

编号：2020-3-109315041

级别：公开

优化基本理论与方法课程研究报告

Beck2009fast: A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems

(2025 年 12 月)

李文耀 (3231012302)

施兴睿 (3230102392)

浙江大学计算机科学与技术学院

Contents

1	论文概述	1
1.1	论文研究的问题背景	1
1.2	论文的贡献	2
1.3	论文组织	2
2	相关工作	3
3	方法描述	4
3.1	固定步长策略	4
3.2	自适应步长策略	5
4	论文的实验结果	5
4.1	实验设置与控制变量	5
4.2	Cameraman 图像去模糊	6
4.3	Simple Test Image 图像去模糊	7
4.4	无噪声情况下的收敛精度极限测试	9
5	论文的结论	11
5.1	理论结果	11
5.2	实验结果	12
6	附录	12
7	论文存在的问题	12
8	围绕这篇论文可以开展哪些可行的研究	12

Abstract

本文针对信号与图像处理中的线性逆问题,研究了一类基于迭代收缩阈值(ISTA)的求解算法。传统 ISTA 方法结构简单、易于实现,适用于大规模甚至稠密矩阵问题,但其收敛速度较慢,仅具有次线性全局收敛速率 $O(1/k)$,限制了在实际高维问题中的应用效率。为此,论文作者提出了一种快速迭代收缩阈值算法(FISTA)。该算法在保留 ISTA 计算简洁性的基础上,通过引入一个由历史迭代点精心构造的辅助更新项,显著提升了收敛性能。理论分析表明,FISTA 在目标函数值意义上具有 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率,较传统 ISTA 有了质的飞跃。此外,论文还将 FISTA 推广至更一般的非光滑复合优化问题,即目标函数包含光滑凸项与非光滑凸正则项。数值实验以基于小波正则化的图像去模糊为例,对比了 ISTA、FISTA 以及同期提出的 TWIST 算法。实验结果表明,FISTA 在恢复质量和收敛速度上均显著优于 ISTA,且往往在迭代次数上领先数个数量级,验证了其实际有效性。

1 论文概述

1.1 论文研究的问题背景

线性逆问题广泛存在于天体物理学、信号与图像处理、统计推断和光学等多个学科领域, 其核心任务是从受噪声污染的观测数据中恢复原始信号或图像。在这类问题中, 观测数据通常可建模为一个离散线性系统

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{w}$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是已知的线性算子矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 是待估计的原始信号, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 是观测数据, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ 是加性噪声。由于实际应用中常常存在测量误差和噪声, 直接求解该线性系统往往会导致不稳定或不准确的结果。因此, 如何有效地解决线性逆问题成为了一个重要的研究课题。求解问题的目标可以被形式化为一个最小二乘 (least squares) 与稀疏正则化相结合的优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1\}$$

尽管 l_1 正则化问题可转化为二阶锥规划并利用内点法求解, 但在大规模问题中, \mathbf{A} 通常是稠密矩阵, 导致内点法在计算和存储方面的开销过大, 难以满足实际应用中的实时性需求。而在本篇论文发表时, 代收缩阈值算法 (Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm, ISTA) 常被使用来求解该类问题。

具体而言, ISTA 的一般步骤为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{T}_{\lambda t} (\mathbf{x}_k - 2t\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}))$$

其中 t 是适当的步长, $\mathcal{T}_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是收缩阈值算子, 定义为:

$$\mathcal{T}_\alpha(\mathbf{x})_i = (|x_i| - \alpha)_+ \cdot \text{sign}(x_i)$$

其中 $(z)_+ = \max(z, 0)$, 下标 i 表示向量的第 i 个分量。

然而尽管 ISTA 结构简单、易于实现, 但其收敛速度较慢, 通常仅具有 $O(1/k)$ 的次线性全局收敛速率, 这在处理大规模实际问题时效率较低。在本篇论文发表前, 就已经有研究者在数学上证明了 ISTA 生成的序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 在某些关于算子 \mathbf{A} 的病态条件下可能具有极慢并且任意差的渐进收敛速率。因此, 如何加速 ISTA 的收敛速度成为了一个重要的研究方向。本文正是在此背景下, 针对 l_1 正则化线性逆问题, 提出了一种快速迭代收缩阈值算法 (FISTA), 旨在显著提升收敛效率, 同时适用于更一般的非光滑复合优化问题。

