

编号: 2020-3-109315041

级别: 公开

优化基本理论与方法课程研究报告

A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems

(2025 年 12 月)

李文耀 (323101xxxx)

施兴睿 (3230102392)

浙江大学计算机科学与技术学院

Contents

1	Introduction	1
1.1	Problem Background	1
1.2	Contributions	2
1.3	Organization	2
2	相关工作	3
3	方法描述	4
4	理论结果	6
4.1	收敛率相关理论结果	7
4.2	其他重要理论结果	8
5	应用意义	9
6	实验	11
7	总结	12

Abstract

本文针对信号与图像处理中的线性逆问题,研究了一类基于迭代收缩阈值(ISTA)的求解算法。传统 ISTA 方法结构简单、易于实现,适用于大规模甚至稠密矩阵问题,但其收敛速度较慢,仅具有次线性全局收敛速率 $O(1/k)$,限制了在实际高维问题中的应用效率。为此,论文作者提出了一种快速迭代收缩阈值算法(FISTA)。该算法在保留 ISTA 计算简洁性的基础上,通过引入一个由历史迭代点精心构造的辅助更新项,显著提升了收敛性能。理论分析表明,FISTA 在目标函数值意义下具有 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率,较传统 ISTA 有了质的飞跃。此外,论文还将 FISTA 推广至更一般的非光滑复合优化问题,即目标函数包含光滑凸项与非光滑凸正则项。数值实验以基于小波正则化的图像去模糊为例,对比了 ISTA、FISTA 以及同期提出的 TWIST 算法。实验结果表明,FISTA 在恢复质量和收敛速度上均显著优于 ISTA,且往往在迭代次数上领先数个数量级,验证了其实际有效性。

1 Introduction

1.1 Problem Background

线性逆问题广泛存在于天体物理学、信号与图像处理、统计推断和光学等多个学科领域,其核心任务是从受噪声污染的观测数据中恢复原始信号或图像。在这类问题中,观测数据通常可建模为一个离散线性系统

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是已知的线性算子矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是待估计的原始信号, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 是观测数据, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ 是加性噪声。由于实际应用中常常存在测量误差和噪声,直接求解该线性系统往往会导致不稳定或不准确的结果。因此,如何有效地解决线性逆问题成为了一个重要的研究课题。求解问题的目标可以被形式化为一个最小二乘 (least squares) 与稀疏正则化相结合的优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1\}$$

尽管 l_1 正则化问题可转化为二阶锥规划并利用内点法求解,但在大规模问题中, \mathbf{A} 通常是稠密矩阵,导致内点法在计算和存储方面的开销过大,难以满足实际应用中的实时性需求。而在本篇论文发表时,代收缩阈值算法 (Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm, ISTA) 常被使用来求解该类问题。

具体而言, ISTA 的一般步骤为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{T}_{\lambda t}(\mathbf{x}_k - 2t\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}))$$

其中 t 是适当的步长, $\mathcal{T}_{\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是收缩阈值算子, 定义为:

$$\mathcal{T}_{\alpha}(\mathbf{x})_i = (|x_i| - \alpha)_+ \cdot \text{sign}(x_i)$$

其中 $(z)_+ = \max(z, 0)$, 下标 i 表示向量的第 i 个分量。

然而尽管 ISTA 结构简单、易于实现,但其收敛速度较慢,通常仅具有 $O(1/k)$ 的次线性全局收敛速率,这在处理大规模实际问题时效率较低。在本篇论文发表前,就已经有研究者在数学上证明了 ISTA 生成的序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 在某些关于算子 \mathbf{A} 的病态条件下可能具有极慢并且任意差的渐进收敛速率。因此,如何加速 ISTA 的收敛速度成为了一个重要的研究方向。本文正是在此背景下,针对 l_1 正则化线性逆问题,提出了一种快速迭代收缩阈值算法 (FISTA),旨在显著提升收敛效率,同时适用于更一般的非光滑复合优化问题。

1.2 Contributions

本文的核心贡献是提出了一种名为 **FISTA** (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm) 的新算法, 该算法在保持 **ISTA** 计算简单性的同时, 显著提高了全局收敛速度, 并从理论和实验两方面验证了其优越性。具体贡献包括以下几个方面:

