ALGEBRA LINEARE 23/9/2024

$x^2 + 2x + 1 = 0$

Un'equazione è una domanda, infatti è un modo per formalizzare la domanda: "Qual è quel numero, che identifichiamo con x, tale che, se a partire da esso calcoliamo la quantità $x^2+2x+1=0$, allora tale quantità è uguale a zero?"

Una soluzione dell'equazione è una risposta corretta alla domanda. Infatti il fatto che -1 sia la soluzione dell'equazione segue dal fatto che se sostituiamo -1 a x otteniamo:

$$(-1)^2+2(-1)+1 = 1-2+1=0$$

La teoria delle equazioni di II grado ci dice che -1 è l'unica soluzione in quanto il membro sinistro si può scrivere come:

24/9/2024

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

Consideriamo $3x+y-2z=0$. Risolvere l'equazione significa trovare 3 numeri (x,y,z) tali che la quantità $3x+y-2z$ sia zero. Risolvere significa ottenere una <u>terna</u> (x,y,z) di numeri tali, che sostituiti al membro sinistro rende l'uguaglianza vera.
Una soluzione possibile è $x=0$, $y=0$, $z=0$, ovvero la $\underbrace{\text{terna } (0,0,0)}_{\text{le terne sono ordinate}}$.
Infatti vale che $3\cdot 0+0-2\cdot 0=0$
Allo stesso modo anche la scelta $x=1$, $y=1$, $z=2$ avrà la terna $(1,1,2)$.
Vediamo ora che possiamo usare queste soluzioni per creare

altre usando in particolare la proprietà commutativa e distributiva delle equazioni
Mostriamo che la terna (2, 2, 4) è soluzione (se sostituisco ottengo un'uguaglianza vera). Infatti:

$$3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4 = 0$$

Riotteniamo ora questo risultato in modo da far emergere una proprietà interessante delle equazioni

$$3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 4 = 3(2 \cdot 1) + 1(2 \cdot 1) - 2(2 \cdot 2) =$$

$$= 2(3 \cdot 1) + 2(1 \cdot 1) - 2(2 \cdot 2)$$ proprietà comutativa e associativa

Ricordiamo che per le operazioni di somma e prodotto tra numeri vale la proprietà <u>commutativa</u> dal momento che per ogni numero reale a e b si sa che $\underline{a \cdot b = b \cdot a}$ e $\underline{a + b = b + a}$;
Inoltre vale la proprietà <u>associativa</u> per le operazioni di somma e prodotto tra numeri dato che per ogni numero reale a, b e c vale $\underline{(a+b)+c = a+(b+c)}$ e $\underline{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$

$$= 2(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2)$$ proprietà distributiva

Ricordiamo che per le operazioni di somma e prodotto tra numeri reali vale la proprietà <u>distributiva</u>, dato che per ogni numero reale a, b, c

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$= 2\underbrace{(3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 2)}_{=0 \text{ perché } (1,1,2) \text{ è soluzione}}$$

$$= 2\cdot 0 = 0$$

Lo stesso ragionamento ci mostra che $x=15$, $y=15$, $z=30$, ovvero la terna $(15,15,30)$ è soluzione infatti

$$3\cdot 15 + 1\cdot 15 - 2\cdot 30 = 15(3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 2) = 15\cdot 0 = 0$$

Possiamo dire che $\forall_\alpha \in \mathbb{R}$, vale che la terna $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$ è la soluzione dell'equazione.

Possiamo introdurre questo tipo di scrittura:

$$\alpha\cdot(1,1,2) \underset{\text{definizione}}{:=} (\alpha, \alpha, 2\cdot\alpha)$$

In questo modo diamo senso alla nozione di moltiplicazione di una terna per un numero reale, e possiamo dire che dato che $(1,1,2)$ è soluzione dell'equazione allora ogni suo multiplo per un numero reale è anch'esso soluzione.

Questa proprietà è una peculiarità di questo tipo di equazioni; essa non vale ad esempio, per l'equazione $x+2y-1=0$ oppure per l'equazione $x^2-5x+6=0$.

Analizziamo adesso un secondo fenomeno peculiare dell'equazione che stiamo studiando. Abbiamo visto che $(1,1,2)$ e $(0,2,1)$ sono soluzioni. Ora vorrei mostrare che $(1,3,3)$ è soluzione. Per farlo notiamo che $(1,3,3)$ è ottenuta sommando "entrata per entrata" le due terne $(1,1,2)$ e $(0,2,1)$:

$$x: \quad 1 = 1 + 0$$
$$y: \quad 3 = 1 + 2$$
$$z: \quad 3 = 2 + 1$$

In questo senso possiamo introdurre come notazione compatta

$$(1,3,3) = (1,1,2) + (0,2,1)$$

In generale possiamo definire:

$$(a,b,c) + (a',b',c') := (a+a', b+b', c+c')$$

In questo modo abbiamo introdotto una nozione di somma tra due terne. Come fatto in precedenza mostriamo che $(1,3,3)$ è soluzione basandosi sulla conoscenza pregressa.

$$3\cdot 1 + 1\cdot 3 - 2\cdot 3 =$$
$$= 3(0+1) + 1(1+2) - 2(1+2) =$$
$$= \underbrace{(3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 2)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ (1,1,2) \text{ è soluz.}}} + \underbrace{(3\cdot 0 + 1\,2 - 2\cdot 1)}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ (0,2,1) \text{ è soluz}}} = 0 + 0 = 0$$

Generalizzando abbiamo visto che la somma di due soluzioni dell'equazione è anch'essa una soluzione dell'equazione. Ciò non vale per tutti i tipi di equazione, come si può evincere osservando l'equazione $x^2-8x+6=0$, le cui soluzioni sono 2 e 3, e quindi 2+3 non è soluzione.

