Teorema di Cramer Consideriamo un sistema lineare $AX = b$, dove $A \in M_{m,n}(K)$ è una matrice quadrata. Se A è invertibile, allora il sistema ha un'unica soluzione, ed essa è data da: $X = A^{-1}b$
<u>dim:</u> Dimostriamo che: (1) $A^{-1}b$ è soluzione, e (2) è l'unica.(1) Verifichiamo che $x = A^{-1}b$ soddisfa $Ax = b$: $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$ Quindi è soluzione.(2) Supponiamo s sia una qualsiasi soluzione di $Ax = b$, cioè $As = b$. Moltiplichiamo ambo i membri per A^{-1}:$A^{-1}(As) = A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)s = I_n s = s = A^{-1}b$ Quindi ogni soluzione s deve coincidere con $A^{-1}b$.
Pertanto, $A^{-1}b$ è l'unica soluzione del sistema.

Sistema lineare omogeneo Un sistema omogeneo è un sistema lineare della forma $Ax = 0$ $b_1 = 0, \dots, b_n = 0$.

Teorema di struttura per sistemi lineari omogenei Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo con $A \in M_{m,n}(K)$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema $S = \{X \in K^n | AX = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di K^n,
<u>dim:</u> infatti: $0 \in K^n$ è soluzione, poiché $A \cdot 0 = 0$, se $X, Y \in S$, allora $A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$ quindi $X + Y \in S$

Teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari Consideriamo un sistema lineare $AX = b$ con $A \in M_{m,n}(K)$ e $b \in K^m$. Un vettore $s \in K^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se esiste $s_0 \in K^n$ tale che $s = \tilde{s} + s_0$, dove s_0 è soluzione di $AX = 0$.
<u>dim:</u> Fissiamo una soluzione $\tilde{s}$ del sistema $AX = b$.
($\Rightarrow$) Supponiamo che $s \in K^n$ sia soluzione di $AX = b$. Poniamo $s_0 := s - \tilde{s}$. Allora $s = \tilde{s} + s_0$. Mostriamo che s_0 è soluzione di $AX = 0$:
$As_0 = A(s - \tilde{s}) = As - A\tilde{s} = b - b = 0$, quindi $s_0 \in \ker(A)$, cioè è soluzione del sistema omogeneo.
($\Leftarrow$) Sia ora s_0 soluzione di $AX = 0$ e $\tilde{s}$ una soluzione di $AX = b$. Definiamo $s := \tilde{s} + s_0$. Allora:
$As = A(\tilde{s} + s_0) = A\tilde{s} + As_0 = b + 0 = b$, quindi s è soluzione.
Quindi, se $AX = b$ è compatibile e $\tilde{s}$ è una sua soluzione, allora l'insieme delle soluzioni è: $\{\tilde{s} + s_0 \mid s_0 \text{ soluzione di } AX = 0\}$.

Sistema di generatori di un sottospazio Un sistema di generatori di un sottospazio $U \subseteq V$ su K è un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n$ tale che: $V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$, cioè ogni vettore di V vpuò essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$

Vettori linearmente indipendenti Sia V uno spazio vettoriale su un campo K, e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. L'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice linearmente indipendente se l'unica combinazione lineare dei v_i che dà come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli, cioè: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Base di uno spazio vettoriale Una base di uno spazio vettoriale V su K è un insieme di vettori $v_1, \dots, v_n \subseteq V$ tale che: i vettori sono linearmente indipendenti, generino lo spazio V, cioè $\forall_v \in V$ si scrive come combinazione lineare dei v_i. (V è un sistema di generatori)

Base di un sottospazio vettoriale La base di un sottospazio vettoriale è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano l'intero sottospazio. In altre parole, ogni vettore del sottospazio può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.

Teorema di unicità della combinazione lineare rispetto a una base Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; un sottoinsieme $B \subseteq V$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V se e solo se ogni $v \in V$ si può scrivere in maniera unica come come combinazione lineare di elementi di B.
<u>dim:</u> ($\Rightarrow$) Supponiamo che B sia una base di V. Allora ogni $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ in modo unico: se $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, allora sottraendo membro a membro: $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0$.Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme linearmente indipendente, segue $\lambda_i = \mu_i$ per ogni i.($\Leftarrow$) Se ogni $v \in V$ ammette rappresentazione unica come combinazione lineare dei v_i, allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori linearmente indipendenti, cioè una base.

