

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ  
(ИПУ РАН)

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
(МФТИ)

В.В. Бреер, Д.А. Новиков, А.Д. Рогаткин

**УПРАВЛЕНИЕ ТОЛПОЙ:  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ПОРОГОВОГО  
КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ**

**Серия: «Умное управление»**

Москва - 2016

БРЕЕР В.В., НОВИКОВ Д.А., РОГАТКИН А.Д. **Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения.** – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 168 с. (Серия «Умное управление»)

ISBN 978-5-9710-3588-6

Сайт проекта «Умное управление» – [www.mtas.ru/about/smartman](http://www.mtas.ru/about/smartman)

Книга посвящена математическим моделям управления толпой, поведение которой описывается как пороговое (конформное) коллективное принятие решений ее элементами.

На основании результатов анализа взаимосвязи между микро- и макромоделями активных сетевых структур рассматриваются статические (детерминированные, стохастические и теоретико-игровые) и динамические (в дискретном и непрерывном времени) модели управления толпой. Значительное внимание уделяется моделям информационного противоборства. Многие результаты применимы не только для задач управления толпой, но и для управления в социальных группах, онлайновых социальных сетях и т.д.

Книга предназначена для научных и практических работников, а также студентов, аспирантов и докторантов, специализирующихся в области моделирования коллективного поведения.

© В.В. Бреер, Д.А. Новиков, А.Д. Рогаткин, 2016

© ЛЕНАНД,  
оформление, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.....	5
2. Модели порогового коллективного поведения.....	8
3. Микро- и макромодели .....	11
3.1. Микромодель .....	12
3.2. Макромодель.....	13
3.3. Модель порогового поведения.....	16
3.4. Идентификация и имитационные эксперименты .....	20
4. Детерминированные модели управления толпой.....	38
4.1. Пороговая модель поведения толпы.....	39
4.2. Управление порогами .....	42
4.3. Управление репутацией.....	50
4.4. Рефлексивное управление .....	51
5. Стохастические модели управления толпой .....	53
5.1. Управление «возбуждением» толпы .....	54
5.2. Управление «иммунизацией» толпы .....	58
5.3. Информационное противоборство .....	60
6. Теоретико-игровые модели управления толпой.....	76
6.1. Задача централизованного управления .....	78
6.2. Задачи децентрализованного управления .....	81
7. Динамические модели управления толпой (дискретное время) ...	92
7.1. Постановка задачи управления .....	92
7.2. Модели с ограничением на общее число провокаторов .....	93
7.3. Непрерывные управление.....	95
7.4. Вероятностные модели выявления провокаторов.....	104
8. Динамические модели управления толпой (непрерывное время)	
.....	106
8.1. Множество достижимости и монотонность.....	106

8.2. Постоянные управления .....	112
8.3. Задача возбуждения всей толпы .....	112
8.4. Позиционное управление .....	113
9. Микромодели информационного противоборства.....	117
9.1. Микромодель и информационное управление .....	118
9.2. «Антагонистическая» игра .....	120
9.3. Игра с «непротивоположными» интересами .....	122
9.4. Рефлексивная игра.....	124
9.5. Равновесие в безопасных стратегиях .....	125
10. Макромодели информационного противоборства .....	127
10.1. Модель информационного противоборства .....	127
10.2. Игра в нормальной форме .....	128
10.3. Пороговые функции выигрыша .....	132
10.4. Иерархическая игра.....	137
10.5. Рефлексивная игра.....	140
11. Модели самовозбуждения толпы.....	143
Заключение.....	153
Литература .....	156

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Толковый словарь русского языка С.И. Ожегова определяет *толпу* как «скопление людей, сбоще», словарь В.И. Даля - как «неорганизованное скопление». В английском языке близких по значению терминов больше: *crowd* – скопление людей; *mob* – активное, агрессивное скопление людей; *herd* – стадо; *flock* – скопление однородных животных – стая (животных или рыб); *swarm* - скопление насекомых, рой.

Термин *управление толпой* в научной литературе имеет несколько устойчивых и распространенных значений.

*Управление движением агентов* (достижение цели, избежание столкновений, обход препятствий, сохранение формации и т. д.). Данное направление группового управления активно развивается с начала 2000-х гг. и включает в себя две обширные области – аналитические и имитационные (агентные) модели (см. обзоры *агентных моделей динамики толпы* в [37, 70, 77, 85], хрестоматийным примером являются модели эвакуации из помещений). В каждой из этих областей опубликованы тысячи статей и десятки обзоров. Отдельный аспект – выбор набора мероприятий по «физическим» мерам воздействия на толпу (в целях предотвращения давки, массовых беспорядков и т. д.) – также составляет предмет многочисленных исследований.

*Управление поведением (принятием решений) толпы*. Здесь можно выделить два больших направления – гуманитарные дескриптивные исследования (в рамках социальной психологии, точнее, ее раздела – *психологии толпы* [31, 44, 45, 48, 50, 63, 80, 98, 109]) и математическое моделирование (см., например, краткий обзор [91]). В последнем можно также выделить два основных направления.

Первое – модели *команд* (совместного адаптивного принятия решений группами людей на основе информации о неопределенных факторах – см. обзор в книге [55] и [82]).

Второе направление, которому принадлежит и настоящая работа, инициировано ставшими классическими статьей [102] и монографией [117], породившими целую лавину исследований в области математического моделирования т.н. *конформного, порогового поведения* (т.е. принятия агентами решений в зависимости от того, какая доля или число агентов из их окружения уже приняла соответствующее решение) – см. обзоры [5, 6, 40, 69]) и, в частности, пове-

дения толпы. Тем не менее, несмотря на множество работ, посвященных описанию поведения толпы, на сегодня формальные постановки задач управления толпой практически отсутствуют.

Существует несколько оснований классификаций толп. В рамках настоящей работы существенно, что толпа (*mob*) может быть объединена единым объектом внимания, т.е. может рассматриваться как в некотором смысле организованная, а ее члены – люди (*агенты*) – могут предпринимать или не предпринимать определенные действия, т.е., условно говоря, быть активными (*действовать*, например, поддерживать некоторое решение, или принимать участие в беспорядках и т.п.) или пассивными (*бездействовать*). Соответственно, управление толпой это целенаправленное воздействие (как правило, информационное) на нее в целом или на отдельных агентов, осуществляющее с целью обеспечения требуемого их поведения [114]. Если *целью управления* является максимизация или минимизация числа или доли действующих агентов, то именно этот показатель может рассматриваться как одна из важнейших составляющих критерия эффективности управления.

Так как для анализа толпы существенны и активность агентов и коммуникации между ними, то толпу можно рассматривать как частный случай т.н. *активной сетевой структуры* (ACC). Другими частными случаями ACC являются *социальные группы*, онлайновые *социальные сети* и т.д. Т.к. некоторые модели настоящей работы применимы не только для задач управления толпой, но и для более широкого класса ACC, то в соответствующих случаях будем употреблять термин «ACC».

В работах [53, 54] выделены несколько уровней описания и анализа ACC. На первом (нижнем) уровне сеть рассматривается «в целом». Здесь применяются статистические методы, методы семантического анализа и др. Такое агрегированное описание можно условно считать *макромоделью ACC*. На втором уровне с помощью аппарата теории графов анализируются структурные свойства СС. На третьем уровне моделируется информационное взаимодействие отдельных агентов. Соответствующее детализированное описание можно условно считать *микромоделью ACC*. Здесь спектр возможных моделей наиболее широк – марковские модели (в том числе – модели консенсуса), конечные автоматы, модели диффузии инноваций, модели заражения и многие другие (см. обзор в книге [25]). На четвертом уровне с помощью аппарата оптимального управления

или дискретной оптимизации ставятся и решаются задачи управления на третьем и четвертом уровнях оперируют, как правило, микромоделями, отражающими взаимодействие отдельных агентов. И, наконец, на пятом уровне для описания *информационного противоборства* – взаимодействия субъектов, действующих на АСС каждый в своих интересах, как правило, используется аппарат теории игр, в том числе – рефлексивных игр.

Таким образом, на каждом уровне описания АСС имеется большой набор возможных моделей и методов, совокупность которых может рассматриваться как своеобразный конструктор, пользуясь элементами которого исследователь собирает инструмент для решения поставленной перед ним задачи. С одной стороны, возможно адаптированное использование тех или иных известных моделей и методов. С другой стороны, специфика АСС и, в частности, толпы как объекта управления заставляет на каждом уровне разрабатывать и развивать свои специфические методы, учитывающие большую размерность объекта управления, его распределенность и неполную наблюдаемость, наличие многих взаимодействующих объектов и субъектов управления, обладающих различными интересами и т.д.

Разнородность (так называемая *гетерогенность*) описания АСС с точки зрения различных интересующих исследователя аспектов ее рассмотрения [54], с одной стороны, неизбежна как следствие отмеченной выше специфики АСС. С другой стороны, хотелось бы уметь преодолевать проблемы больших данных [51]: в т.ч. абстрагироваться – не теряя существенных деталей, переходить от микромоделей к макромоделям, оперирующими агрегированными характеристиками, и формулировать задачи анализа и управления АСС в терминах макромоделей.

Изложение материала настоящей работы имеет следующую структуру. Во втором разделе кратко рассматриваются модели порогового коллективного поведения, лежащие в основе всех реализованных ниже подходов. Третий раздел посвящен анализу взаимосвязи между микро- и макромоделями АСС и проблемам их идентификации. Четвертый, пятый и шестой разделы содержат статические соответственно детерминированные, стохастические и теоретико-игровые модели управления толпой. Седьмой и восьмой разделы включают динамические модели управления толпой (в дискретном и непрерывном времени), девятый и десятый разделы – микро- и макромодели информационного противоборства. В заключительном

– одиннадцатом – разделе рассматриваются модели «спонтанного» возбуждения толпы. Заключение содержит краткое обсуждение некоторых перспективных направлений текущих и дальнейших исследований.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ № 16-19-10609.

## 2. МОДЕЛИ ПОРОГОВОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Рассмотрим модель активной сетевой структуры (примерами являются *социальная сеть* [25] или *толпа* [11]), включающей нескольких взаимодействующих *агентов*. Каждый агент может находиться в одном из двух *состояний* (принимать одно из двух решений): «1» (*действовать*, быть в возбужденном состоянии, например, принимать участие в беспорядках) или «0» (*бездействовать*, быть в нормальном, невозбужденном состоянии).

При принятии своего решения каждый агент ведет себя *конформно* – принимает во внимание так называемое *социальное давление* [31, 45, 71], т.е. поведение (наблюдаемое или прогнозируемое) своего окружения: если определенное число (или доля) его «соседей» действует, то и он действует. Минимальное число/доля действующих соседей, при которой «возбуждается» данный агент, называется его *порогом*. Отметим, что существуют также модели *антиконформного* поведения, или поведения, описываемого как «смесь» конформизма и антиконформизма – см. [7].

В многочисленных моделях *порогового коллективного поведения* (см. обзор [5, 6]), являющихся развитием базовой модели М. Грановеттера [102], «равновесное» (в рамках динамики коллективного поведения) состояние толпы определяется *функцией распределения порогов* агентов (альтернативным подходом является, например, принятый в [38, 39]). С точки зрения теоретико-игровых моделей порогового поведения [9], распределение порогов также является ключевой характеристикой, детерминируя множество равновесий Нэша игры агентов.

Используемая в настоящей работе модель близка к агент-ориентированным моделям, таким как модели ограниченного окру-

жения (bounded-neighborhood model) и модели пространственного соседства (spatial proximity model) Т. Шеллинга [117].

Имея зависимость равновесного состояния системы (социальной сети, толпы и т.п.) от функции распределения порогов, можно исследовать задачи управления последними, например, поиска управления, изменяющего пороги агентов и соответственно приводящего систему в требуемое равновесие.

Рассмотрим модель толпы – множество  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  агентов. Агент  $i \in N$  характеризуется, во-первых, своим *влиянием*  $t_{ji} \geq 0$  на агента  $j$  – тем «весом», с которым к его мнению прислушивается (или его действия учитывает) последний. Будем считать, что для каждого агента  $j$  выполнены следующие условия нормировки:  $\sum_{i \neq j} t_{ji} = 1$ ,  $t_{ii} = 0$ . Во-вторых, агент характеризуется своим *решением*  $x_i \in \{0; 1\}$ . В-третьих – своим *порогом*  $\theta_i \in [0; 1]$ , определяющим, будет ли агент действовать при той или иной *обстановке* (векторе  $\bar{x}_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  решений всех остальных агентов, кроме  $i$ -го). Формально действие  $x_i$   $i$ -го агента определим как *наилучший ответ* (BR – best response) на сложившуюся обстановку (в настоящей работе принята независимая внутри разделов нумерация формул; при ссылке на формулу другого раздела используется двойная нумерация, включающая сначала номер последнего):

$$(1) x_i = BR_i(\bar{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j \neq i} t_{ij} x_j \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } \sum_{j \neq i} t_{ij} x_j < \theta_i. \end{cases}$$

Поведение, описываемое данным выражением, называется *пороговым* – см. обзор [5, 6]. *Равновесием Нэша* будет вектор  $\bar{x}_N$  действий агентов, такой что  $\bar{x}_N = BR(\bar{x}_N)$ , где

$$BR(\bar{x}_N) = (BR_1(\bar{x}_{-1}), \dots, BR_n(\bar{x}_{-n})).$$

Рассмотрим приведенную в [11] модель динамики коллективного поведения: в начальный (нулевой) момент дискретного времени все агенты бездействуют, далее в каждый из последующих моментов времени агенты одновременно и независимо действуют в соответствии с процедурой порогового наилучшего ответа (1).

Обозначим

$$(2) Q_0 = \emptyset, Q_1 = \{i \in N \mid \theta_i = 0\},$$

$$Q_k = Q_{k-1} \cup \{i \in N \mid \sum_{j \in Q_{k-1}, j \neq i} t_{ij} \geq \theta_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно, что  $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_n \subseteq N$ . Обозначим через  $T = \{t_{ij}\}$  матрицу влияний агентов, через  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  – вектор их порогов. Вычислим следующий показатель:

$$(3) \quad q(T, \theta) = \min \{k = \overline{0, n-1} \mid Q_{k+1} = Q_k\}.$$

*Равновесие колективного поведения* (РКП) определяют следующим образом [11]:

$$(4) \quad x_i^*(T, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in Q_{q(T, \theta)}, \\ 0, & \text{если } i \in N \setminus Q_{q(T, \theta)}; \end{cases} \quad i \in N.$$

Величина

$$(5) \quad x^* = \frac{\#Q_{q(T, \theta)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} x_i^*(T, \theta)$$

(где  $\#$  обозначает мощность множества) характеризует долю действующих в РКП агентов.

В дальнейшем будем рассматривать, в основном, т.н. *анонимный случай* (когда граф связей между агентами является полным:  $t_{ij} = 1/(n-1)$ ). В анонимном случае выражение (1) примет вид

$$(6) \quad x_i = BR_i(\bar{x}_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} x_j \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} x_j < \theta_i. \end{cases}$$

Обозначим через  $F(\cdot): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  функцию распределения порогов агентов ( $F(\cdot)$  – неубывающая функция, определенная на единичном отрезке, в каждой точке непрерывная слева и имеющая предел справа), через  $\{x_t \in [0; 1]\}_{t \geq 0}$  – последовательность долей действующих агентов (в дискретном времени, где  $t$  обозначает номер момента времени (шага)).

Предположим, что известна доля  $x_k$  агентов, действующих на  $k$ -м шаге ( $k = 0, 1, \dots$ ). Для последующих шагов справедливо следующее рекуррентное соотношение, описывающее динамику доли действующих агентов [5, 6, 10, 102] (данное уравнение в теории конформного колективного поведения иногда называют «уравнением Грановеттера»):

$$(7) \quad x_{l+1} = F(x_l), \quad l = k, k+1, \dots.$$

Положения равновесия системы (7) определяются начальной точкой  $x_0$  (ниже, как правило, считается, что  $x_0 = 0$ ) и точками пересечения графика функции  $F(\cdot)$  с биссектрисой первого квадранта (в силу свойств функции распределения одним из равновесий всегда является единица) [10, 11, 46, 61, 102]:

$$(8) \quad F(x) = x.$$

Устойчивыми могут быть точки равновесия, в которых график функции  $F(\cdot)$  пересекает биссектрису, приближаясь к ней «слева сверху».

Обозначим через  $y = \inf x : x \in [0, 1], F(x) = x$  наименьший отличный от нуля корень уравнения (8). Равновесием коллективного поведения (а также, как показано в [11], равновесием Нэша игры агентов) будет точка

$$(9) \quad x^* = \begin{cases} y, & \text{если } \forall z \in [0, y], F(z) \geq z, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу свойств функции распределения, для того чтобы реализовалось отличное от нуля РКП, достаточно, чтобы было выполнено  $F(0) > 0$ .

Таким образом, при заданном начальном состоянии (доле действующих в нулевой момент времени агентов) поведение динамической системы (7) и ее равновесные состояния определяются свойствами функции распределения порогов агентов. Следовательно, целенаправленное изменение этой функции распределения может рассматриваться как *управление толпой*.

Способы такого управления, которые позволяют изменять равновесные состояния, воздействуя на параметры функции распределения порогов, будут рассмотрены в последующих разделах.

### 3. МИКРО- И МАКРОМОДЕЛИ

В настоящем разделе рассмотрены два подхода к построению и исследованию моделей АСС: макро- и микрописания [4, 12]. В соответствии с первым из них структура связей в сети агрегируется, и поведение агентов рассматривается «в среднем». В рамках второго подхода принимается во внимание структура графа влияний агентов и их индивидуальное принятие решений. Дано сравнение этих двух

подходов на примере пороговой модели коллективного поведения с единственным относительным порогом. Приведены результаты идентификации и имитационного моделирования.