Riassumendo, abbiamo visto che, riguardo alle soluzioni di $3x+y-2z=0$:

A) la terna $(0,0,0)$ è soluzione;

B) se la terna $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ è soluzione, allora $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ anche la terna $\alpha(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ è soluzione;

C) Se la terna $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ e $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ sono soluzioni, allora anche $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})+(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ è soluzione.

Queste tre proprietà sono centrali nel concetto di <u>linearità</u>. Allarghiamo il nostro orizzonte e studiamo il caso di quei operatori che noi vogliamo siano <u>soddisfatti simultaneamente</u>, ovvero quelli che sono noti come <u>sistemi di equazioni</u>.

Ad esempio:

$$\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ -2x-2y+2z=0 \\ 2x \qquad -z=0 \end{cases}$$

Ripetendo i ragionamenti precedenti notiamo che anche per le soluzioni di questo sistema valgano le proprietà A, B e C.

Come trovare le soluzioni di questo sistema? Per farlo utilizzeremo il cosiddetto "algoritmo di eliminazione di Gauss". Esso si basa sulle seguenti regole:

1) "se a cose uguali sommiamo cose uguali otteniamo cose uguali"

2) "se moltiplichiamo due numeri uguali per il medesimo non nullo otteniamo numeri uguali e viceversa."

Tramite questi due principi, manipoliamo il sistema iniziale, per ottenere uno <u>equivalente</u>, ovvero con le stesse soluzioni. Vogliamo che il sistema finale abbia la forma seguente:

$$\begin{cases} \text{un'equazione in tutte e tre le variabili} \\ \text{un'equazione in } y \text{ e } z \\ \text{un'equazione in } z \end{cases}$$

qualcuna di queste eq. può essere manchevole

Partiamo notando che: $-2x-2y+2z=0$

è equivalente a: $x+y-z=0$

Il sistema diviene:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

Considero ora

$$(3x+y-2z)-3(x+y-z)=0-3\cdot 0$$
$$-2y+z=0$$

Similmente considero

$$(2x-z)-2(x+y-z)=0-2\cdot 0=0$$
$$-2y+z=0$$

Il sistema iniziale è equivalente a

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+z=0 \\ -2y+z=0 \end{cases}$$

→ medesima equazione, quindi una delle due può essere ignorata

A questo punto posso scegliere un valore per z, determinare dalla II equazione il valore di y, sostituirli entrambi nella I equazione e determinare il valore di x.

Notiamo ora che se a partire dal sistema iniziale inseriamo i coefficienti che compaiono nella equazione in una tabella otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{matrice}$$

in questa tabella possiamo eseguire le operazioni che abbiamo eseguito sulle equazioni

27/9/2024

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{II} - 3\mathrm{I} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III} - 2\mathrm{I} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \; \mathrm{III} - \mathrm{II}$$

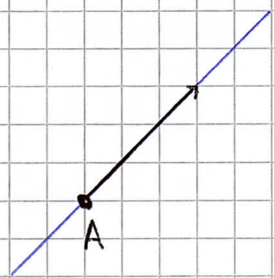
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice a gradini

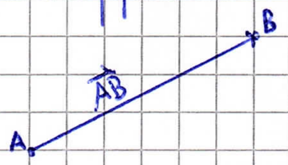
Vettori applicati e vettori liberi

Un vettore applicato è un segmento orientato, ed è dunque caratterizzato da:

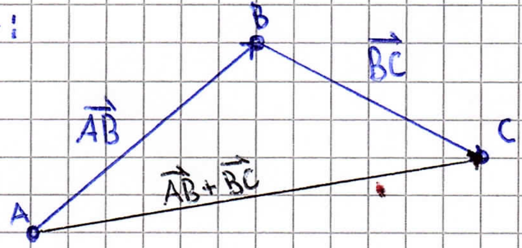
- un punto di applicazione
- direzione
- verso
- lunghezza (o modulo)



Un vettore applicato è anche determinato da una coppia ordinata di punti; in questo caso il vettore si denota con $\overrightarrow{AB}$



I vettori applicati si possano sommare, ma non sempre: è necessario (e sufficente) che il punto di arrivo del primo vettore applicato coincide con il punto di partenza del secondo vettore applicato:



Attenzione: se $B \neq C$, allora non sappiamo sommare $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

proposizione: Se è definita, la somma tra vettori applicati soddisfa la proprietà associa associativa.

