = s's''$ luego tenemos $[f, g] = ss''s'ss''s' = (ss''s')^2$, la composición de reflexiones conserva el sentido por lo tanto la composición de 3 reflexiones invierte el sentido y es por tanto una reflexión o una h-reflexión entonces su cuadrado es la identidad o un elemento hiperbólico. Probemos que f y g no permutan: Si $fg = gf$, tenemos que f deja invariante el conjunto de puntos fijos de g y viceversa, para ver esto sea x un punto fijo de f entonces $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, es decir $g(x)$ es un punto fijo de f , si sustituimos g por g^{-1} analógicamente obtenemos que $g^{-1}(x)$ es un punto fijo, es decir todo punto fijo es la imagen bajo g de otro punto fijo ($x = g(g^{-1}(x))$). Dado esto $[f, g]$ es la identidad si y solo si f y g comutan, como hemos probado que esto no es posible se tiene que $[f, g]$ es un elemento hiperbólico. \square

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

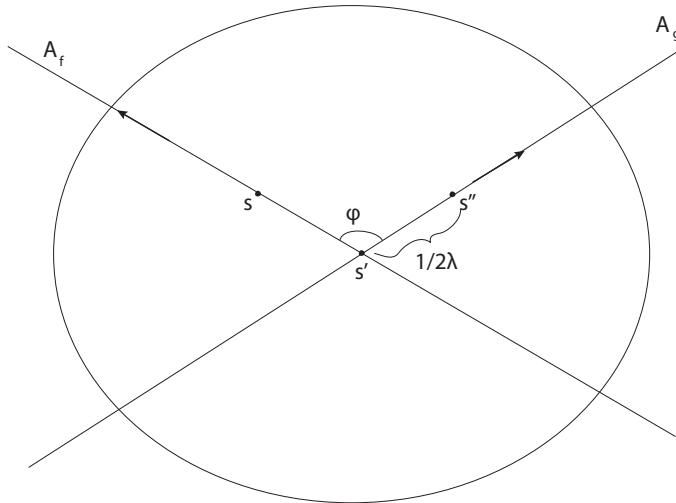


Figura 3.8: Figura 3.8

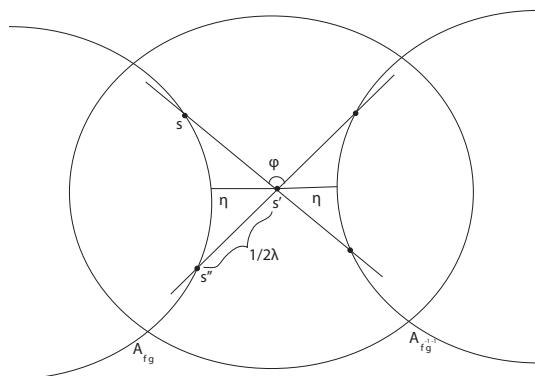


Figura 3.9: Figura 3.9

3.4 El lema del conmutador de los elementos hiperbólicos con ejes paralelos

Lema 3.4.1 Sean f y g elementos hiperbólicos con ejes paralelos y con punto común u , entonces el conmutador $[f, g]$ es un elemento parabólico con centro en u

Prueba:

Primero veamos que $f \neq gf^{-1}g^{-1}$, es claro que $gf^{-1}g^{-1}$ fija u ya que tanto f como g lo fijan, sea x el punto final del eje de f distinto de u , es claro que g^{-1} no fija este punto, y $gx \neq u$ (puesto que $g^{-1}u \neq x$) concluimos con esto $f \neq gf^{-1}g^{-1}$.

Sin perdida de generalidad podemos suponer que $u = 0$ y que las matrices de los elementos hiperbólicos correspondientes a f y g lucen de la siguiente manera:

