1]2

Abstract

qq

[

San

May 11, 2015

1 Soluciones de la ecuación hipergeométrica

Consideremos la siguiente serie :

$$F(a,b,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}x^n$$

En donde x es una variable compleja , $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$, y $c\neq 0,-1,-2,....$ Esta serie es la llamada serie hipergeometrica. El coeficiente n-esimo de esta serie al que llamaremos A_n esta dado por

$$A_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)\cdot 1(1+1)\cdots(n)}$$

De esta igualdad obtenemos:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(1+n)}$$

Usando el criterio Podemos notar que el radio de convergencia de esta serie es 1, excepto en el caso de que a o b sean negativos ya que en cualquiera de estos casos la serie es finita. De cualquier modo tenemos que dicha serie define una función holomorfa en x en al menos el disco de radio 1 centrado en 0 y también es holomorfa en (a,b,c) si $c\neq 0,-1,-2,...$

Nuestro interes por la serie definida anteriormente viene del hecho que dicha serie es una solución de la ecuación diferencial hipergeometrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+\{c-(a+b+1)x\}\frac{du}{dx}-abu=0$$

A la cual denotamos $E(a, b, c; x)$ y la referimos como la serie hipergeométrica con parametros (a, b, c). Para ver que $F(a, b, c; x)$ es una solución de $E(a, b, c)$ procedemos como Euler e introducimos el operador $D = x\frac{d}{dx}$, a continuación enunciamos algunas propiedades que serán útiles:

1. $Dx^n = nx^n$
2. $f(D)x^n = f(n)x^n$ donde f es un polinomio de coeficientes constantes

La propiedad número 1 es clara de la definición, para la propiedad número 2 debemos dejar en claro como funciona el operador D^n al aplicarlo a x^n. Cuando $n = 2$ tenemos que $D^2x^n = x\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}(x^n)) = x\frac{d}{dx}(x \cdot nx^{n-1}) = x\frac{d}{dx}(nx^n) = x \cdot n^2x^{n-1} = n^2x^n$, en general se tiene por un proceso análogo al anterior que $D^mx^n = n^mx^n$.Sea

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Donde $a_n \neq 0$, un polinomio de grado n y por $f(D)$ entendemos el operador

$$f(D) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$$

Entendiendo D^i como la composición del operador D i-veces consigo mismo. Aplicamos este operador a x^n y obtenemos

$$f(D)x^n = (\sum_{i=0}^{n} a_i D^i)x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i(x^n) = \sum_{i=0}^{n} a_i n^i x^n = f(n)x^n$$

Gracias a este operador D podemos escribir la ecuación diferencial hipergeométrica en términos de dicho operador para obtener;

$$E(a, b, c) : [(a + D)(b + D) - (c + D)(1 + D)\frac{1}{x}]u = 0$$

Con esta nueva presentación verificamos que la serie $F(a, b, c; x)$ es una solución de dicha ecuación.

Podemos escribir

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} x^n = \sum A_n x^n$$

Y evaluamos

$$[(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{x}] \sum A_n x^n$$
$$= \sum [(a+D)(b+D)A_n x^n - (c+D)(1+D)A_n x^{n-1}]$$
$$= \sum [(a+n)(b+n)A_n x^n - (c+n-1)(1+n-1)A_n x^{n-1}]$$
$$= \sum [(a+n)(b+n)A_n x^n - (c+n)(1+n)A_n x^n] = 0$$

La última igualdad se da gracias a que obtenemos una serie telescópica. Esta serie tiene singularidades en $0, 1$ e ∞, nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones en los puntos singulares como hicimos anteriormente con $x = 0$. Denotaremos a la solución $F(a,b,c;x)$ como $f_0(x;0)$.

Queremos hallar otra solución en $x = 0$ pero para esto necesitamos calcular la aplicación del operador D al término $x^s u$;

$$D(x^s u) = s x^s u + x^s Du = x^s(s+D)u$$

esto es $Dx^s = x^s(s+D)$, con este cálculo podemos obtener una expresión equivalente para

$$[(a+D)(b+D) - (c+d)(1+d)\frac{1}{x}] x^{1-c}$$

La expresión anterior es equivalente a $x^{1-c}[(a+1-c+D)(b+1-c+D) - (1+D)(2-c+D)\frac{1}{x}]$ y esto nos dice que

$$x^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c : x)$$

Es también una solución de $E(a,b,c)$, aunque la serie anterior esta definida solamente cuando $2-c$ no es un entero negativo o cero (cuando es $c = 1$ la serie coincide con $F(a,b,c;x)$) esto no afecta nuestra solución ya que tomamos $1 - c \in i\mathbb{R}$ en cuyo caso siempre esta definida. A esta ultima solución la denotamos por $f_0(x; 1-c)$.

Queremos hallar también soluciones alrededor del punto singular $x = 1$, llevamos a cabo una transformación de la variable x en $1-x$ abusando de la notación, y verificamos como luce ahora $E(a, b, c) = x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c - (a + b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu$. Bajo esta transformación el primero y el tercer término no cambian, pero el segundo término ahora es

$$-\{c - (a + b + 1)(1 - x)\} = a + b + 1 - c - (a + b + 1)x$$

Entonces podemos notar que la ecuación transformada es de nuevo la ecuación hipergeométrica con parametros $(a, b, a + b + 1 - c)$ y a menos que $c-a-b$ sea entero obtenemos como antes dos soluciones pero ahora alrededor de $x = 1$

$$F(a, b, a + b + 1 - c; 1 - x), \quad (1 - x)^{c-a-b}F(c - a, c - b, c + 1 - a - b; 1 - x)$$

En nuestro caso tomamos $c - a - b \in i\mathbb{R}$ por lo que las soluciones anteriores siempre estan definidas en su radio de convergencia. A las soluciones anteriores las denotamos $f_1(x; 0)$ y $f_1(x; c - a - b)$ respectivamente.