(ricordiamo che la proprietà associativa vale ad esempio per la somma di numeri reali, ovvero per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ vale che

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$

)

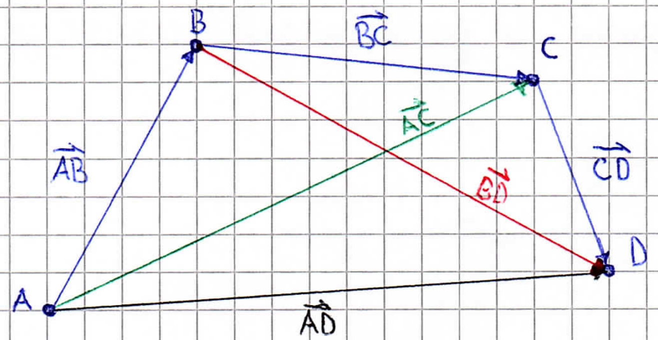
Per ogni vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$, ovvero per ogni quattro punti A, B, C e D nel piano.

dimostrazione: per mostrare che vale la proprietà associativa, calcoliamo i membri destro e sinistro della precedente uguà glianza e mostriamo che effettivamente sono uguali, vale che

$$(\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{CD}=\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$$

$$\vec{AB}+(\vec{BC}+\vec{CD})=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AD}$$

Graficamente:



def: dato un vettore applicato $\vec{AB}$ e un numero reale $a \in \mathbb{R}$ definiamo $a \cdot \vec{AB}$ nel modo seguente:

- se $a=0$, otteniamo $a \cdot \vec{AB}=\vec{AA}$
- se $a>0$, definiamo $a \cdot \vec{AB}$ come quel vettore applicato tale che:
  - ha lo stesso punto di applicazione di $\vec{AB}$
  - ha la stessa direzione di $\vec{AB}$
  - ha lo stesso verso di $\vec{AB}$
  - ha modulo uguale ad $a \cdot |\vec{AB}|$

modulo di $\vec{AB}$

- se $a<0$, definiamo $a\cdot\overrightarrow{AB}$ come quel vettore applicato tale che:
    - ha lo stesso punto di applicazione di $\overrightarrow{AB}$
    - ha la stessa direzione di $\overrightarrow{AB}$
    - ha il verso opposto di $\overrightarrow{AB}$
    - ha modulo $|a|\cdot|\overrightarrow{AB}|=(-a)\cdot|\overrightarrow{AB}|$

Abbiamo introdotto vettori applicati del tipo $\overrightarrow{AA}$. Notiamo che

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}&=\overrightarrow{AB}\end{aligned}\right\}$$

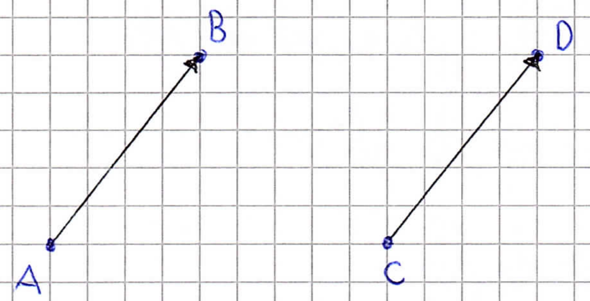
i vettori applicati del tipo $\overrightarrow{AA}$ e $\overrightarrow{BB}$ si comportano in maniera simile a come si comporta lo zero nei numeri

Per questo motivo, i vettori opposti del tipo $\overrightarrow{AA}$ si chiamano <u>vettori applicati nulli</u>.

Per ottenere una teoria "più compatta" e più funzionante, andiamo a introdurre dei nuovi oggetti, i cosiddetti <u>vettori liberi</u>. Per farlo andiamo ad accomunare vari vettori applicati tra di loro, tramite la nozione di <u>equipollenza</u>.

<u>def:</u> Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono <u>equipollenti</u> (e in questo caso scriviamo $\overrightarrow{AB}\equiv\overrightarrow{CD}$) se e solo se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo

(ovvero differiscono per il punto di applicazione)



Si verifica che la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza, ovvero è riflessiva, simmetrica e transitiva.

def: Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, determiniamo la sua classe di equipollenza.

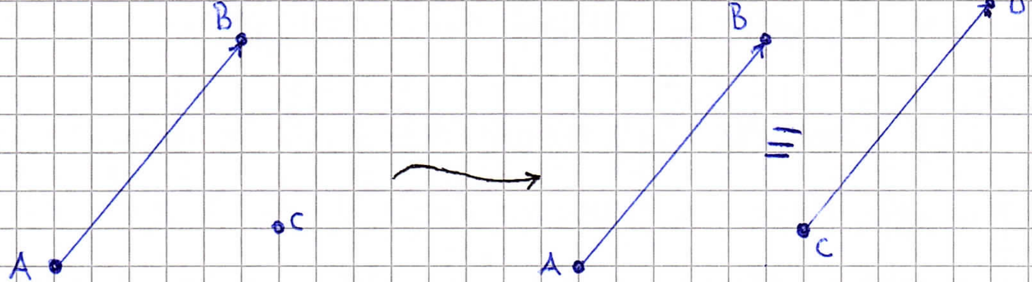
$$[\overrightarrow{AB}] := \{\text{vettori applicati } \overrightarrow{CD} \text{ tali che } \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}\}$$

insieme di tutti i vettori equipollenti ad $\overrightarrow{AB}$

Oss: $[\overrightarrow{AA}] = \{\text{vettori applicati nulli}\}$

notiamo quindi $[\overrightarrow{AA}] = [\overrightarrow{BB}]$

proposizione: Dai risultati della geometria euclidea abbiamo come dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$ e un punto C; esiste sempre un unico vettore applicato $\overrightarrow{CD}$ equipollente ad $\overrightarrow{AB}$.