1. 理论层面: 提出快速迭代收缩阈值算法 (**FISTA**) 并完成收敛性证明。

针对 **ISTA** 的慢收敛缺陷, 本篇论文结合了 **Nesterov** 的加速思想与近端操作的适配性设计, 构建了 **FISTA** 算法框架, 还证明了 **ISTA** 的全局收敛速度为 $O(1/k)$, 而 **FISTA** 则达到了 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率, 显著优于 **ISTA**。这一改进是通过引入一个由历史迭代点精心构造的辅助更新点 \mathbf{y}_k 实现的, 该点由前两步迭代结果的线性组合生成, 形式上为

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{t_k}{t_{k+1}}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$$

其中 t_k 按特定递归更新。这不仅降低了迭代次数的理论复杂度, 还为算法在实际场景中的加速效果提供了数学保证。

同时, 这篇论文中给出的理论分析具有通用性, 可处理包含任意凸非光滑正则项和任意光滑凸函数的目标函数, 不局限于 l_1 正则化和最小二乘损失, 这使得 **FISTA** 能够广泛应用于各种实际问题。

2. 实验层面: 通过图像去模糊任务验证 **FISTA** 的性能优势。

这篇论文通过在基于小波的图像去模糊问题上对比 **ISTA**、**FISTA** 以及当时最新的 **TWIST** 算法, 实验表明 **FISTA** 在收敛速度上显著优于 **ISTA**, 性能较 **ISTA** 提升数个数量级。在无噪声的简单测试图像恢复实验中, **FISTA** 仅用几百次迭代即可达到 **ISTA** 和 **TWIST** 需上万次迭代才能接近的精度。

1.3 Organization

论文组织:

- 第一节: 引言。

这一部分系统性地阐述了研究背景与问题动机, 指出了线性逆问题在多个领域的重要性, 分析了传统 **ISTA** 方法的不足, 并明确了提出 **FISTA** 的必要性和意义。

- 第二节:理论分析基础。

这一节回顾了基于梯度的优化方法(如梯度下降、近端梯度等)的基础结论,为后续分析 ISTA 和 FISTA 提供工具。

- 第三节:ISTA 的全局收敛速率证明这一节专注于分析 ISTA 算法的收敛性能,通过理论证明 ISTA 的全局收敛速率上界为 $O(1/k)$,指出了潜在的改进方向,为后续 FISTA 的改进提供对比基准。

- 第四节:提出 FISTA 算法并分析其收敛性。

这一节详细介绍了 FISTA 的算法框架,阐述了其设计思想,并通过严谨的数学证明,展示了 FISTA 在目标函数值意义下能达到 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率,显著优于 ISTA。

- 第五节:数值实验。

这一节通过一系列数值实验,特别是在图像去模糊任务上的应用,验证了 FISTA 的实际性能。实验结果显示, FISTA 在收敛速度和恢复质量上均优于 ISTA 和同期提出的 TWIST,证明了其在实际问题中的有效性。

记号使用:

- 两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 的内积定义为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 。
- 矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值记为 $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 。
- $\|\mathbf{x}\|$ 表示向量 \mathbf{x} 的欧几里得范数。
- 矩阵 \mathbf{A} 的谱范数定义记为 $\|\mathbf{A}\|$ 。

2 相关工作

在本篇论文发表的前一段时间,有许多其他研究者也在致力于开发能提升 ISTA 性能的替代算法。与这篇论文提出的 FISTA 类似,这些方法不仅基于前一个迭代点,还依赖于先前计算的前两个或更多个迭代点来计算下一个迭代点。其中一条研究路径聚焦于改进 ISTA 本身, [Bioucas-Dias and Figueiredo](#) 提出的 TWIST (两步迭代收缩/阈值) 算法及其单调版本 [1] 在对问题数据和算法参数的某些假设下,能够收敛到形如