### 3.1. Микромодель

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – множество *агентов*, входящих в АСС, описываемую ориентированным графом  $R = (N, E)$ , где  $E \subseteq N \times N$  – множество дуг. Агенты в сети *влияют* друг на друга – наличие дуги  $(i, j)$  от вершины  $i$  к вершине  $j$  соответствует доверию  $i$ -го агента к  $j$ -му. Обозначим через  $N^{in}(i) = \{j \in N \mid \exists (j; i) \in E\}$  множество «соседей» – агентов, влияющих на  $i$ -го агента, через  $N^{out}(i) = \{j \in N \mid \exists (i; j) \in E\}$  – множество агентов, на которых влияет  $i$ -й агент,  $n^{out}(i) = \# N^{out}(i)$ ,  $n^{in}(i) = \# N^{in}(i)$ , где  $\#$  означает мощность множества.

Степень влияния агентов друг на друга может задаваться матрицей прямого влияния/доверия  $A = \|a_{ij}\|$  размерности  $n \times n$ , где  $a_{ij} \geq 0$  обозначает степень *доверия*  $i$ -го агента  $j$ -му агенту (или, что будем считать эквивалентным, степень влияния  $j$ -го агента на  $i$ -го агента;  $\forall j \notin N^{in}(i) a_{ij} = 0$ ) [26]. Считается, что выполняется *условие нормировки*:  $\forall i \in N \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ .

Если  $i$ -й агент доверяет  $j$ -му, а  $j$ -й доверяет  $k$ -му, то это означает:  $k$ -й агент косвенно влияет на  $i$ -го и т. д., т. е. возможны «цепочки» косвенных (опосредованных) влияний [25].

Предположим, что у каждого агента в начальный момент времени имеется *мнение* по некоторому вопросу. Мнение всех агентов сети отражает вектор-столбец  $\theta^0$  размерности  $n$  действительнозначных неотрицательных начальных мнений. Примерами мнений служат степень готовности действовать, проголосовать за того или иного кандидата, приобрести тот или иной товар и т. д. – классификация и многочисленные примеры мнений приведены в работе [25]. Агенты в АСС взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется под влиянием мнений агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать, что мнение  $i$ -го агента  $\theta_i^k \in \mathbb{R}^1$  в момент времени  $k$  равно [24, 25, 92]

$$(1) \theta_i^k = \sum_{j \in N} a_{ij} \theta_j^{k-1}, k = 1, 2, \dots.$$

Обозначим через  $\theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_n^k)$  состояние АСС в момент времени  $k$ .

Предположим, что *достижим консенсус* – в конечном итоге (при многократном обмене мнениями) мнения агентов сходятся к единому результирующему (*итоговому*) вектору мнений  $\theta = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k$

(необходимые и достаточные условия такой сходимости можно найти в работах [18, 72]). Тогда можно записать соотношение

$$(2) \theta = A^\infty \theta^0,$$

где  $A^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ . Известно (см. ссылки в книге [25]), что, если достижим консенсус, то строки матрицы  $A^\infty$  одинаковы, соответственно, так как вектор  $\theta$  в этом случае будет состоять из одинаковых элементов, будем считать это обозначение скаляром. Обозначим  $i$ -й элемент произвольной строки этой матрицы через  $a_i^\infty$ ,  $i \in N$ .

В качестве «альтернативы» модели (2) для определения зависимости общего итогового мнения агентов от их начальных мнений возможно использование *репутаций* [23, 25, 27] агентов

$$\{r_i \in [0; 1]\}_{i \in N}, \text{ где } \sum_{j=1}^n r_j = 1: \theta = \sum_{j=1}^n r_j \theta_j^0.$$

Для микромодели (1) можно ставить и решать задачи управления, влияя на начальное состояние, коммуникации агентов и т.д. (см. [1, 25, 32, 72, 116]).

Перейдем теперь от микромодели СС, учитывающей попарное взаимодействие агентов, к ее агрегированному описанию в терминах вероятностных распределений (мнений, репутаций и др.).

### 3.2. Макромодель

Для заданного графа  $G$  можно построить эмпирические вероятностные распределения числа входящих и исходящих дуг. Обозначим их соответственно через  $P^{in}(k)$  и  $P^{out}(k)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ .

Зная вектор начальных мнений агентов, можно определить эмпирическую функцию распределения этих мнений:

$$F_{\theta^0}(x) = \frac{1}{n} \#\{i \in N \mid \theta_i^0 \leq x\}.$$

Соответствующее ей вероятностное распределение обозначим  $P_{\theta^0}(x)$ .

*Макромоделью ACC* назовем совокупность  $\{n, P^{in}(k), P^{out}(k), P_{\theta^0}(x)\}$ , причем будем предполагать, что структура СС такова, что достижим консенсус.

Возможны различные способы перехода от микроописания к макрохарактеристикам и наоборот. В частности, по-разному могут определяться влиятельность и репутация агентов. Так, сегодня известны две основные (наиболее распространенные, базовые) модели влияния и распространения («диффузии») активности – информации, мнений и т. п. – в СС: линейная пороговая модель (Linear Threshold Model – LTM) [102] и модель независимых каскадов (Independent Cascade Model – ICM) [100, 105]. В их рамках рассматриваются две ключевые задачи (см. также шестой раздел настоящей работы) – максимизация результирующего влияния (при ограниченном бюджете выбрать начальное множество возбуждаемых агентов, при котором результирующее возбуждение будет максимальным) и раннее обнаружение внешних воздействий (при ограниченном бюджете выбрать размещение в сети «детекторов», минимизирующее результирующее влияние внешних воздействий) [27, 57, 90, 105]. Например, в работе [105], основываясь на результатах анализа субмодулярных функций множеств [112], было показано, что задачи выбора множества первоначально возбуждаемых агентов NP-трудны для обеих моделей, и был предложен жадный эвристический  $(1 - 1/e)$ -оптимальный алгоритм.

Возможно использование одного или нескольких из следующих *предположений*. Первый класс предположений (R.1 – R.3) позволяет, зная граф  $G$ , тем или иным образом определить репутации агентов (иногда также употребляется термин «влиятельность» агентов).

**R.1.** Репутация агента пропорциональна числу агентов, на которых он оказывает влияние, т. е.

$$(3) r_i = \frac{n^{out}(i)}{\sum_{j \in N} n^{out}(j)}, i \in N.$$

**R.2.** Репутация агента в сети, в которой достичим консенсус, определяется тем весом, с которым его начальное мнение входит в итоговое общее мнение, т. е.

$$(4) \quad r_i = a_i^\circ, \quad i \in N.$$

**R.3.** Репутация агента определяется алгоритмом PageRank (см., например, работу [107]), т. е. вектор репутаций удовлетворяет системе уравнений вида

$$(5) \quad r_i = \sum_{j \in N^{\text{in}}(i)} \frac{r_j}{n^{\text{out}}(j)}, \quad i \in N.$$

Отметим, что списки подобных предположений открытые – можно использовать и другие предположения – см., например, [27], обосновывая их соответствие реальным данным и содержательным интерпретациям.

В математическом смысле класс предположений (R.1 – R.3) можно проинтерпретировать следующим образом: репутация (3) пропорциональна степени узла графа  $G$ , а вектор репутаций представляет собой эмпирическое вероятностное распределение степеней вершин графа; вектор репутации (4) – инвариантное распределение влияний агентов; в рамках выражения (5) репутация пропорциональна степени узла графа  $G$  с учетом «опосредованных» влияний.

Второй класс предположений (I.1, I.2) характеризует независимость микропараметров СС в макростатистическом смысле.

**I.1.** Репутация агента не зависит от его мнения и наоборот.

**I.2.** Начальные мнения агентов независимы, и начальное мнение агента  $i$  не зависит от  $N^{\text{in}}(i)$  и  $N^{\text{out}}(i)$ .

Третий класс предположений (A.1 – A.3) позволяет, зная граф  $G$  и/или репутации агентов, находить матрицу  $A$  влияния/доверия.

**A.1.** Агент  $i$  одинаково доверяет всем агентам из множества

$$N^{\text{in}}(i), \quad \text{т. е. } a_{ij} = \frac{1}{n^{\text{in}}(i)}, \quad i \in N, j \in N^{\text{in}}(i).$$

**A.2.** Доверие агента  $i$  агенту  $j \in N^{\text{in}}(i)$  пропорционально репутации последнего, т. е.  $a_{ij} = \sum_{k \in N^{\text{in}}(i)} \frac{r_j}{r_k}, \quad i \in N, j \in N^{\text{in}}(i).$

Таким образом, вводя те или иные предположения об общих свойствах АСС, можно устанавливать количественные связи между их микро- и макромоделями.

В заключение краткого обсуждения макромоделей АСС отметим, что одним из адекватных математических инструментов исследования их структурных и других свойств служит теория *случайных графов* (см., например, обзоры [30, 65, 111], монографии [36, 86] и учебник [94]), создателями которой являются П. Эрдош и А. Ренъи [97]. Этот инструментарий сегодня успешно применяется не только к социальным, но и к телекоммуникационным, информационным, технологическим, биологическим и другим сетям, сетям научного сотрудничества и др. (см. многочисленные примеры в работах [30, 78, 94, 111]).

Если в графе АСС дуга между любой парой вершин существует или отсутствует с одинаковой (для любых пар) вероятностью (это и подобные свойства могут выводиться из моделирования динамики формирования графа – см. работы [78, 95, 96]), то имеем биномиальное (пуассоновское в предельном случае – при большом числе вершин графа) распределение числа инцидентных дуг. Такие графы называются *экспоненциальными*, или *графами Эрдоша – Ренъи*.

Оказывается, что и Интернет, и большинство онлайновых социальных сетей описывается не экспоненциальными, а *степенными «распределениями»* (с тяжелыми хвостами)  $P^{in}(k)$  и  $P^{out}(k)$  числа инцидентных дуг [78, 83, 84]. Именно эти распределениями ( $P^{in}(k) \sim k^{-\gamma}$ , где для реальных сетей  $1 < \gamma < 4$ ) использованы ниже в настоящем разделе. Имея граф, заданный статистическими характеристиками своих основных параметров, можно в рамках введенных в настоящем параграфе предположений определять макрохарактеристики (вероятностные распределения) влияния, репутации, доверия и т. п.

### 3.3. Модель порогового поведения

На примере пороговой модели коллективного поведения агентов в АСС (см. также второй раздел) с теоретической точки зрения рассмотрим эквивалентность микро- и макро-описаний.

Модели динамики мнений агентов в СС (см. выше) оперируют единственной характеристикой каждого агента – его мнением, а остальные параметры отражают взаимодействие агентов. Так назы-

ваемые *поведенческие модели АСС* богаче – в них, помимо «внутренних» параметров, присутствуют переменные, характеризующие поведение агента – принимаемые им *решения*. Решения эти зависят в общем случае как от внутренних параметров агента (его мнения, индивидуальных характеристик), так и, быть может, от мнений и/или действий других агентов (всех, или соседей, или заданной группы агентов). Рассмотрим в качестве примера поведенческой модели модель порогового поведения (см. описание общих теоретико-игровых подходов к моделированию порогового коллективного поведения в работах [5, 6, 10]).

Пусть АСС состоит из множества *агентов*  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , каждый из которых имеет две альтернативные возможности – *действовать* или *бездействовать*. Выбор  $i$ -го агента обозначим через  $x_i \in \{0; 1\}$ , где  $x_i = 1$  означает, что агент действует, а  $x_i = 0$  – не действует. Пусть на решение агента  $i$  влияет множество  $D_i = N^{in} i$  других агентов – его соседей. Будем считать, что решение агента  $i$  действовать или не действовать зависит от его порога  $\theta_i \in [0, 1]$  и доли действующих соседей: если действуют более  $\theta_i |D_i|$  влияющих на  $i$ -го агента соседей, то он тоже действует.

Будем считать, что мнением отдельного агента является этот индивидуальный порог  $\theta_i \in [0, 1]$ . Пусть структура АСС такова, что достижим консенсус, т. е. согласно соотношению (3) существует единое мнение  $\theta$ , характеризующее в конечном итоге всех агентов, как это описано выше. Это единое мнение будем в дальнейшем называть *единым относительным порогом* агентов.

Поведение агента на микроуровне можно представить в виде наилучшего ответа (Best Response) – см. выражение (2.1):

$$(6) \quad x_i = BR_i \quad x_{-i} = \begin{cases} 1, & \sum_{j \in D_i} x_j > \theta d_i, \\ 0, & \sum_{j \in D_i} x_j \leq \theta d_i, \end{cases} \quad i \in N,$$

где  $d_i = |D_i|$  – число соседей агента  $i \in N$ . Будем называть модель поведения, которое описывается в виде (6), *микромоделью с единственным относительным порогом*.

Перейдем к вероятностному макроописанию модели порогового поведения. Будем считать, что агенты неразличимы, и число соседей

агента – это целое случайное число  $d : 1 \leq d \leq n-1$ . Мы не рассматриваем сети, в которых нет агентов, не имеющих соседей ( $d = 0$ ), так как в этом случае такие агенты согласно выражению (6) будут всегда бездействовать. Пусть  $M d = P^{\bar{d}} d : 1, 2, \dots, n-1 \rightarrow [0,1]$  – вероятность того, что число соседей будет равно  $d$ . Рассмотрим усредненную динамику взаимодействия агентов в дискретном времени. Пусть на произвольном шаге действует  $q$  агентов. Рассчитаем математическое ожидание числа агентов, действующих на следующем шаге, если их поведение описывается наилучшим ответом (6).

Сначала вычислим вероятности  $G_n$  событий, заключающихся в том, что ровно  $k$  соседей агента действуют. Всего существует  $C_{n-1}^d$  вариантов того, что агент имеет  $d$  соседей. Число таких вариантов, что именно среди  $d$  соседей данного агента будет ровно  $k \leq d$  действующих (из  $q$  действующих во всей сети агентов) равно  $C_q^k$ , а число вариантов того, что среди этих соседей будет  $d - k$  из  $n - 1 - q$  бездействующих равно  $C_{n-1-q}^{d-k}$ . Таким образом, вероятность того, что ровно  $k$  из  $d$  соседей агента действуют, можно записать в виде гипергеометрического распределения [75]:

$$(7) \quad G_n q, d, k = \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}.$$

Вычислим вероятность  $P_n$  того, что агент будет действовать под влиянием  $q$  действующих агентов во всей сети. Для того чтобы агент действовал, согласно выражению (6), необходимо, чтобы более чем  $\theta d$  его соседей действовали. Искомая вероятность  $P_n = P_n q, d, \theta$  представляет собой сумму вероятностей (7) по всем  $k : \theta d < k \leq d$  ( $[\cdot]$  обозначает целую часть числа):

$$(8) \quad P_n q, d, \theta = \sum_{k=\theta d + 1}^d G_n q, d, k = 1 - \sum_{k=0}^{\theta d} \frac{C_q^k C_{n-1-q}^{d-k}}{C_{n-1}^d}.$$

Вероятность (8) численно равна доле действующих на следующем шаге агентов с числом соседей  $d$ . Значит, математическое ожидание доли действующих на следующем шаге агентов

$$(9) \quad F_n q, \theta = \sum_{d=1}^{n-1} P_n q, d, \theta M d.$$

Итак, динамику числа действующих агентов можно записать в виде рекуррентной схемы:

$$(10) \quad q_{k+1} = \left[ nF_n \quad q_k, \theta \right].$$

Исследуем поведение функции (9) для случая, когда число агентов  $n$  достаточно велико. При этом гипергеометрическое распределение (7) может быть приближено биномиальным распределением с вероятностью  $p = q/n$  ([75]):

$$G_n(q, d, k) \Big|_{n \gg 1, p = q/n} \approx b(p, d, k) = C_d^k p^k (1-p)^{d-k}.$$

Вероятность того, что для  $d$  числа соседей агента более, чем их доля  $\theta$  будет действовать, по аналогии с вероятностью (8),

$$P_n(q, d, \theta) \Big|_{n \gg 1, p = q/n} \approx B(p, d, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\theta d} b(p, d, k).$$

Тогда распределение числа действующих агентов (9) и динамику доли действующих агентов соответственно можно записать в виде:

$$(11) \quad F_n^B(p, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} B(p, d, \theta) M(d),$$

$$(12) \quad p_{k+1} = F_n^B(p_k, \theta).$$

Будем называть модель поведения, которое описывается в виде (12), *макромоделью с единым относительным порогом*.

Исследования пороговых моделей начались со ставшей классической работы М. Грановеттера [102], которая вкратце состоит в следующем. Все агенты являются соседями друг друга (граф  $R$  коммуникаций - полный), при этом число агентов не оговаривается. Каждый агент характеризуется порогом – если доля действующих агентов больше этого порога, то он действует. Причем значение этого порога описывается функцией распределения  $F$ . Пусть доля действующих агентов на определенном шаге  $k$  равна  $r_k$ . Значит, все агенты, пороги которых меньше  $r_k$ , а их число по определению равно  $F(r_k)$ , будут действовать на следующем шаге. Таким образом, справедливо рекуррентное соотношение:

$$(13) \quad r_{k+1} = F(r_k).$$

Макромодель с единым относительным порогом (12) эквивалентна модели Грановеттера (13) в следующем смысле.

Предположим, что известно распределение (11). Тогда можно построить соответствующую модель Грановеттера, приняв  $F(p) = F_n^B(p, \theta), p \in [0, 1]$ . Обратно, пусть задана модель Грановеттера с функцией распределения порогов  $F$ . Решим численно уравнение (11) относительно  $M(\cdot)$  ( поиск решения уравнения типа (11) представляет собой отдельную задачу). Распределение  $M$  полностью характеризует макро-модель с единым относительным порогом.

В работе [10] было показано, что условия положения равновесия в модели Грановеттера ( $F(x) = x$ ) эквивалентны условиям равновесия Нэша в микромодели с единым относительным порогом при условии, что граф влияний агентов является полным:  $d_i = n - 1, \forall i \in N$ . Другими словами, имея макромодель порогового поведения агентов в АСС, можно легко вычислять ее равновесные состояния.

Выше проблемы установления соответствия между микро- и макромоделями АСС рассматривались с теоретической точки зрения. Возможность идентификации предложенных подходов и вопросы адекватности микро- и макроописаний друг другу «экспериментально» исследуются ниже и в работе [4] на примере ряда онлайновых социальных сетей. Перспективным направлением дальнейших исследований представляется построение и изучение термодинамических и статфизических интерпретаций макромоделей АСС (см. статью [15] и обзор [69]), а также постановка и решение задач управления (например, по аналогии с рассмотренными в работах [1, 25, 57] задачами управления АСС, описываемыми выражениями (1) или (6)).