Da questo segue che data una classe di equipollenza $\vec{V}$ e dato un punto C esiste sempre un vettore applicato $\vec{CD}$ che appartiene a $\vec{V}$, ovvero $\vec{CD} \in \vec{V}$.

__def:__ Se $\vec{AB} \equiv \vec{CD}$ (e dunque $[\vec{AB}] = [\vec{CD}]$), allora si dice che $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono __rappresentati__ dalla medesima classe di equipollenza

__def:__ Una classe di equipollenza $\vec{V}$ si dice un __vettore libero__

insieme di vettori applicati

__def:__ Tutti i vettori applicati nulli formano un'unica classe di equipollenza ovvero un vettore libero, che denotiamo con $\vec{0}$.

__def:__ Dati due vettori liberi $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definiamo la loro __somma__ (che denotiamo con $\vec{u}+\vec{v}$) nella maniera seguente:

1) Scegliamo un rappresentante $\vec{AB}$ per $\vec{u}$, ovvero $\vec{u} = [\vec{AB}]$

2) Scegliamo un rappresentante di $\vec{v}$ tale per cui il suo punto iniziale sia B, ovvero un vettore applicato $\vec{BC}$, con $\vec{v} = [\vec{BC}]$

3) Definiamo $\vec{u}+\vec{v} := [\vec{AB}+\vec{BC}] = [\vec{AC}]$.

Questa costruzione __non__ dipende dal rappresentante scelto all'inizio.

Oss: sia $\vec{v}$ un vettore libero, allora chi è:

$$\vec{0}+\vec{v}\ ?$$

Sia $\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$ e consideriamo $\vec{0}=[\overrightarrow{AA}]$

$$\vec{0}+\vec{v}=[\overrightarrow{AA}]+[\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{AB}]=\vec{v}$$

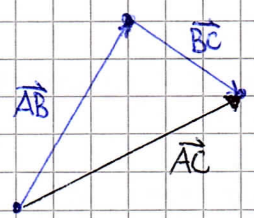
analogamente $\vec{v}+\vec{0}=[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BB}]=[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}]=[\overrightarrow{AB}]=\vec{v}$

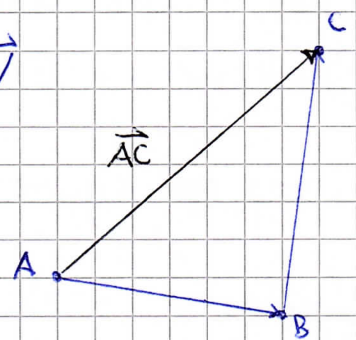
Vediamo ora che $\vec{0}$ si comporta davvero come il numero zero!

Notiamo che in questo modo la somma è ora definita per ogni coppia di vettori liberi! In questa maniera abbiamo risolto i due "problemi" che affliggevano la teoria dei vettori applicati: somma solo parzialmente definita e pluralità di vettori nulli.

Oss: Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori liberi, allora

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$





$\vec{v}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{w}=[\overrightarrow{BC}]$

$\vec{v}+\vec{w}=[\overrightarrow{AC}]$

$\vec{w}=[\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v}=[\overrightarrow{BC}]$

$\vec{w}+\vec{v}=[\overrightarrow{AC}]$

Abbiamo concluso notando che per ogni vettore libero $\vec{V}$ vale che

$$\vec{O}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{O}=\vec{V}$$

L'esistenza del vettore libero nullo richiama la domanda: Dato un vettore libero $\vec{V}$, esiste un vettore libero $\vec{W}$ tale che:

$$\vec{V}+\vec{W}=\vec{W}+\vec{V}=\vec{O} \quad ?$$

Se $\vec{V}=[\vec{AB}]$, allora possiamo scegliere $\vec{W}=[\vec{BA}]$, infatti:

$$[\vec{AB}]+[\vec{BA}]=[\vec{AB}+\vec{BA}]=[\vec{AA}]=\vec{O}$$

Tale vettore $\vec{W}$ si dice l'opposto di $\vec{V}$ e si denota con $-\vec{V}$.

