7.Fungsi Alih

January 29, 2019

0.1 # Represetasi Sistem dalam Domain Frekuensi

- Representasi sistem dalam persamaan diferensial sulit untuk dimodelkan dalam blok diagram
- Degan menggunakan teorema pada transformasi Laplace, input, output dan sistem bisa direpresentasikan dalam entiti terpisah sehingga mudah dimodelkan dalam blok diagram

1 Transformasi Laplace

- Represetasi sistem g direpresentasikan dalam persamaan diferensial sulit
- Transformasi Laplace didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{L}[\{(\sqcup)] = F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

di mana $s = \sigma + j\omega$, adalah sebuah variabel kompleks

- invers dari Transformasi Laplace, jika diketahui F(s) adalah:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s)e^{st}\, ds = f(t)u(t)$$

di mana

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 \quad t > 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

- Untuk menyelesaikan problem dengan transformasi Laplace, bisa digunakan tabel transformasi Laplace dan tabel teorema Laplace

Contoh:
Soal: Apakah hasil transformasi Laplace dari fungsi $f(t) = Ae^{-at}u(t)$?

Signal Description	***Time-Domain Waveform, f(t)***	***s-Domain Waveform, F(s)***
Step	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Exponential	$\left[e^{-\alpha t}\right]u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
Impulse	$\delta(t)$	1
Ramp, *r(t)*	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Sine	$\left[\sin\beta t\right]u(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
Cosine	$\left[\cos\beta t\right]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$
Damped Pairs		
Damped ramp	$te^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
Damped sine	$\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t\right]u(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
Damped cosine	$\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t\right]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

Transformasi Laplace

Item no.	**Theorem**	**Name**
1.	$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definition
2.	$\mathscr{L}[kf(t)] = kF(s)$	Linearity theorem
3.	$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)] = F_1(s)+F_2(s)$	Linearity theorem
4.	$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Frequency shift theorem
5.	$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$	Time shift theorem
6.	$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Scaling theorem
7.	$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0-)$	Differentiation theorem
8.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Differentiation theorem
9.	$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Differentiation theorem
10.	$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Integration theorem
11.	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Final value theorem[1]
12.	$f(0+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Initial value theorem[2]

Teorema Lapace

Jawab:

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt \\ &= A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt \\ &= -\frac{A}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= \frac{A}{s+a} \end{aligned}$$

Soal: Cari inverse laplace f(t) dari $F(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$
Jawab
Sesuai tabel Lapalace nomor 7:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2}] = e^{-3t}tu(t)$$

Inverse Laplace untuk fungsi komplek: ekspansi partial fraction

2 Fungsi Alih atau Transfer Function

- Fungsi Alih adalah rasio dari transformasi Laplace fungsi output (fungsi respon) terhadap input (fungsi penggerak) degan asumsi semua kondisi awal adalah nol. (Ogata,2010)
- Digunakan untuk menunjukkan sifat hubungan input dan output dari sistem yang bisa digambarkan dalam persamaan diferensial linear, time-invariant

2.1 Fungsi Alih G(s)

Untuk sistem yang linear, time-invariant dengan persamaan diferensial berordo n sebagai berikut:

$$a_0\frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t) = b_m\frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_m\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

dengan c(t) adalah output dan r(t) adalah input dan $a_i s, b_i s$ dan bentuk persamaan diferensial merepresentasikan sistem
Dengan melakukan transformasi laplace pada persamaan di atas, menjadi:

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1}C(s) + \cdots + a_0 C(s) + \text{kondisi awal terkait c(t)} = b_m s^m R(s) + b_{m-1}s^{m-1}R(s) + \cdots + b_0 R(s) + \text{kondi}$$

C(s) dan R(s) adalah transformasi laplace dari fungsi input dan output.
Dengan asumsi **semua kondisi awal adalah nol**, persamaan bisa disederhanakan menjadi

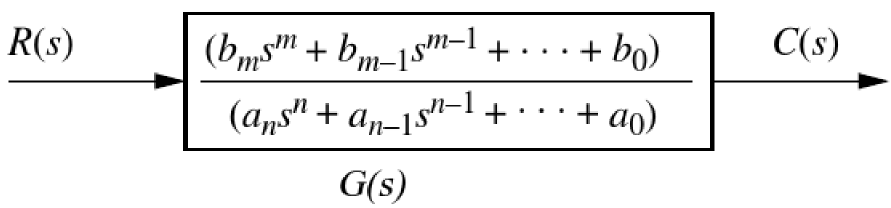
$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)C(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0)R(s)$$

maka Fungsi Alih dari sistem di atas adalah:

$$G(s) = \left. \frac{\mathcal{L}[\wr\sqcap\sqcup\sqrt{}\sqcap\sqcup]}{\mathcal{L}[\rangle\backslash\sqrt{}\sqcap\sqcup]} \right|_{\text{inisial kondisi nol}}$$

$$= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Dengan demikian, sistem bisa dimodelkan dalam blok diagram sebagai berkut:



Fungsi Alih / Transfer Function

Fungsi output r(t) dari sistem yang menerima input c(t) bisa dicari sebagai berikut

$$R(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$$
$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$$

2.2 Point-point Penting tentang Fungsi Alih

---

1. Fungsi alih dari sistem adalah model matematika yang menunjukkan hubungan input dengan output
2. Fungsi alih adalah menunjukkan karakter dari sistem itu sendiri, tidak tergantung dengan ukuran dan sifat dari fungsi input / fungsi penggerak
3. Fungsi alih hanya menunjukkan hubungan input dengan output, tanpa gambaran tentang struktur fisik dari sistem
   - Sistem dengan bentuk fisik berbeda, bisa saja mempunyai fungsi alih yang sama, contoh power steering hidrolik dengan elektronik
4. Jika fungsi alih dari suatu sistem diketahui, maka output atau respon dari sistem terhadap berbagai bentuk input bisa dianalisa
5. Jika fungsi alih dari sistem fisik tidak diketahui, bisa dilakukan eksperimen dengan memberikan fungsi input standard, dan dilakukan studi terhadap outputnya.
   - dari eksperimen bisa didapatkan fungsi alih, yang merupakan gambaran tentang karakteristik dinamis dari sistem

2.3 Contoh

Soal:

Cari fungsi alih dari sistem dengan persamaan diferensial:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t)$$

Jawab:

Transformasi Laplace:

$$sC(s) + 2C(s) = R(s)$$

maka

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2}$$

Soal 2:

Menggunakan jawaban dari soal sebelum ini, tentukan respon c(t) sistem terhadap input berupa fungsi step r(t) = u(t)

Jawab:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = G(s)R(s) \quad = \frac{1}{s+2} x \frac{1}{s}$$

Dengan partial fraction

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}$$

Contoh Solusi persamaan diferensial menggunakan transformasi laplace ___ **Soal:** sistem dengan input fungsi step u(t), digambarkan dengan persamaan diferensial berikut dengan kondisi inisial awal adalah nol. Cari output y(t)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t)$$

Jawab:

Transformasi Lapalace dari persamaan di atas, dengan kondisi awal $y(t)$ dan $\frac{dy}{dt}$ pada y(0-)dan $\dot{y}(0-)$ = 0:

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s} \text{respons Y(s)} = \frac{32}{s(s^2 + 12s + 32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

```
In [ ]:
```