

Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường ĐHBKHN
Bài tập tuần 6 môn các mô hình ngẫu nhiên và ứng dụng

Cho xích Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ có không gian trạng thái I . Đặt

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i); n = 0, 1, 2, \dots; i, j \in I$$

là xác suất hệ xuất phát từ i đến j lần đầu tiên tại bước n . Quy ước $f_{ij}^0 = 0; \forall i, j \in I$.

$$f_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

là xác suất hệ xuất phát từ i đến j tại thời điểm hữu hạn nào đó.

$$m_i = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f_{ij}^{(n)}$$
 thời gian trung bình hệ xuất phát từ i và quay trở lại i .

Định lý: Giả sử j là trạng thái hồi quy và chu kỳ $d(j) = 1$

1. Nếu i và j liên thông thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{m_j}; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy dương} \\ 0; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy không} \end{cases}$$

2. Nếu i và j không liên thông thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{m_j}; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy dương} \\ 0; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy không} \end{cases}$$

Định lý: Giả sử j là trạng thái hồi quy và chu kỳ $d(j) \geq 2$

1. Nếu $i \leftrightarrow j$ và $i \in C_r; j \in C_{r+\alpha}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+\alpha)} = \begin{cases} \frac{d}{m_j}; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy dương} \\ 0; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy không} \end{cases}$$

2. Nếu i bất kỳ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+\alpha)} = \begin{cases} \left[\sum_{r=0}^{\infty} f_{ij}^{(rd+\alpha)} \right] \frac{d}{m_j}; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy dương} \\ 0; & \text{nếu } j \text{ là hồi quy không} \end{cases}$$

Câu 1: Xét tính hồi quy của các trạng thái của xích Markov có không gian trạng thái $I = \{0, 1, 2, 3\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Xích Markov có phải là tối giản hay không?

(b) Các trạng thái i có hồi quy hay không?

(c) Tìm số lần trung bình xích trở về trạng thái $i \in I$?

Câu 2: Xét tính hồi quy của các trạng thái của xích Markov có không gian trạng thái $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Xác định phân phối dừng của xích

(b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i2}^{(n)}, \forall i \in I$.

Câu 3: Xét tính hồi quy của các trạng thái của xích Markov có không gian trạng thái $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(a) Tìm chu kỳ, tính hồi quy của các trạng thái

(b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i5}^{(n)}, \forall i \in I$.

Câu 4: Xét tính hồi quy của các trạng thái của xích Markov có không gian trạng thái $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và ma trận xác suất chuyển

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(a) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{10}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{20}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{30}^{(n)}$.

(b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{34}^{(n)}, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{45}^{(n)}$.

Kết thúc