BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE (PAG. 82)

Una base di uno spazio vettoriale V su K è un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ tale che:

- i vettori sono linearmente indipendenti
- generano lo spazio V, cioè $\forall v \in V$ si scrive come combinazione lineare dei v_i. (V è un sistema di generatori)

SISTEMA DI GENERATORI DI UN SOTTOSPAZIO (PAG. 80)

Un sistema di generatori di un sottospazio $U \subseteq V$ su K è un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$ tale che

$$V = \text{SPAN}(v_1, \dots, v_m)$$

cioè ogni vettore di V può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$

INDIPENDENZA LINEARE (PAG. 81)

I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ su K sono linearmente indipendenti se:

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \implies \lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$$

RANGO DI UNA MATRICE (PAG. 92)

Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è il massimo numero di righe/colonne linearmente indipendenti. Equivale alla dimensione dello spazio generato dalle righe o colonne.

$$rg(A) := \dim \text{SPAN}(A^{(1)}, \dots A^{(n)})$$

$$rg(A) := \dim \text{SPAN}(A_{(1)}, \dots, A_{(m)})$$

SOTTOSPAZIO VETTORIALE (PAG. 23)

Un sottoinsieme $W \subseteq V$ su $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale se:

- il vettore nullo di V appartiene a W (ovvero $0 \in W$)
- è chiuso per somma $\forall_{u,v} \in W \Longrightarrow u+v \in W$
- chiuso per prodotto scalare $\forall_\lambda \in \mathbb{R}, \forall_v \in W \Longrightarrow \lambda \cdot v \in W$

APPLICAZIONE LINEARE (PAG. 113)

Un'applicazione $f: V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali è lineare se $\forall_{v,w} \in V$ e $\lambda \in K$ vale:

- additività $f(v+w) = f(v) + f(w)$ l'immagine della somma è la somma delle imm
- omogeneità $f(\lambda \cdot v) = \lambda f(v)$ l'immagine della moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione per uno scalare dell'immagine

SISTEMA LINEARE E SUA SOLUZIONE (PAG. 53)

Un sistema lineare è una famiglia di equazioni lineari di tipo $AX=b$, con $A \in M_{m,n}(K)$, $X \in K^n$, $b \in K^m$.
Una soluzione è un vettore $X \in K^n$ tale che $AX=b$

MATRICE INVERTIBILE E MATRICE INVERSA (PAG. 47)

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che:

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_n$$

Una tale matrice B si dice inversa di A.

SISTEMA LINEARE OMOGENEO (PAG. 53)

Un sistema omogeneo è un sistema lineare della forma $AX=0$ $b_1=0, \dots, b_n=0$

TEOREMA DI STRUTTURA PER APPLICAZIONI LINEARI (PAG. 119)

Siano V e V' due spazi vettoriali su un campo K, entrambi di dimensione finita.
Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, e siano dati $v_1', \dots, v_n' \in V'$ arbitrari.
Allora esiste unica applicazione lineare $f: V \to V'$ tale che:

$$f(v_i) = v_i' \quad \text{per } \forall i = 1, \dots, n$$

dimostrazione: (PAG. 119)

TEOREMA DI STRUTTURA PER SISTEMI LINEARI OMOGENEI (PAG. 58)

Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo con $A \in M_{m,n}(K)$
Allora l'insieme delle soluzioni del sistema

$$S = \{X \in K^n \mid AX = 0\}$$

dim.

è un sottospazio vettoriale di K^n, infatti:

- $0 \in K^n$ è soluzione, poiché $A \cdot 0 = 0$
- se $X, Y \in S$, allora $A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$ quindi $X + Y \in S$
- se $X \in S$ e $\lambda \in K$, allora $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \cdot 0 = 0$ quindi $\lambda X \in S$

Perciò, S è chiuso per somma e moltiplicazione scalare, e contiene lo zero:
è un sottospazio vettoriale di K^n

$\square$

TEOREMA DI STRUTTURA PER SISTEMI LINEARI ARBITRARI (PAG. 60)

Sia $AX = b$ un sistema lineare, con $A \in M_{m,n}(K)$, $b \in K^m$
Se $\tilde{s} \in K^n$ è una soluzione del sistema, allora un vettore $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ soluzione del sistema omogeneo associato

$AX=0$ tale che:

$$S = \tilde{S} + S_0$$

dimostrazione: (PAG. 60)