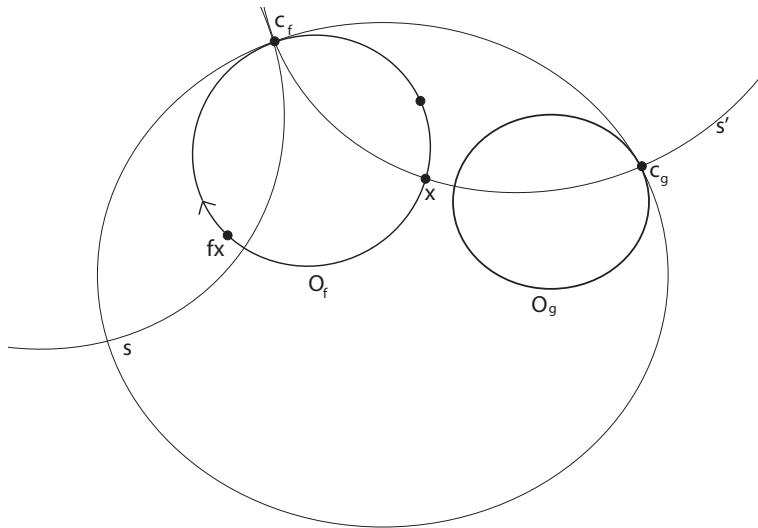


Figura 3.10: Figura 3.10

$$M_f = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M_g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$$

Donde $ad = 1, xz = 1, |a + d| > 2$ y $|x + z| > 2$. Haciendo los cálculos obtenemos que $\text{tr}(M_f M_g M_{f^{-1}} M_{g^{-1}}) = 2$ por lo que el conmutador es un elemento parabólico con punto fijo $u = 0$. \square

3.5 El lema del elemento elíptico

Lema 3.5.1 Si en un grupo $G < PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos invariantes, 2 ejes de elementos hiperbólicos son paralelos entonces el grupo contiene un elemento elíptico

Prueba:

Del Lema 3.4.1 tenemos que G contiene elementos parabólicos y con punto en común u como centro.

Consideremos un Horociclo K con punto en el infinito u , sobre K el elemento parabólico tiene un desplazamiento fijo .

Sea $S_u < G$ el subgrupo de G que consta de elementos parabólicos con punto en el infinito u y sea $x \in K$, la clase de equivalencia $S_u x$ es un subconjunto de K y podemos distinguir dos casos.

1. Los puntos forman una sucesión de puntos equidistantes cuando S_u es discontinuo.

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

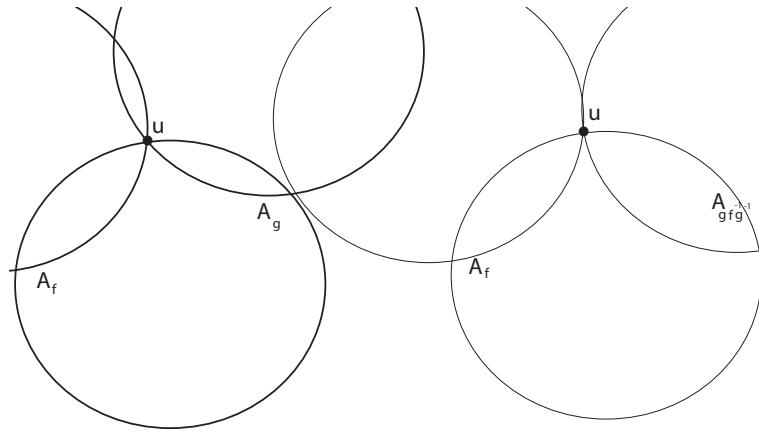


Figura 3.11: Figura 3.11

2. El conjunto de puntos es denso en todo K cuando S_u no es discontinuo.

Para probar (1), sea $d = \min\{d_H(x, fx) | f \in S_u\}$ este mínimo existe por que si no es así se tendría un punto de acumulación lo cual por hipótesis no es posible. Si $y \in S_u$, x es claro que $\min\{d_H(y, fy) | f \in S_u\} = d$ y de esto concluimos que el conjunto de puntos es equidistante de distancia d .

Para el caso (2) por hipótesis tenemos que $S_u x$ se acumula en x y queremos ver que se acumula en todo K . Sea $k \in K$ un punto arbitrario y $B_\epsilon(k) = \{z \in D | d_H(k, z) < \epsilon\}$ y tomemos $B_\epsilon(k) \cap K$, queremos ver que existe $x \in S_u x$ tal que $d_H(k, x) < \epsilon$, si dicha x no existe entonces los desplazamientos en K de los elementos de S_u estarian acotados inferiormente por ϵ lo cual implicaría que S_u es discontinuo lo que contradice la hipótesis, por lo tanto S_u es denso en todo K .

Ahora supongamos que estamos en el caso (1) y sea g_0 el elemento con el menor desplazamiento respecto de K (Fig. 3.13) y f un elemento hiperbólico en G tal que su eje A_f tiene a u como punto fijo y cuyo sentido es tal que se aleja de u , entonces fg_0f^{-1} fija u y es un elemento parabólico y por tanto $fg_0f^{-1} \in S_u$.

