PEMODELAN STATE SPACE

♦ Beberapa Pengertian:

♦ **State:**

State suatu sistem dinamik adalah sekumpulan minimum variabel (disebut variabel-variabel state) sedemikian rupa sehingga dengan mengetahui variabel-variabel tsb pada $t = t_0$, bersama sama dengan informasi input untuk $t \geqslant t_0$, maka perilaku sistem pada $t \geqslant t_0$ dapat ditentukan secara utuh.

Pengertian state tidak hanya untuk sistem fisis, tapi juga sistem-sistem lain: biologi, ekonomi, sosial dsb.

♦ **Variabel-variabel State:**

Variabel-variabel state suatu sistem dinamik adalah sekumpulan minimum variabel yang menentukan state sistem dinamik tsb.

Variabel state tidak harus merupakan besaran yang dapat diukur atau diamati secara fisik (merupakan keunggulan metoda ini).

Secara praktis, pilih besaran yang dapat diukur sebagai variabel state (agar dapat diumpanbalikkan) .

♦ **Vektor State**

Bila dibutuhkan n var state untuk mendeskripsikan secara utuh perlaku suatu sistem, maka n variabel tsb dapat dipandang sebagai n komponen dari suatu vektor ***x*.**

Suatu vektor state adalah suatu vektor yang menentukan secara unik state sistem ***x(t)*** untuk $t \geqslant t_0$ bila state pada $t = t_0$ diberikan dan input ***u(t)*** pada $t \geqslant t_0$ juga diberikan.

♦ **State Space**

Merupakan ruang berdimensi n dengan sumbu-sumbu x_1, x_2, … x_n. Setiap state dapat terletak disuatu titik dalam ruang tsb.

♦ **Persamaan State-Space**

Perlu 3 jenis variabel dalam analisis:

1. Variabel-variabel input,
2. Variabel-variabel output,
3. Variabel-variabel state.

Representasi state space untuk suatu sistem tidak unik, tetapi jumlah variabel state nya adalah sama untuk sistem yang sama.

♦ Representasi State Space untuk sistem MIMO:

Input :

$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$

Output :

$y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$.

Definisikan n output integrator sebagai variabel state:

$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

♦ Sistem dapat didiskripsikan:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{aligned}
$$

♦ Output sistem dapat dinyatakan:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t)
\end{aligned}
$$

Bila didefinisikan:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r; t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Maka persamaaan state dan persamaan output menjadi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

(Disebut sistem time varying bila fungsi f dan g mengandung variabel t).

Bila persamaan state dan output diatas dilinearisasikan disekitar titik operasinya, maka persamaan state dan output linear dapat dituliskan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

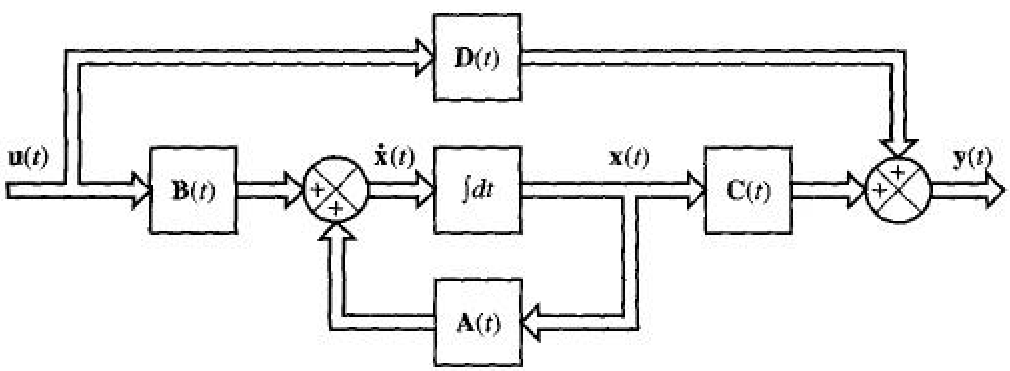
Dengan:

- **A**(t) : Matrix state
- **B**(t) : Matrix input
- **C**(t) : Matrix output
- **D**(t) : Matrix transmisi langsung