TEOREMA DI DIMENSIONE PER APPLICAZIONI LINEARI (PAG. 122)

Sia $f: V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo K, con V di dimensione finita, allora:

$$\dim V = \dim \ker f + \underbrace{\dim \operatorname{im} f}_{\operatorname{rg} f}$$

dimostrazione

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $\ker f$. Completiamola a una base di V:

$$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

Allora $n = \dim V$, e i vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti e generano $\operatorname{Im} f$

quindi:

$$\dim(\ker f) = k, \ \dim(\operatorname{Im} f) = n-k \implies \dim V = k + (n-k) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

$\square$

TEOREMA DI CRAMER (PAG. 57)

Consideriamo un sistema lineare $AX=b$, dove $A \in M_n(K)$ è una matrice quadrata. Se A è invertibile, allora il sistema ha un'unica soluzione, ed essa è data da:

$$X = A^{-1} \cdot b$$

dimostrazione:

1) $A^{-1}b$ è soluzione del sistema $AX=b$

Sostituiamo $X=A^{-1}b$ nel sistema: $AX=A(A^{-1}b)$

per associatività: $\underbrace{\underbrace{(AA^{-1})}_{\mathbb{1}_n}b}_{b}=b$

2) $A^{-1}b$ è l'unica soluzione

Sia $s\in K^n$ una qualunque soluzione di $AX=b$, cioè $As=b$. Moltiplichiamo ambo i membri per A^{-1}

$$A^{-1}(As)=A^{-1}b \Longrightarrow \underbrace{\underbrace{(A^{-1}A)}_{\mathbb{1}_n}s}_{s}=A^{-1}b \longrightarrow \mathbb{1}_n\, s=A^{-1}b \Longrightarrow s=A^{-1}b$$

$\square$

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI (PAG. 94)

Sia $A\in M_{m,n}(K)$ e sia $b\in K^m$. Allora il sistema lineare: $AX=b$ è compatibile (cioè almeno una soluzione) se e solo se:

$$rg(A)=rg(A|b)$$

In tal caso, la soluzione generale del sistema dipende da: $n-rg(A)$ parametri liberi.

dimostrazione:

Sia $AX=b$ un sistema lineare con $A\in M_{m,n}(K)$, $b\in K^m$. Vogliamo dimostrare che il sistema è compatibile se e solo se:

$$rg(A)=rg(A|b)$$

$\Longrightarrow$ supponiamo che $AX = b$ sia compatibile

Allora esiste una soluzione $s \in K^n$ con $As = b$, cioè

$$b = s_1 A^{(1)} + \dots + s_n A^{(n)} \Longrightarrow b \in im(A)$$

$$\Big\downarrow \text{ovvero}$$

$$b \in \text{SPAN}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$$

quindi b è combinazione delle colonne di A, e aggiungere b non aumenta il rango

$$rg(A|b) = rg(A)$$

$\Longleftarrow$ supponiamo ora che $rg(A|b) = rg(A)$

Allora $b \in \text{SPAN}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$, cioè:

$$b = s_1 A^{(1)} + \dots + s_n A^{(n)} = As$$

per qualche $s \in K^n$, quindi $AX = b$ è compatibile

Soluzioni

Sia $\tilde{s}$ una soluzione. Allora ogni soluzione ha la forma:

$$s = \tilde{s} + r \in \ker A$$

e quindi:

$$\dim(\text{soluzioni}) = \dim \ker(A) = n - rg(A)$$

$\square$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{base canonica } \mathcal{E} \text{ di } \mathbb{R}^3$$

base e dimensione di ker(f)

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & +6 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

gradinizziamo

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 3 \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{II}-2\text{I} \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot 3 \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} \text{III}+\text{I} \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{III} - \left(-\frac{11}{1}\right)\text{II}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 + (5 \cdot 0) = 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 = 0 \;/:2$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2x_2 \quad (1 \;\; 2 \;\; 0)$$

$$\ker(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\dim(\ker(f)) = n - \text{numero di righe non nulle dopo la gradinizzazione}$$

$$= 3 - 2 = 1$$

base e dimensione di im(f)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} A' = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PIVOT

prendiamo le colonne della matrice originale corrispondenti alle col. dei pivot

$$\text{im}(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\dim(\text{im}(f)) = n - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$$

verificare se esiste un vettore nel ker che soddisfa una condizione

condizione: $x_1 + x_3 = 1$

$\ker(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\2t\\0\end{pmatrix}$

$x_1 + x_3 = 1$

$t + 0 = 1 \Longrightarrow t = 1$ esiste, un esempio è $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

verificare se esiste un vettore nel im che soddisfa una condizione

condizione: $x_2 + x_3 = 1$

$\text{im}(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\right)$ $\vec{x} = a\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3a+5b\\-2a+3b\\a+2b\end{pmatrix}$