La imagen de A_f bajo fg_0f^{-1} es claramente la misma que la de su imagen bajo fg_0 , la recta fg_0A_f se encuentra entre A_f y g_0A_f , luego el desplazamiento de fg_0f^{-1} es menor que el de g_0 lo cual es una contradicción, por lo tanto $S_u x$ es denso en K , es decir los desplazamientos de los elementos de S_u son tan pequeños como se quiera.

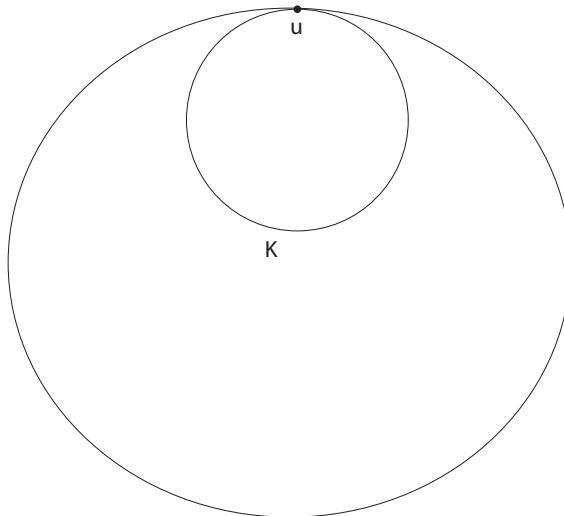


Figura 3.12: Figura 3.12

Como G no tiene a u como punto invariante, sea $g \in G$ tal que $gu \neq u$. Sean f_1, f_2 elementos hiperbólicos pertenecientes a los dos ejes del lema, al menos uno de los elementos hiperbólicos gf_jg^{-1} no fija u , ya que g solo puede mover u a los más a uno de los puntos extremos de A_{f_j} . Entonces existe en G un elemento hiperbólico f que no deja u invariante. Elijamos ahora un horocírculo K tal que intersecte A_f (fig 3.14) y elegimos h tal que su desplazamiento respecto a K ayude a que los ejes A_f y A_{hf} de f y $f' = hfh^{-1}$ respectivamente se intersecten en un ángulo arbitrariamente pequeño, en particular elegimos h tal que

$$\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}h^2 \frac{1}{2} \lambda_f < 1$$

Ya que $\operatorname{sen}h^2 \frac{1}{2} \lambda_f$ es fijo y $\operatorname{sen}\phi \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow 0$, y del **lema 3.2.1** se sigue que $[f, f']$ es elíptico. \square

3.6 El teorema de Nielsen

Probamos ahora la parte restante del teorema de Nielsen.

Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$ sin puntos invariantes y sin elementos elípticos.

Antes que nada veamos que G no es abeliano. Si los ejes son divergentes y $fg = gf$ entonces $fgf^{-1} = g$, pero no es posible ya que fgf^{-1} fija fx, fy con

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

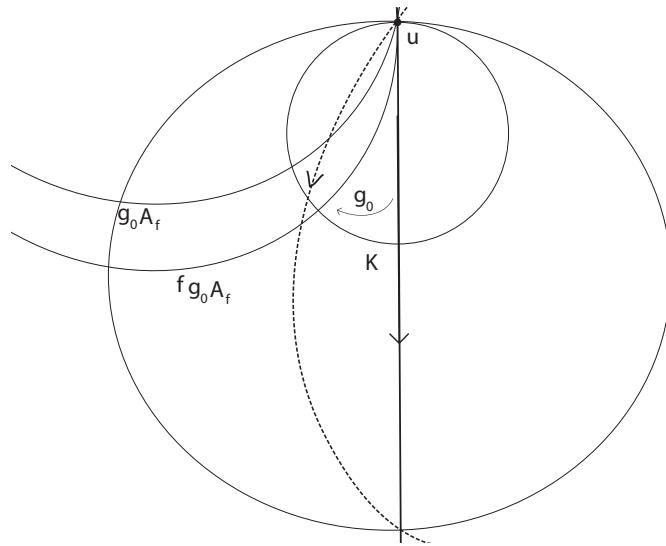


Figura 3.13: Hiperciclo punteado

x, y puntos fijos de g , pero esto implica $fx = y$ y $fy = x$ pero esto implica $f^2x = x$, pero f^2 fija los mismos puntos que f por tanto no puede fijar los puntos de g .