Similmente come abbiamo fatto per la somma possiamo definire anche per i vettori liberi la moltiplicazione per $\mathbb{R}$.
Se $\vec{V}$ è un vettore libero e $a \in \mathbb{R}$, allora otteniamo

$$a \cdot \vec{V} := [a \cdot \vec{AB}]$$

Si verifica che tale affermazione non dipende dal rappresentante.
Si verifica che le operazioni di somma tra vettori liberi e di moltiplicazione di un vettore libero per uno scalare godano delle seguenti proprietà:

- $1 \cdot \vec{V}=\vec{V}$
- $(-1) \cdot \vec{V}=-\vec{V}$ Questa proprietà ci dice che c'è una compatibilità tra le operazioni di somma e moltiplicazione per $\mathbb{R}$.

moltiplicaz. per $\mathbb{R}$

opposto rispetto la somma

- $(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$
- $a\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = a\cdot\vec{v} + a\cdot\vec{w}$

<u>def</u> Sia V un insieme e supponiamo $V \neq \emptyset$

L'insieme V si dice <u>spazio vettoriale</u> su $\mathbb{R}$ se sono definite due operazioni; una soma tra elementi di V che denotiamo con $+$ e una moltiplicazione tra $\mathbb{R}$ e un elemento di V, che denotiamo con $\cdot$, che soddisfano le seguenti proprietà:

somma

(V1) (proprietà associativa di $+$)

$\forall u,v,w \in V$ vale che

$$(u+v)+w = u+(v+w)$$

(V2) (proprietà commutativa di $+$)

$\forall u,v \in V$ vale che

$$u+v = v+u$$

(V3) (esistenza del elemento nullo) DEVE ESISTERE!

$\exists\, 0 \in V$ (0 <u>non è</u> un numero, ma semplicemente un elemento di V che denotiamo così) tale che $\forall v \in V$

$$0+v = v+0 = v$$

(V4) (esistenza dell'elemento opposto)

$\forall v \in V$, ~~esiste~~ $\exists\, w \in V$ tale che:

$$v+w = w+v = 0$$

Tale elemento si denota $-v$ e si chiama opposto di v.

(V5) (distributività di $\cdot$ prodotto rispetto a $+$)

$\forall a \in \mathbb{R} \wedge \forall u, v \in V$, vale che

$a(u+v) = a \cdot u + a \cdot v$

(V6) (distributività di $\cdot$ rispetto alla somma di $\mathbb{R}$)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in V$, vale che:

$(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

(V7) (moltiplicazione di un elemento di V per $\mathbb{R}$)

$\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall v \in V$, vale che

$(a \cdot b) \cdot v = a(b \cdot v)$

(V8)

$\forall v \in V$, vale che

$1 \cdot v = v$

Gli elementi di V sono detti vettori; in questo contesto, i $\mathbb{R}$ sono detti scalari; in questo senso, $\cdot$ detta moltiplicazione per uno scalare.

COS'È UN VETTORE? È un elemento di uno spazio vettoriale

Esempi: L'insieme $\mathcal{V}$ dei vettori liberi con la somma e la moltiplicazione per $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale. L'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali con la somma e la moltiplicazione, usuali, uno spazio vettoriale.

L'insieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ delle coppie dei numeri reali

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con le operazioni

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a \\ \alpha \cdot b \end{pmatrix}$$

è uno spazio vettoriale

1/10/2024

Proprietà generali degli spazi vettoriali

proposizione: (supponiamo che ci siano due elementi $\neq$ nello spazio V che soddisfa le medesime proprietà)

Supponiamo che oltre al vettore nullo $0 \in V$ esista un altro vettore $0' \in V$ tale per cui valga che per ogni $v \in V$ si ha $0' + v = v + 0' = v$; mostriamo che deve essere $0 = 0'$, ovvero che i due elementi sono uguali. Sappiamo che:

$$\forall v \in V, \quad 0' + v = v + 0' = v$$

$v = 0$, allora $0 + 0' = 0$

$$\forall v \in V, \quad 0 + v = v + 0 = v$$

$v = 0'$ allora $0 + 0' = 0$

$\square$

proposizione: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall v \in V$ vale che l'opposto di v è unico, ovvero esiste un unico vettore $w \in V$ tale che

$$w + v = v + w = 0$$

dimostrazione: Supponiamo che per un certo $v \in V$ valga che

$$w + v = v + w = 0$$

$$(*) \quad w' + v = v + w' = 0$$

Per certi $w, w' \in V$; vogliamo dimostrare che $w = w'$; vale che:

$$w = w + 0 = w + (v + w') =$$

proprietà dello zero — per quanto supposto precedentemente (*) — per la proprietà associativa

$$= (w + v) + w' = 0 + w' = w'$$

per quanto supposto — per le proprietà dello zero

$\square$

proposizione: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; allora $\forall v \in V$ vale

$$(-1) \cdot v = -v$$

dimostrazione: Dal momento che abbiamo dimostrato che $\forall v \in V$ l'opposto di v è unico; è sufficente dimostrare che $\forall v \in V$, il vettore $v \cdot (-1)$ soddisfa la propietà dell'opposto di v; se così è, esso deve dunque coincidere con $-v$; mostriamo pertanto che $\forall_v \in V$

$$(-1)v + v = 0$$

L'uguaglianza precedente è vera, infatti

$$(-1) \cdot v + \underbrace{v}_{\text{esistenza elemento neutro per moltiplicazione}} = (-1) \cdot v + 1 \cdot v \underbrace{=}_{\text{distributività di $\cdot$ rispetto a $+$}} (-1+1) \cdot v = 0 \cdot v$$

Se fosse vero che $0 \cdot v = 0$, ovvero che $0 \cdot v$ è il vettore nullo, allora la dimostrazione sarebbe conclusa; "lo mostriamo nella prossima proposizione".

