Fisica 1 per Chimica (Canali A-E ed P-Z)
Esame scritto di Laboratorio/Statistica 18/06/2018
docenti: Francesco Santanastasio, Paolo Gauzzi

Nome:	Cognome:
Matricola	Aula:
Canale:	Docente:

La durata del compito è 3 ore. I cellulari devono essere spenti. Non è possibile consultare libri di testo o appunti personali. È possibile utilizzare una calcolatrice ed il formulario fornito insieme al compito.
Riportare a penna (non matita) sul presente foglio i risultati numerici finali (con unità di misura ed incertezze di misura). Nell'elaborato riportare sia lo svolgimento dettagliato degli esercizi (indicando tutte le formule utilizzate ed i passaggi) che i risultati numerici.

Esercizio 1

Per misurare la costante elastica k di una molla se ne misura la lunghezza ℓ appendendovi oggetti di massa nota M, ottenendo i risultati riportati in tabella. L'incertezza sulla misura delle lunghezze è 0.005 m, quella sulle masse è trascurabile.

M (kg)	ℓ (m)
0.5	0.112
0.8	0.143
1.0	0.167
1.2	0.192

Il comportamento della molla è descritto dalla legge di Hooke:

$$Mg = k(\ell - \ell_0)$$

dove ℓ_0 è la lunghezza della molla a riposo. L'accelerazione di gravità è pari a $g = 9.81$ m/s^2 con incertezza trascurabile.

a) Verificare la relazione lineare tra ℓ ed M utilizzando il metodo dei minini quadrati ed un test del χ^2 con un livello di significatività del 5%.

Chi-quadro ridotto $\tilde{\chi}^2_{mis} =$ ____________________

Probabilità $P(\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}^2_{mis}) =$ ____________________

IPOTESI ACCETTATA □ IPOTESI RIGETTATA □

b) Determinare la migliore stima della costante elastica della molla con la sua incertezza.

$k =$ ____________________

c) Determinare il valore aspettato della lunghezza della molla ℓ_m, e la sua incertezza, quando vi si appende una massa $m = (2.1 \pm 0.2)$ kg

$\ell_m =$ ____________________

Suggerimento: per il punto c) utilizzare la formula di propagazione delle incertezze assumendo che i parametri della relazione lineare, ottenuti con il metodo dei minimi quadrati, siano variabili casuali indipendenti.

Esercizio 2

Per studiare l'eventualità che un campione di roccia sia radioattivo, si pone nelle sue vicinanze un contatore a scintillazione e si osservano 231 conteggi in 10 minuti di misura.
Per misurare la radioattività di fondo ambientale si toglie il campione di roccia e si lascia il contatore in misura per 30 minuti, durante i quali si ottengono 456 conteggi.

a) Determinare il tasso di conteggi al minuto con (R_1) e senza (R_2) il campione di roccia, con le corrispondenti incertezze.

$R_1 =$ ____________________

$R_2 =$ ____________________

b) Qual è la migliore stima del tasso di attività del campione di roccia ? $R_{roccia} =$ ____________________

c) C'è evidenza ("oltre 3 deviazioni standard") che la roccia sia radioattiva ?
SI □ NO □

Esercizio 3

Un'azienda produce barattoli di passata di pomodoro. Una macchina si occupa di riempire i barattoli di passata. La quantità di passata messa in ciascun barattolo può essere regolata ed è una variabile casuale X che segue una distribuzione gaussiana con media μ_X (modificabile attraverso le impostazioni della macchina) e deviazione standard fissa $\sigma_X = 25$ g.

a) Determinare il valore μ_X a cui deve essere impostata la macchina affinché solo il 2% dei barattoli riempiti contenga meno di 500 g di passata di pomodoro.

$\mu_X =$ ____________________

La macchina viene quindi impostata al valore μ_X trovato nel punto a) per la produzione. I barattoli vuoti sono di metallo e la loro massa è una variabile casuale Y che segue una distribuzione gaussiana con media 90 g e deviazione standard 8 g. Un ispettore pesa i barattoli pieni di passata di pomodoro e scarta quelli la cui massa totale (barattolo+passata) è inferiore a 590 g.

b) Calcolare la percentuale dei barattoli che viene scartata dall'ispettore.

$p =$ ____________________

c) L'ispettore esegue il controllo di 5 barattoli. Calcolare la probabilità che almeno 4 barattoli superino il controllo.

$p =$ ____________________

Suggerimento: la massa totale di barattolo+passata è una variabile casuale Z=X+Y gaussiana.