### 3.4. Идентификация и имитационные эксперименты

В настоящем подразделе, написанном совместно с А.В. Батовым, рассмотрены вопросы идентификации введенных в выше микро- и макрохарактеристик АСС по данным из реальных онлайновых социальных сетей (СС) – Facebook, LiveJournal и Twitter. Представлены результаты ряда соответствующих имитационных экспериментов, дано их сравнение [4].

Выше были введены понятия *микро- и макромоделей ACC* с *единим относительным порогом*  $\theta \in [0, 1]$ .

В *микромодели* поведение агента в рамках игрового подхода описывается с помощью его наилучшего ответа  $BR_i$  (Best Response) – агенты одновременно и независимо принимают решение в каждом периоде времени  $k$ :

$$(14) \quad x_i^k = BR_i \quad x_{-i}^{k-1} = \begin{cases} 1, & \sum_{j \in D_i} x_j^{k-1} > \theta d_i, \\ 0, & \sum_{j \in D_i} x_j^{k-1} \leq \theta d_i. \end{cases}, \quad i \in N = \{1, 2, \dots, n\},$$

где  $d_i = |D_i|$  – число соседей агента  $i$ ,  $D_i$  – множество его соседей,

$x_{-i}^{k-1} = x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_{i-1}^{k-1}, x_{i+1}^{k-1}, \dots, x_n^{k-1}$  – обстановка для агента  $i$ .

Здесь  $x_i^k \in \{0; 1\}$ , где  $x_i^{(k)} = 1$  означает, что агент действует, а  $x_i^{(k)} = 0$  – бездействует в период времени  $k$ .

*Макромодель* описывает динамику доли действующих агентов

$$p_k = \frac{1}{n} \sum_i x_i^k \in [0, 1],$$

$$(15) \quad p_{k+1} = F_n(p_k, \theta),$$

где

$$(16) \quad F_n(p, \theta) = \sum_{d=1}^{n-1} B(p, d, \theta) M(d),$$

$$B(p, d, \theta) = 1 - \sum_{k=0}^{\theta d} C_d^k p^k (1-p)^{d-k} \quad \text{– функция от биномиального рас-}$$

пределения,  $M(d)$  – вероятностное распределение числа соседей  $d$  в графе ACC (см. выше).

Для проверки адекватности и сравнения между собой теоретических моделей (14) и (15) могут быть использованы данные из реальных онлайновых социальных сетей (СС). В настоящей работе для микромодели (14) применяются методы имитационного моделирования, для макромодели (15) – различные виды аппроксимаций функции распределения (16).

Связи между агентами реальной СС можно представить в виде ориентированного графа  $G$ . Ориентация ребра графа от одного

агента (узла) к другому интерпретируется как влияние одного агента на другого. В микромоделях явно используется граф влияния, а в макромоделях – его макрохарактеристика: распределение  $M$  · числа соседей. Исходя из условий возможности применения макромодели (15), а именно из того, что число агентов должно быть достаточно велико, были исследованы данные о подобных связях влияния в трех социальных сетях: русскоязычные сегменты СС Facebook ( $F$ ), LiveJournal ( $L$ ) и Twitter ( $T$ ).

Так, в сети Facebook определенный агент связан со своими друзьями, что может интерпретироваться как связи влияния этих друзей на агента. В социальных сетях LiveJournal и Twitter в качестве ориентированных связей влияния использовались подписки агента на просмотр и комментирование информации других агентов. Во всех трех социальных сетях агентов, которые влияют на данного агента, будем считать его *соседями* (см. выражение (1)).

В Табл. 1 приведены макропоказатели трех исследуемых СС: максимальное число соседей (MaxFrnds), число агентов (Users), число агентов с ненулевым количеством соседей (Nonzero users), общее число связей (Links) и среднее число соседей у агентов с ненулевым числом соседей (AvgF = Links / Nonzero users).

Табл. 1. Макропоказатели социальных сетей

СС	MaxFrnds	Users	Nonzero users	Links	AvgF
Facebook	4 199	3 250 580	3 084 017	77 639 757	50,35
Live Journal	2 499	5 758 706	3 586 959	124 729 288	34,77
Twitter	759 313	~41 700 000	35 427 738	1 418 363 662	40,04

Как видно из Табл. 1, в рассматриваемых СС количество агентов велико, что позволяет выдвинуть гипотезу о применимости для них макромодели (15).

В функции распределения (16) макромодели (15) присутствуют две составляющие: вероятность  $B(p, d, \theta)$  того, что доля  $p$  из числа  $d$  агентов будут действовать, и распределение  $M$  · числа соседей в СС. Определять эти функции можно по-разному, что порождает следующий набор задач исследования.

**Задача 1.** Идентификация функций распределения  $M \cdot$  в указанных трех СС. В рамках этой задачи строятся эмпирические распределения  $M_F \cdot$ ,  $M_L \cdot$  и  $M_T \cdot$ , и ищутся аппроксимирующие их в аналитическом виде функции  $\overline{M}_F \cdot$ ,  $\overline{M}_L \cdot$  и  $\overline{M}_T \cdot$ .

**Задача 2.** Построение и исследование имитационных моделей порогового поведения, которое задается наилучшим ответом (14). Так, действующими в начальный момент времени считались случайно выбранные агенты и вычислялось, согласно выражению (14), число действующих агентов на следующем шаге. Затем результат усреднялся по случайным множествам первоначально выбранных агентов. В результате было построено семейство функций (зависящее от параметра  $\theta$ ), которые сравнивались с другими функциями распределения, полученными в результате решения других задач настоящего исследования (см. табл. 5).

**Задача 3.** Аппроксимация сigmoidными функциями зависимостей, полученных при имитационном моделировании в рамках решения задачи 2.

**Задача 4.** Нахождение семейства функций распределения (3) (зависящего от параметра  $\theta$ ), в которые вместо  $M \cdot$  подставляются эмпирические функции распределения степеней узлов графов связей для трех рассматриваемых реальных СС -  $M_F \cdot$ ,  $M_L \cdot$  и  $M_T \cdot$ .

**Задача 5** аналогична четвертой, но вместо эмпирических функций распределения СС используются их аппроксимации  $\overline{M}_F \cdot$ ,  $\overline{M}_L \cdot$  и  $\overline{M}_T \cdot$ , найденные в результате решения задачи 1.

**Задача 6.** Сравнение результатов решения задач 2-5.

Для решения задач 2 – 5 применялись два метода: анализ эмпирических данных и их аналитическая аппроксимация. Схему исследования можно представить в виде Табл. 2.

Табл. 2. Модели и методы для решения задач 2 – 5

Модель	Метод	
	Анализ эмпирических данных	Аналитическая аппроксимация
Микромодель СС	Задача 2	Задача 3
Макромодель СС	Задача 4	Задача 5

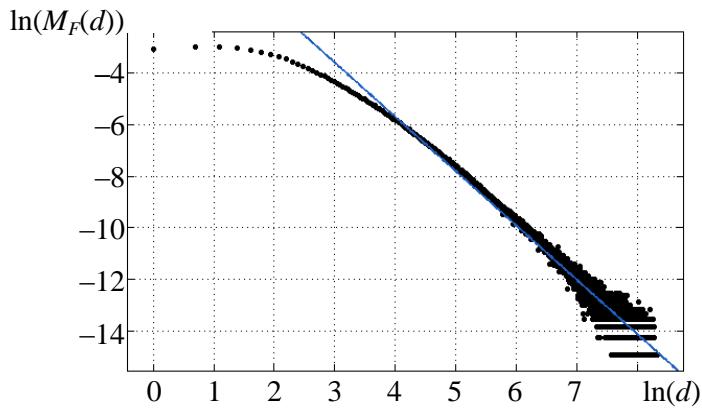
**Задача 7.** Исследование зависимости от единого относительного порога  $\theta$  положений равновесия коллективного поведения в рамках модели Грановеттера, которую можно построить для рассматриваемых СС.

Перейдем к последовательному рассмотрению и описанию результатов решения перечисленных задач.

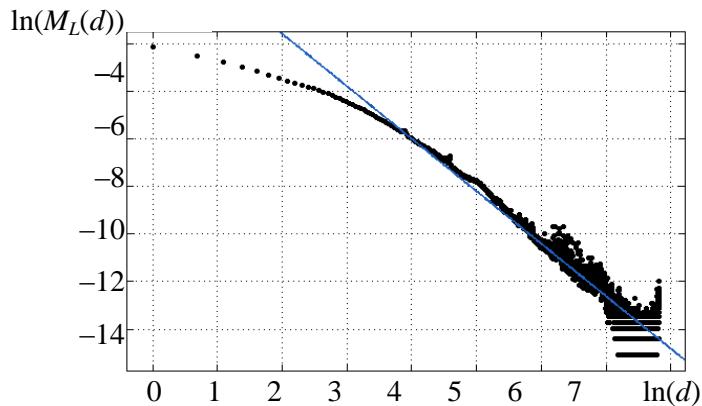
**Идентификация функций распределения  $M(\cdot)$  числа соседей агентов в АСС** (задача 1). Существует множество исследований онлайновых СС, свидетельствующих, что распределение числа соседей или, другими словами, распределение степени узлов больших СС хорошо аппроксимируется степенным распределением (см., например, работы [78, 83, 84]). Результаты исследований этой зависимости для рассматриваемых СС приведены на Рис. 1, где в двойном логарифмическом масштабе (когда по обеим осям отложены логарифмы соответствующих величин) построены графики эмпирических распределений числа соседей  $M_F(\cdot)$ ,  $M_L(\cdot)$  и  $M_T(\cdot)$ . Так как степенная функция в двойном логарифмическом масштабе имеет вид прямой с наклоном  $a$  и значением в нуле  $b$ , то была найдена наилучшая линейная аппроксимация. Полученные значения коэффициентов аппроксимации для различных СС приведены в Табл. 3. Остальные обозначения будут описаны далее.

Табл. 3. Коэффициенты аппроксимации функций  $M_F(\cdot)$ ,  $M_L(\cdot)$  и  $M_T(\cdot)$

Функция	$a$	$b$	$c_{real}$	$a_{pareto}$
$M_F(\cdot)$	-2,181	3,274	26,628	0,688
$M_L(\cdot)$	-2,208	2,828	16,878	0,765
$M_T(\cdot)$	-1,802	-0,196	1,8233	0,799



*a*



*σ*

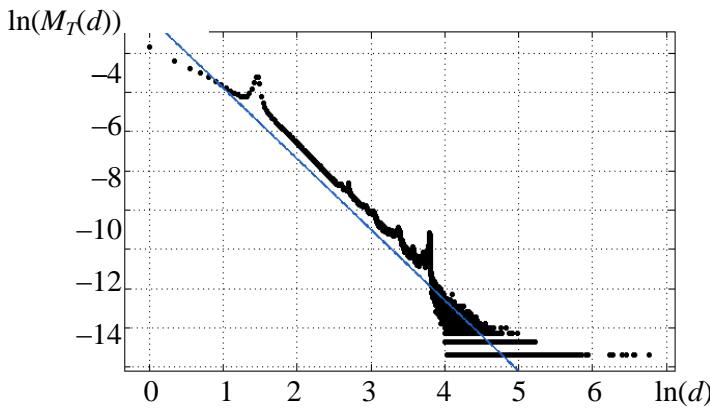
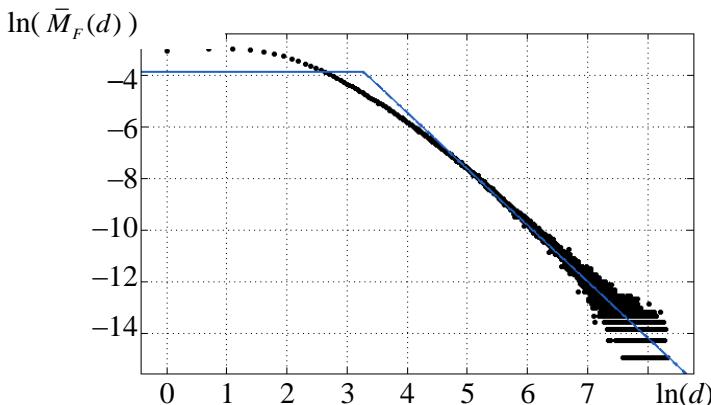


Рис. 1. Графики функций распределений числа соседей агентов в социальных сетях и ее линейной аппроксимации:  
а — CC Facebook; б — CC LiveJournal; в — CC Twitter

Кривая распределения степеней узлов графа  $G$  для малого числа соседей может быть приближена горизонтальной прямой, что приводит к «срезанным» линейным аппроксимациям  $\bar{M}_F$  · · · ,  $\bar{M}_L$  · · · и  $\bar{M}_T$  · · · , которые представлены на Рис. 2 (см. также табл. 4).



а

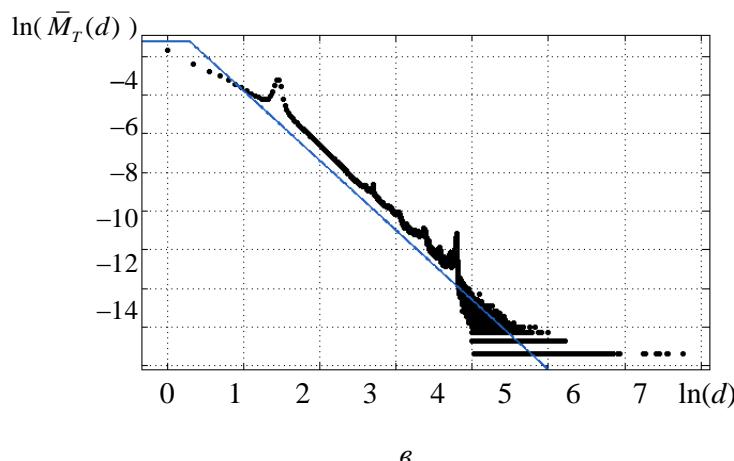
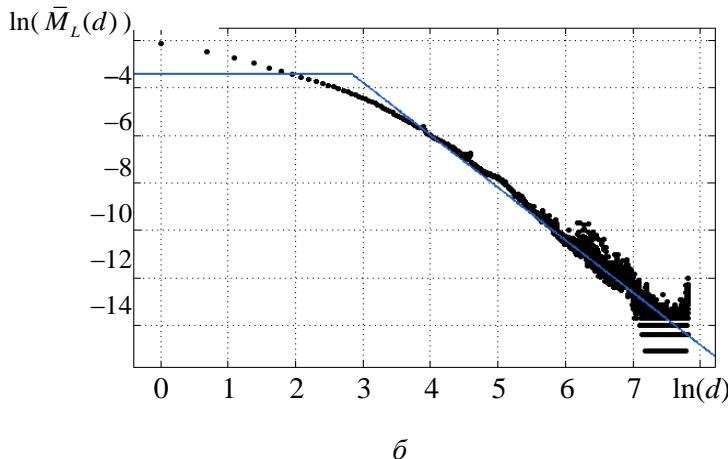


Рис. 2. Графики «срезанной» линейной аппроксимации функции  $M(\cdot)$ :  
а – CC Facebook; б – CC LiveJournal; в – CC Twitter

Была выбрана именно горизонтальная аппроксимационная прямая для малых значений числа соседей, поскольку:

– необходимо обеспечить выполнение условия нормировки распределения – площадь под графиком должна быть равна единице; если осуществлять нормировку непосредственно, то изменяются

коэффициенты степенного распределения и тем самым изменяется точность аппроксимации;

– «срезанная» линейная аппроксимация дает меньшую ошибку  $R$ -квадрат в сравнении с другими аппроксимациями: как альтернатива рассматривалась аппроксимация кривой распределения Парето (с параметром  $a_{pareto}$ , см. Табл. 3), которая в двойном логарифмическом масштабе имеет вид прямой. Как видно из Табл. 4, «срезанная» линейная аппроксимация приближает эмпирическое распределение лучше.

Значение  $c$  аргумента, при котором линейная горизонтальная аппроксимация переходит в «наклонную»:

$$\overline{M}_d = \begin{cases} \exp b \times c^a, & d \leq c, \\ \exp b \times d^a, & d > c, \end{cases}$$

вычислялось (см. значения  $c_{real}$  в Табл. 3) исходя из условия нормировки распределения:  $\sum_{d=1}^n \overline{M}_d = 1$ .

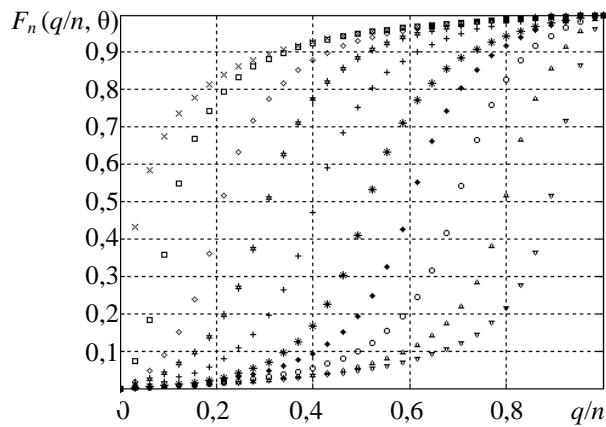
Табл. 4. Точность «срезанной» линейной и Парето-аппроксимаций ( $R$ -квадрат)

Аппроксимация СС	«Срезанная» линейная	Парето
Facebook	0,962	0,916
LiveJournal	0,929	0,884
Twitter	0,849	0,849

После построения аппроксимаций распределения степеней графов реальных СС, которые будут использованы далее в рамках решения задачи 4, перейдем к описанию результатов имитационного моделирования поведения агентов в микромодели (14).