$\square$

<u>proposizione</u>: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, allora $\forall_v \in V$ vale che

$$\underbrace{0}_{\text{numero reale zero}} \cdot v = \underbrace{0}_{\text{vettore nullo in } V}$$

<u>dimostrazione</u>: Sia $v \in V$; vale che

$$0 \cdot v = \underbrace{(0+0)}_{\text{somma tra } \mathbb{R}} \cdot v \underbrace{=}_{\text{dimostrata per distributività}} 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

Qualsiasi sia $0 \cdot v$ possiamo considerare il suo opposto $-(0 \cdot v)$ e sommandolo ad entrambi i membri dell'uguaglianza precedente:

$$\underbrace{-(0\cdot v)+0\cdot v}_{\substack{=0 \\ \text{perché stiamo} \\ \text{sommando il vettore} \\ \text{con il vettore nullo}}} = -(0\cdot v)+(0\cdot v+0\cdot v) \overset{\text{propietà associativa}}{=} \underbrace{\left(-(0\cdot v)+0\cdot v\right)}_{\text{vettore nullo}} +0\cdot v$$

In definitiva otteniamo:

$$0 = \underbrace{0+0\cdot v}_{=0\cdot v}$$

pertanto:

$$0\cdot v = 0$$

$\square$

Consideriamo ora $\mathbb{R}^2$ con somma $+$ e moltiplicazione per uno scalare $\cdot$ introdotto in precedenza (le cosiddette operazioni "componente per componente")

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Consideriamo il sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^2$ dato da:

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \underset{\text{tali che}}{:} x - 3y = 0 \right\}$$

Notiamo che vale $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in W$, ovvero W contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$. Capiamo come gli elementi di W si comportano rispetto alla somma di $\mathbb{R}^2$. Più precisamente, dati $v, w \in W$, sappiamo certamente che $v+w \in \mathbb{R}^2$, ma ci possiamo chiedere se valga $v+w \in W$.

Siano $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ con $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$

Dato che $v \in W$, vale che $v_1 - 3v_2 = 0$; analogamente $w \in W$, quali $w_1 - 3w_2 = 0$
Ora vale che:

$$v+w = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix}$$

Per verificare se $v+w \in W$, verifico se valga

$$(v_1+w_1) - 3(v_2+w_2) = 0$$

Visto che:

$$(v_1+w_1) - 3(v_2+w_2) = (v_1 - 3v_2) + (w_1 - 3w_2) = 0 + 0 = 0$$

Pertanto $v+w \in W$

Infine, verifichiamo che se $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda \cdot v \in W$.
Questo è vero, infatti se $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, allora dal fatto che $v \in W$ segue che $v_1 - 3v_2 = 0$. Ora, $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix}\lambda \cdot v_1\\\lambda \cdot v_2\end{pmatrix}$; per verificare che $\lambda \cdot v \in W$ dobbiamo verificare che $\lambda \cdot v_1 - 3(\lambda \cdot v_2) = 0$ vale che:

$$\lambda \cdot v_1 - 3(\lambda \cdot v_2) = \lambda \underset{\substack{\parallel\\0}}{(v_1 - 3v_2)} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Pertanto $\lambda \cdot v \in W$

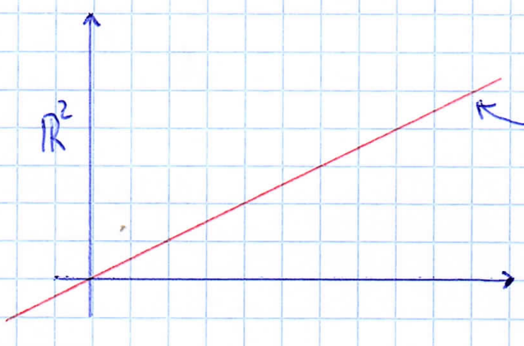
<u>def:</u> Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice un <u>spazio vettoriale</u> di V se valgano:

1) il vettore nullo di V appartiene a W (ovvero $0 \in W$)
2) $\forall_{v,w} \in W$ vale che $v+w \in W$ ("chiusura rispetto la somma")
3) $\forall_\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall_v \in W$ vale che $\lambda \cdot v \in W$ ("chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare")

<u>Esempio:</u> Se identifichiamo gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con i punti del primo

$$\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \{\text{punti del piano}\}$$

