Base e dimensione di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$:

$$\begin{cases} -3x_1+6x_2+5x_3=0 \\ -2x_1+4x_2+3x_3=0 \\ -x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3=0 \Rightarrow -3x_1+6x_2+5\cdot 0=0 \Rightarrow -3x_1+6x_2=0 \Rightarrow x_1=2x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\dim(\ker(f)) = n - \text{numero di righe non nulle dopo la gradinizzazione} = 3-2=1$$

$$\text{Prendiamo le colonne della matrice originale corrispondenti alle colonne dei pivot} \Rightarrow \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - \dim(\ker(f)) = 3-1=2$$

Verifica appartenenza di un vettore a $\ker(f)$: Condizione: $x_1+x_3=1$, si cerca $x\in\ker(f)$:

$$\ker(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow x=t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1+x_3=1 \Rightarrow t+0=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifica appartenenza a $\mathrm{Im}(f)$: Condizione: $x_2+x_3=1$.

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow x = a\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a+5b \\ -2a+3b \\ a+2b \end{bmatrix}$$

$$x_2+x_3=(-2a+3b)+(a+2b)=-a+5b=1 \Rightarrow \text{equazione in } a,b \text{ con infinite soluzioni}$$

Scrivere un vettore in $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)$:

$$\ker(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \mathrm{Im}(f)=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\exists\, a,b\in\mathbb{R} \text{ tali che } a\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3a+5b=1 \\ -2a+3b=2 \\ a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2b$$

$$\text{Ora, risolvendo le altre due equazioni si ottengono due valori diversi di } b \Rightarrow \text{il vettore } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \ker(f) \text{ ma } \notin \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{\mathbf{0}\}$$

Verificare la compatibilità del sistema $AX=b$ **con** $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$:

$$(A\mid b(\alpha)) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} (A'\mid b'(\alpha)) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha=-4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \text{sistema compatibile} & \text{se } \alpha=-4 \\ \text{sistema incompatibile} & \text{se } \alpha\neq-4 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I) \Rightarrow A-\lambda I = \begin{bmatrix} -5-\lambda & -2 & 4 \\ 8 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Applichiamo Sarrus: } \left[\begin{array}{ccc} -5-\lambda & -2 & 4 \\ 8 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{array}\right] \begin{array}{cc} -5-\lambda & -2 \\ 8 & 4-\lambda \\ -2 & -1 \end{array} \Rightarrow [(-5-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)-16-32]-[(-16)(1-\lambda)+4(-5-\lambda)-8(4-\lambda)]=0$$

$$\text{Risolvendo l'equazione si trovano: } \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=1 \Rightarrow \mathrm{Sp}(L_A)=\{-1,0,1\}$$

Base di autovettori per L_A
Prendiamo λ; se negativo $(A+I)$, se positivo $(A-I)$.

$$\lambda=-1 \to A+I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to x_2=4x_3$$

$$X_1=3X_3,\quad X_3=t \Rightarrow x=t\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$$

Calcolare la matrice di cambio di base
Prendiamo gli autovettori calcolati precedentemente:

$$v_1=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale

$$v_1 \Rightarrow \lambda=-1,\quad v_2\Rightarrow\lambda=0,\quad v_3\Rightarrow\lambda=1 \Rightarrow D=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Studio della posizione tra una retta e un piano $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases} \qquad \Pi: z+y-z=0$

sostituiamo x,y,z del piano con i valori della retta: $1+t+2-t-3-2t=0 \Rightarrow -2t=0 \Rightarrow t=0$

- Se abbiamo un solo t, significa che è incidente, quindi mettiamo t nella retta e troviamo il punto di intersezione
- Se non troviamo nessun t, significa che la retta è parallela al piano, (costruiamo un piano conenente r e parallelo a Π)

  Sia $r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ e sia $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ Allora K ha equazione: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
- Se t sempre vera $\rightarrow$ la retta è contenuta nel piano, questo vuol dire che è sghemba (troviamo una retta che interseca r e Π)

  Sia $r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ Scegliamo un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ su r prendendo ad esempio $t = 0$. Sia il piano Π definito da: $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$

  Risolvendolo, troviamo un punto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ sul piano Π scegliendo arbitrariamente due coordinate e calcolando la terza con l'equazione del piano.

  La retta s che interseca sia r che Π è quella che passa per P e Q, e ha equazioni parametriche:$s : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\lambda \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\lambda \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Studio della posizione tra due rette nello spazio $\mathbb{R}^3$ $r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 4 + s \end{cases}$

- Confrontiamo i vettori di direzione: $v_1 = (1, -1, 2), \quad v_2 = (1, 2, 1)$.
  Non sono multipli $\Rightarrow$ le rette non sono parallele. (Costruiamo un piano su cui stanno r_1 e r_2)

  Troviamo il vettore direttore delle due rette (ugule in entrambe le rette): $\vec{v} = (x, y, z)$. Prendiamo un punto $P = (x_1, y_1, z_1)$ su r_1 e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ su r_2. Calcoliamo $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ed infine calcoliamo $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{PQ}$. L'equazione del piano è $\Pi : A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ dove $\vec{n} = (A, B, C)$
- Verifichiamo se le rette si intersecano risolvendo il sistema: $\begin{cases} 1 + t = 3 + s \\ 2 - t = 1 + 2s \\ 3 + 2t = 4 + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = s + 2 \\ 2 - (s + 2) = 1 + 2s \Rightarrow s = -\frac{1}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{3} \\ \text{Verifica: } 3 + 2t = 4 + s \Rightarrow \frac{19}{3} \neq \frac{11}{3} \end{cases}$

  Il sistema è incompatibile $\Rightarrow$ le rette non si incontrano.

  Se invece troviamo una coppia (t, s) li inseriamo in una delle due rette e troviamo le coordinate d'intersezione
- Se non sono ne secanti ne parallele, allora sono sghembe (costruiamo una retta r che intersechi entrambe)

  Prendiamo un punto P su r_1: con $t = 0 \Rightarrow P = (1, 2, 3)$ Prendiamo un punto Q su r_2: con $s = 0 \Rightarrow Q = (3, 1, 4)$ Direzione $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -1, 1)$

  La retta t che interseca sia r_1 che r_2 ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = x_1 + x_2\lambda \\ y = y_1 + y_2\lambda \\ z = z_1 + z_2\lambda \end{cases} \rightarrow (x_1, y_1, z_1){=}P,\ (x_2, y_2, z_2){=}\overrightarrow{PQ} \rightarrow t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Costruire un piano che contiene una retta per un punto $r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ e passa per il punto $P = (0, 1, -2)$

Leggendo i coefficienti di t otteniamo il vettore direttore della retta: $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Prendiamo $t \in \mathbb{R}$, ad esempio $t = 0$, e ricaviamo un punto sulla retta: $P_0 = (-1, 0, 1)$. Costruiamo il vettore tra i due punti: $\vec{w} = P - P_0 = \overrightarrow{P_0P} = (1, 1, -3)$

$\begin{cases} x = x_0 + x_1 s + x_2 t \\ y = y_0 + y_1 s + y_2 t \\ z = z_0 + z_1 s + z_2 t \end{cases} \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ dati da P_0, (x_1, y_1, z_1) dati da $\vec{v}$, (x_2, y_2, z_2) dati da $\vec{w} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2s + t \\ y = -s + t \\ z = 1 + s - 3t \end{cases}$

Verificare se un punto appartiene alla retta $r : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \rightarrow t \in \mathbb{R}, P = (3, -2, 2)$

Ricaviamo t dal sistema inserendo le coordinate del punto $\begin{cases} 3 = -1 + 2t \Rightarrow t = 2 \\ -2 = -t \Rightarrow t = 2 \\ 2 = 1 + t \Rightarrow t = 1 \end{cases}$ Non esiste valore t che soddisfi tutte le equazioni quindi il punto non appartiene alla retta

Trovare una retta contenuta in un piano e passante per un punto $\Pi : x + 2y - z = 3 \qquad P = (1, 1, 0)$
Inseriamo le coordinate di P nell'equazione del piano: $1 + (2 \cdot 1) - 0 = 3 \rightarrow P \in \Pi$
troviamo una soluzione al sistema $x + 2y - z = 0$, ad esempio $v_1 = (-2, 1, 0)$

$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \rightarrow$ con (a, b, c) di v_1 e (x_0, y_0, z_0) di $P \rightarrow r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

Determinare un piano parallelo a un altro e passante per un punto $\Pi : 2x - y + z = 4 \qquad P = (1, -2, 3)$
Il vettore $\vec{n}$ è dato dai coefficienti: $n = (2, -1, 1)$
$2x - y + z = 0 \rightarrow$ cerchiamo due soluzioni:$v_1 = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$ e $v_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$

$\begin{cases} x = x_0 + x_1 s + x_2 t \\ y = y_0 + y_1 s + y_2 t \\ z = z_0 + z_1 s + z_2 t \end{cases} \rightarrow (x_0, x_1, x_2)$ dati da P, (y_0, y_1, y_2) dati da v_1 e (z_0, z_1, z_2) dati da $v_2 \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + s \end{cases}$ con $s, t \in \mathbb{R}$

Determinare una retta passante per due punti $A = (1, 0, -2) \qquad B = (3, 4, 1)$
Calcoliamo il vettore direzionele: $\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, 4 - 0, 1 - (-2)) = (2, 4, 3)$

$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t \\ y = y_0 + y_1 t \\ z = z_0 + z_1 t \end{cases} \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ dati da A o B, (x_1, y_1, z_1) dati da $\overrightarrow{AB} \rightarrow A : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \Rightarrow$ le rette sono equivalenti

Trasformare una retta da parametrica a cartesiana

$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \rightarrow t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \rightarrow t = \frac{x - 3}{2} \qquad y = 4 + 4t \Rightarrow 2x - y - 2 = 0 \qquad z = 1 + 3t \Rightarrow 3x - 2z + 7 = 0$

Trasformare una retta da cartesiana a parametrica

$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \rightarrow$ prendiamo ad esempio $z = t$ e ricaviamo: $\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = 2 - \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases}$

Trasformare unun piano parametrico in cartesiano
Isoliamo un parametro da una delle equazioni lo sostituiamo nelle altre finché non troviamo la nostra forma senza parametri