Teorema di estrazione di una base Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato, sia $\{v_1 \dots, v_k\}$ un sistema di generatori di V, allora esiste $B \subseteq \{v_1 \dots, v_k\}$, tale che B è una base di V.
<u>dim:</u> Costruiamo la base cercata tramite l'algoritmo dello scarto: 1. Inizializziamo $B = \emptyset$ 2. Consideriamo v_1: se $v_1 \neq 0$, lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo 3. Consideriamo v_2: se $v_2 \notin \text{span}(v_1)$, lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo 4. Se $v_3 \notin \text{span}(v_1, v_2)$, lo aggiungiamo a B, altrimenti lo scartiamo 5. Ripetiamo fino a v_k. Alla fine, l'insieme B così ottenuto è una base di V.

Teorema del completamento o dell'estensione Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e siano $\{v_1, \dots, v_p\}$ vettori linearmente indipendenti; allora esiste una base B di V tale che $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq B$ (ovvero $\{v_1, \dots, v_p\}$ possono essere completati a una base).
<u>dim:</u> Applichiamo l'algoritmo dello scarto partendo da $\{v_1, \dots, v_p\}$ e completandolo con vettori da un insieme di generatori di V, fino ad ottenere un insieme linearmente indipendente massimo $B \subseteq V$, che è quindi una base contenente $\{v_1, \dots, v_p\}$.

Lemma di Steinitz Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato e sia $B = \{v_1 \dots, v_k\}$ una base di V; allora per $k > n$ e per ogni scelta dei vettori $w_1, \dots, w_k \in V$ vale che $w_1, \dots, w_k$ sono linearmente dipendenti.
<u>dim:</u> Ogni w_i è combinazione lineare dei v_j: $w_i = c_{i1}v_1 + \cdots + c_{in}v_n$. Costruiamo la matrice C con righe i coefficienti. Poiché C ha $k > n$ righe, il sistema omogeneo $CX = 0$ ha soluzione non banale. Quindi i w_i sono linearmente dipendenti.

Teorema di dimensione Sia V uno spazio vettoriale su K finitamente generato; siano $\{v_1 \dots, v_n\}$ e $\{w_1 \dots, w_m\}$ due basi di V; allora: $n = m$ (equivalentemente tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi)
<u>dim:</u> dato che $\{v_1 \dots, v_n\}$ è una base, allora $m \leq n$ per il lemma di Steinitz visto che $\{w_1 \dots, w_m\}$ è linearmente indipendente; scambiando i ruoli di $\{v_1 \dots, v_n\}$ e $\{w_1 \dots, w_m\}$ otteniamo che $n \leq m$; pertanto $n = m$

Rango di una matrice Il rango di una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è il massimo numero di righe/colonne linearmente indipendenti. Equivale alla dimensione dello spazio generato dalle righe o colonne: $rg(A) := dim(\text{span}(A^1, \ldots, A^n))$ $rg(A) := dim(\text{span}(A_1, \ldots, A_n))$

Teorema di dimensione per soluzioni di sitemi lineari omogenei Sia $A \in M_{m,n}(K)$; $W := \{s \in K^n : A \cdot s = 0\}$, ovvero W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo; $AX = 0$ notiamo $W \subseteq K^n$; vale: $dim(W) = n - rg(A)$

Teorema di Rouchè-Capelli Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^n$. Allora il sistema lineare: $AX = b$ è compatibile (ha almeno una soluzione) se e solo se: $rg(A) = rg(A|b)$ In tal caso, la soluzione generale del sistema dipende da: $n - rg(A)$ parametri liberi.
<u>dim:</u> $(\Rightarrow)$ Supponiamo che $AX = b$ sia compatibile. Allora esiste una soluzione $\bar{s}$ tale che $A\bar{s} = b$. Scrivendo A come matrice delle colonne $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$, abbiamo che: $b = \bar{s}_1 A^{(1)} + \cdots + \bar{s}_n A^{(n)} \Rightarrow b \in \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ Quindi: $\text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}, b) = \text{span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \Rightarrow \text{rg}(A|b) = \text{rg}(A)$ $(\Leftarrow)$ Supponiamo ora che $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. Allora b appartiene allo span delle colonne di A, cioè: $b = s_1 A^{(1)} + \cdots + s_n A^{(n)} \Rightarrow$ il sistema $AX = b$ è compatibile con $s = (s_1, \ldots, s_n)^T$ soluzione Ora, se $\tilde{s}$ è una soluzione di $AX = b$, allora per il teorema di struttura esistono tutte le soluzioni nella forma: $s = \tilde{s} + r, \quad \text{con } r \in \ker(A)$ Sia $W = \{x \in K^n : Ax = 0\}$. Per il teorema di dimensione dello spazio delle soluzioni omogenee: $\dim(W) = n - \text{rg}(A)$ Quindi esiste una base $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ con $k = n - \text{rg}(A)$, e ogni soluzione del sistema si scrive come: $s = \tilde{s} + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k$ cioè la soluzione generale dipende da $k = n - \text{rg}(A)$ parametri liberi.

