Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos constituem uma das fundações da matemática, formando a base sobre a qual diversas estruturas numéricas e teorias são edificadas. Eles representam coleções de números que compartilham características comuns e são categorizados de acordo com suas propriedades. Por exemplo, os números naturais são utilizados para contagem, enquanto os números inteiros incluem tanto positivos quanto negativos, e os números racionais são expressos como frações. Além disso, os conjuntos numéricos permitem a análise e a resolução de problemas matemáticos complexos, sendo essenciais para áreas como álgebra, cálculo e teoria dos números

Interpretação de Símbolos de Conjuntos

Os símbolos utilizados para descrever conjuntos numéricos são essenciais para a compreensão de conceitos matemáticos. Abaixo, apresentamos esses símbolos em forma de tabela:

Símbolo	**Como se lê**
$\{\}$	conjunto
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\subseteq$	é um subconjunto de
$\subset$	é um subconjunto próprio de
$\supseteq$	contém como subconjunto
$\supset$	contém como subconjunto próprio
$\varnothing$	conjunto vazio
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$-$	diferença (ou complementar)
$\mid$ ou $:$	tal que
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\forall$	para todo
$\exists$	existe
$\neg$	não
$\wedge$	e
$\vee$	ou
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e somente se
$<$	menor que
$\leq$	menor ou igual a
$>$	maior que
$\geq$	maior ou igual a
∞	infinito
$\neq$	diferente de
$\approx$	aproximadamente igual a
$\equiv$	identicamente igual a

Tabela 1: Interpretação de símbolos de conjuntos

Conjunto dos Números Naturais

O conjunto dos números naturais é denotado por $\mathbb{N}$ e é composto por todos os números inteiros não negativos, utilizados predominantemente para contagem e ordenação de objetos.

- **Notação**: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Propriedades**:
  - Inclui o zero, dependendo da definição utilizada (em algumas interpretações, o conjunto começa em 1).
  - É um subconjunto dos números inteiros, o que implica que todos os números naturais são, por definição, números inteiros.
  - É fechado sob as operações de adição e multiplicação, significando que a soma ou o produto de quaisquer dois números naturais resulta em um número natural.

Conjunto dos Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é denotado por $\mathbb{Z}$ e se expande ao conjunto dos números naturais ao incluir os números negativos.

- **Notação**: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- **Propriedades**:
  - Abrange todos os números naturais e seus correspondentes negativos, formando um sistema numérico que permite a inclusão de operações de subtração.
  - Não inclui frações ou números decimais, sendo restrito a inteiros.
  - É fechado sob as operações de adição, subtração e multiplicação, mas não é fechado sob a divisão (por exemplo, $1 \div 2$ não resulta em um número inteiro).

Conjunto dos Números Racionais

Os números racionais são aqueles que podem ser expressos como a razão de dois inteiros, onde o denominador não é zero.

- **Notação**: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, b \neq 0 \right\}$
- **Propriedades**:
  - Inclui números inteiros (por exemplo, o número 2 pode ser representado como $\frac{2}{1}$).
  - Compreende números que podem ser expressos como frações, abrangendo também decimais que terminam ou que se repetem periodicamente.
  - É fechado sob adição, subtração, multiplicação e divisão (desde que o divisor seja diferente de zero).

Conjunto dos Números Irracionais

Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos como uma fração de dois inteiros, caracterizando-se por suas representações decimais não periódicas e infinitas.

- **Exemplos**: $\sqrt{2}, \pi, e$ (a base do logaritmo natural).
- **Propriedades**:
  - Não estão incluídos no conjunto dos números racionais, ou seja, não podem ser expressos como uma razão de inteiros.
  - Formam um conjunto denso nos números reais, o que significa que, entre quaisquer dois números racionais, existe sempre pelo menos um número irracional.

Operações com Conjuntos Numéricos

As operações entre os conjuntos numéricos respeitam certas propriedades de fechamento. A seguir, são apresentadas algumas operações comuns e suas respectivas propriedades.

Adição e Subtração

- Para $a, b \in \mathbb{N}$: $a + b \in \mathbb{N}$ e $a - b$ pode não ser um número natural (por exemplo, $1 - 2 = -1$ não pertence a $\mathbb{N}$).
- Para $a, b \in \mathbb{Z}$: tanto $a + b \in \mathbb{Z}$ quanto $a - b \in \mathbb{Z}$.
- Para $a, b \in \mathbb{Q}$: $a + b \in \mathbb{Q}$ e $a - b \in \mathbb{Q}$.