1.2 论文的贡献

本文的核心贡献是提出了一种名为 **FISTA**(Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm)的新算法,该算法在保持 **ISTA** 计算简单性的同时,显著提高了全局收敛速度,并从理论和实验两方面验证了其优越性。具体贡献包括以下几个方面:

1. 理论层面:完成了 **ISTA** 算法的收敛性证明,提出快速迭代收缩阈值算法(**FISTA**)并完成收敛性证明。

针对 **ISTA** 的慢收敛缺陷,本篇论文结合了 **Nesterov** 的加速思想与近端操作的适配性设计,构建了 **FISTA** 算法框架,还证明了 **ISTA** 的全局收敛速度为 $O(1/k)$,而 **FISTA** 则达到了 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率,显著优于 **ISTA**。这一改进是通过引入一个由历史迭代点精心构造的辅助更新点 \mathbf{y}_k 实现的,该点由前两步迭代结果的线性组合生成,形式上为

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{t_k}{t_{k+1}}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$$

其中 t_k 按特定递归更新。这不仅降低了迭代次数的理论复杂度,还为算法在实际场景中的加速效果提供了数学保证。

同时,这篇论文中给出的理论分析具有通用性,可处理包含任意凸非光滑正则项和任意光滑凸函数的目标函数,不局限于 l_1 正则化和最小二乘损失,这使得 **FISTA** 能够广泛应用于各种实际问题。

2. 实验层面:通过图像去模糊任务验证 **FISTA** 的性能优势。

这篇论文通过在基于小波的图像去模糊问题上对比 **ISTA**、**FISTA** 以及当时最新的 **TWIST** 算法,实验表明 **FISTA** 在收敛速度上显著优于 **ISTA**,性能较 **ISTA** 提升数个数量级。在无噪声的简单测试图像恢复实验中, **FISTA** 仅用几百次迭代即可达到 **ISTA** 和 **TWIST** 需上万次迭代才能接近的精度。

1.3 论文组织

1.3.1 章节结构

- 第一节:引言。

这一部分系统性地阐述了研究背景与问题动机,指出了线性逆问题在多个领域的重要性,分析了传统 **ISTA** 方法的不足,并明确了提出 **FISTA** 的必要性和意义。

- 第二节: 理论分析基础。

这一张回顾了基于梯度的优化方法(如梯度下降、近端梯度等)的基础结论, 为后续分析 ISTA 和 FISTA 提供工具。

- 第三节: ISTA 的全局收敛速率证明这一张专注于分析 ISTA 算法的收敛性能, 通过理论证明 ISTA 的全局收敛速率上界为 $O(1/k)$, 指出了潜在的改进方向, 为后续 FISTA 的改进提供对比基准。

- 第四节: 提出 FISTA 算法并分析其收敛性。

这一节详细介绍了 FISTA 的算法框架, 阐述了其设计思想, 并通过严谨的数学证明, 展示了 FISTA 在目标函数值意义下能达到 $O(1/k^2)$ 的全局收敛速率, 显著优于 ISTA。

- 第五节: 数值实验。

这一节通过一系列数值实验, 特别是在图像去模糊任务上的应用, 验证了 FISTA 的实际性能。实验结果显示, FISTA 在收敛速度和恢复质量上均优于 ISTA 和同期提出的 TWIST, 证明了其在实际问题中的有效性。

1.3.2 记号使用

- 两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 的内积定义为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 。
- 矩阵 \mathbf{A} 的最大特征值记为 $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 。
- $\|\mathbf{x}\|$ 表示向量 \mathbf{x} 的欧几里得范数。
- 矩阵 \mathbf{A} 的谱范数定义记为 $\|\mathbf{A}\|$ 。

2 相关工作

在本篇论文发表的前一段时间, 有许多其他研究者也在致力于开发能提升 ISTA 性能的替代算法。与这篇论文提出的 FISTA 类似, 这些方法不仅基于前一个迭代点, 还依赖于先前计算的前两个或更多个迭代点来计算下一个迭代点。其中一条研究路径聚焦于改进 ISTA 本身, [Bioucas-Dias and Figueiredo](#) 提出的 TWIST (两步迭代收缩/阈值) 算法及其单调版本 [1] 在对问题数据和算法参数的某些假设下, 能够收敛到形如