$x_2 + x_3 = (-2a+3b) + (a+2b) = -a+5b = 1 \Longrightarrow$ esistono infinite soluzioni (a, b)

esibire un vettore che appartenga a $\ker(f) \cap \text{im}(f)$

$\ker(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ $\text{im}(f) = \text{SPAN}\left(\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}\right)$

$\exists_{a,b} \in \mathbb{R}: \quad a \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -3a + 5b = 1 \\ -2a + 3b = 2 \\ a + 2b = 0 \Longrightarrow a = -2b \Longrightarrow \text{troviamo 2 } b \text{ differenti} \end{cases}$$

il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \in \ker(f)$ non appartiene a $\text{im}(f)$ $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{\vec{0}\}$

se esistesse scriviamo $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \text{SPAN}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

trovare i valori di α per cui il sistema $AX = b$ è compatibile e risolverlo

$\alpha \in \mathbb{R}$ $AX = \begin{pmatrix}1\\1\\\alpha\end{pmatrix}$

$$(A \mid b(\alpha)) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & \alpha \end{array}\right) \quad (A' \mid b(\alpha)') = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha+12 \end{array}\right)$$

$0 = 3\alpha + 12$

$\Downarrow$

$\alpha = -4$

polinomio caratteristico

$$\chi_a(\lambda) = \det(A-\lambda) \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 8 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -5-\lambda & -2 & 4 \\ 8 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

usiamo Sarrus

$$\left[\begin{matrix} -5-\lambda & -2 & 4 \\ 8 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{matrix}\right] \begin{matrix} -5-\lambda & -2 \\ 8 & 4-\lambda \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

$$((-5-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)-16-32)-(-16(1-\lambda)+4(-5-\lambda)-8(4-\lambda))$$
$$((-20+5\lambda-4\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)-48)-(-16+16\lambda-20-4\lambda-32+8\lambda)$$
$$((\lambda^2+\lambda-20)(1-\lambda)-48)-(-68+20\lambda)$$
$$(\cancel{\lambda^2}-\lambda^3+\lambda-\cancel{\lambda^2}-20+20\lambda-48)-(-68+20\lambda)$$
$$-\lambda^3+\lambda-20+\cancel{20\lambda}-48+68-\cancel{20\lambda}$$
$$-\lambda^3+\lambda$$

λ — 1, −1, 0

$$S_p(L_A) = \{-1, 0, 1\}$$

base di autovettori per L_A

prendiamo λ; se positivo $(A-I)$, se negativo $(A+I)$

λ -1

$$A+I = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GAUSS}} (A+I)' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_2 = 4x_3$$

$$-2x_1+4x_2+2x_3=0 \qquad x_1 = 3t$$
$$-2x_1+6x_3=0 \qquad x_2=-4t \quad = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$$
$$x_1 = 3x_3 \qquad x_3 = t$$

calcolare la matrice di cambio di base

prendiamo gli autovettori calcolati precedentemente

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice diagonale

$v_1 \Rightarrow \lambda = -1$

$v_2 \Rightarrow \lambda = 0$

$v_3 \Rightarrow \lambda = 1$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

costruire un piano che contiene una retta per un punto

$$r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \qquad P = (0, 1, -2)$$

$\vec{v}$ direttore della retta (guarda t): $\vec{v_1}\ (2, -1, 1)$

$\vec{v}$ da un punto sulla retta a P: prendiamo ad esempio $t=0$ $\quad P_0 = (-1, 0, 1)$

$$\vec{v_2} = P - P_0 = (1, 1, -3)$$

formula generale del piano: $\vec{x} = \vec{P} + s\vec{v_1} + t\vec{v_2}$

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 1 - s + t \\ z = -2 + s - 3t \end{cases}$$

verificare se un punto appartiene a una retta

$$r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad P = (3, -2, 2)$$

$$\begin{cases} -1+2t = 3 \Rightarrow t = 2 \\ -t = -2 \Rightarrow t = 2 \\ 1+t = 2 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