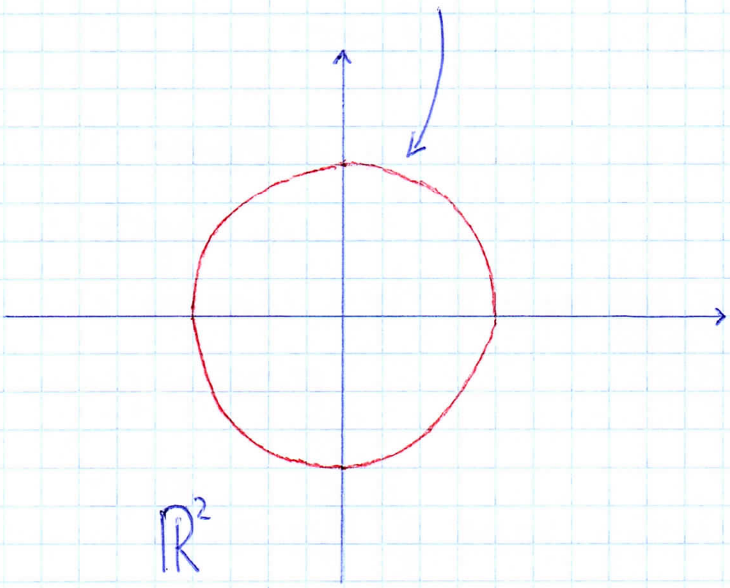
in maniera biettiva



$\leftarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0 \right\}$

<u>Esempio:</u> in $\mathbb{R}^2$ considerando il sottoinsieme

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$



C non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché, ad esempio, vale che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin C$$

I sottospazi vettoriali sono composti da piani e rette.

4/10/2024

MATRICI

<u>def:</u> Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; una matrice $m \times n$ a coefficienti reali è una tabella rettangolare con $m \cdot n$ entrate che sono numeri reali, del tipo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \Bigg\} m \text{ righe}$$

Dove ciascun a_{ij} è un numero reale ovvero

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\},$$
$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

indice di riga (per i), indice di colonna (per j)

Due matrici sono uguali se tutte le loro entrate sono uguali

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & -1 \\ 1 & \pi & 3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 12 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{12} = 7 \\ a_{21} = 1 \end{array}$$

def: Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ una matrice a coefficienti reali

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ la i-esima riga è la matrice:

$$A_{(i)} = (a_{i1} \quad a_{i2} \; \dots \; a_{in})$$ matrice $1 \times n$

Per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$ la j-esima colonna è la matrice:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ matrice $m \times 1$

def: Una matrice si dice quadrata se il numero delle sue righe è uguale al numero delle sue colonne.

Esempio: La seguente è una matrice quadrata 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \end{pmatrix}$

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

def: Dati $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali si denota $M_{m,n}(\mathbb{R})$; l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti reali si denota $M_n(\mathbb{R})$.

def: La matrice nulla $m \times n$ è la matrice $m \times n$ le cui entrate sono tutte 0 (con $0 \in \mathbb{R}$); la denotiamo con O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Introduciamo operazioni tra matrici e tra matrici e numeri al fine di dotare $M_{m,n}(\mathbb{R})$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

def: Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la somma di A e B, e la denotiamo $A+B$ come la matrice la cui entrata ij-esima (ovvero l'entrata di posto ij) è ottenuta nel modo seguente:

se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ $\quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

e definiamo $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$

allora $A+B = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

<u>Questa definizione ci dice solo come sommare matrici delle stesse dimensioni</u>

<u>Esempio:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 5+1 \\ (-1)+0 & 3+(-1) & (-2)+0 \end{pmatrix}$$

Oss: La matrice nulla è un (in effetti, il) elemento neutro della somma di matrici.

<u>def:</u> Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo la matrice $\lambda \cdot A$ come la matrice seguente: se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, allora

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

moltiplicazione tra $\mathbb{R}$ e matrice

moltiplicazione tra $\mathbb{R}$

proposizione: L'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con le operazioni definite qui sopra è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

dimostrazione: (da fare a casa)

1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA SOMMA:

Siano A, B e C matrici in $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

Per ogni elemento delle matrici:

$$(A+(B+C))_{ij}=A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij})=(A_{ij}+B_{ij})+C_{ij}=((A+B)+C)_{ij} \qquad \forall i,j$$

Quindi la somma è associativa

2) PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA SOMMA:

Siano A e B matrici in $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$A+B=B+A$$

Per ogni elemento delle matrici:

$$(A+B)_{i,j}=A_{ij}+B_{i,j}=B_{ij}+A_{i,j}=(B+A)_{ij}, \qquad \forall i,j$$

Pertanto la somma è commutativa

3) ESISTENZA DELL'ELEMENTO NULLO

Esiste una matrice $0 \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tale che per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ si abbia:

$$A + 0 = A$$

La matrice 0 è la matrice nulla, in cui tutti gli elementi sono 0, e soddisfa:

$$(A+0)_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}, \qquad \forall_{ij}$$

Quindi, 0 è l'elemento neutro della somma.

4) ESISTENZA DELL'ELEMENTO OPPOSTO:

Per ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, esiste una matrice $-A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, tale che:

$$A + (-A) = 0$$

Per ogni elemento delle matrici:

$$(A+(-A))_{ij} = A_{ij} + (-A_{ij}) = 0, \qquad \forall_{ij}$$

Pertanto, $-A$ è l'elemento opposto di A, e la somma di A e $-A$ è la matrice nulla.

5) DISTRIBUTIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALLA SOMMA DI MATRICI

Sia $m \in \mathbb{R}$ e siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$m(A+B) = mA + mB$$

Per ogni elemento delle matrici:

$$n(A+B)_{ij} = n(A_{ij}+B_{ij}) = n\cdot A_{ij} + n\cdot B_{ij} = (nA+nB)_{ij}, \qquad \forall_{ij}$$

Quindi, la moltiplicazione per uno scalare è distributiva rispetto alla somma di matrici.

6) DISTRIBUTIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALLA SOMMA DI SCALARI:

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

Per ogni elemento della matrice:

$$((\alpha+\beta)A)_{ij} = (\alpha+\beta)A_{ij} = \alpha A_{ij} + \beta A_{ij} = (\alpha A + \beta A)_{ij}, \qquad \forall_{ij}$$

Pertanto, la moltiplicazione per uno scalare è distributiva rispetto alla somma di scalari.

7) MOLTIPLICAZIONE DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE REALE:

Sia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

Per ogni elemento della matrice:

$$(\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A_{ij}) = \alpha\beta(A_{ij}) = ((\alpha\beta)A)_{ij} \qquad \forall_{ij}$$

Pertanto la moltiplicazione di uno scalare è associativa rispetto alla moltiplicazione tra scalari e matrici.

8) ESISTENZA DELL' ELEMENTO NEUTRO DELLA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE:

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare che:

$$1 \cdot A = A$$

Per ogni elemento della matrice:

$$(1 \cdot A)_{ij} = 1 \cdot A_{ij} = A_{ij} \qquad \forall_{i,j}$$

Pertanto, moltiplicando una matrice per lo scalare 1, la matrice rimane invariata

Poiché $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con la somma di matrici e la moltiplicazione per uno scalare soddisfa gli 8 assiomi indicati, possiamo concludere che $M_{m,n}(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

$\square$

Esempio: se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $\lambda = -2$, allora

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -6 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una matrice 2x2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideriamo quattro particolari matrici 2x2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la seguente <u>combinazione lineare</u> delle 4 matrici:

$$3 \cdot E + F - 2 \cdot G + 4H =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Questa costruzione si può ripetere per qualsiasi $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ con } a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1,2\} \quad \forall j \in \{1,2\}$$

Allora $A = a_{11} \cdot E + a_{12} \cdot F + a_{21} \cdot G + a_{22} \cdot H$

Notiamo quindi che ogni matrice in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ si può scrivere come combinazione lineare di E, F, G e H con opportuni coefficienti.
Per questo motivo diciamo che E, F, G e H sono un <u>sistema di generatori $M_{2,2}(\mathbb{R})$</u>.
Notiamo che questo argomento può esser ripetuto anche per matrici $m \times n$, ovvero vale che:

$B \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$

__proposizione:__ considera in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme B delle matrici che hanno tutte le entrate nulle eccetto esattamente una, la quale è uguale a 1; allora B è un sistema di generatori per $M_{m,n}(\mathbb{R})$, ovvero ogni matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ può essere scritta come combinazione lineare di matrici appartenenti a B.

Ritorniamo alle matrici 2×2. Tutte tali matrici si possono scrivere come combinazione lineare di E, F, G e H; in particolare ciò vale anche per la matrice nulla:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot E + 0\cdot F + 0\cdot G + 0\cdot H$$

Ci chiediamo: esiste altro modo per scrivere O come combinazione lineare di E, F, G e H? Più precisamente esistono numeri reali e, f, g e h non tutti nulli tale che:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e\cdot E + f\cdot F + gG + h\cdot H \,?$$

Cerchiamo di capire quali condizioni su e, f, g e h impone l'uguaglianza precedente:

$$e\cdot E + f\cdot F + gG + hH = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Quindi se vale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e\cdot E + f\cdot F + g\cdot G + h\cdot H$, allora vale che $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$e = 0 \quad f = 0 \quad g = 0 \quad h = 0$

Perché due matrici sono uguali se e solo se tutte le loro entrate sono uguali.

Pertanto abbiamo dimostrato che l'unico modo per ottenere la matrice nulla come combinazione lineare delle matrici E, F, G e H è scegliere tutti e quattro i coefficienti pari a zero.

In questo caso diciamo quindi che le matrici E, F, G e H sono <u>linearmente indipendenti</u>.

Oss: Le tre matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>non</u> sono linearmente indipendenti, infatti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + (-1) \cdot B + (-1) \cdot C$$
$$= 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$$

2 modi DIVERSI per scrivere 0 come combinazione lineare di queste matrici

Consideriamo ora il sottoinsieme:

$$T_{2,2}(\mathbb{R}) = \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \quad a_{21} = 0 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Dunque $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, ma $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin T_{2,2}(\mathbb{R})$

L'insieme $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti reali triangolari superiori.

Vale che:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$

2) Se $A, B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, allora:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$

Quindi:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 + 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Pertanto $A + B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$

3) analogamente al 2), se $A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$$

Dunque $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale