HOMEWORK 2

① Il peso X (in decagrammi) di un gatto adulto è descritto da una v.a. normale ed è noto che $P(X>48,5)=0,3085$ e $P(X\leq 34,5)=0,0668$

ⓐ Determinare media e varianza di X

$$P(X>48,5)=0,3085 \Longrightarrow P(X\leq 48,5)=1-0,3085=0,6915$$

$$P(Z\leq z_\cdot)=0,6915 \quad Z_{0,6915}=0,52$$

$$\frac{48,5-\mu}{\sigma} \Longrightarrow \mu = 48,5-0,5\sigma$$

$$P(X\leq 34,5)=0,0668 \quad Z_{0,0668}=-Z_{1-0,0668}=-Z_{0,932}=-1,49$$

$$\frac{34,5-\mu}{\sigma}=-1,49 \Longrightarrow \mu=34,5+1,5\sigma$$

$$\begin{cases}\mu=48,5-0,5\sigma\\ \mu=34,5+1,5\sigma\end{cases} \Longrightarrow X\sim N(45,49) \quad \sigma=7$$

ⓑ Un gatto deve essere portato dal veterinario se pesa meno di 35 dag. Considerando un insieme di 1000 gatti, quanti in media andranno dal veterinario?

$$P(X\leq 35)=P\left(Z<\frac{35-45}{7}\right)=P(Z<-1,43)$$

$$\phi(-1,43)=1-\phi(1,43)=1-0,92364=0,07639$$

$$1000\cdot p=76,39$$

© Qual è la probabilità che, su 1000 gatti, più di 90 debbano andare dal veterinario?

$X \sim Bin(n=1000, p=0{,}07639)$ appros. Normale

$\mu_y = np = 76{,}39 \qquad \sigma_y = \sqrt{np(1-p)} = 8{,}4 \qquad Y \sim N(76{,}39, 8{,}4^2)$

$$P(Y>90) = P\left(Z > \frac{90-76{,}4}{8{,}4}\right) = P(Z>1{,}62)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}62) = 1 - \phi(1{,}62)$$

$$= 1 - 0{,}94738$$

$$= 0{,}05262$$

© Sia X_i, $i = 1, \dots, 72$ il numero di esperimenti riusciti nella i-esima ora di attività di un laboratorio di biotecnologie. Si assume che le X_i siano iid secondo Poisson $(\lambda=3)$. Si calcoli:

ⓐ La probabilità che nelle prime due ore del lunedì soltanto un esperimento vada a buon fine in totale

$X_i \sim P_o(\lambda=3) \qquad S_2 = X_1 + X_2 \xrightarrow{\text{perché}} X_1, X_2 \sim P_o(\lambda)$ e ind.

$S_2 \sim P_o(3+3) = P_o(6)$

$$P(S_2 = 1) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-6} \cdot \frac{6^1}{1!} = 0{,}015$$

ⓑ La probabilità che nell'intera settimana lavorativa (72 ore di attività) il numero totale di esperimenti riusciti sia superiore a 200.

$S_{72} \sim Po(\lambda \cdot 72) = Po(\lambda = 216)$ appros. Normale $\mu = \lambda$, $\sigma^2 = \lambda$

$N \sim (\mu = 216, \sigma^2 = 216)$

$$P(N > 200) = P(N \geq 201) = P\left(Z \geq \frac{201 - 216}{\sqrt{216}}\right) = P(Z \geq -1,02)$$

$$= P(Z \leq 1,02)$$

$$\approx 0,84614$$

③ Un'azienda produce batterie ricaricabili per veicoli elettrici. Dovendo fornire informazioni sull'autonomia media di ciascuna batteria, calcola la media dei cicli di ricarica fino al completo esaurimento del campione di batterie testate. Si sa che nella popolazione di batterie la deviazione standard del numero di cicli è $\sigma = 50$ (cicli). Si vuole determinare quante batterie devono essere testate affinché la probabilità che la media del campione si discosti dalla vera media di meno di 15 cicli sia almeno 0,95.

ⓐ Si risponda al quesito sfruttando la disuguaglianza di Chebychev.