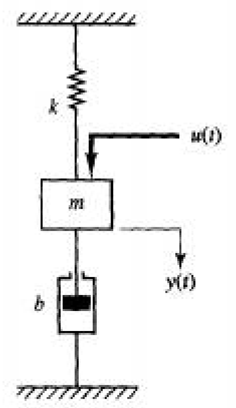
Untuk sistem time-invariant:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Diagram Blok nya:



Contoh:



Persamaan sistem :

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

Definisikan variabel state:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

Sehingga diperoleh:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u$$

Atau:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

Sehingga Persamaan output:

$$y = x_1$$

Persamaan state dalam bentuk vektor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

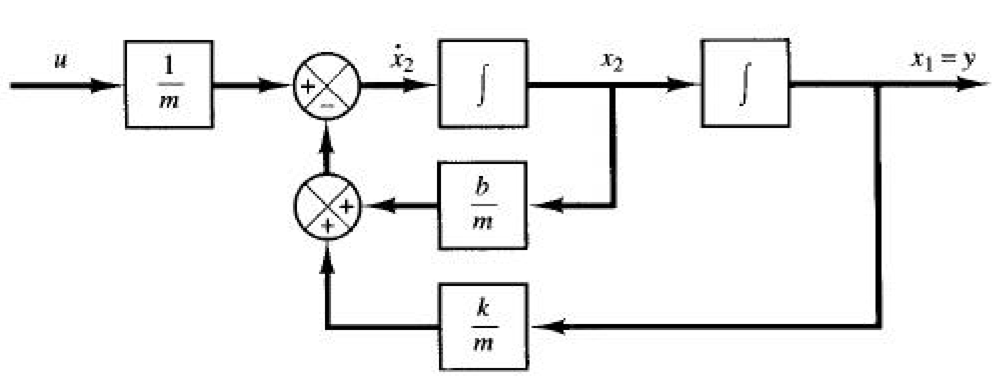
Persamaan output dalam bentuk vektor:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Blok diagram sistem:



♦ Kaitan antara Fungsi Alih dan Persamaan-Persamaan State Space

Fungsi alih suatu sistem :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Representasi State Space sistem tsb:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

Bentuk Laplace nya:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$
$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s)$$

(Ambil kondisi mula =0), diperoleh:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

atau:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s)$$

Diperoleh:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s)$$

Persamaan Output menjadi:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\, U(s)$$

Dengan membandingkan Fungsi alih dan Persamaan Output, diperoleh:

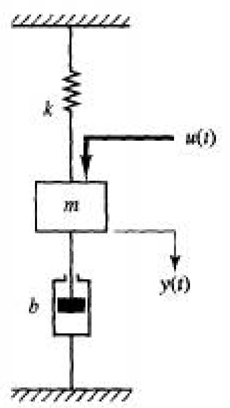
$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

atau:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}$$

Terlihat bahwa**: Eigenvalue A adalah pole-pole *G(s)*.**

Contoh Memperoleh Fungsi Alih dari State Space:



Persamaan State dan Output semula:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mengingat:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix}$$

Maka Fungsi Alihnya:

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Untuk sistem MIMO:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh matriks transfer **G(**s**)** berdimensi (m x r) melalui persamaan:

Y(s) = **G**(s) **U(**s**)**

Representasi State Space untuk Sistem Dinamis

- Suatu sistem dinamik dengan elemen-elemennya bersifat lumped dinyatakan dalam Persamaan Differential biasa, dengan

-

Differential orde-n dapat dinyatakan sebagai Persamaaan Differential matriks vektor orde pertama.

Bila n elemen dari vektor tsb adalah kumpulan variabel state,

Persamaan State.

