Análisis físico y numérico del oscilador de Duffing acoplado

Eric Jesús Arciniegas Barreto
Santiago Suárez Sánchez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025

Objetivos

Objetivo general:

- Analizar la dinámica no lineal del oscilador de Duffing acoplado mediante simulaciones numéricas.

Objetivos específicos:

- Implementar un modelo numérico en `C++` basado en el método de Runge–Kutta 4.
- Visualizar la evolución temporal, los espacios de fase y las secciones de Poincaré.
- Estimar el exponente de Lyapunov para caracterizar el régimen caótico.

Modelo Matemático

Ecuaciones del sistema

$$m\ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \alpha x_1 + \beta x_1^3 + k(x_1 - x_2) = G_0 \cos(\omega t),$$

$$m\ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + \alpha x_2 + \beta x_2^3 + k(x_2 - x_1) = 0.$$

- $\alpha < 0$: término restaurador lineal
- $\beta > 0$: no linealidad cúbica
- γ: fricción
- k: acoplamiento entre osciladores
- ω: frecuencia de la fuerza externa

Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) para posiciones

$$x_{1,n+1} = x_{1,n} + \frac{1}{6}(k_1^x + 2k_2^x + 2k_3^x + k_4^x)$$
$$x_{2,n+1} = x_{2,n} + \frac{1}{6}(k_1^{x2} + 2k_2^{x2} + 2k_3^{x2} + k_4^{x2})$$

- $k_1^x = h\, y_{1,n}, \quad k_1^{x2} = h\, y_{2,n}$
- $k_2^x = h\,(y_{1,n} + l_1^1/2), \quad k_2^{x2} = h\,(y_{2,n} + l_1^2/2)$
- $k_3^x = h\,(y_{1,n} + l_2^1/2), \quad k_3^{x2} = h\,(y_{2,n} + l_2^2/2)$
- $k_4^x = h\,(y_{1,n} + l_3^1), \quad k_4^{x2} = h\,(y_{2,n} + l_3^2)$

Método Numérico: Velocidades (parte 1)

Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) para velocidades

$$y_{1,n+1} = y_{1,n} + \frac{1}{6}(l_1^1 + 2l_2^1 + 2l_3^1 + l_4^1), \quad y_{2,n+1} = y_{2,n} + \frac{1}{6}(l_1^2 + 2l_2^2 + 2l_3^2 + l_4^2)$$

Primeros pasos de los incrementos:

$$\begin{aligned}
l_1^1 &= h\, f_1(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}, y_{1,n}, y_{2,n}) \\
l_1^2 &= h\, f_2(t_n, x_{1,n}, x_{2,n}, y_{1,n}, y_{2,n}) \\
l_2^1 &= h\, f_1(t_n + h/2, x_{1,n} + k_1^x/2, x_{2,n} + k_1^{x2}/2, y_{1,n} + l_1^1/2, y_{2,n} + l_1^2/2) \\
l_2^2 &= h\, f_2(t_n + h/2, x_{1,n} + k_1^x/2, x_{2,n} + k_1^{x2}/2, y_{1,n} + l_1^1/2, y_{2,n} + l_1^2/2)
\end{aligned}$$

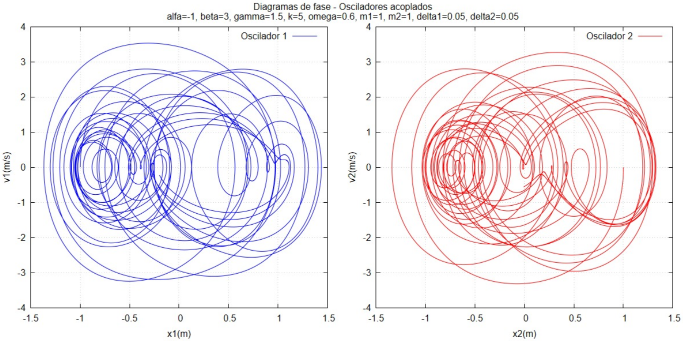
Método Numérico: Velocidades (parte 2)