**Построение и исследование имитационных моделей порогового поведения с наилучшим ответом (14)** (задача 2). Имитационное моделирование состояло в следующем. В СС Facebook и LiveJournal, заданных своими графами связей, случайным образом «возбуждалось» некоторое число  $q$  агентов (доля  $q/n \in [0; 1]$ ). Далее по формуле (14) для каждого агента вычислялся его наилучший ответ (действовать или бездействовать). Получающаяся в результате доля действующих агентов, согласно формуле (15) – это значение

функции  $F_n(q/n, \theta)$ . Эксперимент повторялся многократно для каждого из различных значений  $q$ , лежащих на отрезке  $[0; 1]$ . Относительное отклонение значения функции  $F_n(q/n, \theta)$  составляло порядка 0,001 во всех экспериментах (разброс значений связан со случайностью выбора множества первоначально возбуждённых агентов). Кривые  $F_n(q/n, \theta)$  при различных значениях параметра  $\theta$  изображены на Рис. 3.



*a*

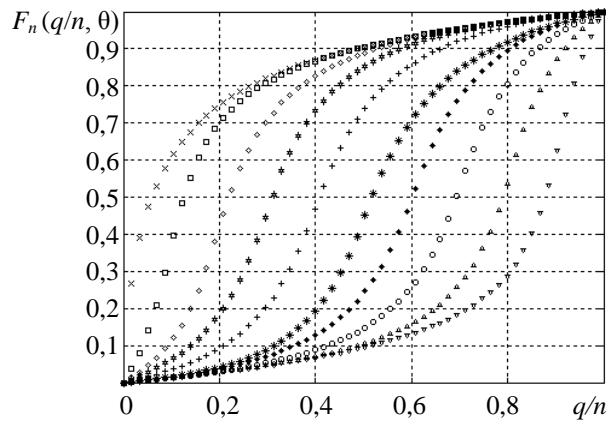
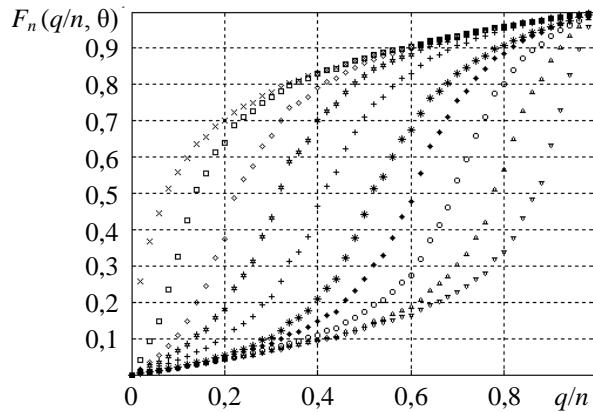

 $\theta$ 

 $\theta$ 

Рис. 3. Результаты имитационного моделирования порогового поведения: а – CC Facebook; б – CC LiveJournal; в – CC Twitter;  
 $\times$  –  $\theta = 0$ ;  $\square$  –  $\theta = 0,1$ ;  $\diamond$  –  $\theta = 0,2$ ;  $\neq$  –  $\theta = 0,3$ ;  $+$  –  $\theta = 0,4$ ;  
 $*$  –  $\theta = 0,5$ ;  $\blacklozenge$  –  $\theta = 0,6$ ;  $\circ$  –  $\theta = 0,7$ ;  $\blacktriangle$  –  $\theta = 0,8$ ;  $\nabla$  –  $\theta = 0,9$

Получив результаты имитационного моделирования, перейдем к их аппроксимации.

**Аналитическое приближение функций  $F_n(p, \theta)$ , полученных при имитационном моделировании** (задача 3). Необходимо найти аналитическое приближение семейства функций  $F_n(p, \theta)$  для каждой из рассматриваемых СС. На основании проведенных исследований были сделаны следующие наблюдения:

- полученные кривые относятся к классу сигмоид (Рис. 4);
- кривые  $F_n(p, \theta)$  имеют перегиб при  $p \approx \theta$ .

С учётом этих наблюдений, в качестве кандидатов для аппроксимации были выбраны следующие параметрические семейства функций:

$$f(p, \theta, \alpha, \lambda, \gamma) = \alpha \operatorname{arctg}(\lambda(p - \theta)) + \gamma$$

и

$$g(p, \theta, \alpha, \lambda, \gamma) = \frac{\alpha}{1 + e^{-\lambda(p - \theta)}} + \gamma.$$

Из условия, что функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  должны являться функциями распределения, получаем параметрические (зависящие от параметра  $\lambda$ ) семейства функций:

$$(17) \quad f(p, \theta, \lambda) = \frac{\operatorname{arctg}(\lambda(p - \theta)) + \operatorname{arctg}(\lambda\theta)}{\operatorname{arctg}(\lambda(1 - \theta)) + \operatorname{arctg}(\lambda\theta)},$$

$$g(p, \theta, \lambda) = \left( \frac{1 - e^{-\lambda p}}{1 + e^{-\lambda(1 - \theta)}} \right) \left( \frac{1 + e^{-\lambda(1 - \theta)}}{1 - e^{-\lambda}} \right).$$

Таким образом, задача 3 сводится к нахождению одного неизвестного параметра  $\lambda$ , при котором поверхность  $f(p, \theta, \lambda)$  или  $g(p, \theta, \lambda)$  наилучшим образом приближает экспериментальные данные, и выбору семейства функций, которое даёт меньшую ошибку приближения.

Оказалось, что экспериментальные данные для всех социальных сетей лучше приближаются семейством функций (17), при этом минимум ошибки приближения достигается при  $\lambda_F = 13,01$ ,  $\lambda_L = 9,18$ ,  $\lambda_T = 7,34$  (график для СС Facebook приведен на Рис. 4).

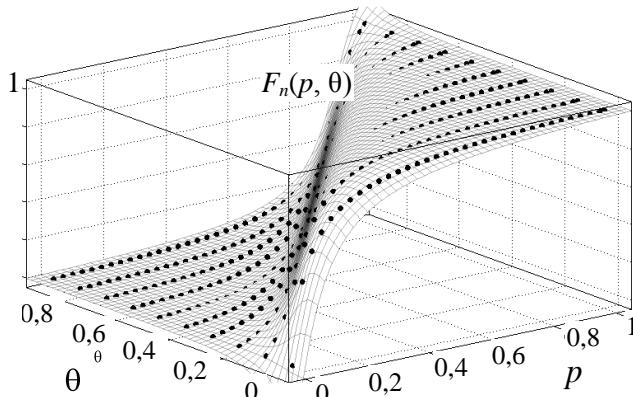
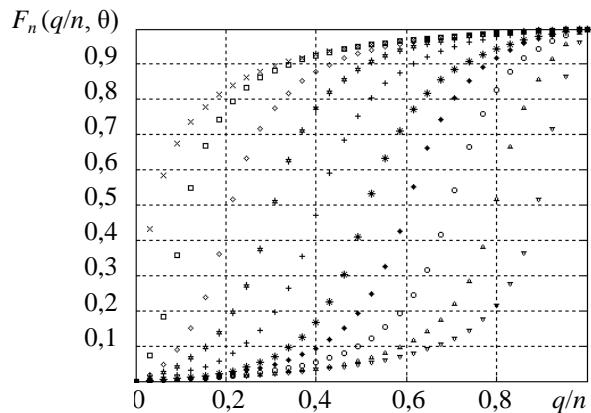


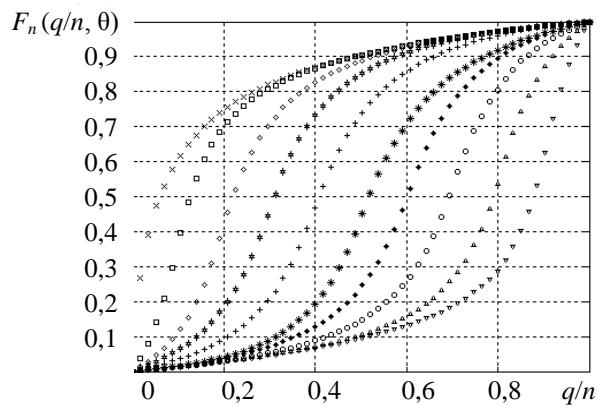
Рис. 4. Приближение экспериментальных данных  $F_n(p, \theta)$  (точки) аналитическим семейством  $f(p, \theta, \lambda_F)$  (сетка) для социальной сети Facebook

Наличие аналитического выражения для функции (16) даёт возможность построить однопараметрическую модель поведения агентов (при различных значениях единого порога  $\theta$ ), что важно, в частности, для задач управления СС.

**Макромодель (2) на основе эмпирического распределения числа соседей в графе** (задача 4). Как отмечалось ранее, данная задача состоит в нахождении семейства функций распределения (зависящего от параметра  $\theta$ ) макромодели (3), в которых явно присутствует теоретическая составляющая  $B_{p,d,\theta}$ , т. е. в выражении (3) вместо  $M_{\cdot \cdot \cdot}$  подставляются эмпирические функции распределения степеней узлов графов связей для трех СС –  $M_F \cdot \cdot \cdot$ ,  $M_L \cdot \cdot \cdot$  и  $M_T \cdot \cdot \cdot$ . Результаты представлены на Рис. 5.



$a$



$\delta$

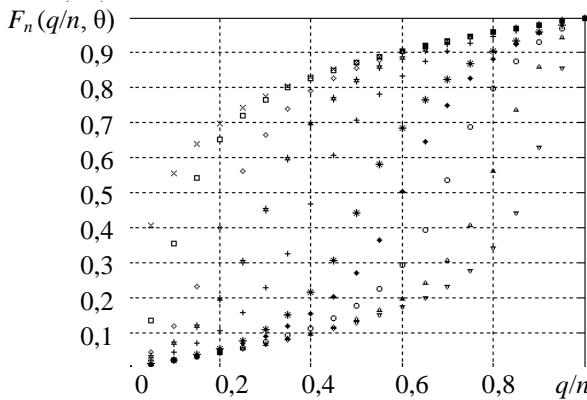
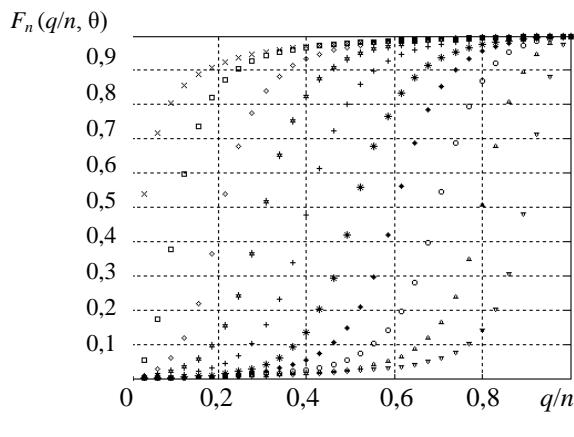


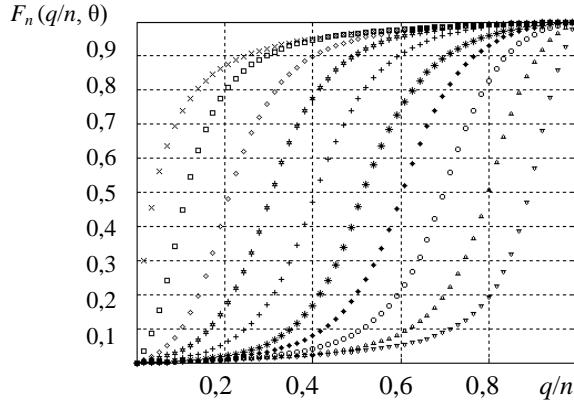
Рис. 5. Макромодель (2) с эмпирическим распределением числа соседей в графе: *а* – CC Facebook; *б* – CC LiveJournal; *в* – CC Twitter;  
 $\times$  –  $\theta = 0$ ;  $\square$  –  $\theta = 0,1$ ;  $\diamond$  –  $\theta = 0,2$ ;  $+$  –  $\theta = 0,3$ ;  $*$  –  $\theta = 0,4$ ;  
 $*$  –  $\theta = 0,5$ ;  $\blacklozenge$  –  $\theta = 0,6$ ;  $\circ$  –  $\theta = 0,7$ ;  $\blacktriangle$  –  $\theta = 0,8$ ;  $\nabla$  –  $\theta = 0,9$

Таким образом, построено семейство функций (16). Перейдём к их рассмотрению, используя «срезанные» линейные аппроксимации, полученные в результате решения задачи 1.

**Макромодель (15) на основе распределения числа соседей, аппроксимированного аналитической функцией** (задача 5). Данная задача подобна задаче 4, но вместо эмпирических функций распределения СС используются их аппроксимации  $\overline{M}_F \cdot \cdot$ ,  $\overline{M}_L \cdot \cdot$  и  $\overline{M}_T \cdot \cdot$ . Результаты представлены на Рис. 6.



$\alpha$



$\delta$

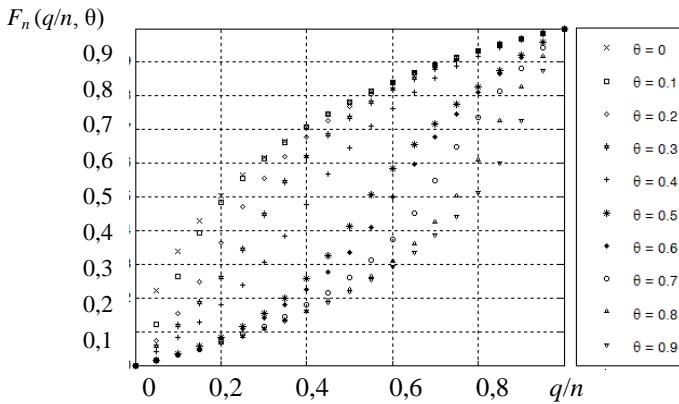


Рис. 6. Макромодель (2) с аппроксимированной функцией распределения: а – CC Facebook; б – CC LiveJournal; в – CC Twitter;  
 $\times$  –  $\theta = 0$ ;  $\square$  –  $\theta = 0,1$ ;  $\diamond$  –  $\theta = 0,2$ ;  $\blacksquare$  –  $\theta = 0,3$ ;  $+$  –  $\theta = 0,4$ ;  
 $*$  –  $\theta = 0,5$ ;  $\blacklozenge$  –  $\theta = 0,6$ ;  $\circ$  –  $\theta = 0,7$ ;  $\blacktriangle$  –  $\theta = 0,8$ ;  $\triangledown$  –  $\theta = 0,9$

Видно, что семейство функций (16) качественно аналогично полученному в результате решения задачи для соответствующих СС. Строгое сравнение осуществляется в рамках решения задачи 6.

**Сравнение результатов решения задач 2 – 5** (задача 6). Решив задачи 2 и 3 (имитационное моделирование и аппроксимация микромодели (14)), а также задачи 4 и 5 (различные виды аппроксимаций макромодели (15)), можно сравнить полученные результаты – см. Табл. 5, в заголовках столбцов которой содержатся пары номеров сравниваемых задач.

Табл. 5. Сравнение результатов решения задач (значение R-квадрат)

СС	Задачи 2 и 4	Задачи 2 и 5	Задачи 4 и 5	Задачи 2 и 3	Задачи 3 и 4	Задачи 3 и 5
Facebook	0,9976	0,9932	0,9911	0,9973	0,9973	0,9907
LiveJournal	0,9999	0,9872	0,9872	0,9960	0,9960	0,9855
Twitter	0,9998	0,9631	0,9642	0,9949	0,9950	0,9599

Видно, что макро- и микроописания дают схожие результаты (см. пары задач 2 и 3, 2 и 4, 3 и 4). Близость результатов решений

задач 2 и 5, 3 и 5, 4 и 5 меньше, и в перспективе стоит вопрос нахождения функции, которая бы лучше приближала функцию распределения степеней графа  $M$ .

**Исследования положений равновесия в АСС** (задача 7). Как было показано выше, поведение агентов в модели с единым относительным порогом эквивалентно пороговому поведению в модели Грановеттера. Для последней важны такие свойства положений равновесия (точки, характеризуемые уравнением  $F_n(p, \theta) = p$ ), как их число и устойчивость (пересечение биссектрисы первого квадранта в точке равновесия «слева-сверху»). Ответим на эти вопросы для рассматриваемых СС. Из анализа графиков кривых, представленных на Рис. 3 - Рис. 6, можно сделать вывод о том, что в зависимости от параметра  $\theta$  возможны различные наборы положений равновесия (их число, устойчивость и неустойчивость и др.).

В самом деле, точка пересечения кривой  $F_n(p, \theta)$  с диагональю единичного квадрата, лежащая внутри интервала  $(0; 1)$ , является неустойчивым положением равновесия, так как кривая  $F_n(p, \theta)$  пересекает диагональ «снизу вверх».

Как видно из Рис. 3, это свойство имеет место при  $\theta \in [\sim 0,1; \sim 0,9]$  для всех исследуемых социальных сетей. При этом точки  $q = 0$  и  $q = 1$  являются устойчивыми положениями равновесия.

Если же  $\theta \leq 0,1$ , то в системе имеются два положения равновесия: точка  $q = 0$  является неустойчивым положением равновесия, а точка  $q = 1$  – устойчивым.

Аналогично, при  $\theta \geq 0,9$ , в системе имеются два положения равновесия: точка  $q = 0$  является устойчивым положением равновесия, а  $q = 1$  – неустойчивым.

Исходя из Рис. 7, можно также определять положение равновесия для рекуррентной процедуры (2) макромодели для различных соотношений между начальным положением  $p_0$  и единым порогом  $\theta$ . Так, если вектор  $p_0, \theta$  лежит в области II (см. Рис. 7), то процесс (2) завершится в положении равновесия  $p = 0$ . Если вектор  $p_0, \theta$  лежит в области I, то процесс (2) завершится в положении равновесия  $p = 1$ .

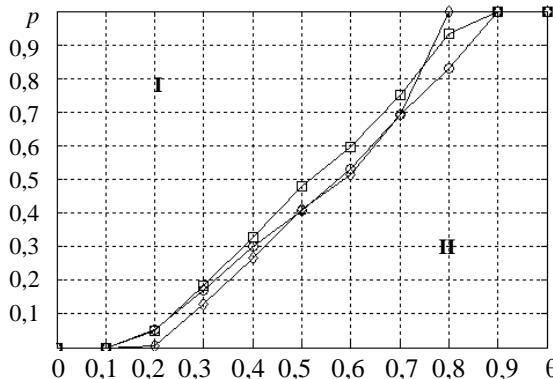


Рис. 7. Зависимость положения точки пересечения кривой  $F_n(p, \theta)$  с диагональю единичного квадрата от единого порога  $\theta$ :

—○— Facebook; —□— LiveJournal; —◇— Twitter

Таким образом, описанные выше теоретические макромодели АСС исследовались с помощью имитационного моделирования на реальных данных и аппроксимации его результатов. Из полученных результатов можно сделать два важных вывода.