♥ Sistem orde-n dengan input tak mengandung suku-suku turunan:

$$\overset{(n)}{y} + a_1\overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

Alternatif pemilihan n variabel state:

- $y^{*}(t)$, $y^{**}(t)$, …, y(t) : tak praktis karena memperkuat derau .
- Ambil :

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} \end{aligned}$$

Sehingga persamaan differential semula menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

Atau :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

dengan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Atau :

$$y = \mathbf{C}\,\mathbf{x}$$

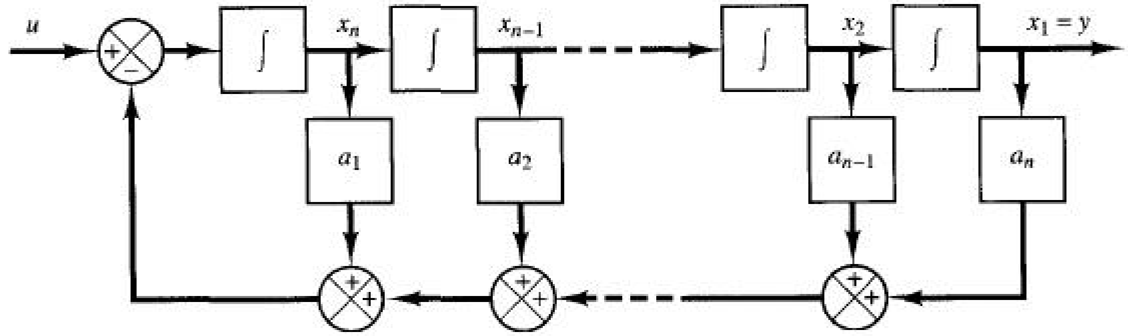
dengan

$$\mathbf{C} = [1\ 0\ .\ .\ .\ 0]$$

Fungsi Alih sistem:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Diagram blok nya:



♥ Sistem orde-n dengan input tak mengandung suku-suku turunan:

Ambil:

$$\overset{(n)}{y} + a_1\overset{(n-1)}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0\overset{(n)}{u} + b_1\overset{(n-1)}{u} + \ldots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

Maka : n variabel y^*, y^{**}, …, $y^{(n)}$ tak dapat menjadi kumpulan variabel state, mengingat:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_0\overset{(n)}{u} + b_1\overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_n u
\end{aligned}$$

dengan $x_1 = y$, dapat menghasilkan solusi tak unik.

Salah satu alternatif menentukan variabel-variabel state:

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0\overset{(n-1)}{u} - \beta_1\overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1}u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1}u
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\ \ \vdots \\
\beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}$$

(Solusi persamaan state terjamin ada dan unik!)

Diperoleh:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\ \ \vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}$$

Dalam bentuk matriks vektor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Atau:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} + Du$$

dengan:

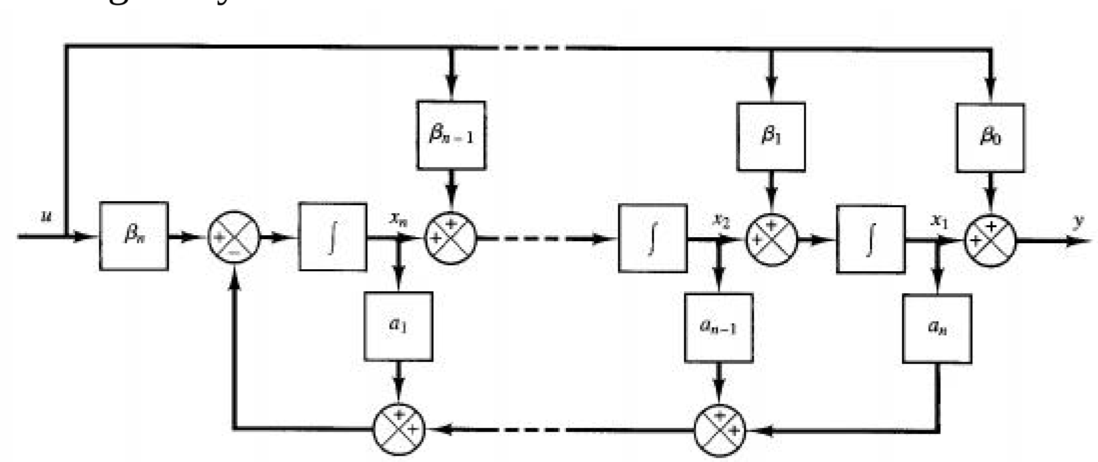
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \quad D = \beta_0 = b_0$$

