Esercizi di Inferenza Statistica
Blocco I
a.a. 2025 – 2026

1. Sia X la variabile aleatoria (v.a.) che descrive il peso dei gattini alla nascita (in decagrammi). Assumendo che X abbia funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} c(0.5 - 0.04x) & \text{se} \quad 7.5 \leq x \leq 12.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   a. Si ottenga il valore della costante c tale per cui $f(x)$ è funzione di densità della v.a. X;
   b. Si ottenga la funzione di ripartizione e si calcolino il valore atteso e la varianza di X;
   c. Si calcoli la probabilità che il peso alla nascita sia compreso tra 90 e 100 grammi.

2. Un laboratorio deve controllare la qualità di un lotto di 30 bottiglie di succo di arancia, tra cui 6 sono contaminate. Pertanto, il tecnico procede secondo due fasi:

   - Fase 1: estrae 3 bottiglie senza reinserimento, le analizza e le scarta tutte;
   - Fase 2: poi estrae altre 2 bottiglie con reinserimento dal resto del lotto rimasto.

   a. Si calcoli la probabilità che in fase 1 sia stata estratta almeno una bottiglia contaminata;
   b. Si calcoli la probabilità che in fase 2 sia stata estratta almeno una bottiglia contaminata.

3. Si supponga che in uno studio di veterinaria vi siano due veterinari: uno/a di essi (A) riesce a visitare in media 2 animali domestici ogni ora, l'altro/a (B) 3 ogni 2 ore. Assumendo che il numero di arrivi dei *pazienti* da entrambi i veterinari sia un processo di Poisson:

   a. Si calcoli la probabilità che il tempo di visita di un animaletto domestico sia inferiore a 40 minuti per ognuno dei due veterinari;
   b. Sapendo che la probabilità di scegliere il/la veterinario/a A è pari a 0,6, si calcoli il tempo medio di visita di un animaletto domestico nello studio di veterinaria;
   c. Si calcoli il tempo medio di visita del quarto animaletto per i due veterinari.

4. Un gruppo di ecologi sta studiando l'effetto combinato di due fattori ambientali sulla produzione annuale di biomassa in un ecosistema. Siano X e Y due v.a. che rappresentano l'umidità media del suolo e l'intensità media della luce solare durante la stagione vegetativa, rispettivamente. Assumendo che X e Y siano distribuite secondo una normale con $\mu_X = 120$, $\mu_Y = 18$, $\sigma_X^2 = 100$, $\sigma_Y^2 = 9$. Sia $Z = 0.2X + 1.5Y$ la v.a. che rappresenta un indice sintetico di produttività della biomassa. Si ottenga la distribuzione di Z nel caso in cui

   a. X e Y siano indipendenti;
   b. X e Y siano dipendenti e la correlazione sia pari a 0.6 (tipico di ambienti naturali).

   Si calcoli la probabilità $P(60 \leq Z \leq 90)$, distinguendo i casi (a) e (b).

5. Un team IT sta monitorando le prestazioni di un server che gestisce richieste da parte di utenti in rete. Il tempo di risposta (in millisecondi) del server a una singola richiesta, X, segue una distribuzione esponenziale con un tempo medio di risposta di 100 millisecondi:

   a. Qual è la probabilità che il server risponda in meno di 300 millisecondi a una richiesta?
   b. Qual è la probabilità che una richiesta richieda più di 300 millisecondi, sapendo che il server è già in attesa da 100 millisecondi?
   c. Qual è il valore mediano del tempo di risposta del server?

6. Siano X e Y due v.a. che rappresentano il numero di vinili (X) e libri (Y) acquistati dai clienti che entrano in una libreria. La distribuzione congiunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ è espressa mediante la seguente tabella:

X/Y	0	1	2
0	0.05	0.40	0.20
1	0.2	0.1	0.05

Si ottengano le distribuzioni marginali di X e Y, il loro valore atteso e la varianza. Quindi si calcoli $\mathrm{cov}(X, Y)$.

7. Il personale amministrativo di un pronto soccorso ospedaliero sta analizzando i flussi di arrivo dei pazienti in una giornata con affluenza regolare, per valutare il carico di lavoro del triage. Dalle osservazioni, risulta che in media, arrivano 3 pazienti ogni 20 minuti al pronto soccorso. Si assume che gli arrivi seguano un processo di Poisson.

   a. Qual è la probabilità che in 5 minuti non sia arrivato alcun paziente?
   b. Qual è la probabilità che il quinto paziente arrivi dopo 20 minuti?
   c. In media, quanto tempo (in minuti) intercorre tra l'arrivo di due pazienti consecutivi?

8. Siano X e Y v.a. indipendenti e distribuite secondo $\mathrm{Ga}(\alpha_1, \lambda)$ e $\mathrm{Ga}(\alpha_2, \lambda)$ rispettivamente. Si ricavi quindi la distribuzione di $Z = X + Y$ e si ottengano media e varianza di Z.

9. La distribuzione Beta può essere utile per modellare i dati di affluenza elettorale. Dai dati di affluenza alle urne delle ultime votazioni conosciamo che la media e la varianza sono rispettivamente 0.67 (67%) e varianza 0.02. Si ottengano i parametri della distribuzione Beta.

10. Si consideri il seguente gioco relativo al lancio di un dado equilibrato a quattro facce, dove si vince se il numero risultante del lancio è 1.

   a. Qual è la probabilità che la prima vittoria avvenga al secondo lancio?
   b. Qual è la probabilità che la terza vittoria avvenga entro il 4 lancio?