Вероятностное описание макромодели согласуется с микроописанием: результаты имитационного моделирования хорошо совпали с результатами вычисления по вероятностной модели на основании реального распределения степеней графа связей для различных социальных сетей.

Оказалось, что, несмотря на существенные различия масштабов и структуры графов связей реальных социальных сетей, их макромодели (15) качественно очень похожи: имеют вид сигмоиды и хорошо приближаются параметрическим семейством функций (17) с различными значениями коэффициента  $\lambda$ .

#### 4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЛПОЙ

В настоящем разделе рассмотрена пороговая модель поведения группы агентов, которые, принимая бинарные решения (действовать или бездействовать), учитывают выбор других членов группы.

Поставлена и решена задача управления порогами и репутацией агентов в целях снижения числа агентов, выбирающих решение «действовать» [11].

#### 4.1. Пороговая модель поведения толпы

Рассмотрим модель толпы – множество  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  агентов, каждый из которых выбирает одно из двух решений – «1» (действовать, например, принимать участие в беспорядках) или «0» (бездействовать). Агент  $i \in N$  характеризуется своим:

– влиянием на другого агента  $t_{ji} \geq 0$  – тем «весом», с которым к его мнению прислушивается или его действия учитывает другой агент  $j$ ; будем считать, что для каждого агента  $j$  выполнены условия нормировки  $\sum_{i \neq j} t_{ji} = 1$ ,  $t_{ii} = 0$ ;

– решением  $x_i \in \{0; 1\}$ ;

– порогом  $\theta_i \in [0; 1]$ , определяющим, будет ли агент действовать в той или иной обстановке (при векторе  $x_{-i}$  решений всех остальных агентов). Формально, действие  $x_i$   $i$ -го агента определим как наилучший ответ (best response – BR) на сложившуюся обстановку:

$$(1) x_i = BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j \neq i} t_{ij} x_j \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } \sum_{j \neq i} t_{ij} x_j < \theta_i. \end{cases}$$

Поведение, описываемое выражением (1), называется *пороговым*. Равновесием Нэша будет вектор  $x_N$  действий агентов такой, что  $x_N = BR(x_N)$  [29, 110].

Рассмотрим по аналогии с работой [9] следующую модель динамики коллективного поведения: в начальный момент времени все агенты бездействуют, далее в каждый из последующих моментов времени агенты одновременно и независимо действуют в соответствии с процедурой (1). Обозначим

$$(2) Q_0 = \{i \in N \mid \theta_i = 0\},$$

$$Q_k = Q_{k-1} \cup \{i \in N \mid \sum_{j \in Q_{k-1}, j \neq i} t_{ij} \geq \theta_i\}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Очевидно  $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_{n-1} \subseteq Q_n = N$ . Обозначим через  $T = \{t_{ij}\}$  матрицу влияний агентов, через  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  – вектор их порогов. Вычислим следующий показатель:

$$(3) q(T, \theta) = \min \{k = \overline{0, n-1} \mid Q_{k+1} = Q_k\}.$$

*Равновесие коллективного поведения  $x^*$  (РКП) определим следующим образом:*

$$(4) x_i^*(T, \theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in Q_{q(T, \theta)}, \\ 0, & \text{если } i \in N \setminus Q_{q(T, \theta)}, i \in N. \end{cases}$$

Утверждение 4.1. Для любых матриц влияния  $T$  и порогов агентов  $\theta$  РКП (4) существует, единственно и является одним из равновесий Нэша для игры с наилучшим ответом (1).

Доказательство утверждения 4.1. Для доказательства существования необходимо доказать, что множество, по которому берется минимум в выражении (3), не пусто. Предположим противное, т. е. что это множество пусто. Иными словами, в последовательности множеств  $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_{n-1} \subseteq Q_n$  не существует совпадающих. Это означает, что каждое последующее множество отличается от предыдущего, как минимум, на один элемент. Но в последовательности имеются  $n + 1$  множеств, а элементов  $n$ . Пришли к противоречию.

Единственность следует из определения РКП (4) и единственности показателя (3).

Пусть  $x^*(T, \theta)$  – РКП. Значит все агенты, принадлежащие множеству  $Q_{q(T, \theta)}$ , действуют. Но, согласно выражениям (1) и (2) этот выбор совпадает с их наилучшими ответами. Все агенты, принадлежащие множеству  $N \setminus Q_{q(T, \theta)}$ , бездействуют. Согласно формулам (2) и (3) для этих агентов  $\sum_{j \in Q_{q(T, \theta)}} t_{ij} < \theta_i, i \in N \setminus Q_{q(T, \theta)}$ . Согласно выраже-

нию (1) в этом случае наилучшим ответом является бездействие. Значит  $x_i = BR_i(x_i)$  для всех  $i$ , и  $x^*(T, \theta)$  является равновесием Нэша. Утверждение 4.1 доказано. • (символ «•» здесь и далее обозначает окончание доказательства, примера и т.п.).

Подчеркнем, что определение РКП конструктивно (см. выражения (2) – (4)) – сложность его вычисления невелика. Отметим также тот факт, что, если отсутствуют агенты с нулевыми порогами, то бездействие всех агентов является РКП. Для управления этот факт, в частности, означает, что в первую очередь следует обращать внима-

ние на «зачинников» – агентов, принимающих решение «действовать» даже когда остальные бездействуют.

**Модель с репутацией.** Обозначим среднее влияние агента  $j \in N$  на всех остальных агентов через  $r_j = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} t_{ij}$ . Назовем  $r_j$  относительной *репутацией*, другими словами тем «весом», с которым к его мнению прислушиваются или его действия учитывают остальные агенты. Влияние в модели с репутацией можно характеризовать вектором  $r = \{r_i\}_{i \in N}$ .

Действие  $x_i$   $i$ -го агента в модели с репутацией определим как наилучший ответ на сложившуюся обстановку:

$$x_i = BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j \neq i} r_j x_j \geq \theta_i, \\ 0, & \text{если } \sum_{j \neq i} r_j x_j < \theta_i. \end{cases}$$

Частным случаем модели с репутацией – так называемый *анонимный случай*, когда репутации всех агентов одинаковы и равны  $r_i = \frac{1}{n-1}$ . В этом случае в качестве порогов можно выбрать целые числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , которые образуют вектор порогов  $m$ . Упорядочим агентов в порядке неубывания порогов:  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$  и, считая  $m_0 = 0$ ,  $m_{n+1} > n$ , определим число  $p(m) \in \{0, \dots, n\}$ :

$$p(m) = \min \{k \in N \cup \{0\} \mid m_k \leq k, m_{k+1} > k\}.$$

Тогда РКП имеет следующую структуру:  $x_i^* = 1$ ,  $i = \overline{1, p(m)}$ ;  $x_i^* = 0$ ,  $i = \overline{p(m)+1, n}$ , т. е. действовать будут первые  $p(m)$  агентов (в случае  $p(m) = 0$  считаем, что все агенты бездействуют).

В работе [9] показано, что равновесие Нэша в анонимной модели можно найти, решая следующее уравнение:

$$(5) \quad F(p) = p,$$

где  $F(p) = \left| \{i \in N : m_i < p\} \right|$  – число агентов с порогами, меньшими  $p$ .

Очевидно, что РКП будет соответствовать *минимальное* решение уравнения (5).

Итак, зная пороги и репутации агентов, можно вычислить РКП. Рассмотрим теперь задачи управления – если имеется возможность изменять степени влияния и/или пороги агентов, то как это следует делать, чтобы добиться реализации требуемого РКП, причем исходя

из содержательных интерпретаций рассматриваемой модели, будем считать, что цель заключается в уменьшении числа агентов, выбирающих решение «действовать».

Агрегированным показателем состояния толпы будем считать число действующих агентов:  $K(T, \theta) = |Q_{q(T, \theta)}|$ .

В модели с репутацией вместо матрицы  $T$  подставляется вектор  $r$ . В анонимном случае  $K(m) = p(m)$ .

Обозначим векторы начальных значений матриц влияния и порогов агентов  $T^0$  и  $\theta^0$  соответственно. Пусть заданы *множества допустимых значений* влияний и порогов агентов – соответственно  $T$  и  $\Theta$ , а также заданы *выигрыши*  $H(K)$  управляющего органа – *центра* – от достигнутого состояния толпы  $K$  и его *затраты*  $C(T, \theta, T^0, \theta^0)$  на изменение репутаций и порогов агентов.

Критерием эффективности управления будем считать значение целевой функции центра, равной разности между выигрышем  $H(\cdot)$  и затратами  $C(\cdot)$ . Тогда *задача управления* примет вид:

$$(6) \quad H(K(T, \theta)) - C(T, \theta, T^0, \theta^0) \rightarrow \max_{T \in T, \theta \in \Theta} .$$

Для анонимного случая задача управления (6) примет следующий вид:

$$(7) \quad H(p(m)) - C(m, m^0) \rightarrow \max_{m \in M} ,$$

где  $M$  – множество допустимых значений векторов порогов в анонимном случае, а  $m$  и  $m^0$  – конечный и начальный векторы порогов соответственно.

Рассмотрим различные частные случаи общей задачи (6), а именно – задачу управления порогами для анонимного случая и задачу управления репутацией для неанонимного случая.

## 4.2. Управление порогами

Пусть задача центра состоит в том, чтобы обеспечить число действующих агентов равным заданному числу  $K^* \geq 0$ , т. е. заключается в *реализации* нового РКП с числом действующих агентов  $K^*$ , не превышающего старое РКП с числом действующих агентов  $p(m)$ . Содержательной интерпретацией является задача центра уменьшить число действующих в РКП агентов. Другими словами, центр, управляя значениями порогов, должен перевести положение РКП в точку,

с числом действующих агентов  $K^*$ . В анонимном случае репутации агентов одинаковы, и задача (7) примет следующий вид:

$$(8) \quad C(m, m^0) \rightarrow \min_{m \in \{\eta \mid p(\eta) = K^*\}}.$$

Пусть  $g$  – неубывающая функция от неотрицательного аргумента, который равен модулю разности между начальным и конечным значениями порога управляемого агента. Будем считать, что затраты на управление порогом одного агента

$$(9) \quad c_i \ m_i, m_i^0 = g \ |m_i - m_i^0|.$$

По смыслу затрат  $g(0) = 0$ . Полные затраты равны сумме индивидуальных затрат:

$$(10) \quad C \ m, m^0 = \sum_{i=1}^n c_i \ m_i, m_i^0 = \sum_{i=1}^n g \ |m_i - m_i^0|.$$

Для иллюстрации принципа управления порогами предположим сначала, что функция распределения порогов  $F(\cdot)$  – неубывающая, определенная на множестве неотрицательных чисел, непрерывная слева и имеющая предел справа в каждой точке. Равновесием в данном случае, по аналогии с уравнением (5), является левая точка пересечения функции распределения порогов с биссектрисой первого квадранта. Эта часть графика функции распределения изображена на Рис. 8; функция распределения порогов  $G(\cdot)$ , полученная в результате управления, изображена жирной линией.

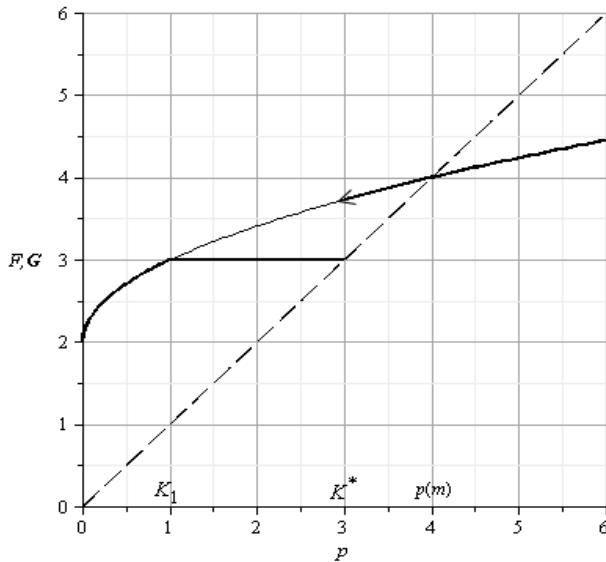


Рис. 8. Вид начальной ( $F$ ) и измененной ( $G$ ) функций распределения порогов

Так как  $p(m)$  – минимальное решение уравнения (5) (точка (4, 4) на Рис. 8), то

$$(11) \forall K < p(m) \quad F(K) > K.$$

Возможны два случая:  $F(0+) \leq K^*$  и  $F(0+) > K^*$  (например,  $K^* = 3$  и  $K^* = 1$  соответственно).

Если  $F(0+) \leq K^*$ , то, решив уравнение  $F(K_1) = K^*$ , можно найти такую точку  $K_1 = F^{-1}(K^*)$ .

В силу выражения (11)  $K^* = F(K_1) > K_1 = F^{-1}(K^*)$ . Процесс управления заключается в том, что центр изменяет все пороги, находящиеся внутри интервала  $[F^{-1}(K^*), K^*]$ , делая их равными  $K^*$ . Новая функция распределения  $G(\cdot)$  будет равна  $K^*$  на всем интервале  $[F^{-1}(K^*), K^*]$ . Значит  $G(K^*) = K^*$ .

Таким образом, получено новое значение РКП с числом действующих агентов  $K^*$ , соответствующее целям центра. Новая функция распределения  $G(\cdot)$  совпадает на Рис. 8 со старой функцией распределения  $F(\cdot)$  во всех точках вне интервала  $[F^{-1}(K^*), K^*]$ .

Для оценки затрат на перемещение порогов из некоторого малого интервала  $(t_1, t_2)$ , окружающего точку  $t$ , в точку  $K^*$  будем считать,

что функция  $F$  изменяется на этом интервале на малую величину. Поскольку число агентов на этом интервале равно  $F(t_2) - F(t_1)$ , то искомые затраты будут приблизительно равны  $g(K^*) - t \left[ F(t_2) - F(t_1) \right]$ .

Легко показать, что тогда затраты центра на управление в случае  $F(0) \leq K^*$  будут равны величине  $\int_{F^{-1}(K^*)}^{K^*} g(K^*) - t \, dF(t)$ .

Если  $F(0+) > K^*$ , то у  $[F(0+) - K^*]$  агентов с нулевыми порогами центр изменяет пороги, делая их равными  $K^*$ . Затраты на изменение порога одного агента от нуля до  $K^*$  будут, согласно формуле (9), равны  $g(K^*)$ . Затраты на изменение порогов  $[F(0+) - K^*]$  агентов с нулевыми порогами для всех случаев можно записать в виде  $g(K^*)(F(0+) - K^*)^+$ , где  $(\cdot)^+$  означает положительную часть выражения в скобках.

Таким образом, полные затраты (10) центра

$$(12) \quad c(K^*) = g(K^*) F(0+) - K^* + \int_{F^{-1}(K^*)}^{K^*} g(K^*) - t \, dF(t).$$

Утверждение 4.2. Затраты (12) минимальны для реализации центром РКП с числом действующих агентов  $K^*$ .

Доказательство утверждения 4.2. В силу определения функции  $F(\cdot)$ , для уменьшения величины  $F(K^*)$ , которая согласно выражению (11) больше  $K^*$ , необходимо увеличить пороги, находящиеся левее точки  $K^*$ , на такую величину, чтобы их значения стали не меньше значения  $K^*$ .

Поскольку функция затрат  $g$  неубывающая, то изменение значений порогов, превышающих величину  $K^*$ , приводит к избыточным (неоправданным) затратам. Поэтому для минимизации затрат необходимо, чтобы новое значение изменяемых порогов равнялось  $K^*$ .

Рассмотрим множество всех возможных результатов управления

$$\Omega = \left\{ A = \bigcup_{i=1}^q a_i, b_i \mid b_q \leq K^*; a_{i+1} > b_i, i = \overline{1, q}; \sum_{i=1}^q \left[ F(b_i) - F(a_i) \right] = F(K^*) - K^* \right\}.$$

Управление заключается в перемещении всех порогов, входящих в указанные интервалы, в точку  $K^*$ . Очевидно, что  $[F^{-1}(K^*), K^*] \in \Omega$ .

Затраты на воздействие на множестве  $A \in \Omega$

$$\int_A g(K^* - t) dF(t) = \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{b_i} g(K^* - t) dF(t).$$

Сравним полные затраты на изменение значений порогов из интервала  $[F^{-1}(K^*), K^*]$  и произвольного множества  $A \in \Omega$ . Каждые из этих затрат можно разложить на два слагаемых соответственно:

$$(13) \quad \int_{[F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t) = \int_{A \cap [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t) + \int_{[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} g(K^* - t) dF(t),$$

$$(14) \quad \int_A g(K^* - t) dF(t) = \int_{A \cap [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t) + \int_{A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t).$$

Первые слагаемые равенств (13) и (14) совпадают.

Если общие затраты для множества  $A$  и  $[F^{-1}(K^*), K^*]$  могут различаться, то только на множествах  $A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]$  и  $[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A$ . В силу определения множества  $\Omega$ , справедливо следующее равенство:

$$\sum_{A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} [F(b_i - F(a_i))] = \sum_{[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} [F(b_i - F(a_i))].$$

Затраты на перемещение порогов из множеств  $A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]$  и  $[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A$  можно оценить снизу и сверху соответственно:

$$(15) \quad \int_{A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t) \geq \min_{t \in A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) \sum_{A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} [F(b_i - F(a_i))],$$

$$(16) \quad \int_{[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} g(K^* - t) dF(t) \leq \max_{t \in [F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} g(K^* - t) \sum_{[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} [F(b_i - F(a_i))].$$

В силу монотонности функции затрат справедливо следующее неравенство:

$$(17) \quad \max_{t \in [F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} g(K^* - t) \leq \min_{t \in A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t).$$

Из неравенств (15)-(17) следует, что

$$(18) \quad \int_{[F^{-1}(K^*), K^*] \setminus A} g(K^* - t) dF(t) \leq \int_{A \setminus [F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t).$$

Из выражений (13), (14) и (18) следует, что

$$\int_{[F^{-1}(K^*), K^*]} g(K^* - t) dF(t) \leq \int_A g(K^* - t) dF(t).$$

Следствие 4.1. В оптимальном управлении изменяются только пороги, принадлежащие интервалу  $[F^{-1}(K^*), K^*]$ , если  $K^*$  находится в

области определения функции  $F^{-1}(\cdot)$ . Если  $K^*$  находится вне области определения функции  $F^{-1}(\cdot)$ , то изменяются пороги, принадлежащие интервалу  $[0, K^*]$ .

