Chapter 1

1.1 1

consideremos la ecuación hypergeométrica

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \{c-(a+b+1)x\}\frac{du}{dx} - abu$$

con exponentes imaginarios puros

$$1-c = i\theta_0, c-a-b = i\theta_1, a-b = i\theta_2$$

(Los exponentes son por las soluciones)

Donde supondremos $\theta_0, \theta_1, \theta_2 > 0$. Para cualesquiera dos soluciones linealmente independientes u_1 y u_2 tenemos el mapeo multivaluado

$$s : \mathcal{C} - \{0,1\} \ni x \mapsto u_1(x) : u_2(x) \in \mathcal{P} := \mathcal{C} \cup \{\infty\}$$

llamado el mapeo de Schwarz.

1.2 2

Para nuestros propositos hallaremos un dominio en el plano-x y un dominmio en el plano-s (estos aun no los coloco aqui ya que no termino de dibujarlos aun) tal que el mapeo

$$s|_{F_x} : F_x \to F_s$$

es un biholomorfismo (conformally isomorphic) y el mapeo s se puede recuperar via el mapeo restringido $s|_{f_x}$ a traves del principio de reflexión de Schwarz, estos se llaman dominios fundamentales para el mapeo de Schwarz.

Denotemos por $C(c,r)$ el circulo en el plano s con centro c y radio r y considerense los tres circulos disjuntos en el plano s

$$C_1 = C(0,1), C_2 = C(0,T), C_3 = C(-C,R)$$

Donde $T = e^{\theta_1 \pi}, r = e^{-\theta_0 \pi}$

$$C = \frac{\xi(1-r^2)}{\xi^2 - r^2}, R = \frac{r(1-\xi^2)}{\xi^2 - r^2}, \xi = (\frac{cosh\theta_2\pi + cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi}{cosh\theta_2\pi + cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi})^{\frac{1}{2}}$$

Cuando $\theta_2 = 0$ $Cosh(\theta_0 - \theta_1)\pi = \frac{1+(rt)^2}{2rT}$ y $Cosh(\theta_0 + \theta_1)\pi = \frac{r^2+T^2}{2rT}$ y también $Cosh\theta_2\pi = 1$ por lo que $\xi^2|_{\theta_2=0} = \frac{1+\frac{1+(rt)^2}{2rT}}{1+\frac{r^2+T^2}{2rT}} = \frac{\frac{2rT+1+(rt)^2}{2rT}}{\frac{2rT+r^2+T^2}{2rT}} = \frac{T^2+2rT+1}{r^2+2rT+T^2} = \frac{(rT+1)^2}{(r+T)^2}$ entonces $\xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr+1}{T+r}$

Ya que $T > 1$ y $r < 1$ tenemos por un lado $r^2 < 1$ entonces $Tr + r^2 < Tr + 1$, es decir, $r(T+r) < Tr + 1$, entonces;$r < \frac{Tr+1}{T+r}$.

Por otro lado; $r < 1$ y también $T - 1 > 0$ por lo que $(T-1)r < T - 1$ entonces $Tr - r < T - 1$ y luego $Tr + 1 < T + r$ por lo que $\frac{Tr+1}{T+r} < 1$ Dado que ξ como una función de $\theta_2 \geq 0$ incrementa de manera monótona a 1 y

$$1 > \xi|_{\theta_2=0} = \frac{Tr+1}{T+r} > r$$

tenemos

$$C - R - 1 = \frac{\xi(1-r^2)}{\xi^2 - r^2} - \frac{r(1-\xi^2)}{\xi^2 - r^2} - 1 = \frac{\xi - \xi r^2 - r + r\xi^2 - \xi^2 - r^2}{\xi^2 - r^2} = \frac{\xi - r + \xi r(-r+\xi) - (\xi - r)(\xi}{\xi^2 - r`2}$$

$$T - C - R = \frac{(T+r)\xi - (Tr+1)}{\xi - r} > 0$$

y tenemos

$$-T < -C - R < -C + R < -1 < 1 < T$$

El dominio en el semi-plano superior, acotado por C_1, C_2, C_3 y el eje real, puede servir como un dominio fundamental F_s, y tiene la forma de un puente de doble arco como en la figura 1. El dominio fundamental F_x también tiene la forma de de un puente de doble arco como en la figura 1, y esta acotado por tres segmentos reales y tres curvas que no son parte de circunferencias.