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \varphi(\mathbf{x})$$

的目标函数的极小值点，其中 φ 是凸的非光滑正则项。**TWIST** 算法在当时已被验证在各类线性逆问题上效率均高于 **ISTA**。

而另一条尝试对同一类问题的 **ISTA** 进行加速的研究线路则是由 [2] 提出的。该方法采用序列子空间优化技术进行研究，通过在一个仿射子空间上最小化函数来生成下一个迭代点，其中这个仿射子空间由两个或多个先前迭代点和当前梯度张成。这种方法的加速效果已在去噪应用问题的数值实验上得到证实。但是上述这两种方法 [1] 和 [2] 都没有建立起对全局非渐进速率的理论分析。

在这篇论文投稿后，本篇论文的作者了解到 **Nesterov** 独立研究了一种加速梯度类方法的多步版本 [3]。该方法与 **FISTA** 可以被证明在函数值上以 $O(1/k^2)$ 的速率收敛，但两者在概念和计算上都有所不同。首先，[3] 利用过去迭代的累积历史递归构建一个近似函数序列 $\psi_k(\cdot)$ 来逼近 $F(\cdot)$ ，而 **FISTA** 则仅需要使用一个常规的投影类步骤。其次，[3] 的方法需要在每次迭代中需要计算两次投影类操作，而 **FISTA** 每次迭代只需计算一次，在计算效率上更具优势，因此 **FISTA** 给出的方法相较于 [3] 是完全不同的。

3 方法描述

我们的目标是：

$$\min_x \{ \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 \}$$

不妨令我们要求函数最小值： $F(x) = \min_x \{ \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|_1 \}$

拆开为 $f(x) = \|Ax - b\|^2$ 和 $g(x) = \lambda \|x\|_1$

$$Q_L(x, y) := f(y) + \langle x - y, \nabla f(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + g(x),$$

$$p_L(y) = \operatorname{argmin}_x \left\{ g(x) + \frac{L}{2} \left\| x - \left(y - \frac{1}{L} \nabla f(y) \right) \right\|^2 \right\}$$

3.1 固定步长策略

已知 f 的梯度 **Lipschitz** 常数 $L = L(f)$ ，即满足

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y.$$

Algorithm. 1 FISTA with constant stepsize

Require: Lipschitz constant $L = L(f)$, initial point x_0
Ensure: Sequence $\{x_k\}$ converging to solution of $\min f(x) + g(x)$

Set $y_1 \leftarrow x_0, t_1 \leftarrow 1$
for $k = 1, 2, \dots$ do

- Compute $x_k \leftarrow \arg \min_x \left\{ g(x) + \frac{L}{2} \|x - (y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k))\|^2 \right\}$
- Update $t_{k+1} \leftarrow \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$
- Update $y_{k+1} \leftarrow x_k + \frac{t_k-1}{t_{k+1}}(x_k - x_{k-1})$

end for

3.2 自适应步长策略

当 $L(f)$ 未知或难以计算时, 采用自适应步长策略。从一个初始猜测 $L_0 > 0$ 开始, 逐步增大步长(即减小实际步长 $1/L$), 直到满足下降条件:

$$F(p_L(y_k)) \leq Q_L(p_L(y_k), y_k)$$

Algorithm. 2 FISTA with backtracking

Require: Initial point x_0 , initial stepsize estimate $L_0 > 0, \eta > 1$
Ensure: Sequence $\{x_k\}$ converging to solution

Set $y_1 \leftarrow x_0, t_1 \leftarrow 1, L \leftarrow L_0$
for $k = 1, 2, \dots$ do

- repeat
- $L \leftarrow \eta L$
- $x_{\text{temp}} \leftarrow \arg \min_x \left\{ g(x) + \frac{L}{2} \|x - (y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k))\|^2 \right\}$
- Evaluate $Q \leftarrow f(y_k) + \langle x_{\text{temp}} - y_k, \nabla f(y_k) \rangle + \frac{L}{2} \|x_{\text{temp}} - y_k\|^2 + g(x_{\text{temp}})$
- until $f(x_{\text{temp}}) + g(x_{\text{temp}}) \leq Q$
- Set $x_k \leftarrow x_{\text{temp}}, L_k \leftarrow L$
- Update $t_{k+1} \leftarrow \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}$
- Update $y_{k+1} \leftarrow x_k + \frac{t_k-1}{t_{k+1}}(x_k - x_{k-1})$

end for

4 论文的实验结果

4.1 实验设置与控制变量

4.1.1 问题模型

所有实验都针对用 L1 正则化在小波域中对模糊图像进行去模糊。具体形式为优化问题 $\min_x F(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda\|x\|_1$ 。其中 $A = RW, R$ 是模糊算子矩阵, W 是逆小波变换矩阵。 b 是已知的观测到的模糊图像。 x 是我们要求解的小波域稀疏系数。 $\lambda > 0$ 控制正则化强度

