我的问题如下：
计算积分$\int_{-\pi}^{\pi} x * sin^5 x * arctan e^x dx$
一开始直接让 AI 给出计算结果为：

\(\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin^5 x \cdot \arctan(e^x) \, dx\)再看下这个，直接给出最终答案

0

那我在给出类似例题（先不开启联网搜索）后，DeepSeek 给我的回答是：（截取部分）

这说明需要换一种思路：**分析 $f(x) + f(-x)$ 的奇偶性。**

计算 $f(x) + f(-x)$：$f(x) + f(-x) = x \cdot \sin^5 x \cdot \arctan(e^x) + (-x) \cdot \sin^5(-x) \cdot \arctan(e^{-x})$

化简 $\sin^5(-x) = -\sin^5 x$，故：

$f(x) + f(-x) = x \cdot \sin^5 x \cdot \arctan(e^x) + (-x) \cdot (-\sin^5 x) \cdot \arctan(e^{-x}) = x \cdot \sin^5 x \cdot [\arctan(e^x) + \arctan(e^{-x})] = x \cdot \sin^5 x \cdot \frac{\pi}{2}$

而 $f(x) - f(-x)$ 是奇函数（因为 $f(x)$ 整体既非奇也非偶），但在对称区间上，奇函数的积分为 0，即 $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(-x)]dx = 0$，故 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)dx$，这与步骤 2 一致。

但关键结论：**$x \cdot \sin^5 x$ 是偶函数，而 $x \cdot \sin^5 x \cdot \frac{\pi}{2}$ 的积分是否为 0?**

不，显然不为 0。这说明之前的推导正确，但需要计算 $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin^5 x dx$：

利用对称区间和函数奇偶性的更深层性质：

- 令 $t = -x$，则
  $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin^5 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}(-t) \cdot \sin^5(-t)(-d$ $\int_{-\pi}^{\pi}(-t) \cdot (-\sin^5 t)(-dt) = -\int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin^5 t dt$
  即 $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin^5 x dx = -\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin^5 x dx$，因此：

步骤 5：得出最终结果

将上述结论代入式 (2)：$2I = \frac{\pi}{2} \times 0 = 0 \implies I = 0$

答案： $\boxed{0}$

很遗憾虽然最终结果仍然有误，但起码这次有在严格逻辑推理，这说明了：
few-shot-CoT 通过示例提供了推理的模版，引导模型按步骤分析求解；
再开启联网搜索后，Deepseek 这次给出了正确答案：

第三步：计算 $\int_0^{\pi} x\sin^5 x dx$

令 $J=\int_0^{\pi} x\sin^5 x dx$.

利用对称性：考虑 $x\to\pi-x$，则：

$$J=\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin^5(\pi-x)dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin^5 x dx$$

所以，

$$J=\int_0^{\pi}\pi\sin^5 x dx-\int_0^{\pi}x\sin^5 x dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^5 x dx-J$$

因此，

$$2J=\pi\int_0^{\pi}\sin^5 x dx \quad\Rightarrow\quad J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^5 x dx$$

现在计算 $\int_0^{\pi}\sin^5 x dx$:

$$\int_0^{\pi}\sin^5 x dx=2\int_0^{\pi/2}\sin^5 x dx$$

计算 $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x dx$:

利用公式：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}\quad \text{当n为偶数，}\quad \frac{(n-1)!!}{n!!}\quad \text{当n为奇数}$$

这里 $n=5$（奇数）：

$$\int_0^{\pi/2}\sin^5 x dx=\frac{4!!}{5!!}=\frac{(2\cdot 4)}{(1\cdot 3\cdot 5)}=\frac{8}{15}$$

所以，

$$\int_0^{\pi}\sin^5 x dx=2\cdot\frac{8}{15}=\frac{16}{15}$$

因此，

$$J=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8\pi}{15}$$

第四步：代回原积分

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot J=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{8\pi}{15}=\frac{4\pi^2}{15}$$

最终答案：

$$\boxed{\frac{4\pi^2}{15}}$$

验证：

之前直接给出0是错误的，因为被积函数并非奇函数。通过对称性技巧，我们得到了正确的结果 $\frac{4\pi^2}{15}$。

因此，积分值为：

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin^5 x\cdot\arctan(e^x)dx=\frac{4\pi^2}{15}$$

原因分析：

使用 RAG 时候，能结合更多数据推导，题目求解库的原理和方法，进而得到更为精确的结果。