Es análogo si los ejes son paralelos ya que f no puede intercambiar x y y al mismo tiempo.

Más aún debe haber elementos hiperbólicos en G , de otro modo solo tendría elementos parabólicos que por hipótesis no tendrían un punto fijo en común y el lema 3.3.1 implicaría una contradicción en este caso.

Sea f hiperbólico en G y A_f su eje y λ_f la medida de su desplazamiento, sea $g \in G$ tal que $fg \neq gf$, entonces $f' = gf^{\pm 1}g^{-1}$ es una hiperbólica con el mismo desplazamiento que f y con eje $gA_f \neq A_f$ (Por no ser permutables)(Si $A_f = gA_f \Rightarrow gfg^{-1} = f$ o $gfg^{-1} = f^{-1}$. El primer caso es trivial. El segundo caso basta tomar un punto fijo x de f tal que $g(x)$ no es punto fijo de f (ni de f^{-1}) y evaluar en ambos lados de la ecuación para llegar a una contradicción.)

$A_f, A_{f'}$ no pueden ser paralelas por el lema 3.5.1, si son divergentes sea δ la distancia entre ellas y elijamos f' tal que el exponente de f haga f y f' con desplazamientos opuestos, por las condiciones impuestas en G , ff' no es elíptico y del 3.1.1 obtenemos

3.6 El teorema de Nielsen

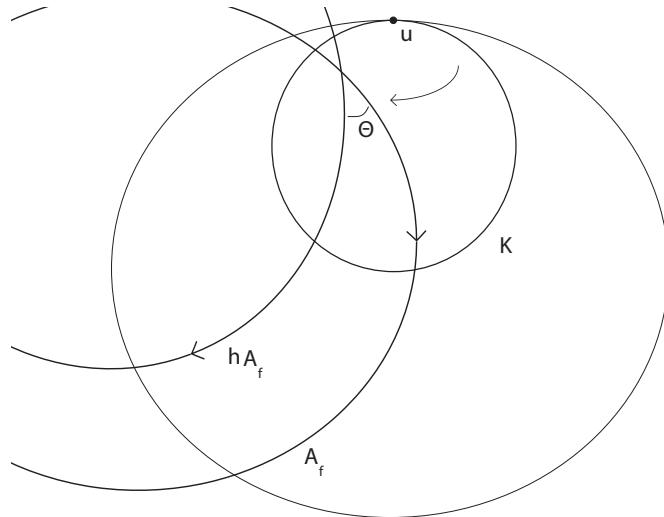


Figura 3.14: Figura 3.14

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \delta \operatorname{senh} \frac{1}{2} \lambda_f \geq 1 \quad (3.1)$$

Si $A_f, A_{f'}$ son concurrentes sea ϕ su ángulo de intersección, dado que $[f, f']$ no es una rotación, del 3.2.1 tenemos

$$\operatorname{sen} \phi \operatorname{senh}^2 \frac{1}{2} \lambda_f \geq 1 \quad (3.2)$$

Estas desigualdades se aplican a g fijo y f variando.

Sea A un eje de un elemento hiperbólico en G , los elementos hiperbólicos que comparten este eje forman un subgrupo abeliano S_A de G , sea $g \in G$ un elemento que no tenga como eje a A , es decir que no permuta con los elementos de S_A , se tiene que $gA \neq A$. Si gA y A son divergentes digamos que su distancia es $d_H(gA, A) = \delta$ si gA y A son concurrentes digamos que se cortan en un ángulo ϕ . Dependiendo cual sea el caso aplicaremos 3.1 o 3.2.

Si f varia sobre todos los elementos de S_A , podemos notar que todos tienen desplazamiento mayor que un número positivo distinto de 1, por las condiciones 3.1 y 3.2 y sabiendo que $\operatorname{senh} x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, λ_f no puede ser arbitrariamente pequeño, más aún los desplazamientos no pueden ser arbitrariamente cercanos a la cota, si así fuera podemos encontrar dos elementos tal que su composición tiene un desplazamiento menor que la cota dada. Entonces S_A es discontinuo. Sea λ_0 el desplazamiento mas pequeño de elementos de S_A que por lo anterior existe.