Determinante Il determinante è un numero che si può associare a una matrice quadrata e ci dice quanto è "invertibile" quella matrice, oltre a darci altre informazioni geometriche importanti. E definito come:

- $n = 1$, ovvero $A = (a_{11})$, definiamo $det(A) = a_{a11}$
- $n > 1$, definiamo $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i,1} \cdot det(A_{i1})$

Se $det(A) = 0 \rightarrow$ la matrice non è invertibile
Se $det(A) \neq 0 \rightarrow$ la matrice è invertibile
Gode delle seguenti proprietà:

- <u>multilinearità</u>$\rightarrow$ sia $A \in M_n(K)$ e supponiamo $A_i = R_1 + R_2$ (la riga i-esima è somma di due righe) per qualche vettore riga R_1,R_2
- <u>alternanza o antisimmetria</u>$\rightarrow$ se scambiamo di posto due righe o due colonne il determinante cambia di segno
- <u>normalizzazione</u>$\rightarrow$ $det = (\mathbb{1}_n) = 1$

Teorema di caratterizzazione del determinante Il determinante è l'unica funzione $M_n(K) \rightarrow K$ che soddisfi queste 3 proprietà.

Teorema di invertibilità di una matrice quadrata Sia $A \in M_n(K)$, allora A è invertbile $\iff det(A) \neq 0$ Per le matrici $3X3$ (e solo per esse) vale la formula di Sarrus

Teorema di equivalenza tra invertibilità, rango e determinante Sia $A \in M_n(K)$, allora
A è invertibile $\iff rg(A) = n \iff det(A) \neq 0$,
ovvero
A non è invertibile $\iff rg(A) < n \iff det(A) = 0$

Teorema di sviluppo di Laplace rispetto alla k-esima colonna Sia $A \in M_n(K)$ e sia $k \in \{1, \ldots, n\}$, allora $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot det(A_{ik})$

Teorema di sviluppo di Laplace rispetto alla l-esima riga Sia $A \in M_n(K)$ e sia $l \in \{1, \ldots, n\}$, allora $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \cdot a_{lj} \cdot det(A_{lj})$

Teorema di Binet Siano $A, B \in M_n(K)$, allora: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

Applicazioni lineari Un'applicazione $f : V \rightarrow W$ tra spazi vettoriali è lineare se $\forall_{v,w} \in V e \lambda \in K$ vale: (additività) $f(v + w) = f(v) + f(w)$ l'immagine della somma è la somma delle immagini, (omogeneità) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ l'immagine della moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione per uno scalare dell'immagine.
Sia $f : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare; definiamo il <u>nucleo</u> di f come il sottoinsieme: $ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$, quindi $ker(f) \subseteq V$; definiamo <u>l'immagine</u> di f come il sottoinsieme: $\text{Im}(f) = \{v' \in V' \mid \exists v \in V \text{ tale che } f(v) = v'\}$.

Teorema di struttura per le applicazioni lineari Siano $V e V'$ due spazi vettoriali su un campo K, entrambi di dimensione finita. Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e siano dati $v'_1, \ldots, v'_n \in V'$ arbitrari. Allora esiste un unica applicazione lineare $f : V \rightarrow V'$ tale che: $f(v_i) = v_i \text{per} \forall_i = 1, \ldots, n$
<u>dim:</u> Mostriamo prima che esiste. Ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Definiamo $f(v) := \lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n$. Questa definizione ha senso perché le λ_i sono univocamente determinate. Dobbiamo ora dimostrare che f è lineare. Siano $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$, allora:$f(v + w) = f((\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n) = (\lambda_1 + \mu_1)v'_1 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v'_n = f(v) + f(w)$ e $f(\alpha v) = f(\alpha\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha\lambda_n v_n) = \alpha\lambda_1 v'_1 + \cdots + \alpha\lambda_n v'_n = \alpha f(v)$ Quindi f è lineare. Mostriamo ora che è unica: se $g : V \rightarrow V'$ è un'altra applicazione lineare tale che $g(v_i) = v'_i$ per ogni i, allora per ogni $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ si ha $g(v) = \lambda_1 g(v_1) + \cdots + \lambda_n g(v_n) = \lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n = f(v)$, quindi $f = g$.