每张图片都被展开为一个一维的 $[0, 1]^{h \times w}$ 向量, 其中 h 和 w 分别是图像的高度和宽度, 每个像素被归一化到 $[0, 1]$ 区间。

4.1.2 算力

所有对比算法(ISTA, FISTA, MTWIST)在每一步迭代中的计算量都是相同的: 一次 A 和 A^T 的矩阵-向量乘法, 以及一次对小波系数的软阈值操作。

4.1.3 步长策略

所有方法均使用恒定步长, 步长设置为 $\frac{1}{L(f)}$, 其中 $L(f)$ 是光滑项 $f(x) = \|Ax - b\|^2$ 的梯度 Lipschitz 常数。

4.1.4 迭代起点

在所有实验中, 算法的初始解 \mathbf{x}_0 都被设为生成的模糊图像表示的向量。

4.1.5 边界条件

所有实验均假设反射(Neumann boundary conditions), 在图像边界之外的像素值, 通过对边界附近的已有像素进行镜像反射来定义。

4.1.6 评估指标

主要的量化评估指标是目标函数值 $F(\mathbf{x}_k)$, 即 $\|Ax_k - b\|^2 + \lambda\|\mathbf{x}_k\|_1$ 在相同迭代次数 k 之下越小越好。

同时也通过相同迭代次数下恢复图像的清晰度进行定性评估。

4.2 Cameraman 图像去模糊

4.2.1 测试数据

标准的 256×256 “摄影师”测试图像。

使用 9×9 高斯模糊核, 标准差为 4, 使用 MATLAB 函数 `imfilter` 与 `fspecial` 实现。

添加零均值、标准差为 10^{-3} 的高斯白噪声。

参数 $\lambda = 2e - 5$ 。

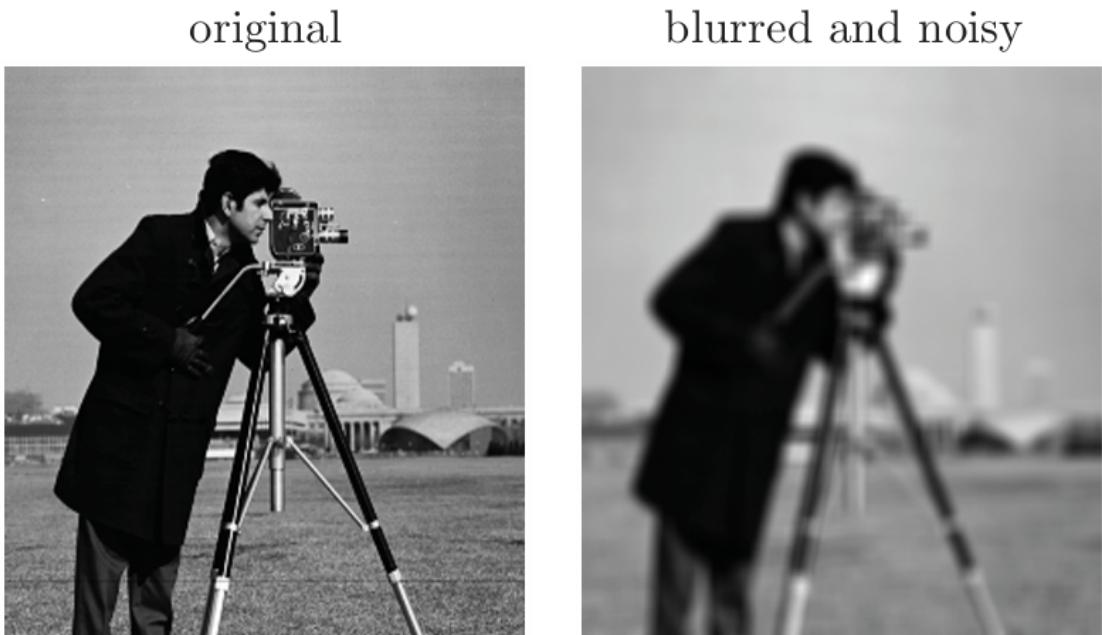


Fig. 1

4.2.2 实验结果

ISTA、MTWIST 和 FISTA 在 100 次和 200 次迭代后的恢复图像及对应的目标函数值 F_{100} 和 F_{200} 。可以发现无论是目标函数大小还是肉眼观察定性分析, FISTA 都优于 ISTA 和 MTWIST。

