HOMEWORK 1

① Sia X v.A. che descrive il peso dei gattini alla nascita (in dg)
Assumendo che X abbia funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} c(0{,}5 - 0{,}04x) & \text{se } 7{,}5 \le X \le 12{,}5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ⓐ Si ottenga il valore della costante c tale per cui $f(x)$ è funzione di densità della v.A. X

$$F(x) = \int_{7,5}^{12,5} c(0{,}5 - 0{,}04x)\,dx = 1$$

$$= c\int_{7,5}^{12,5} 0{,}5 - 0{,}04x\,dx = 1$$

$$= c \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

ⓑ Si ottenga la funzione di ripartizione e si calcolino il valore atteso e la varianza di X

$$P_X(x) = P(X \le x) = 2\int_{7,5}^{x} 0{,}5 - 0{,}04t\,dt = 2\int \frac{1}{2} - \frac{1}{25}t\,dt$$

$$= 2\left(\int \frac{1}{2}dt - \int \frac{1}{25}t\,dt\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}t - \frac{t^2}{50}\Big|_{7,5}^{x}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{50} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2} - \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^2}{50}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{50} - \frac{21}{8}\right)$$

$$F_x(X) = \begin{cases} 0 & se \quad X < 7{,}5 \\ x - \frac{x^2}{25} - \frac{21}{4} & se \quad 7{,}5 \leq X \leq 12{,}5 \\ 1 & se \quad X > 12{,}5 \end{cases}$$

$$E[X] = \int x f(x)\,dx = 2\int_{7,5}^{12,5} x(0{,}5 - 0{,}04x)\,dx = 9{,}166$$

$$E[X^2] = \int x^2 f(x)\,dx = 2\int_{7,5}^{12,5} x^2(0{,}5 - 0{,}04x)\,dx = 85{,}42$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 85{,}42 - (9{,}166)^2 = 1{,}4$$

c) Si calcoli la probabilità che il peso alla nascita sia compreso tra 90 e 100 grammi

$$P(9 \leq X \leq 10) = F_x(10) - F_x(9) = \int_9^{10} f(t)\,dt$$

$$= \int_9^{10} \frac{1}{2} - \frac{1}{25}t\,dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}t - \frac{t^2}{50}\Big|_9^{10}\right)$$

$$= 2\left(5 - 2 - \left(\frac{9}{2} - \frac{81}{50}\right)\right) = \frac{6}{25}$$

② Un laboratorio deve controllare la qualità di un lotto di 30 bottiglie di succo di arancia, tra cui 6 sono contaminate. Pertanto, il tecnico procede secondo due fasi:

- FASE 1: Estrae 3 bottiglie senza reinserimento, le analizza e le scarta tutte
- FASE 2: Estrae altre 2 bottigliette con reinserimento dal resto del lotto rimasto

ⓐ Si calcoli la probabilità che in fase 1 sia stata estratta almeno 1 bottiglia contaminata

$X \sim \text{Iper}(N=30,\ m=6,\ n=3)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1)$$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1 - \underbrace{\frac{\binom{6}{0}\binom{24}{3}}{\binom{30}{3}}}_{0,4985} = \frac{509}{1015} = 0,5015$$

ⓑ Si calcoli la probabilità che in fase 2 sia stata estratta almeno una bottiglia contaminata

$$P(X=0) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{0}\binom{24}{3}}{\binom{30}{3}} = 0,4985$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{24}{2}}{\binom{30}{3}}=0{,}408$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{6}{2}\binom{24}{1}}{\binom{30}{3}}=0{,}089$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\binom{24}{0}}{\binom{30}{3}}=0{,}0049$$

$Y \sim Bin(2, p)$

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-0{,}642=0{,}358$$

$$P(Y=0)=P(Y=0|X=0)+P(Y=0|X=1)+P(Y=0|X=2)+P(Y=0|X=3)=0{,}642$$

$$P(Y=0|X=0)=\left(\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right)\cdot P(X=0)=\left(\binom{2}{0}\left(\frac{6}{27}\right)^0\left(1-\frac{6}{27}\right)^{2-0}\right)\cdot 0{,}4985=0{,}302$$

$$P(Y=0|X=1)=\left(\binom{2}{0}\left(\frac{5}{27}\right)^0\left(1-\frac{5}{27}\right)^{2-0}\right)\cdot 0{,}408=0{,}271$$

$$P(Y=0|X=2)=\left(\binom{2}{0}\left(\frac{4}{27}\right)^0\left(1-\frac{4}{27}\right)^{2-0}\right)\cdot 0{,}089=0{,}065$$

$$P(Y=0|X=3)=\left(\binom{2}{0}\left(\frac{3}{27}\right)^0\left(1-\frac{3}{27}\right)^{2-0}\right)\cdot 0{,}0049=0{,}004$$