Continuación de los incrementos

$$
\begin{aligned}
l_3^1 &= h\, f_1(t_n + h/2, x_{1,n} + k_2^x/2, x_{2,n} + k_2^{x2}/2, y_{1,n} + l_2^1/2, y_{2,n} + l_2^2/2) \\
l_3^2 &= h\, f_2(t_n + h/2, x_{1,n} + k_2^x/2, x_{2,n} + k_2^{x2}/2, y_{1,n} + l_2^1/2, y_{2,n} + l_2^2/2) \\
l_4^1 &= h\, f_1(t_n + h, x_{1,n} + k_3^x, x_{2,n} + k_3^{x2}, y_{1,n} + l_3^1, y_{2,n} + l_3^2) \\
l_4^2 &= h\, f_2(t_n + h, x_{1,n} + k_3^x, x_{2,n} + k_3^{x2}, y_{1,n} + l_3^1, y_{2,n} + l_3^2)
\end{aligned}
$$

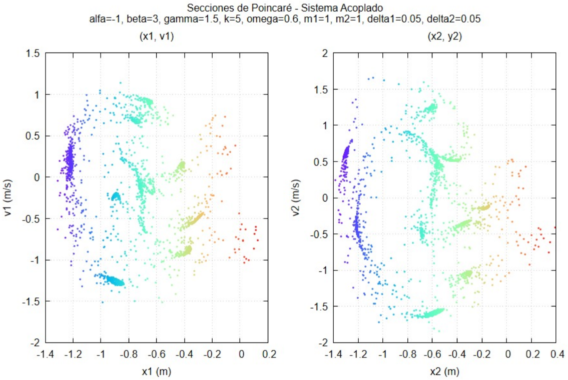
- Alta estabilidad y precisión en sistemas no lineales acoplados.
- Permite integrar simultáneamente ecuaciones de segundo orden.
- Implementado bajo POO en `C++`.

Resultados: Diagramas de Fase

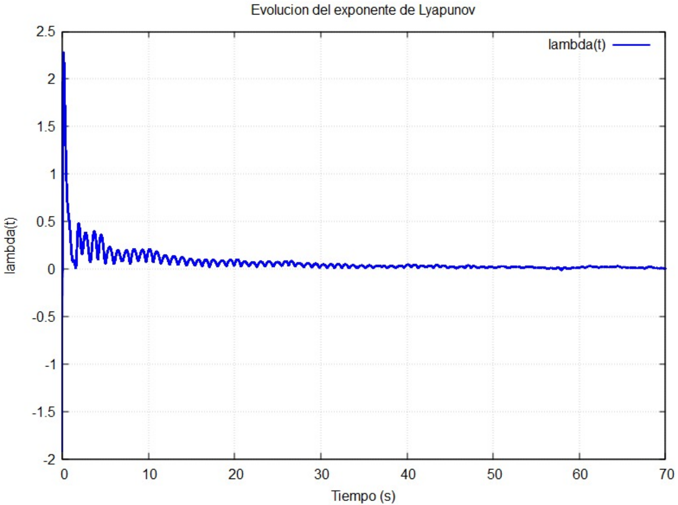


Las trayectorias $(x_i, \dot{x}_i)$ muestran comportamientos periódicos, cuasiperiódicos y caóticos según los parámetros de acoplamiento y excitación.

Resultados: Sección de Poincaré



Resultados: Exponente de Lyapunov



Un $\lambda > 0$ confirma sensibilidad a condiciones iniciales y presencia de caos débil.

Conclusiones

- El acoplamiento lineal no elimina el caos, pero modula su intensidad.
- Se observan regiones de sincronización parcial y cuasiperiodicidad.
- El sistema sirve como laboratorio numérico para el estudio de la transición al caos.

Gracias por su atención.