Multiplicação

- Para $a, b \in \mathbb{N}$: $a \cdot b \in \mathbb{N}$.
- Para $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.
- Para $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

Divisão

- Para $a, b \in \mathbb{N}$: $a \div b$ não é necessariamente um número natural (por exemplo, $1 \div 2$ não pertence a $\mathbb{N}$).
- Para $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \div b$ pode não resultar em um número inteiro (por exemplo, $1 \div 2 = 0.5$).
- Para $a, b \in \mathbb{Q}$: $a \div b \in \mathbb{Q}$ (desde que $b \neq 0$).

Propriedades Aritméticas

As operações aritméticas obedecem a diversas propriedades importantes, que incluem:

1. Associatividade:

   a) $(a + b) + c = a + (b + c)$

   b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. Comutatividade:

    a) $a+b=b+a$
    b) $a\cdot b=b\cdot a$

3. Distributividade:

    a) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Decomposição em Frações Parciais

A decomposição em frações parciais é uma técnica que permite reescrever frações que têm polinômios no denominador (parte de baixo) como a soma de frações mais simples. Esse método é muito útil em cálculos de integrais e em outras áreas da matemática. Imagine que temos uma fração como esta:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(2x-1)}.$$

O objetivo é dividir essa fração em partes mais simples, como:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1},$$

onde A e B são valores que vamos determinar. Vamos aos passos!

Passo 1: Multiplicar para eliminar os denominadores

Multiplicamos ambos os lados da equação pelo denominador completo $(x+1)(2x-1)$:

$$3x+1=A(2x-1)+B(x+1).$$

Aqui, a ideia é que os denominadores desapareçam, deixando apenas os numeradores para trabalharmos.

Passo 2: Expandir e organizar os termos

Expandimos os termos do lado direito:

$$A(2x-1)=2Ax-A, \quad \text{e} \quad B(x+1)=Bx+B.$$

Somando tudo, temos:

$$3x+1=2Ax-A+Bx+B.$$

Agora, agrupamos os termos que têm x e os números sozinhos (constantes):

$$3x+1=(2A+B)x+(-A+B).$$

Passo 3: Comparar os coeficientes

Nesta etapa, comparamos os coeficientes (os números que multiplicam x e os números constantes) de ambos os lados. Isso nos dá um sistema de equações:

$$\begin{aligned}2A+B&=3,\\ -B-A&=1.\end{aligned}$$

Passo 4: Resolver o sistema de equações

Agora, resolvemos esse sistema para encontrar A e B.

1. Da primeira equação $2A+B=3$, isolamos B:

$$B = 3-2A.$$

2. Substituímos $B=3-2A$ na segunda equação $-B-A=1$:

$$-(3-2A)-A=1.$$

Resolvendo:

$$-3+2A-A=1 \quad \Rightarrow \quad -3+A=1 \quad \Rightarrow \quad A=4.$$

3. Substituímos $A=4$ de volta em $B=3-2A$:

$$B=3-2\cdot 4=3-8=-5.$$

Passo 5: Reescrever a fração original

Agora que sabemos os valores de A e B, podemos reescrever a fração original:

$$\frac{3x+1}{(x+1)(2x-1)} = \frac{4}{x+1} - \frac{5}{2x-1}.$$

Essa forma é muito mais fácil de trabalhar, especialmente em integrais!

Outros Casos de Decomposição

Vamos explorar outros tipos de frações e como lidar com elas.

Fatores Repetidos

Quando o denominador tem fatores repetidos, como $\frac{1}{(x-1)^2}$, a decomposição inclui todos os fatores até a potência mais alta. Por exemplo:

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Fatores Quadráticos

Se o denominador tiver um fator quadrático irredutível, como x^2+bx+c (e $\Delta<0$), usamos numeradores na forma $Ax+B$. Por exemplo:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1}.$$

Fatores Quadráticos Repetidos

Se o denominador tem fatores quadráticos repetidos, como $\frac{1}{(x^2+1)^2}$, a decomposição será:

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Exercícios Resolvidos

Exemplo 1. Decomponha $\frac{2}{(x-1)^2}$:

$$\frac{2}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Multiplicando por $(x-1)^2$:

$$2 = A(x-1) + B.$$

Expandindo:

$$2 = Ax - A + B.$$

Comparando os coeficientes:

$$A = 0,$$
$$B = 2.$$

Portanto:

$$\frac{2}{(x-1)^2} = \frac{0}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}.$$