1.3 4

El grupo de monodromia

Gracias a estos dominios fundamentales y el principiuo de reflexion de Schwars aplicado a lo largo de los lados, el grupo de monodromia de la ecuacion diferencial se puede describir como sigue; La reflexión con respecto al circulo $C(c,r)$ donde c es real, esta dada por

$$\psi(c,r) : s \mapsto \frac{r^2}{\bar{s}-c}$$

Sea $\bar{\lambda}$ el grupo generado por las tres reflexiones respecto a los circulos C_1, C_2, C_3, respectivamente. El grupo de monodromia λ_θ de la ecuación hypergeometrica es el subgrupo de $\bar{\lambda}$, de indice 2 que consiste de las palabras pares de ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Por otro lado, para el circulo $C(c,r)$ definimos la transformación fraccional lineal de orden 2 que fija los dos puntos de intersección del circulo y el eje real:

$$\gamma(c,r) : s \mapsto \frac{r^2}{s-c} + c$$

Sea $\Gamma_\theta, \theta)(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ el grupo generado por tres involuciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ con respecto a los circulos C_1, C_2, C_3, respectivamente. El grupo de monodromia λ_θ es el subgrupo de γ_θ, de indice 2 que consiste de las palabras pares de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Sea $\omega(\subset \mathcal{P}^\infty)$ el dominio de discontinuidad de γ_θ y el grupo de Schotky γ_θ.

Esta representación tiene algunos problemas, aunque la ecuación hiprgeometrica es simétrica respecto de $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, los tres circulos C_1, C_2, C_3 no lo son. Por ejemplo si $\theta_2 \to 0$ los circulos C_2 y C_3 se tocan, y si $\theta_1 \to 0$ entonces C_3 tiende a un punto y C_1 y C_2 coinciden, más aún ya que C_1 y C_2 son concentricos ....Hacemos un cambio de coordenadas como sigue :

$$s \mapsto \frac{(3+T^2)s + 1 + 3T^2}{4(s+T^2)}$$

entonces los diametros de los circulos en el eje real estan dados por

$$C_1 : [s_4, s_5], C_2 : [s_1, s_6], C_3 : [s_2, s_3]$$

figura 2

Donde

$$s_1 = -\frac{(1-T)^2}{4T}, s_2 = -\frac{(T-1)^3 - (3+T^2)(T-C-R)}{4(T^2-T+T-C-R)}$$

$$s_3 = -\frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-(C-R-1))} + \frac{1}{2}, s_4 = \frac{1}{2}$$

$$s_5 = 1, s_6 = \frac{(1+T)^2}{4T}$$

Notemos que $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$ Ahora podemos probar lo siguiente:

Proposition 1.1. *Si $\theta_1 = 0$ entonces C_1 y C_2 se tocan en un punto; Si $\theta_2 = 0$ entonces C_2 y C_3 se tocan en un punto; Y si $\theta_0 = 0$, entonces C_3 y C_1 se tocan en un punto*

Prueba.

Cuando $\theta_1 = 0$, notemos que en este caso $T = e^{\theta_1 \pi}$ y dado que $\theta_1 = 0$ se tiene que $T = 1$, también recordemos que $C_1 : [s_4, s_5]$ y $C_2 : [s_1, s_6]$ y dado que $s_5 = 1$ y $s_6 = \frac{(1+T^2)^2}{4T} = \frac{(1+1^2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ es decir C_1 y C_2 se tocan en 1.

Si $\theta_2 = 0$,primero veremos que $T - C - R = 0$, como $\theta_2 = 0$ entonces $\xi = \frac{Tr+1}{T+r}$ esto implica que $(T+r)\xi = Tr+1$ y como $T-C-R = \frac{(T+r)\xi-(Tr+1)}{\xi-r} = \frac{Tr+1-(Tr+1)}{\xi-r} = 0$, Ahora bien $s_1 = -\frac{1-T^2}{4T}$ y $s_2 = -\frac{(T-1)^3-(3+T^2)(T-C-R)}{4(T^2-T+T-C-R)} = -\frac{(T-1)^3}{4(T^2-T)} = -\frac{(T-1)^2(T-1)}{4T(T-1)} = -\frac{(T-1)^2}{4T} = s_1$ por lo que C_2 y C_3 se tocan en s_1.

Por último si $\theta_0 = 0$ tenemos $r = e^{-\theta_0 \pi}$ en este caso $r = 1$ mostremos que $C - R - 1 = 0$. $C - R - 1 = \frac{(1-r)(1-\xi)}{\xi+r} = 0$ ya que $r = 1$, entonces $s_3 = \frac{(1+T^2)(C-R-1)}{4(T^2-1-C-R-1)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ya que $C - R - 1 = 0$ y dado que $C_3 : [s_2, s_3]$ y $C_1 : [s_4, s_5]$ por los calculos anteriores obtuvimos $s_4 = s_3$ (recordando que $s_4 = \frac{1}{2}$), Concluyendo con la prueba.