4.3 Simple Test Image 图像去模糊

4.3.1 测试数据

一个 256×256 的简单测试图像(来自 Hansen 的正则化工具箱)。使用 9×9 高斯模糊核, 标准差为 4, 使用 MATLAB 函数 `imfilter` 与 `fspecial` 实现。添加零均值、标准差为 10^{-3} 的高斯白噪声。

参数 $\lambda = 1e - 4$ 。

4.3.2 实验结果

同样展示了 100 次和 200 次迭代后的结果。

文章还汇报了更多的实验结果:

1. FISTA 迭代 100 次后得到的目标函数值为 0.321, MTWIST 需要迭代 416 次才能达到 FISTA 迭代 100 次时的目标函数值

ISTA: $F_{100} = 5.44\text{e-}1$



ISTA: $F_{200} = 3.60\text{e-}1$



MTWIST: $F_{100} = 3.09\text{e-}1$



MTWIST: $F_{200} = 2.61\text{e-}1$



FISTA: $F_{100} = 2.40\text{e-}1$



FISTA: $F_{200} = 2.28\text{e-}1$



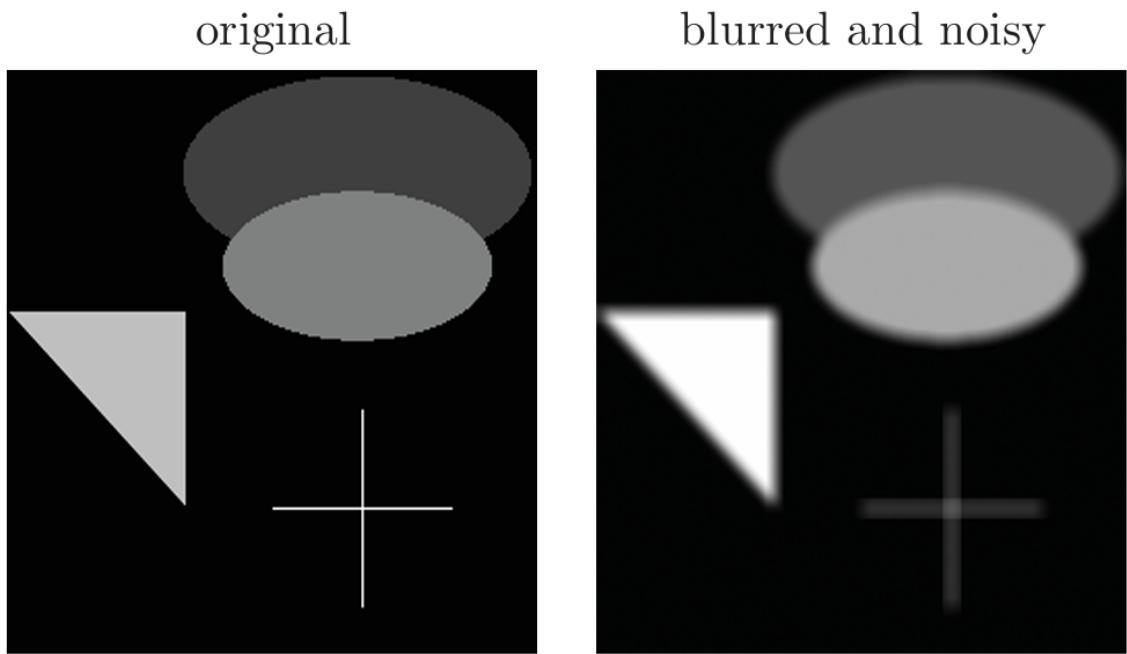


Fig. 3

2. 要达到 FISTA 迭代 200 次时的目标函数值 0.309, MTWIST 则需要迭代 1102 次。
3. ISTA 的目标函数值停滞在 0.323 附近, 而 MTWIST 的目标函数值则停滞在 0.318 附近。