⊙ Si supponga che in uno studio di veterinaria vi siano due veterinari: uno di essi (A) riesce a visitare in media 2 animali ogni ora, l'altro (B) 3 ogni 2 ore. Assumendo che il numero di arrivi dei pazienti da entrambi i veterinari sia un processo di Poisson:

ⓐ Si calcoli la probabilità che il tempo di visita di un animaletto sia inferiore a 40 min per ognuno dei due veterinari.

$X \sim P_o\left(\frac{1}{30}\right) \qquad Y \sim P_o\left(\frac{1}{40}\right)$

$T_A \sim Esp\left(\frac{1}{30}\right) \qquad P(T_A < 40) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{1}{30}\cdot 40} = 0{,}736$

$T_B \sim Esp\left(\frac{1}{40}\right) \qquad P(T_B < 40) = 1 - e^{-\frac{1}{40}\cdot 40} = 0{,}632$

ⓑ Sapendo che la probabilità di scegliere il veterinario A è pari a 0,6, si calcoli il tempo medio di visita di un animaletto nello studio di veterinaria

$p_A = 0{,}6 \qquad p_B = 0{,}4$

$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\left(\frac{1}{30}\right)} = 30 \qquad E[Y] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\left(\frac{1}{40}\right)} = 40$

$0{,}6 \cdot 30 + 0{,}4 \cdot 40 = 34 \text{ min}$

ⓒ Si calcoli il tempo medio di visita del quarto animaletto per i due veterinari.

$X \sim Ga\left(\alpha = 4, \lambda = \frac{1}{30}\right) \qquad Y \sim Ga\left(\alpha = 4, \lambda = \frac{1}{40}\right)$

$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{4}{\left(\frac{1}{30}\right)} = 120 \text{ min} \qquad E[Y] = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{4}{\left(\frac{1}{40}\right)} = 160 \text{ min}$

④ Un gruppo di ecologi sta studiando l'effetto combinato di due fattori ambientali sulla produzione annuale di biomassa in un ecosistema. Siano X e Y due v.A. che rappresentano l'umidità media del suolo e l'intensità media della luce solare durante la stagione vegetativa, rispettivamente. Assumendo che X e Y siano distribuite secondo una normale con $\mu_x = 120$, $\mu_y = 18$, $\sigma_x^2 = 100$, $\sigma_y^2 = 9$. Sia $Z = 0{,}2X + 1{,}5Y$ la v.A. che rappresenta un indice sintetico di produttività della biomassa. Si ottenga la distribuzione di Z nel caso in cui:

ⓐ X e Y siano indipendenti

$$X \sim N(\mu = 120, \sigma^2 = 100) \qquad Y \sim N(\mu = 18, \sigma^2 = 9)$$

$$\mu_W = 0{,}2 \cdot \mu_x + 1{,}5 \cdot \mu_y = 51$$

$$W \sim N(\mu = 51, \sigma^2 = 24{,}25)$$

$$\sigma_W^2 = 0{,}2^2 \cdot \sigma_x^2 + 1{,}5^2 \cdot \sigma_y^2 = 24{,}25$$

$$\sigma_W = \sqrt{\sigma_W^2} = \sqrt{24{,}25} = 4{,}924$$

$$P(60 \leq W \leq 90) = \Phi\left(\frac{90-\mu_W}{\sigma_W}\right) - \Phi\left(\frac{60-\mu_W}{\sigma_W}\right) = \Phi\left(\frac{90-51}{4{,}924}\right) - \Phi\left(\frac{60-51}{4{,}924}\right)$$

$$= \Phi(7{,}92) - \Phi(1{,}828)$$

$$= 1 - 0{,}966 = 0{,}034$$

④ X e Y siano dipendenti e la correlazione sia pari a 0,6

$$0,6 = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{9}} = \frac{cov(X,Y)}{30} \Longrightarrow cov(X,Y) = 0,6\cdot 30 = 18$$

$$\sigma_Z^2 = V(\Sigma X) = V(X) + V(Y) + 2\,cov(X,Y)$$

$$= \sigma_W^2 + 2\cdot 18\cdot \underbrace{0,2\cdot 1,5}_{COEFF.} = 35,05$$

$$Z \sim (\mu = 51,\ \sigma^2 = 35,05)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_Z^2} = \sqrt{35,05} = 5,92$$