Следствие 4.2. Решение задачи управления порогами не зависит в явном виде от начального РКП.

Следствие 4.3. Полученное в результате оптимального управления РКП не устойчиво.

Действительно, малое изменение порогов влево от точки  $K^*$  «уводит» систему в новое положение равновесия (в точку пересечения с биссектрисой (например, на Рис. 8 - в точку  $(4, 4)$ )). Для обеспечения устойчивости нужно перемещать пороги правее от точки  $K^*$ .

Следствие 4.4. Результат утверждения 4.2 останется в силе и в случае, когда затраты на изменение порога агента равны  $g \left| m_i - m_i^0 \right| / L(m_i^0)$ , где  $L(\cdot)$  – любая измеримая строго возрастающая функция от значения начального порога.

Имея решение (12) задачи (8) (далее в Примерах 4.1 и 4.2 для ряда частных случаев получено аналитическое решение), можно вернуться к задаче (7), которая превратится в следующую задачу скалярной оптимизации:  $H(K^*) - c(K^*) \rightarrow \max_{K^*}$ .

Пример 4.1. Будем рассматривать относительные пороги  $\theta_i = m_i / n$ . Пусть их функция распределения представляет собой распределение Парето с показателем  $\alpha > 1$ :

$$(19) \quad F_{\alpha\beta} x = \frac{x^\alpha + \beta}{1 + \beta}, \quad x \leq 1, \quad \beta > 0.$$

Тогда плотность распределения  $f_{\alpha\beta} x = \alpha x^{\alpha-1} / (1 + \beta)$ .

Обратная функция к функции распределения определена на отрезке  $\frac{\beta}{1 + \beta} \leq x \leq 1$  и имеет вид  $F_{\alpha\beta}^{-1} x = 1 + \beta x - \beta^{1/\alpha}$ .

Уравнение для РКП запишется как:

$$(20) \quad x^\alpha - 1 + \beta x + \beta = 0.$$

Пусть  $p$  – минимальный положительный корень уравнения (20). В силу строгого возрастания распределения (19)  $p > \beta / (1 + \beta)$ .

Введем функцию затрат  $g x = |x|$ .

Пусть целевая точка равновесия  $k^* = K^* / n$ . Тогда затраты на реализацию этого РКП,  $p \geq k^* \geq \beta / (1 + \beta)$ ,

$$(21) \quad \begin{aligned} C_{\alpha\beta} \ k^* &= \int_{F_{\alpha\beta}^{-1} k^*}^{k^*} g \ k^* - t \ dF_{\alpha\beta} \ t = k^* \ F_{\alpha\beta} \ k^* - k^* - \frac{\alpha}{1 + \beta} \int_{F_{\alpha\beta}^{-1} k^*}^{k^*} t^\alpha dt = \\ &= k^* \left( \frac{k^*^\alpha + \beta}{1 + \beta} - k^* \right) - \frac{\alpha \ k^*^{\alpha+1} - 1 + \beta \ k^* - \beta^{\alpha+1/\alpha}}{1 + \beta \ 1 + \alpha}. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $0 < k^* < \beta / (1 + \beta)$ . Тогда расходы на реализацию этого РКП

$$(22) \quad \begin{aligned} C_{\alpha\beta} \ k^* &= k^* \left( \frac{\beta}{1 + \beta} - k^* \right) + \int_0^{k^*} g \ k^* - t \ dF_{\alpha\beta} \ t = k^* \left( \frac{\beta}{1 + \beta} - k^* \right) + \\ &+ \frac{k^*^{\alpha+1}}{1 + \beta} - \frac{\alpha}{1 + \beta} \int_0^{k^*} t^\alpha dt = k^* \left( \frac{\beta}{1 + \beta} - k^* \right) + \frac{k^*^{\alpha+1}}{1 + \beta \ 1 + \alpha}. \end{aligned}$$

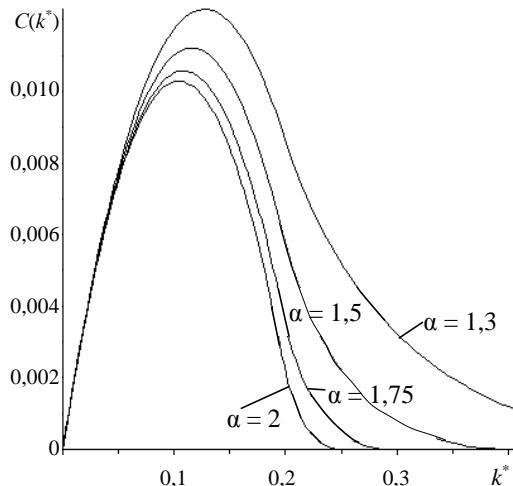


Рис. 9. Семейство функций затрат  $c(k^*)$  на управление (Пример 4.1)

Семейство графиков функции затрат (21) и (22) для различных значений параметра  $\alpha = 1,3; 1,5; 1,75; 2$  и  $\beta = 0,25$  изображено на

Рис. 9. Видно, что затраты возрастают при уменьшении показателя  $\alpha$  распределения Парето. Это означает, если пороги распределены более равномерно (показатель  $\alpha$  меньше), то целевое РКП реализуется с относительно большими затратами.

Максимум затрат достигается в тех точках, где функция распределения максимально «далека» от биссектрисы первого квадранта (см. также Рис. 8). Это приводит к тому, что пороги относительно большого числа агентов нужно изменять на большую величину и, соответственно, затраты увеличиваются.

Для всех значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$  затраты на реализацию нулевого РКП равны нулю. Действительно, достаточно сдвинуть нулевые пороги на малую величину, чтобы получить малое РКП. Так что, если перед центром стоит задача реализовать новую точку РКП, меньшую, чем  $p$  (РКП без управления), то оптимальным управлением будет изменить нулевые пороги на малую величину, т. е., другими словами, избавить толпу от зачинщиков. •

В Примере 4.1 функция затрат  $g(\cdot)$  на изменение порогов не зависит явным образом от начальных значений порогов агентов, а определяется только размером изменения порогов. Рассмотрим в следующем примере другую функцию затрат, которая явным образом зависит от начального значения порога.

Пример 4.2. Будем считать, что в условиях Примера 4.1 функция затрат на изменение порогов имеет следующий вид:

$$(23) \quad g(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|/x_1.$$

Пусть целевая точка РКП равна  $k^*$ . Тогда затраты для  $p \geq k^* \geq \beta/(1+\beta)$  будут равны:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} k^* &= \int_{F_{\alpha\beta}^{-1} k^*}^{k^*} g(k^*, k^* - t) dF_{\alpha\beta}(t) = F_{\alpha\beta}(k^*) - k^* - \frac{\alpha}{1+\beta} \int_{F_{\alpha\beta}^{-1} k^*}^{k^*} t t^{\alpha-1} dt = \\ &= \left( \frac{k^* - \beta}{1+\beta} - k^* \right) - \frac{\alpha k^* - 1 + \beta k^* - \beta}{k^* (1+\beta) (1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $0 < k^* < \beta/(1+\beta)$ . Тогда расходы на этом интервале будут бесконечно большие, так как необходимо изменить нулевые пороги на величину  $k^*$ , а это, согласно формуле (23), требует бесконечно больших затрат. Это означает, что центр может реализовать

только РКП из интервала  $p \geq k^* \geq \beta/(1+\beta)$ . Семейство графиков функции затрат для различных значений параметра  $\alpha = 1,3; 1,5; 1,75; 2$  и  $\beta = 0,25$  изображено на Рис. 10. •

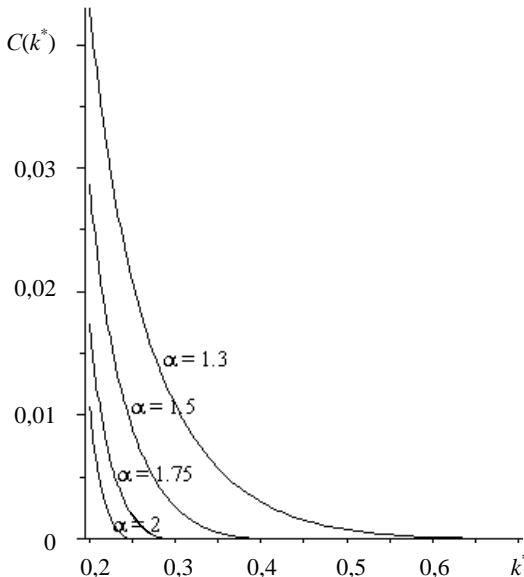


Рис. 10. Семейство функций затрат  $c(k^*)$  на управление  
(Пример 4.2)

В Примере 4.2 функция затрат на управление обладает легко интерпретируемым свойством монотонности – чем больше отклонение нового РКП (реализуемого центром в процессе управления порогами агентов) от старого (в отсутствии управления), тем выше затраты.

### 4.3. Управление репутацией

Пусть имеет место не анонимный случай, пороги агентов фиксированы, т. е. рассмотрим задачу управления репутацией. Предположим, что задача центра состоит в том, чтобы обеспечить число действующих агентов, не превышающее заданного числа  $K^* \geq 0$ . Тогда задача управления примет вид

$$C(r, \theta, r^0, \theta) \rightarrow \min_{r \in R \cap \{ \eta \mid |Q_{q(\eta, \theta^0)}| \leq K^* \}} .$$

В первоначальном РКП действуют только агенты из множества  $Q_k$ , т. е. имеет место следующая система неравенств:

$$(24) \begin{cases} \sum_{j \in Q_k \setminus \{i\}} r_j^0 \geq \theta_i, i \in Q_k, \\ \sum_{j \in Q_k} r_j^0 < \theta_i, i \in N \setminus Q_k. \end{cases}$$

Фиксируем некоторое множество  $P \subseteq N$  и запишем по аналогии с выражением (24) условия того, что при новых значениях репутаций действуют только агенты из этого множества:

$$\begin{cases} \sum_{j \in P \setminus \{i\}} r_j \geq \theta_i, i \in P, \\ \sum_{j \in P} r_j < \theta_i, i \in N \setminus P. \end{cases}$$

Обозначим через  $c(P)$  оптимальное значение критерия следующей оптимизационной задачи:

$$(25) C(r, \theta, r^0, \theta) \rightarrow \min_{r: (24)} .$$

Отметим, что в задаче (25) минимизация ведется на множестве, описываемом  $n$  линейными неравенствами. Если и затраты линейны (или выпуклы), то это задача линейного (соответственно, выпуклого) программирования.

Значение  $c(P)$  характеризует минимальные затраты на управление репутацией агентов, при котором действуют агенты из множества  $P \subseteq N$  и только они. Если задача центра заключается в том, чтобы обеспечить число действующих агентов, равное заданному числу  $K^* \geq 0$ , то для минимизации затрат на управление необходимо решить задачу (25) для каждого из  $K^*$ -элементных множеств  $P$ , а затем выбрать то множество  $P^*$ , на котором достигается минимум затрат:

$$P^* = \arg \min_{P \in \{W \in 2^N : |W| = K^*\}} c(P).$$

#### 4.4. Рефлексивное управление

Выше рассмотрены два случая управления со стороны центра – воздействия на пороги агентов и на их репутации. Проанализируем возможности *рефлексивного управления*, в котором центр воздейст-

вует на представления агентов о параметрах друг друга, на представления о представлениях и т. д. [59, 60]. В качестве предмета управления выберем пороги агентов. *Рефлексивным управлением* будет формирование у агентов структур информированности вида:  $\theta_{ij}$  - представления  $i$ -го агента о пороге  $j$ -го (структура информированности второго ранга или глубины два);  $\theta_{ijk}$  – представления  $i$ -го агента о представлениях  $j$ -го агента о пороге  $k$ -го агента (структура информированности третьего ранга или глубины три) и т. д. Обладая той или иной структурой информированности, агенты выбирают действия, являющиеся *информационным равновесием* [73], в котором каждый агент выбирает свои действия как наилучший ответ на те действия, которые в рамках его представлений должны выбрать оппоненты.

Воспользовавшись результатами предыдущих подразделов, характеризующими значения порогов, приводящих к требуемому РКП, можно условно считать, что любой результат, достижимый путем реального изменения порогов, может быть по аналогии реализован информационным управлением (изменением представлений агентов о порогах друг друга). С этой точки зрения информационное управление порогами эквивалентно просто управлению порогами, будучи при этом, наверное, более мягким, чем последнее.

Однако при реализации информационного управления в задачах управления поведением толпы существует одна проблема. Одно из свойств «хорошего» информационного управления состоит в его *стабильности* [73] – свойстве, заключающемся в том, что все агенты наблюдают в реальности те результаты, которых ожидали.

Предположим, что в рассматриваемой модели толпы каждый агент апостериори наблюдает число агентов, принявших решение «действовать» (отметим, что это достаточно слабое предположение по сравнению с взаимной наблюдаемостью индивидуальных действий). Тогда стабильным будет информационное управление, при котором каждый агент увидит, что реально действует ровно столько агентов, сколько он и ожидал увидеть действующими. Требование стабильности существенно при длительных взаимоотношениях управляющего центра и агентов – если (при нестабильном информационном управлении) агенты один раз усомнятся в достоверности сообщаемой центром информации, то и в дальнейшем они будут иметь все основания в ней сомневаться.

Утверждение 4.3. В анонимном случае не существует стабильного информационного равновесия, при котором действуют строго меньшее число агентов, чем в РКП.

Доказательство утверждения 4.3. Обозначим через  $Q_\Sigma$  множество агентов, действующих в стабильном информационном равновесии. Предположим, что их число не превышает числа действующих в РКП  $|Q_\Sigma| \leq |Q_{p(\theta)}|$ . В силу стабильности информационного равновесия для каждого агента  $i \in Q_\Sigma$  должно быть выполнено  $|Q_\Sigma| - 1 = \sum_{j \neq i} x_j \geq (n-1)\theta_i$ . Значит  $|Q_{p(\theta)}| - 1 \geq (n-1)\theta_i$ , из чего следует,

что  $i \in Q_{p(\theta)}$ . Таким образом,  $Q_\Sigma \subseteq Q_{p(\theta)}$ . Если существуют бездействующие агенты в  $Q_{p(\theta)} \setminus Q_\Sigma$ , то для них это равновесие нестабильно. Поэтому  $Q_\Sigma = Q_{p(\theta)}$  для стабильного информационного равновесия.

«Негативный» результат утверждения 4.3 свидетельствует о сложности осуществления долгосрочного информационного управления пороговым поведением толпы.

Итак, в настоящем разделе сформулированы и решены для ряда важных частных случаев задачи управления коллективным пороговым поведением толпы путем управления порогами агентов, репутацией агентов и путем рефлексивного управления. Перспективным представляется исследование эффективности совместного применения этих видов управления.

## 5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЛПОЙ

В настоящем разделе рассматривается модель порогового поведения агентов, которые, принимая бинарные решения (действовать или не действовать), учитывают выбор других членов группы. Ставится и решается задача управления – случайного выбора начальных состояний части агентов в целях изменения числа тех из них, кто в равновесии выбирает решение «действовать» [13].

Ниже описаны *стохастические модели* управления пороговым поведением, в рамках которых множество агентов, пороги которых изменяются, или значения этих порогов, выбираются случайным образом (см. также третий раздел и [12]). Одним из средств такого управления на практике может быть воздействие СМИ [60] или

любые другие *унифицированные* (информационные, мотивационные и/или институциональные [114]) воздействия на агентов (см. обзоры в [17, 20, 43, 47, 64, 74]).

Например, возможны следующие интерпретации потенциальных управлеченческих воздействий: обнуляются (что соответствует «воздуждению») либо делаются максимальными (что соответствует «иммунизации» – полной невосприимчивости к социальному давлению) пороги заданной доли агентов, выбираемых случайнм образом. Или можно считать, что каждый агент может быть с заданной вероятностью возбужден или/и иммунизирован. И т.д. Подобные трансформации порогов агентов приводят к соответствующему изменению равновесного состояния управляемой социальной системы (сети, толпы) – см. подробности ниже.

Еще одним способом управления пороговым поведением (а не порогами агентов) является *управление составом* (см. классификацию видов управления в [114]), т.е. внедрение в социальную систему дополнительных агентов с нулевыми (таких агентов будем называть *привокаторами*) и максимальными (таких агентов будем называть *иммунизаторами*) порогами. При этом равновесие социальной системы будет зависеть от числа внедренных агентов соответствующего типа.

Если имеются два управляющих органа (*центра*), осуществляющих противоположные информационные воздействия на агентов, то такую ситуацию *распределенного контроля* [58] можно интерпретировать как *информационное противоборство* [21, 22, 25, 56] между центрами. Имея результаты анализа управлений каждым из центров поодиночке, можно ставить задачи описания их взаимодействия в терминах теории игр.

Начнем с управления порогами агентов, которое приводит к изменению функции распределения порогов, приводящему к «воздуждению» толпы.

## 5.1. Управление «воздуждением» толпы

Предположим, что пороги агентов являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с теоретической функцией распределения  $F(\cdot)$ . Итак, в соответствии с выражениями (2.7)-(2.9) РКП толпы определяется функцией распределения порогов агентов. Следовательно, управление, заключающееся в

изменении последней, будет приводить к соответствующему изменению РКП. Рассмотрим некоторые возможные постановки задач управления.

Пусть в результате управлеченческого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным нулю с одинаковой для всех агентов вероятностью  $\alpha \in [0; 1]$ . Данную модель будем называть **моделью I**. Так как в соответствии с (2.1) агенты, имеющие нулевые пороги, выбирают единичные действия независимо от действий других агентов, то параметр  $\alpha$  может интерпретироваться как доля первоначально возбуждаемых агентов.