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 15) \geq 0,95 \leq 1 - \frac{\frac{2500}{n}}{225}$$

$$0,05 \geq \frac{2500}{225n} \Rightarrow n \geq 222$$

ⓒ Come cambia il risultato se si ricorre al teorema del limite centrale?

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 15) \geq 0{,}95$$

$$P\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\frac{50}{\sqrt{n}}} \leq \frac{15}{50}\sqrt{n}\right) \geq 0{,}95 \Longrightarrow P\left(|Z| \leq \frac{15}{50}\sqrt{n}\right) \geq 0{,}95$$

$$\Longrightarrow \frac{15}{50}\sqrt{n} \geq 1{,}96 \Longrightarrow n \geq 42{,}6$$

④ In uno studio veterinario, un animale domestico deve essere visitato da due veterinari diversi per procedure diverse (ad esempio: visita generale e vaccinazione). Denotiamo con X_1 il tempo della prima visita e con X_2 il tempo della seconda visita. Si assume che X_1 e X_2 siano indipendenti e che ciascuno segua una distribuzione esponenziale con media 0,15 ore. Si richiede di calcolare:

ⓐ Quanto valgono media e varianza del tempo totale necessario per completare entrambe le visite per un animale domestico?

$$(X_1, X_2) \sim Esp(\lambda) \text{ iid}, \quad E[X_i] = 0{,}15 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{0{,}15}$$

$$Y = X_1 + X_2 \sim Ga\left(2, \frac{1}{0{,}15}\right)$$

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2}{\frac{1}{0{,}15}} = 0{,}3$$

$$V(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{2}{\left(\frac{1}{0{,}15}\right)^2} = 0{,}045$$

ⓑ Determinare la distribuzione della v.A. $Y = \min\{X_1, X_2\}$, cioè il tempo della visita più veloce delle due

$$X = \min\{X_1, X_2\} \sim Esp(\lambda_1 + \lambda_2) = Esp(2\lambda)$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2\lambda e^{-2\lambda x} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{0,15}{2} = 0,075 \text{ ore}$$

ⓒ Quanto vale la probabilità approssimata che il tempo totale necessario per visitare 30 animali superi le 8 ore?

$$E[S_{30}] = 30 \cdot E[Y] = 30 \cdot 0,3 = 9_{\text{ore}}$$

media per entrambe le visite ⓐ

$$V(S_{30}) = 30 \cdot V(Y) = 30 \cdot 0,045 = 1,35 \text{ ore}$$

$$P(S_{30} > 8) = 1 - P(S_{30} \leq 8)$$

applichiamo teorema del limite centrale $S_{30} \sim N(\mu = E[S_{30}], \sigma^2 = V(S_{30}))$

$$P(S_{30} > 8) = 1 - P(S_{30} \leq 8)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{8-9}{\sqrt{1,35}}\right)$$

$$= 1 - P(Z \leq -0,86)$$

$$= 1 - \phi(-0,86) = \phi(0,86) = 0,80511$$

⑤ Un'azienda produce schede elettroniche e utilizza un robot per posizionare i componenti sui circuiti stampati. Si consideri un sistema di coordinate cartesiano (X, Y) centrato nel punto ideale in cui un componente deve essere posizionato. Denotiamo con X lo scostamento orizzontale dal punto ideale e con Y lo scostamento verticale. Si assume che X e Y siano indipendenti, distribuiti normalmente con media 0 e varianza 3.

ⓐ Si determinino la funzione di ripartizione e la densità della variabile $W = (X/\sigma)^2 + (Y/\sigma)^2$ e, quindi calcolare $P(W \leq 5{,}991)$ e il quantile di ordine $0{,}10$ di W

$$(X, Y) \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 3) \text{ iid}$$

$$W = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2 \quad Z_1 = \frac{X}{\sigma} \quad Z_2 = \frac{Y}{\sigma} \quad (Z_1, Z_2) \sim N(0,1)$$

$$W = Z_1^2 + Z_2^2$$

$$f_W(w) = \frac{1}{2} e^{-\frac{w}{2}} \qquad F_W(w) = 1 - e^{-\frac{w}{2}}$$

$$P(W \leq 5{,}991) = 1 - e^{-\frac{w}{2}} = 1 - e^{-\frac{5{,}991}{2}} = 0{,}95$$