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

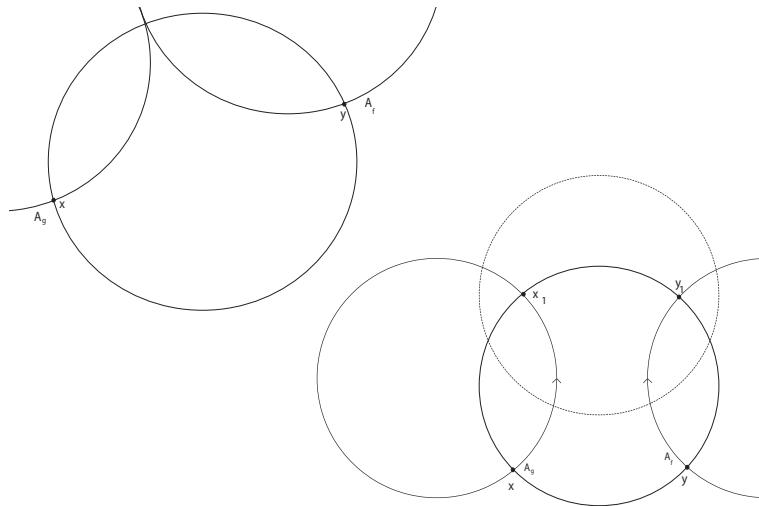


Figura 3.15: Ejes de f y g paralelos y divergentes

Podemos aplicar las mismas desigualdades para $f \in S_A$ fijo y g variando sobre los representantes g_1, g_2, \dots de las clases de $S_A < G$ ($g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 S_A = g_2 S_A \Leftrightarrow g_1 g_2^{-1} \in S_A$).

Comentario 3.6.1 Si $g_1 \sim g_2 \Rightarrow g_1 A = g_2 A$ ya que $g_1 g_2^{-1} = f \in S_A \Rightarrow g_1 g_2^{-1} A = f A \Rightarrow g_1 g_2^{-1} A = A \Rightarrow g_2^{-1} A = g_1^{-1} A$

Los ejes de los elementos hiperbólicos $f_v = g_v f g_v^{-1}$ varian sobre los diferentes ejes de la clase de equivalencia GA de A .

Dado que f_v tiene el mismo desplazamiento λ_f que f para todo índice v , de 3.1 y 3.2 obtenemos que $\operatorname{senh} \frac{1}{2}\delta$ y $\operatorname{sen}\phi$ tienen una cota inferior por lo que δ y ϕ también la tienen según sean divergentes o concurrentes los ejes $g_v A$, esto implica que los ejes no se acumulan en D .

Sea $x \in A$. Todo punto en Gx está en algún elemento del conjunto $g_v A$. Para un eje dado los puntos Gx que se encuentran en este eje forman una sucesión de puntos equidistantes a distancia λ (Los puntos en $Gx \cap g_v A$ son los puntos gx, hx tal que $g \sim h$, luego para $gx, hx \in g_v A \Rightarrow d_H(gx, hx) = d_H(x, g^{-1}hx), g^{-1}h \in S_A \Rightarrow \lambda_{g^{-1}h} \geq \lambda_0$ (Fig. 3.17)).

El círculo con centro x y radio $\frac{1}{2}\lambda_0$ no puede contener más de un punto de dicha sucesión en su interior, entonces el número de puntos en Gx dentro de este círculo es a lo más igual al número de ejes $g_v A$ que cortan al círculo, este número es finito

3.7 Un ejemplo de un grupo discreto

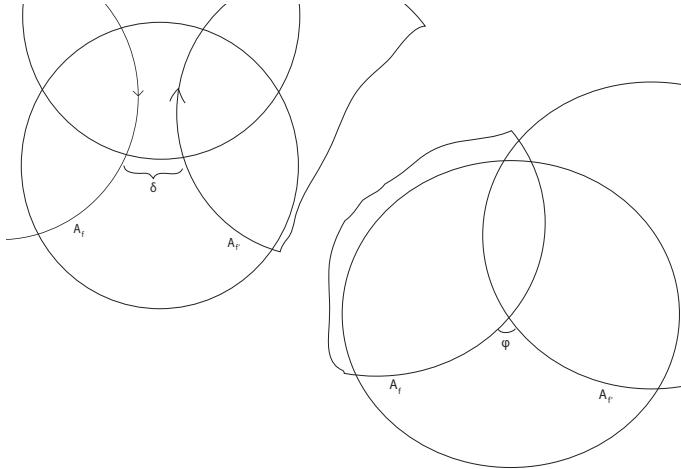


Figura 3.16: Figura 3.16

ya que los ejes $g_v A$ no se acumulan en $D \therefore x$ no es punto de acumulación de Gx .

□

3.7 Un ejemplo de un grupo discreto

En el capítulo 2 hallamos un grupo de Schottky que es un subgrupo discreto de isometrías hiperbólicas, más aún sabemos que todos los elementos no triviales del grupo de Schottky son loxodrómicos, en nuestro caso hiperbólicos, excepto por la identidad, para que podamos validar el teorema de Nielsen en este grupo debemos verificar que se cumplen las condiciones del teorema. Los generadores del grupo de Schottky son hiperbólicos por lo cual cada uno tiene una geodesica invariantes, podemos usar las matrices del grupo de monodromía de la ecuación diferencial hipergeometrica 1.11.2 que son conjugadas a los generadores del grupo de Schottky;

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(-c) \end{pmatrix}, \quad A_1 = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon(c-a-b) \end{pmatrix} P$$

Notamos que A_0 fija $0, \infty$ y por tanto deja invariante la geodésica que los une, podemos ver que A_1 fija $P^{-1}(0)$ y $P^{-1}(\infty)$ y dado que conocemos P^{-1} podemos calcular ambos valores, por un lado $P^{-1}(0) = \frac{-C}{D}$ por otro lado $P^{-1}(\infty) = \frac{-A}{B}$, y por tanto deja invariante la geodésica que une estos dos puntos. Mas abajo probamos que estos dos ejes necesariamente son divergentes.

En nuestro caso tenemos un grupo de Schottky con dos generadores, sabemos que es libre y también es no elemental (0.0.1). En [Bea] encontramos un teorema que dice que para un grupo de transformaciones hiperbólicas con las características

3. EL TEOREMA DE NIELSEN

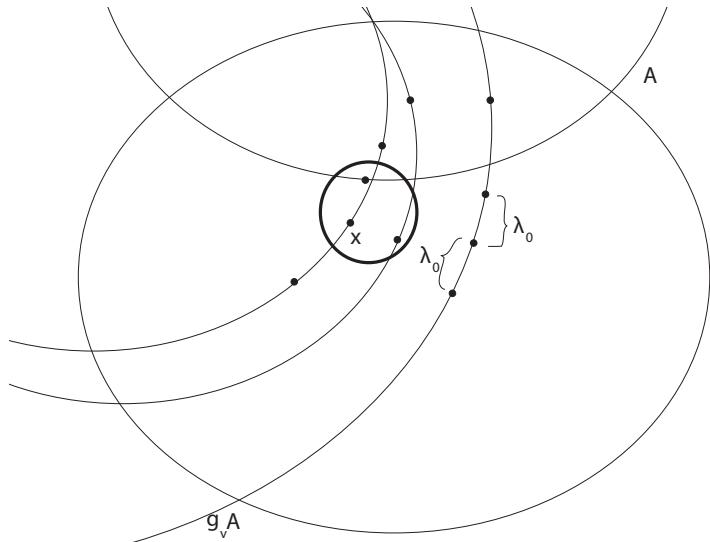


Figura 3.17: Figura 3.17

anteriores ser discreto equivale a que actúe de manera discontinua según 0.0.3, de igual manera en [Bea] encontramos que 0.0.3 implica 0.0.2.

Por otro lado Λ_θ posee, salvo la identidad, solo elementos hiperbólicos, para aplicar el teorema de Nielsen necesitamos además que el grupo no tenga ni puntos fijos ni rectas invariantes como mencionamos arriba. En [Bea] encontramos el siguiente teorema;

Teorema 3.7.1 *Dos transformaciones de Möbius g, h tienen un punto fijo en $\widehat{\mathbb{C}}$ si y solo si $\text{tr}[g, h] = 2$*

Haciendo los cálculos correspondientes a las matrices asociadas a γ_1, γ_2 obtenemos que; $\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{2T^2(R^2 - C^2) + C^2(T^4 + 1)}{T^2 R^2}$, si suponemos que $\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] = 2$ obtenemos que $C^2 = 0$ o que $T = \pm 1$, ninguno de estos casos es posible debido a las condiciones exigidas, por lo que $\text{tr}[\gamma_1, \gamma_2] \neq 2$ es decir γ_1, γ_2 no tienen puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$ (en particular no los tiene en D) y dado que tienen ejes diferentes, estos necesariamente son divergentes de otro modo su intersección sería un punto fijo, por tal motivo no hay rectas invariantes en el grupo generado por estos elementos. Aplicando el teorema de Nielsen se puede concluir que Λ_θ es discontinuo en D .