$$P(60 \le Z \le 90) = \Phi\left(\frac{90-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) - \Phi\left(\frac{60-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(\frac{90-51}{5,92}\right) - \Phi\left(\frac{60-51}{5,92}\right)$$

$$= \Phi(6,588) - \Phi(1,52)$$

$$= 1 - 0,9357 = 0,0643$$

⑤ Un team IT sta monitorando le prestazioni di un server che gestisce richieste da parte di utenti in rete. Il tempo di risposta (in millisecondi) del server a una singola richiesta, X, segue una distribuzione esponenziale con un tempo medio di risposta di 100ms

ⓐ Qual è la probabilità che il server risponda in meno di 300ms a una richiesta?

$$X \sim Esp\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$P(X<300) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{1}{100}\cdot 300} = 0,9502$$

(b) Qual è la probabilità che una richiesta richieda più di 300 ms, sapendo che il server è già in attesa da 100 ms?

$$P(X>100+t \mid X>100) = P(X>t) \qquad t=200$$

$$P(X>200) = 1-P(X\leq 200)$$
$$= 1-(1-e^{-\lambda t}) = 1-(1-e^{-\frac{1}{100}\cdot 200}) = 0{,}1353$$

(c) Qual è il valore mediano del tempo di risposta del server?

$$Me(X) = X_{0,5} \qquad P(X\leq X_{0,5}) = 0{,}5 = 1-e^{-\lambda X_{0,5}}$$
$$\Rightarrow -e^{-\lambda X_{0,5}} = 0{,}5$$
$$-e^{-\frac{1}{100}X_{0,5}} = 0{,}5$$
$$\ln(0{,}5) = -\frac{1}{100}X_{0,5}$$
$$X_{0,5} = -100\ln(0{,}5)$$
$$= 69{,}3$$

(6) Siano X e Y due V.A. che rappresentano il numero di vinili (X) e libri (Y) acquistati dai clienti che entrano in una libreria. La distribuzione congiunta $p(x,y) = P(X=x, Y=y)$ è espressa mediante la seguente tabella

X/Y	0	1	2
0	0,05	0,4	0,2
1	0,2	0,1	0,05

Si ottengano le distribuzioni marginali di X e Y, il loro valore atteso e la varianza. Quindi si calcoli $cov(X,Y)$.

$P(X=0)=0{,}05+0{,}4+0{,}2=0{,}65$

$P(X=1)=0{,}2+0{,}1+0{,}05=0{,}35$

$P(Y=0)=0{,}05+0{,}2=0{,}25$

$P(Y=1)=0{,}4+0{,}1=0{,}5$

$P(Y=2)=0{,}2+0{,}05=0{,}25$

$E[X]=\sum x\cdot p(x)=0\cdot 0{,}65+1\cdot 0{,}35=0{,}35$

$E[Y]=\sum y\, p(y)=0\cdot 0{,}25+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25=1$

$E[X^2]=\sum x^2\, p(x)=0^2\cdot 0{,}65+1^2\cdot 0{,}35=0{,}35$

$E[Y^2]=\sum y^2\, p(y)=0^2\cdot 0{,}25+1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}25=1{,}5$

$V(X)=E[X^2]-E[X]^2=0{,}35-0{,}35^2=0{,}2275$

$V(Y)=E[Y^2]-E[Y]^2=1{,}5-0{,}35^2=0{,}5$

$E[XY]=\sum_x\sum_y x\,y\,p(x;y)=0\cdot 0\cdot 0{,}05+\cancel{0\cdot 1\cdot 0{,}4}+\cancel{0\cdot 2\cdot 0{,}2}+\cancel{1\cdot 0\cdot 0{,}2}+1\cdot 1\cdot 0{,}1+1\cdot 2\cdot 0{,}05=$
$=0{,}1+0{,}1=0{,}2$

$cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0{,}2-(0{,}35\cdot 1)=-0{,}15$

⑦ Il personale amministrativo di un pronto soccorso ospedaliero sta analizzando i flussi di arrivo dei pazienti in una giornata con affluenza regolare, per valutare il carico di lavoro del triage. Dalle osservazioni, risulta che in media arrivano 3 pazienti ogni 20 minuti al pronto soccorso. Si assume che gli arrivi seguano un processo di Poisson

ⓐ Qual è la probabilità che in 5 minuti non sia arrivato alcun paziente?