non esiste valore t che soddisfi tutte le equazioni quindi il punto non appartiene alla retta

trovare una retta contenuta in un piano e passante per un punto

$\Pi: x + 2y - z = 3 \qquad P = (1, 0, 0)$

$1 + (2 \cdot 0) - 0 \neq 3$ non appartiene al piano

$P' = (1, 1, 0) \Rightarrow$ un punto che sta sul piano

$1 + 2 \cdot 1 - 0 = 3$ ✓

troviamo due soluzioni al sistema $x + 2y - z = 0$

$v_1 = (-2, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

con (a, b, c) di v_1 e (x_0, y_0, z_0) di P

determinare un piano parallelo a un altro e passante per un punto

$\pi: 2x - y + z = 4 \qquad P = (1, -2, 3)$

il vettore $\vec{n}$ è dato dai coefficienti: $\vec{n} = (2, -1, 1)$

$2x - y + z = 0$ → cerchiamo due soluzioni: $(-\frac{1}{2}, 0, 1)$ e $(\frac{1}{2}, 1, 0)$

$\begin{cases} x = x_0 + x_1 s + x_2 t \\ y = y_0 + y_1 s + y_2 t \\ z = z_0 + z_1 s + z_2 t \end{cases}$ (x_0, y_0, z_0) dati da P

(x_1, y_1, z_1) dati da v_1

(x_2, y_2, z_2) dati da v_2

determinare una retta passante per due punti

$A = (1, 0, -2) \qquad B = (3, 4, 1)$

$\vec{AB} = B - A = (3-1, 4-0, 1-(-2)) = (2, 4, 3)$

$\begin{cases} x = x_0 + x_1 t \\ y = y_0 + y_1 t \\ z = z_0 + z_1 t \end{cases}$ (x_0, y_0, z_0) dati da A_o B

(x_1, y_1, z_1) dati da $\vec{AB}$

studio della posizione tra una retta e un piano

$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad \pi: \; x + y - z = 0$

sostituiamo x, y, z nelle coordinate del piano

$$1 + t + 2 - t - 3 - 2t = 0 \implies -2t = 0 \implies t = 0$$

mettiamo t nella retta e troviamo il punto di intersezione

1) se trovo 1t → la retta interseca in un punto
2) se nessun t soddisfa → la retta è parallela al piano
3) se t sempre vera → la retta è contenuta nel piano

studio della posizione tra due rette nello spazio $\mathbb{R}^3$

$r_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 4 + s \end{cases}$ confrontiamo i vettori di direzione

$\vec{v_1} = (1, -1, 2) \qquad \vec{v_2} = (1, 2, 1)$

non sono paralleli né coincidenti → non hanno multipli tra loro

$$\begin{cases} 1+t = 3+s \Rightarrow t = s+2 \\ 2-t = 1+2s \\ 3+2t = 4+s \end{cases}$$

$2-(s+2) = 1+2s$
$-s = 1+2s$
$-3s = 1$
$s = -\frac{1}{3}$

$t = s+2$
$t = -\frac{1}{3}+2$
$t = \frac{5}{3}$

$3+(2 \cdot \frac{5}{3}) = 4+(-\frac{1}{3})$

$\frac{19}{3} \neq \frac{11}{3}$ incompatibile

le rette non si intersecano

⇒ sono sghembe

trovare una retta che interseca due rette sghembe

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 3-t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2+s \\ y = 4-s \\ z = 1+2s \end{cases}$$

scriviamo i punti generici sulle due rette

$A(t) = (1+t, -1+2t, 3-t)$
$B(s) = (2+s, 4-s, 1+2s)$

costruiamo il vettore $\vec{AB} = B(s) - A(t) = (1+s-t, 5-s-2t, -2+2s+t)$

cerchiamo s e t, tali che AB sia perpendicolare a entrambi i vettori di direzione

$r_1 \to v_1 = (1, 2, -1)$
$r_2 \to v_2 = (1, -1, 2)$

$$\to \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} t = \frac{5}{3} \\ s = -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

...

trovare due piani paralleli, ciascuno contenente una delle due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 3-t \end{cases} \quad \vec{v}_1 \text{ direz.} = (1, 2, -1)$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 2+s \\ y = 4-s \\ z = 1+2s \end{cases} \quad \vec{v}_2 \text{ direz.} = (1, -1, 2)$$

$\vec{AB} = B - A$

n