Todo lo anterior nos permite afirmar que la familia de grupos de Schottky hallada en 2 son ejemplos en donde podemos verificar el teorema de Nielsen. En la actualidad existen muchos resultados que nos dan la misma información que este teorema pero la exposición geométrica de este resultado sigue siendo admirable gracias a su demostración basada en su mayoría en la geometría hiperbólica pura.

APPENDIX

A

Apéndice

A.1 Igualdades trigonométricas

Dedicamos esta sección a recopilar las fórmulas de trigonometría hiperbólica utilizadas durante éste trabajo. Comenzamos con las fórmulas para seno y coseno hiperbólicos:

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (\text{A.1})$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (\text{A.2})$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 \quad (\text{A.3})$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x \quad (\text{A.4})$$

Para triángulos hiperbólicos tenemos lo siguiente:

Sea $\triangle (A, B, C)$ un triángulo con lados A, B y C . Y sean sus correspondientes ángulos opuestos α, β y γ entonces, si γ es un angulo recto tenemos;

Ley de los cosenos hiperbólicos

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B \quad (\text{A.5})$$

Ley de los senos hiperbólicos

$$\sinh B = \sinh A \cdot \tan \beta \quad (\text{A.6})$$

A. APÉNDICE

También

$$\cosh A \cdot \sin \beta = \cos \alpha \quad (\text{A.7})$$

$$\cosh B \cdot \sin \alpha = \cos \beta \quad (\text{A.8})$$

Para triángulos arbitrarios se tiene;

Ley de los cosenos hiperbólicos

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B - \sinh A \cdot \sinh B \cdot \cos \gamma \quad (\text{A.9})$$

Ley de los senos hiperbólicos

$$\frac{\sinh A}{\sin \alpha} = \frac{\sinh B}{\sin \beta} = \frac{\sinh C}{\sin \gamma} \quad (\text{A.10})$$

Para un cuadrilátero con tres ángulos rectos como en la figura A.1, donde Φ no es recto, se tiene:

$$\sinh D \cdot \sinh A = \cos \Phi \quad (\text{A.11})$$

$$\cosh D = \cosh B \cdot \sin \Phi \quad (\text{A.12})$$

$$\cosh A = \cosh C \cdot \sin \Phi \quad (\text{A.13})$$

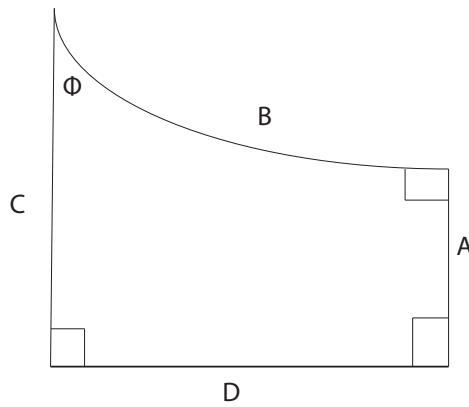


Figura A.1: Cuadrilátero con 3 ángulos rectos

En un triángulo $\triangle (A, B, C)$ hay una relación entre γ y la longitud de C

A.2 Teorema de Cauchy

$$\cosh C > \cosh A \cdot \cosh B \text{ si } \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\cosh C = \cosh A \cdot \cosh B \text{ si } \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\cosh C < \cosh A \cdot \cosh B \text{ si } \gamma > \frac{\pi}{2}$$

Por último tenemos un resultado para pentágonos con 4 ángulos rectos.

Sea P un pentágono como en la figura A.2, donde h, D son medidas de los lados y H la medida de la perpendicular del vértice al lado s y denotamos por s también a su medida.