Teorema di dimensione per applicazioni lineari Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali su un campo K, con V di dimensione finita, allora: $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(im(f)) = dim(ker(f)) + rg(f)$
dim: Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $\ker(f)$, e completiamola a base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di V. Consideriamo ora i vettori $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$. (1) Mostriamo che sono linearmente indipendenti. Se $\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$, allora $f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0$, quindi $\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \ker(f)$. Ma i $v_1, \dots, v_k$ sono base di $\ker(f)$, quindi questa combinazione deve essere combinazione dei primi k, e poiché $\mathcal{B}$ è base, segue che tutti i $\lambda_i = 0$. (2) Mostriamo che generano $\mathrm{Im}(f)$. Ogni $v \in V$ si scrive in base $\mathcal{B}$, quindi $f(v)$ si scrive con i $f(v_i)$. Ma $f(v_1), \dots, f(v_k) = 0$ perché stanno nel nucleo, quindi l'immagine è generata da $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$. Conclusione: $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ è base di $\mathrm{Im}(f)$, quindi $\dim \ker(f) = k$ e $\dim \mathrm{Im}(f) = n - k$.

Sia $F : V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia B una base di V e sia ξ una base di V'; Scriviamo $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\xi = \{w_1, \dots, w_n\}$. Definiamo la matrice associata a f rispetto alle basi B e ξ come la matrice $M_\xi^B(f) \in M_{m,n}(K)$ ottenuta nella maniera seguente: per ogni $v_i \in B$ consideriamo $f(v_i)$ e dunque possiamo scrivere $f(v_i)$ come combinazione lineare dei vettori di ξ, ovvero $f(v_i) = \alpha_{1i} \cdot w_1 + \dots + \alpha_{mi} \cdot w_m$

Teorema di calcolo delle coordinate dell'immagine tramite matrice associata Sia $f : V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita; sia B una base di V e sia ξ una base di V', sia $v \in V$ e supponiamo che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di v rispetto alla base B; allora le coordinate di $f(v)$ rispetto alla base ξ sono date da $M_\xi^B(f) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Teorema di composizione delle matrici associate Siano $f : V \to V'$ e $g : V' \to V''$ due applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita; Sia B una base di V, sia ξ una base di V' e sia D una base di V''; allora possiamo considerare la composta $g \circ f : V \to V''$, che anch'essa è una applicazione lineare, e vale $M_D^B(g \circ f) = M_D^\xi(g) \cdot M_\xi^B(f)$

Teorema del criterio di diagonalizzazione Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare, dove $dim(V)$ è finito; f è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti proprietà:

1. Il polinomio p_f si scompone completamente in fattori di primo grado (non necessariamente distinti), cioè: $p_f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{w_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{w_k}$.
2. Per ogni autovalore $\bar{\lambda}$ vale che: $m_g(\bar{\lambda}) = m_a(\lambda)$, cioè la molteplicità algebrica coincide con la dimensione dello spazio proprio: $m_i = \dim \mathrm{Aut}(\alpha_i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$.

Teorema di struttura degli insiemi di soluzioni dei sistemi lineari Sia $A \in M_{m,n}(K)$ e sia $b \in K^m$; supponiamo che il sistema lineare $AX = b$ sia compatibile e sia S l'insieme delle sue soluzioni; allora $S \subseteq \mathbb{A}_K^n$ è un sottospazio affine la cui giacitura W è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $AX = 0$; inoltre vale che: $dim(S) = n - rg(A)$
dim: Il teorema segue direttamente dal teorema di struttura per sistemi lineari arbitrari: tutte e sole le soluzioni di $AX = b$ sono della forma $s = \tilde{s} + s_0$, dove $\tilde{s}$ è una soluzione fissa di $AX = b$ ed s_0 è una soluzione di $AX = 0$. Se interpretiamo $\tilde{s} \in K^n$ come un punto $Q \in \mathbb{A}_K^n$ e s come un punto $P \in \mathbb{A}_K^n$, allora $\overrightarrow{PQ} = s - \tilde{s} = s_0$ e quest'ultima è una soluzione di $AX = 0$, ossia un elemento del sottospazio vettoriale W. Pertanto l'insieme S delle soluzioni di $AX = b$ è il sottospazio affine passante per Q e di giacitura W. Inoltre sappiamo che $\dim W = n - \mathrm{rg}\, A$ e quindi $\dim S = n - \mathrm{rg}\, A$.

Teorema di disusguaglianza Cauchy-Schwarz $\forall_{v,w} \in \mathbb{R}^n$, vale che $|v \cdot w| \leq ||v|| \cdot ||w||$

Teorema spettrale per matrici simmetriche Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che A sia simmetrica, ovvero ${}^tA = A$. Allora esiste una base ortonormale di autovettori per $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \longmapsto Av$ In altri termini, l'applicazione lineare L_A si può diagonalizzare con una base $\mathcal{B}$ di autovettori che sia ortonormale, e dunque se $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ allora $P^{-1}AP$ è diagonale.