4.4 无噪声情况下的收敛精度极限测试

为了在一个已知最优解的场景下, 严格测试各算法能达到的最终收敛精度。

4.4.1 测试数据

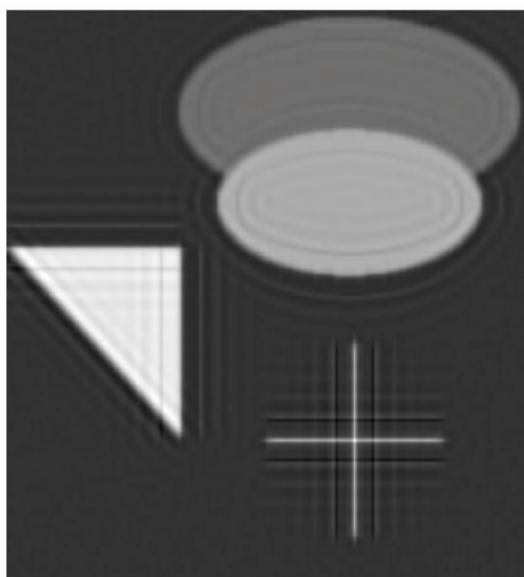
使用一个 64×64 的全零图像作为原始图像。使用 9×9 高斯模糊核, 标准差为 4, 使用 MATLAB 函数 `imfilter` 与 `fspecial` 实现。不添加噪声。

参数 $\lambda = 0$

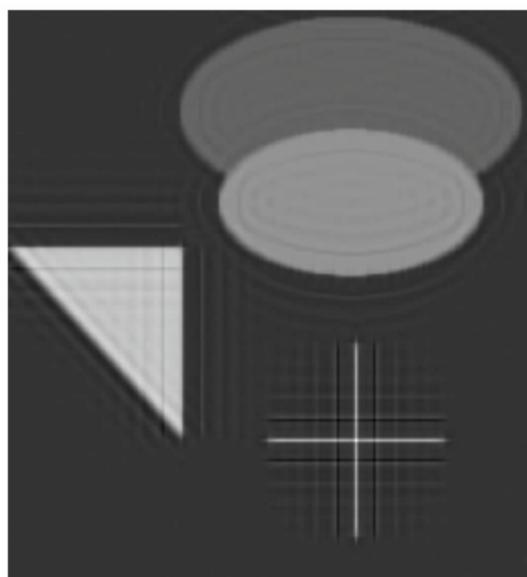
4.4.2 实验结果

绘制了 10000 次迭代过程中, 三种算法的误差 $\log(F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*))$ 曲线。