-1 punto ogni 3 errori di questo tipo:
- unità di misura non riportate o riportate incorrettamente
- errori di calcolo (procedimento e formule ok ma risultato numerico significativamente sbagliato)

Soluzione Esercizio 1. **(10 punti)**

a) **(4 punti)**
$\ell = \ell_0 + \frac{g}{k}M$ **(1)**
$A = \ell_0$, $B = \frac{g}{k}$
$A = 0.05357 \pm 0.0088$ m **(0.5)**
$B = 0.1142 \pm 0.0097$ m^2/Ns^2 **(0.5)**
$\chi^2_{mis} = \frac{\sum_i(\ell_i - A - BM_i)^2}{\sigma^2_\ell} = 0.32$, con 4 - 2 = 2 gradi di libertà **(1)**
$\tilde{\chi}^2_{mis} = 0.16$
$P(\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}^2_{mis}) > 82\% > \alpha = 5\%$. Ipotesi accettata. **(1)**
b) **(4 punti)**
$\sigma_A = 0.0088$m , $\sigma_B = 0.0097$ m^2/Ns^2 **(1)**
$k = \frac{g}{B}$, $\frac{\sigma_k}{k} = \frac{\sigma_B}{B} = 8.5\%$. **(2)**
Migliore stima: $k = (85.9 \pm 7.3)$ N/m **(1)**
c) **(2 punti)**
$\ell = A + Bm$
$\sigma_\ell = \sqrt{(\frac{\partial \ell}{\partial m}\sigma_m)^2 + (\frac{\partial \ell}{\partial B}\sigma_B)^2 + (\frac{\partial \ell}{\partial A}\sigma_A)^2} = \sqrt{B^2\sigma^2_m + m^2\sigma^2_B + \sigma^2_A} = 0.032$ m **(1)**
$\ell = (0.293 \pm 0.032)$ m **(1)**

Soluzione Esercizio 2. **(10 punti)**

a) **(4 punti)**
$R_1 = \frac{231 \pm \sqrt{231}}{10} = (23.1 \pm 1.5)$ conteggi/min **(2)**
$R_2 = \frac{456 \pm \sqrt{456}}{30} = (15.2 \pm 0.7)$ conteggi/min **(2)**
b) **(4 punti)**
$\sigma_{R_{roccia}} = \sqrt{\sigma^2_{R_1} + \sigma^2_{R_2}} = 1.7$ conteggi/min **(2)**
$R_{roccia} = R_1 - R_2 = (7.9 \pm 1.7)$ conteggi/min **(2)**
c) **(2 punti)**
$t = \frac{|R_{roccia} - 0|}{\sigma_{R_{roccia}}} = 4.65 > 3$. Quindi la roccia è radioattiva. **(2)**

Soluzione Esercizio 3. **(10 punti)**

a) **(4 punti)**
$x_{min} = 500$ g
$P(x < x_{min}) = 50\% - Q(t_{min}) = 2\%$ (dove $Q(t) = \int_{\mu_X}^{\mu_X + t\sigma_X} G_{\mu_X,\sigma_X}(x)dx$) **(1)**
$Q(t_{min}) = 48\%$ da cui $t_{min} = 2.05$ (dalle tabelle di probabilità gaussiana) **(1)**
Essendo $t_{min} = \frac{|x_{min} - \mu_X|}{\sigma_X}$ si ottiene:
$\mu_X = x_{min} + t_{min} \cdot \sigma_X = 551.25$ g **(2)**
b) **(4 punti)**
$Z = X + Y$ gaussiana
$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 641.25$ g **(1)**
$\sigma_Z = \sqrt{\sigma^2_X + \sigma^2_Y} = 26.25$ g **(1)**
$z_{min} = 590$ g
$t_{min} = \frac{|z_{min} - \mu_z|}{\sigma_z} = 1.95$ **(1)**
Probabilità di scartare il barattolo $= P(z < z_{min}) = 50\% - Q(t_{min}) = 2.6\%$ **(1)**
c) **(2 punti)**

Problema binomiale
Successo = il barattolo supera il controllo
Probabilità di successo $= p = 100\% - 2.6\% = 97.4\%$ **(1)**
Numero di prove $N = 5$ (numero di barattoli)
$n =$ numero di successi in N prove segue una distribuzione binomiale $B_{N,p}(n)$.
$B_{N,p}(4) = 0.1170$
$B_{N,p}(5) = 0.8766$
$P(n \geq 4) = B_{N,p}(4) + B_{N,p}(5) = 99.4\%$ **(1)**