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \varphi(\mathbf{x})$$

的目标函数的极小值点, 其中 φ 是凸的非光滑正则项。TWIST 算法在当时已被验证在各类线性逆问题上效率均高于 ISTA。

而另一条尝试对同一类问题的 ISTA 进行加速的研究线路则是由 [2] 提出的。该方法采用序列子空间优化技术进行研究, 通过在一个仿射子空间上最小化函数来生成下一个迭代点, 其中这个仿射子空间由两个或多个先前迭代点和当前梯度张成。这种方法的加速效果已在去噪应用问题的数值实验上得到证实。但是上述这两种方法 [1] 和 [2] 都没有建立起对全局非渐进速率的理论分析。

在这篇论文投稿后, 本篇论文的作者了解到 Nesterov 独立研究了一种加速梯度类方法的多步版本 [3]。该方法与 FISTA 可以被证明在函数值上以 $O(1/k^2)$ 的速率收敛, 但两者在概念和计算上都有所不同。首先, [3] 利用过去迭代的累积历史递归构建一个近似函数序列 $\psi_k(\cdot)$ 来逼近 $F(\cdot)$, 而 FISTA 则仅需要使用一个常规的投影类步骤。其次, [3] 的方法需要在每次迭代中需要计算两次投影类操作, 而 FISTA 每次迭代只需计算一次, 在计算效率上更具优势, 因此 FISTA 给出的方法相较于 [3] 是完全不同的。

3 方法描述

在本节中, 算法可以表述如下算法 1 所示。

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede

Algorithm. 1 计算 $y = x^n$

Require: $n \geq 0 \vee x \neq 0$

Ensure: $y = x^n$

$y \leftarrow 1$

if $n < 0$ then

$X \leftarrow 1/x$

$N \leftarrow -n$

else

$X \leftarrow x$

$N \leftarrow n$

end if

while $N \neq 0$ do

if N is even then

$X \leftarrow X \times X$

$N \leftarrow N/2$

else { N is odd}

$y \leftarrow y \times X$

$N \leftarrow N - 1$

end if

end while

ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada,

diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

4 理论结果

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Definition 1 (规范数). 如果 $x \in (0, 1)$, 则称 x 为规范数。

Lemma 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则存在单调函数 $\mathcal{G}(x)$ 有 $\mathcal{G}(x) \geq f(x)$ 。

根据引理1可以得到我们给出如下定理。

Theorem 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则有 $f(x) \geq f(y) + (x - y)^T \nabla \mathcal{G}(x)$ 当且仅当 $f(\cdot)$ 是凸函数。

根据定理1可以得到如下推论。

Corollary 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则有 $f(x)$ 是单调函数。

Proof. 引理证明如下。 □

Example 1. $f(x) = ax + b$, 其中 $a > 0$ 。

Remark 1. $f(x)$ 是单调函数。

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Cras dapibus, augue quis scelerisque ultricies, felis dolor placerat sem, id porta velit odio eu elit. Aenean interdum nibh sed wisi. Praesent sollicitudin vulputate dui. Praesent iaculis viverra augue. Quisque in libero. Aenean gravida lorem vitae sem ullamcorper cursus. Nunc adipiscing rutrum ante. Nunc ipsum massa, faucibus sit amet, viverra vel, elementum semper, orci. Cras eros sem, vulputate et, tincidunt id, ultrices eget, magna. Nulla varius ornare odio. Donec accumsan mauris sit amet augue. Sed ligula lacus, laoreet non, aliquam sit amet, iaculis tempor, lorem. Suspendisse eros. Nam porta, leo sed congue tempor, felis est ultrices eros, id mattis velit felis non metus. Curabitur vitae elit non mauris varius pretium. Aenean lacus sem, tincidunt ut, consequat quis, porta vitae, turpis. Nullam laoreet fermentum urna. Proin iaculis lectus.

4.1 收敛率相关理论结果

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

4.1.1 光滑函数

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

4.1.2 非光滑函数

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consetetur mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

4.2 其他重要理论结果

Nulla malesuada risus ut urna. Aenean pretium velit sit amet metus. Duis iaculis. In hac habitasse platea dictumst. Nullam molestie turpis eget nisl. Duis a massa id pede dapibus ultricies. Sed eu leo. In at mauris sit amet tortor bibendum varius. Phasellus justo risus, posuere in, sagittis ac, varius vel, tortor. Quisque id enim. Phasellus consequat, libero pretium nonummy fringilla, tortor lacus vestibulum nunc, ut rhoncus ligula neque id justo. Nullam accumsan euismod nunc. Proin vitae ipsum ac metus dictum tempus. Nam ut wisi. Quisque tortor felis, interdum ac, sodales a, semper a, sem. Curabitur in velit sit amet dui tristique sodales. Vivamus mauris pede, lacinia eget, pellentesque quis, scelerisque eu, est. Aliquam risus. Quisque bibendum pede eu dolor.