ⓑ Si calcoli la probabilità $P(R > 0{,}8)$ con R la distanza radiale del componente dal punto ideale $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$\begin{cases} F_W(q) = 0{,}10 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{q}{2}} = 0{,}1 \Rightarrow e^{-\frac{q}{2}} = 0{,}9 \\ \qquad q = -2 \ln(0{,}9) \approx 0{,}21 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\frac{R^2}{3} = \frac{X^2 + Y^2}{3} = W \Rightarrow R^2 = 3W$$

$$W \sim \chi^2_2 \Rightarrow W \sim Ga\left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 3W \sim Ga\left(1, \frac{1}{6}\right) \sim Esp\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(R > 0{,}8) = P(R^2 > 0{,}64) = 1 - P(R^2 < 0{,}64) = e^{-\frac{0{,}64}{2}} \approx 0{,}8988$$

ⓒ Determinare la distanza r dal centro $(0,0)$ per cui risultati pari a $0{,}5$ la probabilità che il componente cada a una distanza inferiore dal centro

$$P(R^2 < r^2) = 0{,}5 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{r^2}{6}} = 0{,}5 \Rightarrow -\frac{r^2}{6} = \ln(0{,}5) \Rightarrow \frac{r^2}{6} = -\ln(0{,}5)$$

$$r = \sqrt{-\ln(0{,}5) \cdot 6} = 2{,}04$$

⑥ Si assuma che la lunghezza delle viti (in mm) prodotte da un'azienda si distribuisca secondo una legge normale di media $\mu = 20$ e deviazione standard $\sigma = 2$. Vengano scelte casualmente 10 viti tra quelle prodotte e si registrano le lunghezze $y_1, \ldots, y_{10}$. Sia $\overline{Y}$ la media campionaria.

ⓐ Calcolare $Pr(18{,}5 \leq \overline{Y} \leq 21{,}5)$

$$P(18{,}5 \leq \overline{Y}_{10} \leq 21{,}5) = P\left(\frac{18{,}5 - 20}{\frac{2}{\sqrt{10}}} \leq Z \leq \frac{21{,}5 - 20}{\frac{2}{\sqrt{10}}}\right)$$

$$= P(-2{,}37 \leq Z \leq 2{,}37) = 2\phi(2{,}37) - 1$$

$$= 2 \cdot (0{,}99111) - 1$$

$$= 0{,}98222$$

⑥ Quanto vale a tale che $Pr(S^2 > a) = 0,8$?

$$P(S^2 > a) = 0,8 \Rightarrow 1 - P\left(\frac{S^2}{4} 9 \leq \frac{a}{4} 9\right) = 0,2 \Rightarrow \frac{9}{4} a = 5,3801$$

$$a \cong 2,3911$$

⑦ Un'azienda elettronica testa la resistenza elettrica Y di componenti prodotti in serie. Si assume che la resistenza segua una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. Sia $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria calcolata su un campione. Si consideri un campione di $n = 5$ componenti selezionati casualmente dalla produzione. Si calcoli:

ⓐ $P(S^2/\sigma^2 \leq 2,66)$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2,66\right) = P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \cdot 4 \leq 10,64\right) \qquad \frac{S^2}{\sigma^2} 4 = X \sim \chi^2_4$$

$$P(X \leq 10,64) \approx 0,965$$

ⓑ $P(|\overline{Y} - \mu| > 1,15 S)$

$$P(|\overline{Y} - \mu| > 1,15 S) = P\left(\frac{|\overline{Y} - \mu|}{S} \sqrt{5} > 2,5715\right) \qquad \frac{\overline{Y} - \mu}{S} \sqrt{5} = T \sim t_4$$

$$P(|T| > 2,5715) = 2(1 - \underbrace{F_T(2,5715)}_{0,969}) \approx 0,062$$

⑧ Sia $(Y_1, \dots, Y_{20})$ un campione casuale proveniente da Y distribuita secondo una normale con media 0 e varianza σ^2. Siano $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria.