Утверждение 5.1. В результате «возбуждения» пороги агентов будут описываться функцией распределения

$$(1) F_\alpha(x) = \alpha + (1 - \alpha) F(x).$$

Доказательство утверждения 5.1. Пусть дан вектор  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  независимых одинаково распределённых (с распределением  $F(\cdot)$ ) случайных величин. Над этим вектором производится преобразование (также содержащее случайность): каждый порог  $\theta_i$  с вероятностью  $\alpha$  может обнулиться. В результате этого преобразования получаем другой случайный вектор  $\theta'$ , который имеет некоторое распределение  $F_\alpha(\cdot)$ . Найдем это распределение.

Компоненты вектора  $\theta'$  представим в виде  $\theta'_i = \theta_i \zeta_i$ , где  $P(\zeta_i = 0) = \alpha$ ,  $P(\zeta_i = 1) = 1 - \alpha$ , все элементы множества  $\{\zeta_i, \theta_i\}$  парно независимы.

Найдём функцию распределения  $F_\alpha(\cdot)$  случайной величины  $\theta'_i$ :

$$F_\alpha(x) = P(\theta'_i \leq x) = P(\theta_i \zeta_i \leq x) = P(\zeta_i = 0) + P(\zeta_i = 1, \theta_i \leq x).$$

В силу независимости  $\zeta_i$  и  $\theta_i$ , имеем

$$P(\zeta_i = 1, \theta_i \leq x) = P(\zeta_i = 1) P(\theta_i \leq x) = (1 - \alpha) F(x),$$

и получаем выражение (1). •

Подставляя новую функцию распределения (1) в уравнение (2.8), можно найти  $\alpha$ , которое приводит к реализации заданного РКП  $y$ :

$$(2) \alpha(y) = \frac{y - F(y)}{1 - F(y)}.$$

Из выражения (2) следует, что если для некоторого  $y \in (0; 1]$   $\alpha(y) < 0$ , то данное РКП не может быть реализовано рассматриваемым видом управлеченческого воздействия.

Обозначим через  $x^*(\alpha)$  РКП (2.9), соответствующее функции распределения (1),  $W_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} x^*(\alpha)$  - множество достижимости, т.е.

множество таких долей агентов, возбуждение которых может быть реализовано как РКП при некотором управлении.

Простой аналитический вид функции распределения (1) позволяет легко получать ответы на многие содержательные вопросы.

Утверждение 5.2. Если  $F(\cdot)$  – строго выпуклая функция и  $F(0) = 0$ , то  $W_\alpha = [0; 1]$ , т.е. выбором значения параметра  $\alpha$  любая доля возбужденных агентов может быть реализована как РКП.

Доказательство утверждения 5.2. В силу условия  $F(0) = 0$  границы единичного отрезка реализуются как РКП при нулевых и единичных значениях параметра  $\alpha$ .

Фиксируем произвольную точку  $x_1 \in (0, 1)$ . В силу выпуклости функции  $F(\cdot)$  весь ее график лежит не выше биссектрисы и решение  $0 \leq \alpha(x_1) < 1$  уравнения  $F_\alpha(x_1) = x_1$  существует. Отсюда и в силу определения (2) следует  $F_\alpha x_1 = \alpha x_1 + 1 - \alpha x_1 F x_1 = x_1$  и, соответственно,  $F' x_1 = \frac{x_1 - \alpha x_1}{1 - \alpha x_1}$ , откуда следует равенство  $F'_\alpha x_1 - 0 = 1 - \alpha x_1 F' x_1 - 0$ .

Из строгой монотонности производной строго выпуклой функции следует, что

$$F' x_1 - 0 = \frac{\int_{x_1}^1 dx}{1 - x_1} F' x_1 + 0 = \frac{\int_{x_1}^1 dx}{1 - x_1} < \frac{\int_{x_1}^1 F' x + 0 dx}{1 - x_1} = \frac{1 - F x_1}{1 - x_1}.$$

Далее, получаем

$$F'_\alpha x_1 - 0 = 1 - \alpha x_1 F' x_1 - 0 < 1 - \alpha x_1 \frac{1 - \frac{x_1 - \alpha x_1}{1 - \alpha x_1}}{1 - x_1} < 1,$$

т.е. положение равновесия  $x_1$  является устойчивым, так как график функции  $F(\cdot)$  пересекает биссектрису, приближаясь к ней «слева – сверху». •

Если задан выигрыш центра  $H(x)$  от возбуждения доли агентов  $x$  и его затраты  $c_\alpha(\alpha)$  на осуществление управленческого воздействия,

то задача управления возбуждением толпы может быть сформулирована как

$$(3) H(x^*(\alpha)) - c_\alpha(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha \in [0;1]} .$$

Пример 5.1. Рассмотрим в качестве примеров следующие функции распределения:

$$(I) F_I(x) = x,$$

$$(II) F_{II}(x) = x^2,$$

$$(III) F_{III}(x) = \sqrt{x} .$$

Для функций распределения (I)–(III) получаем из (2):

$-\alpha^I(y) = 0$ , т.е. в этом случае единственным РКП является единичное ( $W^I = \{1\}$ );

$$-\alpha^{II}(y) = \frac{y}{1+y}, x^{II*}(\alpha) = \frac{1-|1-2\alpha|}{2(1-\alpha)}, W_\alpha^{II} = [0; 1];$$

$-\alpha^{III}(y) = -\sqrt{y} \leq 0$ , т.е. в этом случае единственным РКП является единичное ( $W_\alpha^{III} = \{1\}$ ). •

Возможно «динамическое» обобщение рассматриваемой модели, когда в каждый период  $t$  дискретного времени каждый агент может независимо возбудиться с вероятностью  $\alpha$  (в том числе может оказаться, что один и тот же агент возбудился «несколько раз»). В этом случае получим функцию распределения

$$(4) F_\alpha(t, x) = 1 - (1 - \alpha)^t + (1 - \alpha)^t F(x), t = 0, 1, 2, \dots .$$

Другой вариант «динамического» обобщения – когда вероятности возбуждения в каждом периоде времени в общем случае различны – может быть сведен к случаю единственного периода времени. Действительно, легко проверить, что функция распределения, соответствующая двум периодам времени с вероятностями независимого возбуждения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно, имеет вид (1), где

$$(5) \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2.$$

Рассмотрим другой способ управления положением равновесия (**модель II**) – когда к множеству  $N$  (напомним, что  $\#N = n$ ) добавляются  $k$  внешних *привокаторов* (множество  $K$ ). Они имеют пороги  $\theta_i = 0 \quad \forall i \in K$  и всегда действуют. Тогда вероятность того, что произвольно выбранный агент из нового множества агентов  $N \cup K$

имеет порог, не превышающий  $x$ , складывается из вероятностей двух независимых событий:

1) вероятности того, что выбранный агент является внешним провокатором, а именно  $\frac{k}{k+n}$ ;

2) вероятности того, что выбранный агент не является внешним провокатором и его порог не превышает  $x$ :  $\left(1 - \frac{k}{k+n}\right)F(x)$ .

Таким образом, получено новое множество агентов, пороги которых являются независимыми и одинаково распределенными величинами со следующей функцией распределения:

$$(6) \quad F_k(x) = \frac{k}{k+n} + \left(1 - \frac{k}{k+n}\right)F(x).$$

В модели I вероятность  $\alpha$ , кроме как вероятность возбуждения произвольного агента, может быть проинтерпретирована как вероятность встретить такого агента с нулевым порогом. Поэтому разумно ввести то же обозначение и для вероятности встретить внешнего провокатора во второй модели:  $\alpha = \frac{k}{k+n}$ .

Как видно из сравнения функций распределения (1) и (6), в случае, когда речь идет только о «возбуждении» части агентов, модели I и II являются эквивалентными.

Перейдем теперь к «обратному» управлению, а именно к снижению возбуждения, т.е. к так называемой «иммунизации» толпы.

## 5.2. Управление «иммунизацией» толпы

Пусть в результате управляемого воздействия порог каждого агента независимо от других агентов может стать равным единице с одинаковой для всех агентов вероятностью  $\beta \in [0; 1]$ . Так как, в соответствии с (2.1), агенты, имеющие единичные пороги, действовать не будут, то параметр  $\beta$  может интерпретироваться как доля первоначально «иммунизируемых» агентов. По аналогии с утверждением 5.1 можно показать, что в результате «иммунизации» пороги агентов будут описываться функцией распределения

$$(7) F_\beta(x) = \begin{cases} (1-\beta) F(x), & x \in [0;1], \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

Обозначим через  $x^*(\beta)$  РКП, соответствующее функции распределения (7), через  $W_\beta = \bigcup_{\beta \in [0;1]} x^*(\beta)$  – множество достижимости.

Подставляя новую функцию распределения (7) в уравнение (2.8), можно найти  $\beta$ , которое приводит к реализации заданного РКП  $y$ :

$$(8) \beta(y) = 1 - \frac{y}{F(y)}.$$

Из выражения (8) следует, что, если для некоторого  $y \in (0; 1]$   $\beta(y) < 0$ , то данное РКП не может быть реализовано рассматриваемым видом управлеченческого воздействия.

Утверждение 5.2а. Если  $F(\cdot)$  – строго вогнутая функция и  $F(0) = 0$ , то  $W_\beta = [0; 1]$ , т.е. выбором значения параметра  $\beta$  любая доля возбужденных агентов может быть реализована как РКП.

Утверждение 5.2а можно доказать аналогично утверждению 5.2.

Пример 5.2. Для функций распределения (I)–(III) получаем из (8):

$-\beta^I(y) = 0$ , т.е. в этом случае единственным РКП является нулевое ( $W_\beta^I = \{0\}$ );

$-\beta^{II}(y) = 1 - \frac{1}{y} \leq 0$ , т.е. в этом случае единственным РКП является нулевое ( $W_\beta^{II} = \{0\}$ );

$$-\beta^{III}(y) = 1 - \sqrt{y}, x^{III*}(\beta) = (1-\beta)^2, W_\beta^{III} = [0; 1]. \bullet$$

Пример 5.3. Приведем пример решения задачи (3) с функцией распределения (III). Пусть центр заинтересован в минимизации доли возбужденных агентов:  $H(x) = -x$ , и несет затраты  $c_\beta(\beta) = \lambda \beta$ , где  $\gamma \geq 0$ . Получим задачу  $-(1-\beta)^2 - \lambda \beta \rightarrow \max_{\beta \in [0;1]}$ . Решение этой задачи

$$\beta^* = 1 - \frac{\lambda}{2} \text{ соответствует реализации РКП } \frac{\lambda^2}{4}. \bullet$$

Рассмотрим, как и в предыдущем подразделе, модель II - способ управления положением равновесия, когда к множеству  $N$  добавляются  $l$  иммунизаторов (множество  $L$ ). Иммунизаторы не действуют никогда и имеют пороги  $\theta_i = 1 \forall i \in L$ . Тогда вероятность того, что

произвольно выбранный агент имеет порог, не превышающий  $x < 1$ , равна вероятности того, что выбранный агент не является иммунизатором и его порог не превышает  $x < 1$ , т.е.  $\left(1 - \frac{l}{l+n}\right)F(x)$ .

Так как вероятность того, что порог произвольно выбранного агента не превышает единицы, равна единице, то получили новое множество  $N \cup L$  агентов, пороги которых являются независимыми и одинаково распределенными величинами со следующей функцией распределения:

$$(9) \quad F_L(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{l}{l+n}\right)F(x), & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

В первой модели вероятность  $\beta$ , кроме как вероятность иммунизации произвольного агента, может быть проинтерпретирована как вероятность встретить такого агента с единичным порогом. Поэтому разумно ввести то же обозначение и для вероятности встретить внешнего иммунизатора во второй модели:  $\beta = \frac{l}{l+n}$ .

Как видно из сравнения функций распределения (7) и (9), в случае, когда речь идет только об иммунизации части агентов, модели I и II являются эквивалентными.

Перейдем теперь к рассмотрению модели управления со стороны двух центров одновременно - по возбуждению и иммунизации толпы соответственно.

### 5.3. Информационное противоборство

Выше толпа рассматривалась как объект управления, осуществляемого одним субъектом – *центром*. В случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях сети и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия (так называемая *система с распределенным контролем* [58]), возникает взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на сеть, называется *информационным противоборством* (см. обзор в [25]). Такие ситуации обычно описываются игрой в нормальной форме между центрами, причем выбираемые центрами стратегии опреде-

ляют параметры игры между агентами [114]. Примерами служат модели информационного противоборства в социальных сетях [21, 56], на когнитивных картах [113] и др. – см. обзор [52]. Как отмечается в [57], возможны и более сложные ситуации, когда управлеченческие воздействия «несимметричны» – например, в ситуации «нападение/защита» один центр воздействует на начальные состояния агентов, а другой (одновременно с первым или уже зная его выбор) изменяет структуру связей между ними или/и их пороги. Такие ситуации могут быть описаны в рамках моделей иерархических игр.

Рассмотрим случай информационного противоборства, когда имеются два центра и доля  $\alpha \in [0, 1]$  агентов «возбуждается» первым центром, а доля  $\beta \in [0, 1]$  агентов «иммунизируется» (или каждый агент независимо с соответствующей вероятностью может быть возбужден или/и иммунизирован) вторым центром. Для определенности предположим, что если некоторый агент возбуждается и иммунизируется одновременно, то его порог не меняется (модель I). Тогда получим следующую функцию распределения порогов агентов:

$$(10) \quad F_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha(1-\beta) + (1-\alpha-\beta + 2\alpha\beta) F(x), & x \in [0;1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Обозначим через  $x^*(\alpha, \beta)$  РКП, соответствующее функции распределения (10). Обозначим также  $y \alpha, \beta = \inf x : x \in [0, 1], F_{\alpha,\beta} x = x$  наименьший отличный от нуля корень уравнения  $F_{\alpha,\beta} x = x$ . В соответствии с (2.7) и (2.9) равновесием коллективного поведения будет

$$x^*(\alpha, \beta) = \begin{cases} y \alpha, \beta, & \text{если } \forall z \in [0, y \alpha, \beta] F_{\alpha,\beta} z \geq z, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Утверждение 5.3. Для любого  $\beta \in [0, 1]$   $x^*(\alpha, \beta)$  монотонно неубывает по  $\alpha$ .

Доказательство утверждения 5.3. Рассмотрим частную производную  $\frac{\partial}{\partial \alpha} F_{\alpha,\beta}(x)$  в произвольной точке  $x \in [0, 1)$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha(1-\beta) + (1-\alpha-\beta + 2\alpha\beta) F(x) =$$

$$1-\beta + 2\beta - 1 F(x) = 1-\beta - 1 F(x) + \beta F(x).$$

Заметим, что  $(1 - \beta)(1 - F(x)) \geq 0$  и  $\beta F(x) \geq 0$ . Получаем  $\frac{\partial}{\partial \alpha} F_{\alpha, \beta} x \geq 0$ . Отсюда следует, что  $F_{\alpha_2, \beta} x \geq F_{\alpha_1, \beta} x$  при  $\alpha_2 > \alpha_1$ .

Из этого соотношения и того, что того что при  $\alpha_2 > \alpha_1$   $F_{\alpha_1, \beta}(x) \geq x \forall x: x < x^* \alpha_1, \beta$  следует  $F_{\alpha_2, \beta}(x) \geq x \forall x: x < x^* \alpha_1, \beta$ . А значит,  $x^*(\alpha_2, \beta) \geq x^*(\alpha_1, \beta)$ . •

Утверждение 5.4. Для любого  $\alpha \in [0, 1]$   $x^*(\alpha, \beta)$  монотонно не-возрастает по  $\beta$ .

Доказательство утверждения 5.4 аналогично доказательству утверждения 5.3.

Обозначим через  $W_{\alpha, \beta} = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2} x^*(\alpha, \beta)$  - множество дости-

жимости.

Обозначим через  $V_{\alpha, \beta}$  множество достижимых равновесий, т.е множество тех точек, которые при выборе некоторого управления  $(\alpha, \beta)$  оказываются точками устойчивого равновесия системы (РКП). Из определения следует, что  $W_{\alpha, \beta} \subseteq V_{\alpha, \beta}$ . Точки множества  $V_{\alpha, \beta}$  являются точками, реализующими РКП при некотором выборе  $x_0$ , в общем случае отличном от  $x_0 = 0$ , принятого в данном разделе.

Подставляя новую функцию распределения (10) в уравнение (2.7), можно найти пары  $(\alpha, \beta)$ , которые приводят к реализации заданного РКП.

Пример 5.4. В качестве примера функции распределения рассмотрим выражение (I), для которого получаем

$$(11) x^*(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(1 - \beta)}{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}.$$

График функции распределения  $F_{\alpha, \beta}^I(x)$  приведен на Рис. 11.