4.2.1 光滑函数

Nullam eleifend justo in nisl. In hac habitasse platea dictumst. Morbi nonummy. Aliquam ut felis. In velit leo, dictum vitae, posuere id, vulputate nec, ante. Maecenas vitae pede nec dui dignissim suscipit. Morbi magna. Vestibulum id purus eget velit laoreet laoreet. Praesent sed leo vel nibh convallis blandit. Ut rutrum. Donec nibh. Donec interdum. Fusce sed pede sit amet elit rhoncus ultrices. Nullam at enim vitae pede vehicula iaculis.

4.2.2 非光滑函数

Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Aenean nonummy turpis id odio. Integer euismod imperdiet turpis. Ut nec leo nec diam imperdiet lacinia. Etiam eget lacus eget mi ultricies posuere. In placerat tristique tortor. Sed porta vestibulum metus. Nulla iaculis sollicitudin pede. Fusce luctus tellus in dolor. Curabitur auctor velit a sem. Morbi sapien. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Donec adipiscing urna vehicula nunc. Sed ornare leo in leo. In rhoncus leo ut dui. Aenean dolor quam, volutpat nec, fringilla id, consectetur vel, pede.

5 应用意义

阐述上述理论有哪些应用,可以列举使用了上述理论的论文、专利、软硬件产品等。

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet. Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor

eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

Nulla non mauris vitae wisi posuere convallis. Sed eu nulla nec eros scelerisque pharetra. Nullam varius. Etiam dignissim elementum metus. Vestibulum faucibus, metus sit amet mattis rhoncus, sapien dui laoreet odio, nec ultricies nibh augue a enim. Fusce in ligula. Quisque at magna et nulla commodo consequat. Proin accumsan imperdiet sem. Nunc porta. Donec feugiat mi at justo. Phasellus facilisis ipsum quis ante. In ac elit eget ipsum pharetra faucibus. Maecenas viverra nulla in massa.

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam. Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetur quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue.

Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit. Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

Maecenas non massa. Vestibulum pharetra nulla at lorem. Duis quis quam id lacus dapibus interdum. Nulla lorem. Donec ut ante quis dolor bibendum condimentum. Etiam egestas tortor vitae lacus. Praesent cursus. Mauris bibendum pede at elit. Morbi et felis a lectus interdum facilisis. Sed suscipit gravida turpis. Nulla at lectus. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Praesent nonummy luctus nibh. Proin turpis nunc, congue eu, egestas ut, fringilla at, tellus. In hac habitasse platea dictumst.

6 实验

请描述清楚实验的基本设置,例如:用何种数据集? 参数是如何设定的? 实验结果数据的来源(是自己做的实验还是引自他人的结果,如果是他人完成的实验,要注明参考文献)。建议要有实验的基本分析。实验的图的例子可参考图1。

Vivamus eu tellus sed tellus consequat suscipit. Nam orci orci, malesuada id, gravida nec, ultricies vitae, erat. Donec risus turpis, luctus sit amet, interdum quis, porta sed, ipsum. Suspendisse condimentum, tortor at egestas posuere, neque metus tempor orci, et tincidunt urna nunc a purus. Sed facilisis blandit tellus. Nunc risus sem, suscipit nec, eleifend quis, cursus quis, libero. Curabitur et dolor. Sed vitae sem. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient

montes, nascetur ridiculus mus. Maecenas ante. Duis ullamcorper enim. Donec tristique enim eu leo. Nullam molestie elit eu dolor. Nullam bibendum, turpis vitae tristique gravida, quam sapien tempor lectus, quis pretium tellus purus ac quam. Nulla facilisi.

