Esercizi di Inferenza Statistica
Blocco II
a.a. 2025 – 2026

1. Il peso X (in decagrammi) di un gatto adulto è descritto da una variabile aleatoria normale ed è noto che $P(X > 48.5) = 0.3085$ e $P(X \leq 34.5) = 0.0668$

   a. Determinare media e varianza di X;

   b. Un gatto deve essere portato dal veterinario se pesa meno di 35 dag. Considerando un insieme di 1000 gatti, quanti in media andranno dal veterinario?

   c. Qual è la probabilità che, su 1000 gatti, più di 90 debbano andare dal veterinario?

2. Sia X_i, $i = 1, \dots, 72$, il numero di esperimenti riusciti nella i-esima ora di attività di un laboratorio di biotecnologie. Si assume che le X_i siano i.i.d. secondo Poisson($\lambda = 3$). Si calcoli:

   a. La probabilità che nelle prime due ore del lunedì soltanto un esperimento vada a buon fine in totale;

   b. La probabilità che nell'intera settimana lavorativa (72 ore di attività) il numero totale di esperimenti riusciti sia superiore a 200.

3. Un'azienda produce batterie ricaricabili per veicoli elettrici. Dovendo fornire informazioni sull'autonomia media di ciascuna batteria, calcola la media dei cicli di ricarica fino al completo esaurimento del campione di batterie testate. Si sa che nella popolazione di batterie la deviazione standard del numero di cicli è $\sigma = 50$ (cicli). Si vuole determinare quante batterie devono essere testate affinché la probabilità che la media del campione si discosti dalla vera media di meno di 15 cicli sia almeno 0.95.

   a. Si risponda al quesito sfruttando la disuguaglianza di Chebychev;

   b. Come cambia il risultato se si ricorre al teorema del limite centrale?

4. In uno studio veterinario, un animale domestico deve essere visitato da due veterinari diversi per procedure separate (ad esempio: visita generale e vaccinazione). Denotiamo con X_1 il tempo della prima visita e con X_2 il tempo della seconda visita. Si assume che X_1 e X_2 siano indipendenti e che ciascuno segua una distribuzione esponenziale con media 0.15 ore. Si richiede di calcolare:

   a. Quanto valgono media e varianza del tempo totale necessario per completare entrambe le visite per un animale domestico?

   b. Determinare la distribuzione della variabile aleatoria $Y = \min\{X_1, X_2\}$, cioè il tempo della visita più veloce tra le due;

   c. Quanto vale la probabilità approssimata che il tempo totale necessario per visitare 30 animali superi le 8 ore?

5. Un'azienda produce schede elettroniche e utilizza un robot per posizionare i componenti sui circuiti stampati. Si consideri un sistema di coordinate cartesiano (X, Y) centrato sul punto ideale in cui un componente deve essere posizionato. Denotiamo con X lo scostamento orizzontale dal punto ideale e con Y lo scostamento verticale. Si assume che X e Y siano indipendenti, distribuiti normalmente con media 0 e varianza 3.

   a. Si determinino la funzione di ripartizione e la densità della variabile $W = (X/\sigma)^2 + (Y/\sigma)^2$; quindi,e quindi calcolare $P(W \leq 5.991)$ e il quantile di ordine 0.10 di W;

b. Si calcoli la probabilità $P(R > 0.8)$, con R la distanza radiale del componente dal punto ideale, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$;

c. Determinare la distanza r dal centro $(0, 0)$ per cui risulti pari a 0.5 la probabilità che che il componente cada a una distanza inferiore dal centro.

6. Si assuma che la lunghezza delle viti (in mm) prodotte da un'azienda si distribuisca secondo una legge normale di media $\mu = 20$ e deviazione standard $\sigma = 2$. Vengono scelte casualmente 10 viti tra quelle prodotte e si registrano le lunghezze $y_1, \dots, y_{10}$. Sia $\overline{Y}$ la media campionaria delle lunghezze ottenute dal campione di ampiezza 10 e sia S^2 la varianza campionaria.

   a. Calcolare $\Pr(18.5 \leq \overline{Y} \leq 21.5)$;

   b. Quanto vale a tale che $\Pr(S^2 > a) = 0.8$?

7. Un'azienda elettronica testa la resistenza elettrica Y di componenti prodotti in serie. Si assume che la resistenza segua una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. Sia $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria calcolata su un campione. Si consideri un campione di $n = 5$ componenti selezionati casualmente dalla produzione. Si calcoli:

   a. $P(S^2/\sigma^2 \leq 2.66)$;

   b. $P\left(\left|\overline{Y} - \mu\right| > 1.15S\right)$.

8. Sia $(Y_1, \dots, Y_{20})$ un campione casuale proveniente da Y distribuita secondo una normale con media 0 e varianza σ^2. Siano $\overline{Y}$ la media campionaria e S^2 la varianza campionaria.

   a. Si determini la distribuzione di probabilità della v.a. $20\overline{Y}^2/S^2$;

   b. Si determini la costante c per la quale $P(-c < S/\overline{Y} < c) = 0.05$.

9. Un'azienda produce barrette di cioccolato che devono avere un peso standard di 50 grammi. Si assume che il peso effettivo di ciascuna barretta, X, sia una variabile casuale normale con media $\mu = 50$ (grammi). Si consideri un campione di 20 barrette selezionate casualmente. Siano $\overline{X}$ la media campionaria, S^2 la varianza campionari e $D^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - 50)^2$. Si determinino i valori h, k, m in modo che

   a. $P(|\overline{X} - 50| < kS) = 0.99$;

   b. $P(S^2 < m\sigma^2) = 0.95$.

10. Due cantine, Cantina A e Cantina B, producono vini rossi della stessa tipologia e si vuole confrontare il contenuto medio di antiossidanti (in mg/L) nei due vini. Il contenuto di antiossidanti segue una distribuzione normale. In particolare $Y_A \sim \mathcal{N}(600, 30)$ e $Y_B \sim \mathcal{N}(675, 40)$. Si consideri un campione di $n_A = 12$ bottiglie della Cantina A e un campione di $n_B = 14$ bottiglie della Cantina B.

    a. Si calcoli la probabilità che la media del contenuto di antiossidanti della Cantina B superi quella della Cantina A di almeno 50 mg/L;

    b. Si calcoli la probabilità che la varianza campionaria della Cantina B sia maggiore di 3.67 volte quella della Cantina A.

11. Sia $y_1, \dots, y_n$ un campione casuale da Y avente funzione di densità:

$$f_Y(y; \lambda) = \frac{1}{4!\lambda^5} y^4 e^{-y/\lambda}, \quad \text{se} \quad y \geq 0$$

con $\lambda > 0$.

   a. Si ottengano la funzione di (log-) verosimiglianza per λ e la funzione punteggio;

   b. Si ottenga l'informazione attesa.

12. La variabile X è distribuita come una $\mathcal{N}(\mu, 144)$. Si estraggono casualmente 100 valori x_i dalla popolazione ma si registra solo se ciascun valore estratto è superiore a 200. Si definisca la variabile Y tale che $y_i = 1$ se $x_i > 200$. Per il campione dato si ha $\sum_{i=1}^n y_i = 80$.

   a. Si ottengano la funzione di (log-) verosimiglianza e la funzione punteggio per $p = \Pr(Y = 1) = \Pr(X > 200)$;

   b. Si ottenga il valore del parametro per cui la funzione di verosimiglianza è massima.