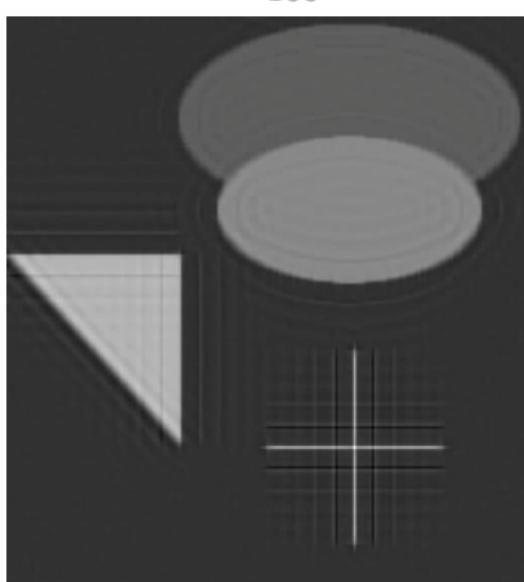
ISTA: $F_{100} = 5.67\text{e-}1$



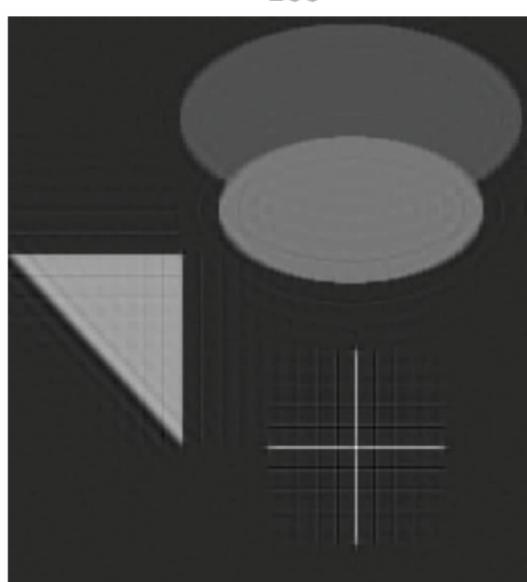
ISTA: $F_{200} = 4.27\text{e-}1$



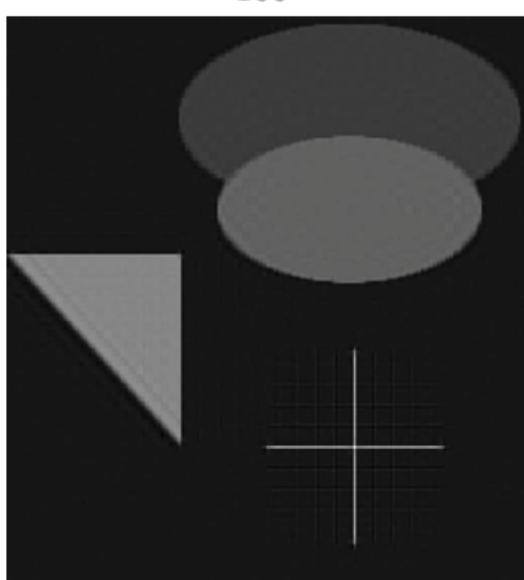
MTWIST: $F_{100} = 3.83\text{e-}1$



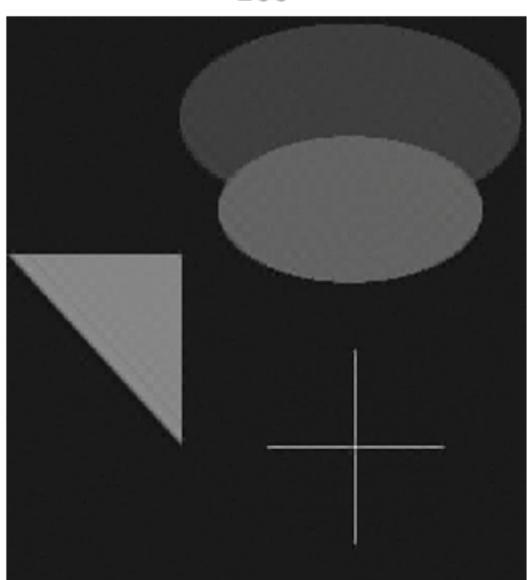
MTWIST: $F_{200} = 3.41\text{e-}1$



FISTA: $F_{100} = 3.21\text{e-}1$



FISTA: $F_{200} = 3.09\text{e-}1$



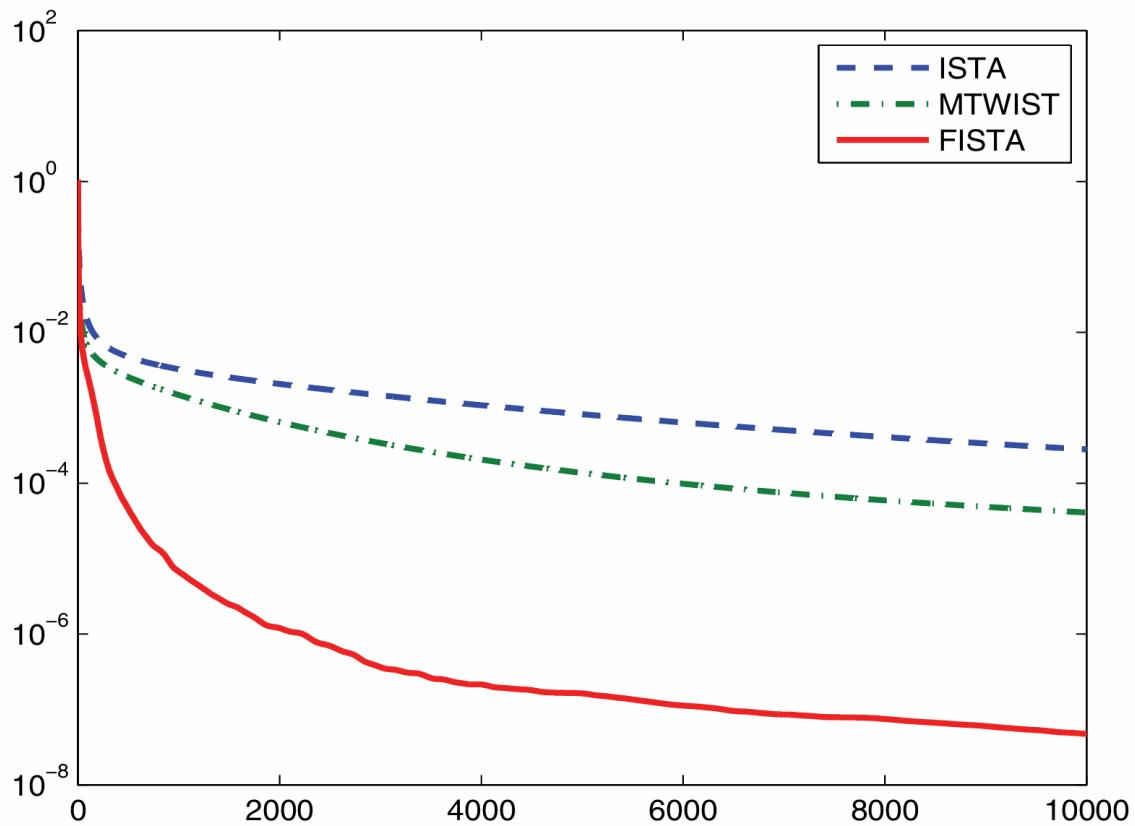


Fig. 5

5 论文的结论

5.1 理论结果

5.1.1 ISTA 的收敛性分析

\mathbf{x}_k 是固定步长或者带回溯准则的 ISTA 算法的迭代解, 则有 $\forall k \geq 1$

$$(3.5) F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{\alpha L(f) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2}{2k} \quad \forall \mathbf{x}^* \in X_*,$$

固定步长时 $\alpha = 1$, 带回溯准则时 $\alpha = \eta$ 。

显然, 因为 $e_k = F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{C}{k}$, 迭代收缩阈值算法(ISTA)的最坏情况复杂度为 $O(1/k)$ 。

5.1.2 FISTA 的收敛性分析

FISTA 算法的迭代解 x_k, y_k , 那么 $\forall k \geq 1$

$$F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{2\alpha L(f) \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2}{(k+1)^2} \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathbf{X}_*,$$

那么不难看出, $e_k = F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) \leq \frac{C}{k^2}$, 改进版的迭代收缩阈值算法 **FISTA**, 复杂度收敛至 $O(1/k^2)$ 。