$X \sim Po\left(\frac{3}{20}\right) \rightarrow 0,15$ arrivi al min

$t = 5$ min $\quad X \sim Po(\lambda t = 0,15 \cdot 5 = 0,75)$

$P(N_t = 0) = e^{-\lambda t} = e^{-0,75} = 0,472$

ⓑ Qual è la probabilità che il 5 paziente arrivi dopo 20 min?

$X \sim Ga(5, 0,15) \qquad Po\left(\lambda t = \frac{3}{20} \cdot 20 = 3\right)$

$P(X > 20) \Rightarrow P(T_5 > t) = P(N_t < 5$

$= P(N_t \leq 4)$

$= P(N_t = 0) + P(N_t = 1) + P(N_t = 2) + P(N_t = 3) + P(N_t = 4)$

$= \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!} = \frac{e^{-3} \cdot 3^x}{x!} = 0,815$

ⓒ In media, quanto tempo (in minuti intercorre tra l'arrivo di due pazienti consecutivi

$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}67$

⑧ Siano X e Y v.A. indipendenti e distribuite secondo $Ga(\alpha_1, \lambda)$ e $Ga(\alpha_2, \lambda)$ rispettivamente. Si ricavi quindi la distribuzione $Z = X + Y$ e si ottengano media e varianza di Z

$$Z = X + Y \sim Ga(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

$$E[Z] = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda}$$

$$V(Z) \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda^2}$$

⑨ La distribuzione Beta può essere utile per modellare i dati di affluenza elettorale. Dai dati di affluenza alle urne delle ultime votazioni conosciamo che la media e la varianza sono rispettivamente 0,67 (67%) e varianza 0,02. Si ottengano i parametri della distribuzione Beta.

$$X \sim Beta(\alpha, \beta)$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0{,}67$$

$$\alpha = 0{,}67\alpha + 0{,}67\beta$$

$$\alpha - 0{,}67\alpha = 0{,}67\beta$$

$$\alpha(1 - 0{,}67) = 0{,}67\beta$$

$$0{,}33\alpha = 0{,}67\beta \implies \frac{33}{100}\alpha = \frac{67}{100}\beta$$

$$\alpha = \frac{67}{\cancel{100}}\beta \frac{\cancel{100}}{33}$$

$$\alpha = \frac{67}{33}\beta$$

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = 0{,}02$$

$$\frac{\frac{67}{33}\beta \cdot \beta}{\left(\frac{67}{33}\beta+\beta\right)^2\left(\frac{67}{33}\beta+\beta+1\right)} = 0{,}02$$

$$\frac{\frac{67}{33}\beta \cdot \beta}{\left(\frac{100}{33}\beta\right)^2\left(\frac{100\beta+33}{33}\right)} = 0{,}02$$

$$\frac{\frac{67}{\cancel{33}}\cancel{\beta} \cdot \cancel{\beta}}{\frac{10.000}{1089}\cancel{\beta^2}\left(\frac{100\beta+33}{33}\right)} = 0{,}02$$

$$\frac{2211}{\frac{10000(100\beta+33)}{\cancel{33}}} = 0{,}02$$

$$\frac{72963}{10.000(100\beta+33)} = 0{,}02$$

$$72963 = 0{,}02\left(10.000(100\beta+33)\right)$$

$$72963 = 200(100\beta+33)$$

$$= 20.000\beta + 6600$$

$$-20.000\beta = -66363$$

$$\beta = \frac{66363}{20000} = 3{,}31$$

$$\alpha = \frac{67}{33} \cdot \frac{66363}{20.000} = 6{,}74$$

⑩ Si consideri il seguente gioco relativo al lancio di un dado equilibrato a 4 facce, dove si vince se il numero risultante del lancio è 1.

ⓐ Qual è la probabilità che la prima vittoria avvenga al secondo lancio

$$X \sim BN\left(r=1, p=\frac{1}{4}\right)$$

$$P(X=2) = \binom{x-1}{r-1} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{x-r}$$

$$= \binom{1}{0} \cdot 0{,}25^{1} \cdot 0{,}75^{1} = 0{,}1875$$

ⓑ Qual è la probabilità che la terza vittoria avvenga entro il 4 lancio?

$$X \sim BN\left(3, \frac{1}{4}\right)$$

$$P(X \leq 4) = \sum_{x=r}^{4} P(X=x) = \sum_{x=3}^{4} \binom{x-1}{2} 0{,}25^{3} \cdot 0{,}75^{1} = 0{,}05$$