ⓐ Si determini la distribuzione di probabilità della v.A. $20\bar{Y}^2/S^2$

$$20\frac{\bar{Y}^2}{S^2} := W \qquad \frac{20\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2}}{\frac{S^2}{\sigma^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{Y} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{20}\right) \Rightarrow 20\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2} \sim \chi_1 \\ \frac{S^2}{\sigma^2} = 19\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{19}\end{array}\right\} 20\frac{\bar{Y}^2}{S^2} = \frac{20\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2}}{19\frac{S^2}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{19}} = W \sim F_{1,19}$$

ⓑ Si determini la costante c per la quale $P(-c < S/\bar{Y} < c) = 0,05$

$$P\left(-c < \frac{S}{\bar{Y}} < c\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(-c < \frac{1}{\frac{\bar{Y}}{S}}\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} < c\right) \qquad T := \frac{\bar{Y}}{S}\sqrt{20} \sim t_{19}$$

$$P\left(-c < \frac{\sqrt{20}}{T} < c\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(-\frac{\sqrt{20}}{c} > T > \frac{\sqrt{20}}{c}\right) = 0,05 \Rightarrow P\left(|T| > \frac{\sqrt{20}}{c}\right) = 0,05$$

$$P\left(T \leq \frac{\sqrt{20}}{c}\right) = 0,975 \qquad \frac{\sqrt{20}}{c} = 2,0930 \Rightarrow c = 2,1367$$

③ Un'azienda produce barrette di cioccolato che devono avere un peso standard di 50 g. Si assume che il peso effettivo di ciascuna barretta, X, sia una variabile casuale normale con media $\mu = 50$ g. Si consideri un campione di 20 barrette selezionate casualmente. Siano $\bar{X}$ la media campionaria, S^2 la varianza campionaria e $D^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{20}(X_i - 50)^2$. Si determinino i valori h, k, m in modo che

ⓐ $P(|\bar{X} - 50| < kS) = 0,99$

$$P(|\bar{X} - 50| < kS) = 0,99 \Rightarrow P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{20}\right| < k\sqrt{20}\right) = 0,99$$

$$\Rightarrow k\sqrt{20} = 2,8609 \Rightarrow k \approx 0,639$$

ⓑ $P(S^2 < m\sigma^2) = 0{,}95$

$$P(S^2 < m\sigma^2) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} 19 < 19m\right) = 0{,}95$$

$$19m = 30{,}1435 \Rightarrow m = 1{,}5865$$

⑩ Due cantine, cantina A e cantina B, producono vini rossi della stessa tipologia e si vuole confrontare il contenuto medio di antiossidanti (in mg/l) nei due vini. Il contenuto di antiossidanti segue una distribuzione normale. In particolare $Y_A \sim N(600, 30)$ e $Y_B \sim N(675, 40)$. Si consideri un campione di $n_a = 12$ bottiglie della cantina A e un campione di $n_b = 14$ bottiglie della cantina B.

ⓐ Si calcoli la probabilità che la media del contenuto di antiossidanti della cantina B superi quella della cantina A di almeno 50 mg/l

$$P(\overline{Y}_B - \overline{Y}_A > 50)$$

$$X = \overline{Y}_B - \overline{Y}_A \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$\mu_x = 675 - 600 = 75$$

$$\sigma_x^2 = \frac{40}{14} + \frac{30}{12} = 5{,}35 \qquad X \sim N(\mu = 75, \sigma^2 = 5{,}35)$$

$$P(X > 50) = 1 - P\left(Z < \frac{50-75}{\sqrt{5{,}35}}\right) = P(Z < 10{,}8) \simeq 1$$

⑥ Si calcoli la probabilità che la varianza campionaria della cantina B sia maggiore di 3,67 volte quella della cantina A

$$P(S_B^2 > 3{,}67\, S_A^2) = P\left(\frac{S_B^2}{S_A^2} \cdot \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} > 3{,}67 \cdot \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}\right)$$

$$\frac{S_B^2}{S_A^2} \cdot \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = W \sim F_{13,11}$$

$$P\left(W > 3{,}67 \cdot \frac{30}{40}\right) = 1 - P(W < 2{,}7525) = 1 - 0{,}95 \approx 0{,}05$$