Duis aliquet dui in est. Donec eget est. Nunc lectus odio, varius at, fermentum in, accumsan non, enim. Aliquam erat volutpat. Proin sit amet nulla ut eros consectetur cursus. Phasellus dapibus aliquam justo. Nunc laoreet. Donec consequat placerat magna. Duis pretium tincidunt justo. Sed sollicitudin vestibulum quam. Nam quis ligula. Vivamus at metus. Etiam imperdiet imperdiet pede. Aenean turpis. Fusce augue velit, scelerisque sollicitudin, dictum vitae, tempor et, pede. Donec wisi sapien, feugiat in, fermentum ut, sollicitudin adipiscing, metus. Donec vel nibh ut felis consectetur laoreet. Donec pede. Sed id quam id wisi

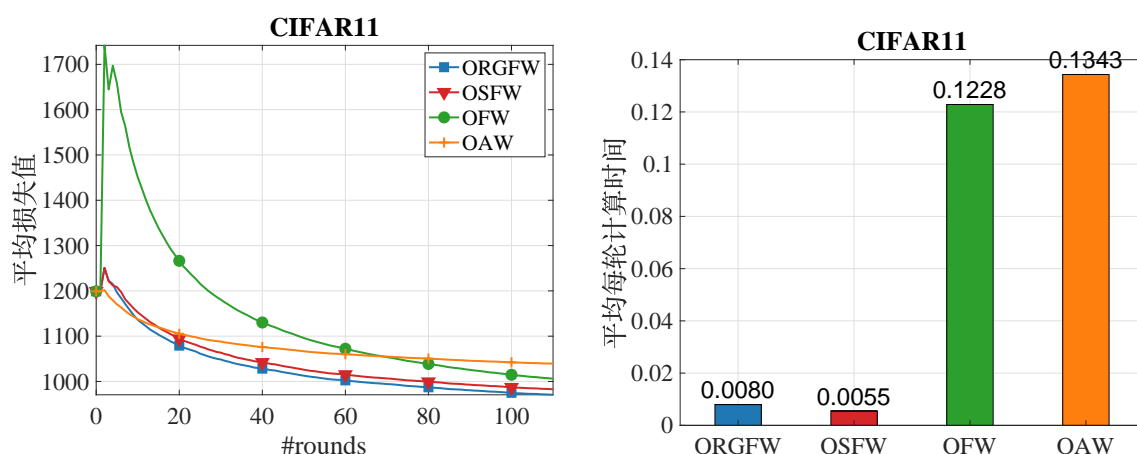


Fig. 1: 在线多分类 Logistic 回归任务的实验结果。左边曲线图的横轴表示轮数, 纵轴表示平均的损失函数值。右边的柱状图展示了每个算法平均每轮的计算时间。

laoreet suscipit. Nulla lectus dolor, aliquam ac, fringilla eget, mollis ut, orci. In pellentesque justo in ligula. Maecenas turpis. Donec eleifend leo at felis tincidunt consequat. Aenean turpis metus, malesuada sed, condimentum sit amet, auctor a, wisi. Pellentesque sapien elit, bibendum ac, posuere et, congue eu, felis. Vestibulum mattis libero quis metus scelerisque ultrices. Sed purus.

7 总结

Donec molestie, magna ut luctus ultrices, tellus arcu nonummy velit, sit amet pulvinar elit justo et mauris. In pede. Maecenas euismod elit eu erat. Aliquam

augue wisi, facilisis congue, suscipit in, adipiscing et, ante. In justo. Cras lobortis neque ac ipsum. Nunc fermentum massa at ante. Donec orci tortor, egestas sit amet, ultrices eget, venenatis eget, mi. Maecenas vehicula leo semper est. Mauris vel metus. Aliquam erat volutpat. In rhoncus sapien ac tellus. Pellentesque ligula.

Reference

- [1] BIOUCAS-DIAS J, FIGUEIREDO M. A new twist: Two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(12):2992-3004.
- [2] ELAD M, MATALON B, ZIBULEVSKY M. Subspace optimization methods for linear least squares with non-quadratic regularization[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(3):346-367.
- [3] NESTEROV Y E. Gradient methods for minimizing composite objective function[R]. CORE, 2007.