5.2 实验结果

要达到指定精度, 快速迭代收缩阈值算法(**FISTA**)所需的迭代次数远少于迭代收缩阈值算法(**ISTA**), 性能优势显著。将快速迭代收缩阈值算法(**FISTA**)与单调版 **TWIST** 算法(**MTWIST**)对比, 也可得出类似结论。

同时, **FISTA** 算法收敛到的最佳精度远远高于 **ISTA** 算法和 **MTWIST** 算法。

6 附录

Definition 1 (规范数). 如果 $x \in (0, 1)$, 则称 x 为规范数。

Lemma 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则存在单调函数 $\mathcal{G}(x)$ 有 $\mathcal{G}(x) \geq f(x)$ 。

根据引理1可以得到我们给出如下定理。

Theorem 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则有 $f(x) \geq f(y) + (x - y)^\top \nabla \mathcal{G}(x)$ 当且仅当 $f(\cdot)$ 是凸函数。

根据定理1可以得到如下推论。

Corollary 1. 如果 $x \in [0, 1]$, 则有 $f(x)$ 是单调函数。

Proof. 引理证明如下。 □

Example 1. $f(x) = ax + b$, 其中 $a > 0$ 。

Remark 1. $f(x)$ 是单调函数。

7 论文存在的问题

8 围绕这篇论文可以开展哪些可行的研究

阐述上述理论有哪些应用, 可以列举使用了上述理论的论文、专利、软硬件产品等。

Reference

- [1] BIOUCAS-DIAS J, FIGUEIREDO M. A new twist: Two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(12):2992-3004.
- [2] ELAD M, MATALON B, ZIBULEVSKY M. Subspace optimization methods for linear least squares with non-quadratic regularization[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(3):346-367.
- [3] NESTEROV Y E. Gradient methods for minimizing composite objective function[R]. CORE, 2007.