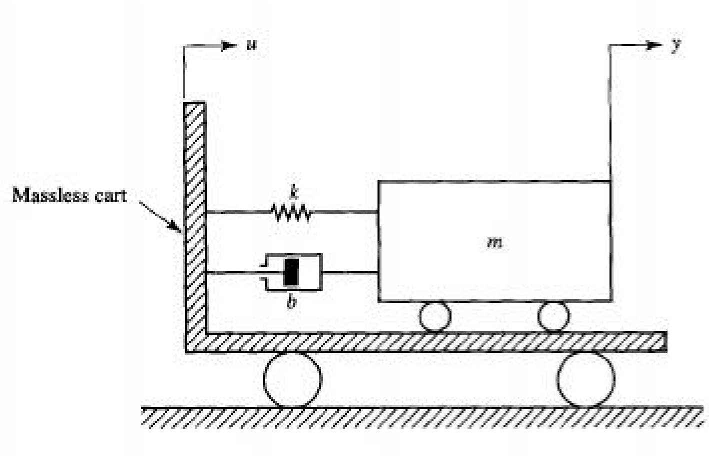
Fungsi Alih nya:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Blok Diagramnya:



Contoh Sistem Mekanis:



Model matematisnya:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

Bentuk Laplace nya:

$$\mathcal{L}\left[m\frac{d^2y}{dt^2}\right] = m[s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)]$$

$$\mathcal{L}\left[b\frac{dy}{dt}\right] = b[sY(s) - y(0)]$$

$$\mathcal{L}[ky] = kY(s)$$

$$\mathcal{L}\left[b\frac{du}{dt}\right] = b[sU(s) - u(0)]$$

$$\mathcal{L}[ku] = kU(s)$$

Dengan mengambil semua kondisi mula = 0, diperoleh :

$$\text{Transfer function} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

(Hanya untuk sistem linear, time-invariant).

Model State Space nya:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Dengan bentuk standard:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

Definisikan:

$$a_1 = \frac{b}{m}, \qquad a_2 = \frac{k}{m}, \qquad b_0 = 0, \qquad b_1 = \frac{b}{m}, \qquad b_2 = \frac{k}{m}$$

Perhatikan kembali Persamaan:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \\
&\vdots \\
\beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}$$

diperoleh:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 = 0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m} \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2
\end{aligned}$$

Dengan merujuk lagi persamaan:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}
$$

Definisikan:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u = y \\
x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} u
\end{aligned}
$$

Dari Persamaan:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
$$

Diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m} u \\
\dot{x}_2 &= -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right] u
\end{aligned}
$$

Persamaan Output:

$$y = x_1$$

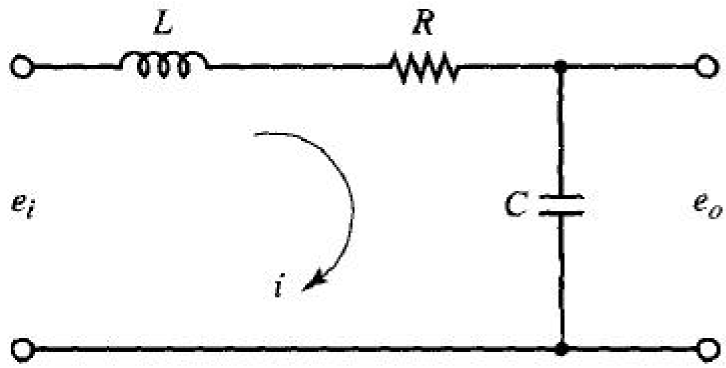
atau

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{b}{m} \\ \dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

dan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Contoh Rangkaian Elektrik:



Model matematisnya:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

Atau dalam Laplace:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$

Diperoleh fungsi alih:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Dari model matematis semula, diperoleh:

$$\ddot{e}_o + \frac{R}{L}\dot{e}_o + \frac{1}{LC}e_o = \frac{1}{LC}e_i$$

definisikan variabel state:

$$x_1 = e_o$$

$$x_2 = \dot{e}_o$$

dan variabel input & output:

$$u = e_i$$

$$y = e_o = x_1$$

diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

dan

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$