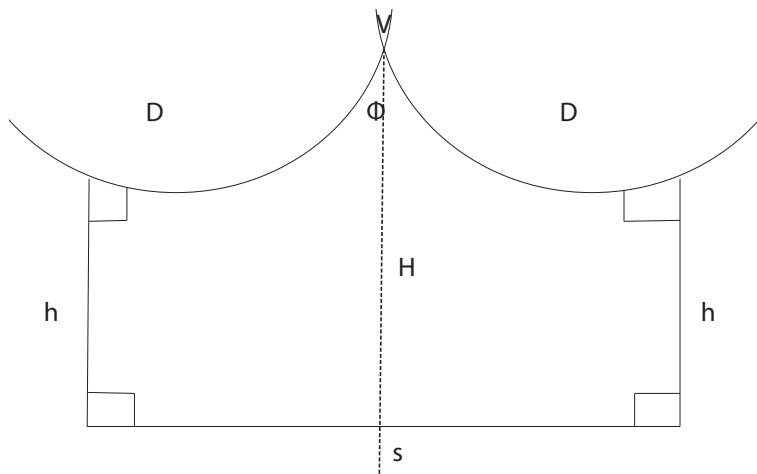


Figura A.2: Pentágono con 4 ángulos rectos

Las siguientes condiciones se cumplen

$$\sinh \cdot \sinh \frac{s}{2} = \cos(\frac{\Phi}{2}) \quad (\text{A.14})$$

$$\cosh = \cosh H \cdot \sin(\frac{\Phi}{2}) \quad (\text{A.15})$$

$$\cosh \frac{s}{2} = \cosh D \cdot \sin(\frac{\Phi}{2}) \quad (\text{A.16})$$

A.2 Teorema de Cauchy

A.3 Mapeo y principio de reflexión de Schwarz

Si consideramos la ecuación diferencial hipergeométrica

A. APÉNDICE

$$x(1-x)u'' + (c - (a+b+1)x)u' - abu = 0$$

Cualesquiera dos soluciones linealmente independientes u_1, u_2 definen un mapeo

$$s : \mathbb{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \widehat{\mathbb{C}}$$

Al que llamamos el mapeo de Schwarz. El teorema fundamental de Cauchy nos asegura que dos soluciones linealmente independientes no son simultáneamente cero en $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. Para un estudio mas profundo del mapeo de Schwarz se remite al lector a [SY01].

EL principio de reflexión de Schwarz se enuncia de la siguiente manera:

Proposición A.3.1 *Sea f una función holomorfa en un dominio D cuya frontera contiene un intervalo real (a, b) . Supongamos que f se puede extender a una función continua en $D \cup (a, b)$ y es real valuada en el intervalo (a, b) . Extendiendo f por*

$$f(x) := f(\bar{x}), \quad x \in \bar{D} := \{\bar{\xi} | \xi \in D\}$$

A la imagen reflejada \bar{D} de D . Entonces, la extensión de f es holomorfa en $D \cup (a, b) \cup \bar{D}$, y su imagen es la unión de $f(D)$, su imagen reflejada $f(\bar{D})$ y el intervalo $f((a, b))$ que comparten como parte de su frontera.

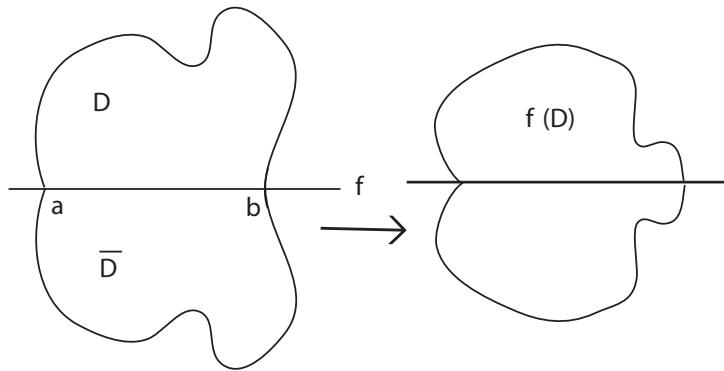


Figura A.3: Principio de reflexión de Schwarz

Bibliografía

- [ACS] Juan Pablo Navarrete Angel Cano and José Seade. Complex klenian groups. 6
- [Bea] Alan F. Beardon. The geometry of discrete groups. iv, 35, 43, 44
- [FN] W. Fenchel and J. Nielsen. On discontinuous groups of isometric transformations of the non-euclidian plane. ii, iii, iv
- [IY03] Takashi Ichikawa and Masaaki Yoshida. On schottky groups arising from the hypergeometric equation with imaginary exponents. *American Mathematical Society*, 132(2):447–454, 2003. ii, iv
- [KIY] Shun Shimomura Katsunori Iwasaki, Hironobu Kimura and Maasaki Yoshida. From gauss to painlevé. ii, 7, 10, 13, 17
- [SY01] Takeshi Sasaki and Maasaki Yoshida. A geometric study of the hypergeometric function with imaginary exponents. *Experimental Mathematics*, 2001. 19, 20, 48

This page is intentionally left blank