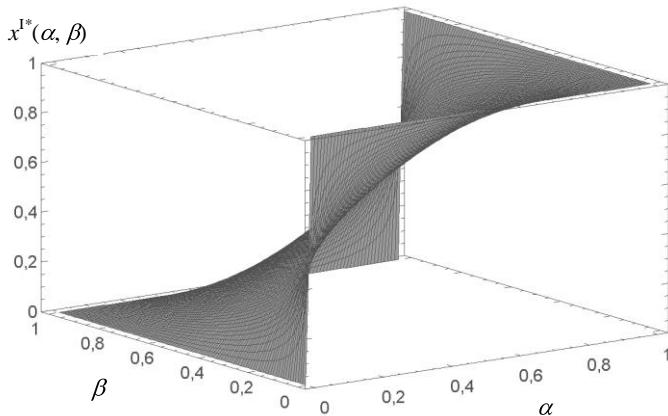


Рис. 11.  $x^{I*}(\alpha, \beta)$  для  $F(x) = x$

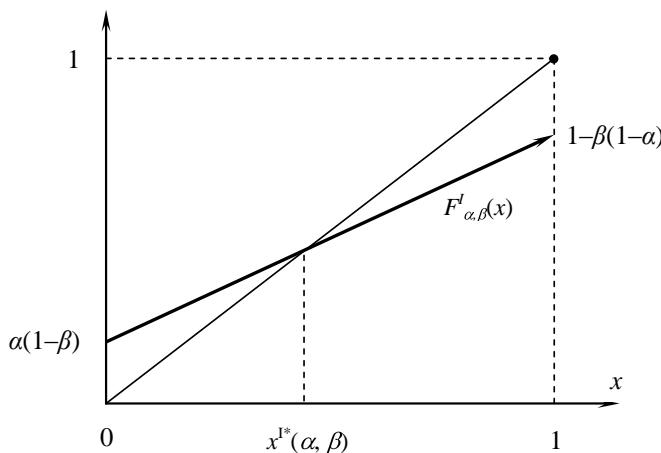


Рис. 12. График функции распределения  $F_{\alpha,\beta}^I(x)$

В настоящем примере  $W_{\alpha,\beta} \subseteq V_{\alpha,\beta} = [0, 1]$ . •

Для нахождения множества достижимости, а также для определения класса функций, для которых имеет место  $W_{\alpha,\beta} = [0, 1]$ , запишем функцию распределения порогов агентов, получающуюся в результате воздействия центров, в виде

$$F_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \delta \alpha, \beta + k \alpha, \beta F(x), & x \in [0, 1], \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

где

$$(12) \begin{cases} \delta \alpha, \beta = \alpha 1 - \beta, \\ k \alpha, \beta = 1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta. \end{cases}$$

Легко убедиться, что не любые значения  $\delta \in [0, 1]$ ,  $k \in [0, 1]$  могут быть получены путём преобразования (12) некоторых  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . При этом ограничение  $k + \delta \leq 1$  (следующее из свойств функции распределения) не единственное (см. Рис. 13).

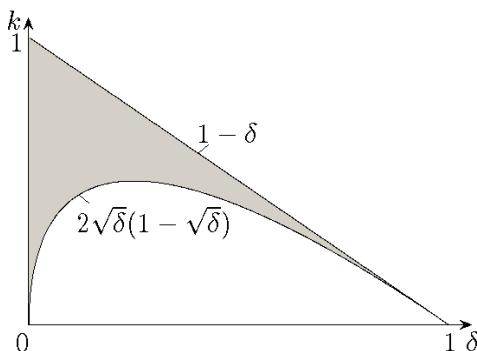


Рис. 13. Область значений преобразования  $(\alpha, \beta) \rightarrow (\delta, k)$  (выделена серым цветом)

Утверждение 5.5. Множество значений преобразования (12) есть множество точек  $(\delta, k)$  единичного квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ , удовлетворяющих условиям

$$(13) \quad k \leq 1 - \delta, \quad k \geq 2\sqrt{\delta}(1 - \sqrt{\delta}).$$

Доказательство утверждения 5.5.

1. Докажем, что  $k(\alpha, \beta) \leq 1 - \delta(\alpha, \beta)$  при  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\beta \in [0, 1]$ .

Подставим  $\delta(\alpha, \beta)$  в выражение (12) для  $k(\alpha, \beta)$ :

$$k(\alpha, \beta) = 1 - \alpha - \beta + 2\alpha\beta = 1 - \delta(\alpha, \beta) - \beta(1 - \alpha).$$

Замечая, что  $\beta(1 - \alpha) \geq 0$ , получаем  $k(\alpha, \beta) \leq 1 - \delta(\alpha, \beta)$ .

2. Докажем, что  $k_{\alpha, \beta} \geq 2\sqrt{\delta_{\alpha, \beta}} \frac{1-\sqrt{\delta_{\alpha, \beta}}}{1+\sqrt{\delta_{\alpha, \beta}}}$  при  $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1]$ .

При  $\alpha = 0$  неравенство выполнено, так как  $\delta_{\alpha, \beta} = 0$  и  $k_{\alpha, \beta} = 1 - \beta \geq 0$ .

При  $\beta = 0$  аналогично  $\delta_{\alpha, \beta} = 0$  и  $k_{\alpha, \beta} = 1 - \alpha \geq 0$ .

При  $\alpha > 0, \beta > 0$  выразим из первого уравнения системы (12)  $\beta$  через  $\alpha$  и  $\delta_{\alpha, \beta}$  и подставим во второе уравнение системы (12):

$$(14) \quad k_{\alpha, \beta} = 1 - \delta_{\alpha, \beta} - \left(1 - \frac{\delta_{\alpha, \beta}}{\alpha}\right) 1 - \alpha = \alpha + \frac{\delta_{\alpha, \beta}}{\alpha} - 2\delta_{\alpha, \beta}.$$

Зафиксируем  $\delta = \delta_{\alpha, \beta} = \text{const}$  и найдём минимум  $k_{\alpha, \delta}$  по  $\alpha$ . Условие экстремума:  $\frac{\partial k_{\alpha, \delta}}{\partial \alpha} = 1 - \frac{\delta}{\alpha^2} = 0$ . Уравнение  $1 - \delta/\alpha^2 = 0$  имеет единственное положительное решение  $\alpha = \sqrt{\delta}$  для  $\delta \in [0, 1]$  (что выполнено при  $\alpha > 0, \beta > 0$ ). В точке  $\alpha = \sqrt{\delta}$  функция  $k_{\alpha, \delta}$  достигает минимума по  $\alpha$ :  $\min_{\alpha \in [0, 1]} k_{\alpha, \delta} = k_{\sqrt{\delta}, \delta} = 2\sqrt{\delta} \frac{1-\sqrt{\delta}}{1+\sqrt{\delta}}$ .

Остаётся показать, что любая точка  $(\delta_0, k_0)$ , лежащая в указанной области, является образом некоторой точки единичного квадрата.

3. Докажем, что

$$\forall \delta_0 \in [0, 1], k_0 \in [0, 1] : 2\sqrt{\delta_0} \frac{1-\sqrt{\delta_0}}{1+\sqrt{\delta_0}} \leq k_0 \leq 1 - \delta_0$$

$$\exists \alpha \in [0, 1], \exists \beta \in [0, 1] : \delta_0 = \delta_{\alpha, \beta}, k_0 = k_{\alpha, \beta}.$$

При  $\delta_0 = 0$  искомыми  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1 - k_0$ . При  $\delta_0 > 0$  имеем  $\alpha > 0$ , так как  $\delta_0 = \alpha(1 - \beta)$ . Домножая (14) на  $\alpha$ , получаем:  $\alpha^2 - \alpha(2\delta_0 + k_0) + \delta_0 = 0$ . Это уравнение при  $\delta_0 > 0$ ,  $2\sqrt{\delta_0} \frac{1-\sqrt{\delta_0}}{1+\sqrt{\delta_0}} \leq k_0$  имеет два положительных корня

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (2\delta_0 + k_0 + \sqrt{2\delta_0 + k_0^2 - 4\delta_0}) ,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (2\delta_0 + k_0 - \sqrt{2\delta_0 + k_0^2 - 4\delta_0}) ,$$

причём при  $k_0 \leq 1 - \delta_0$  выполняется  $\alpha_1 \in [0, 1]$ ,  $\alpha_2 \in [0, 1]$ . Полагая  $\beta_1 = 1 - \frac{\delta_0}{\alpha_1} = 1 - \alpha_2$  и  $\beta_2 = 1 - \frac{\delta_0}{\alpha_2} = 1 - \alpha_1$ , получаем  $\delta_0 = \delta$   $\alpha_1, \beta_1$ ,  $k_0 = \delta$   $\alpha_2, \beta_2$ .

Для нахождения множества достижимости для произвольной гладкой функции распределения  $F(x)$  может быть использовано следующее утверждение (см. Рис. 14).

Утверждение 5.6. Точка  $x \in [0, 1]$  принадлежит множеству достижимого равновесия функции распределения  $F(\cdot) \in C[0, 1]$  тогда и только тогда, когда выполнено либо  $F(x) = 0$ , либо

$$(15) \quad \frac{F' x}{F x} \cdot \left( x - \frac{\sqrt{1 + \frac{x}{F x} \left( \frac{1}{F x} - 2 \right)} - 1}{\left( \frac{1}{F x} - 2 \right)^2} \right) < 1.$$

(при  $F(x) = 1/2$  значение выражения в скобках следует понимать как его конечный предел, и условие (15) имеет вид  $2x(1-x)F' < 1$ ).

Доказательство утверждения 5.6. Напомним, что принадлежность точки множеству достижимости означает существование пары  $\alpha, \beta \in [0, 1] \times [0, 1]$ , такой что  $F_{\alpha, \beta} x = x$  (условие равновесия) и  $F'_{\alpha, \beta} x < 1$  (условие устойчивости равновесия), где  $F_{\alpha, \beta} x$  является преобразованием (10) функции  $F x$ . Иными словами, точка принадлежит множеству достижимости тогда и только тогда, когда

$$\min_{\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1] : F_{\alpha, \beta}(x) = x} F'_{\alpha, \beta} x < 1$$

и множество  $\alpha \in [0, 1], \beta \in [0, 1] : F_{\alpha, \beta}(x) = x$  не пусто.

Производная  $F'_{\alpha, \beta} x$  имеет вид

$$F'_{\alpha,\beta} x = k \alpha, \beta F' x,$$

следовательно,

$$\min_{\alpha \in 0,1, \beta \in 0,1 : F_{\alpha,\beta}(x)=x} F'_{\alpha,\beta} x = \min_{\alpha \in 0,1, \beta \in 0,1 : F_{\alpha,\beta}(x)=x} k \alpha, \beta \cdot F' x = k_{\min} x F' x,$$

$$\text{где введено обозначение } k_{\min} x = \min_{\alpha \in 0,1, \beta \in 0,1 : F_{\alpha,\beta}(x)=x} k \alpha, \beta.$$

Ограничение  $F_{\alpha,\beta} x = x$  запишем в виде

$$\delta \alpha, \beta + k \alpha, \beta F(x) = x.$$

Рассмотрим отдельно случай  $F x = 0$ . Из гладкости функции распределения следует, что  $F'_{\alpha,\beta} x = F' x = 0$ . Кроме того, ограничение удовлетворяется при  $\alpha = x, \beta = 0$ , так как  $\delta x, 0 = x$ . Это означает, что при  $F x = 0$  точка  $x$  всегда принадлежит множеству достижимости.

При  $F x > 0$  изобразим ограничение на плоскости  $\delta k$  (см. Рис. 14), где оно имеет вид прямой линии, соединяющей точки  $\left(0, \frac{x}{F(x)}\right)$  и  $x, 0$ .

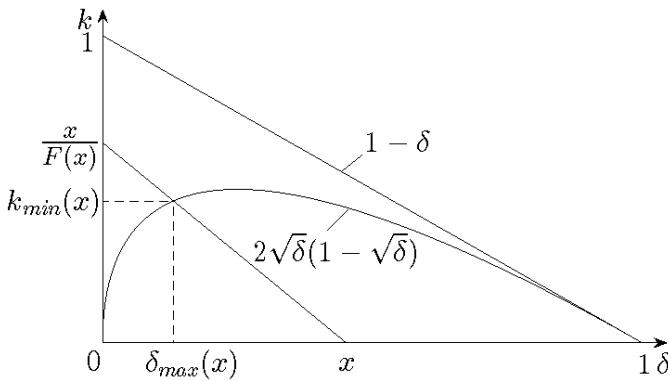


Рис. 14. Иллюстрация метода нахождения множества достижимости

Из Рис. 14 видно, что при любых значениях  $x$  и  $F(x)$ , минимальное значение  $k_{\min} x$  достигается в точке пересечения этой прямой с кривой  $2\sqrt{\delta} 1 - \sqrt{\delta}$ , абсциссу которой обозначим через  $\delta_{\max} x$ .

Имеем  $\frac{1}{F x} \delta_{\max} x - x = 2\sqrt{\delta_{\max} x} 1 - \sqrt{\delta_{\max} x}$ .

Это уравнение при любых значениях  $x$  и  $F(x)$  имеет единственный корень, принадлежащий отрезку  $[0; 1]$ :

$$\delta_{\max} x = \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{x}{F x} \left( \frac{1}{F x} - 2 \right)} - 1 \right)^2}{\left( \frac{1}{F x} - 2 \right)^2}.$$

Находя значение  $k_{\min} x = \frac{1}{F x} x - \delta_{\max} x$  и выражая через него  $F'_{\alpha, \beta} x$  получаем (15). •

Утверждение 5.7. Точка  $x \in [0, 1]$  принадлежит множеству достижимости функции распределения  $F(\cdot) \in C[0, 1]$  тогда и только тогда, когда она принадлежит её множеству достижимых равновесий и

$$(16) \min_{y \in 0, x} \delta_{\max} x + k_{\min} x F y - y \geq 0,$$

где

$$\delta_{\max} x = \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{x}{F x} \left( \frac{1}{F x} - 2 \right)} - 1 \right)^2}{\left( \frac{1}{F x} - 2 \right)^2}, \quad k_{\min} x = \frac{1}{F x} x - \delta_{\max} x.$$

Доказательство утверждения 5.7. Напомним, что принадлежность точки множеству достижимости означает существование пары  $\alpha, \beta \in 0,1 \times 0,1$ , такой что  $F_{\alpha, \beta} x = x$  (условие равновесия)  $F'_{\alpha, \beta} x < 1$  (условие устойчивости равновесия), и

$\min_{y \in [0, x]} F_{\alpha, \beta}(y) - y \geq 0$ , где  $F_{\alpha, \beta}(x)$  является преобразованием (10) функции  $F(x)$ .

Выше доказано, что устойчивость положения равновесия при  $\delta(\alpha, \beta) = \delta_{\max}(x)$ ,  $k(\alpha, \beta) = k_{\min}(x)$  эквивалентна принадлежности точки  $x$  множеству достижимого равновесия. Для доказательства утверждения достаточно показать, что именно при  $\delta(\alpha, \beta) = \delta_{\max}(x)$  в любой точке  $k(\alpha, \beta) = k_{\min}(x)$  отрезка  $[0; x]$  достигается максимум  $F_{\alpha, \beta}(y)$  по всем  $\alpha, \beta$ , приводящим к устойчивому равновесию в точке  $x$ .

Пусть для некоторых значениях  $\delta_1 \neq \delta_{\max}(x)$ ,  $k_1 \neq k_{\max}(x)$ , реализуемых при некоторых  $\alpha, \beta$ , выполнено  $\delta_1 + k_1 F(x) = x$  и  $k_1 F'(x) < 1$ . Покажем, что тогда при  $y \leq x$  выполнено

$$\delta_{\max} + k_{\min} F(y) \geq \delta_1 + k_1 F(y).$$

Перепишем неравенство в виде  $\delta_{\max} - \delta_1 + k_{\min} - k_1 F(y) \geq 0$ . Из условия равновесия  $\delta_1 + k_1 F(x) = \delta_{\max} + k_{\min} F(x) = x$  выразим  $k_{\min} - k_1$  и подставим в неравенство, получая

$$\delta_{\max} - \delta_1 \left( 1 - \frac{F(y)}{F(x)} \right) \geq 0.$$

Выполнение неравенства при  $y \leq x$  следует из условия реализуемости  $\delta_1 < \delta_{\max}$  и монотонности функции распределения. •

Пример 5.5. В работе [4] и в третьем разделе было проведено исследование реальных онлайновых СС Facebook, Livejournal и Twitter и показано, что  $F(x)$  может быть приближено функцией из семейства

$$(17) \quad F(x, \theta, \lambda) = \frac{\operatorname{arctg} \lambda(x - \theta) + \operatorname{arctg} \lambda \theta}{\operatorname{arctg} \lambda(1 - \theta) + \operatorname{arctg} \lambda \theta},$$

где  $\theta$  – параметр, характеризующий происходящее в сети явление, приводящее к конформному поведению с бинарным действием, не зависящий от структуры сети, а  $\lambda$  - параметр, характеризующий

исключительно граф связей сети и не зависящий от происходящего в ней явления. Выше была приведена наилучшая аппроксимация параметра  $\lambda$ :  $\lambda_F \approx 13$ . На Рис. 15 изображена зависимость РКП от действий двух центров.

Как видно из Рис. 15, множество достижимости не является отрезком  $[0, 1]$ , что означает, что не каждое состояние социальной сети Facebook может быть реализовано как РКП в игре двух центров.

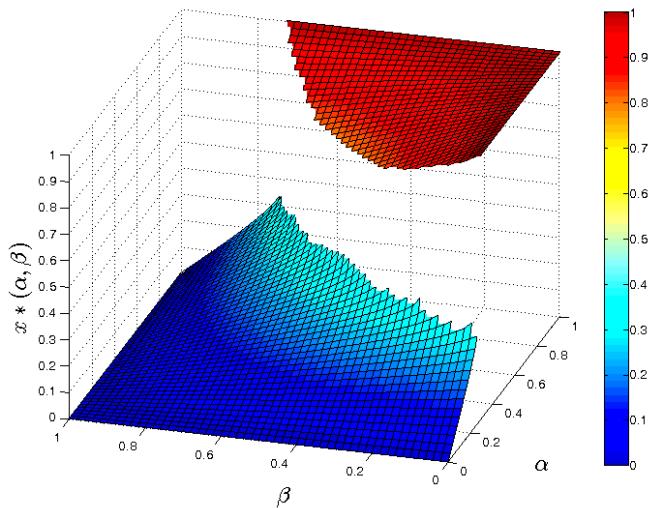


Рис. 15. Результат численного вычисления  $x^*(\alpha, \beta)$  модели I для социальной сети Facebook ( $\theta = 0.5$ ,  $\lambda_F = 13$ ) при функции распределения (17)

Введём обозначения:  $V_{\alpha, \beta}^\lambda = \{x, \theta : x \in V_{\alpha, \beta} \text{ для } F(x, \theta, \lambda)\}$ ,  $W_{\alpha, \beta}^\lambda = \{x, \theta : x \in W_{\alpha, \beta} \text{ для } F(x, \theta, \lambda)\}$ , где  $F(x, \theta, \lambda)$  описывается (17). На Рис. 16 и Рис. 17 изображены данные множества для различных значений параметра  $\lambda$ , полученные численно.

Множество достижимости для сети, описываемой (17), согласно определению  $W_{\alpha, \beta}^\lambda$ , является сечением множества  $W_{\alpha, \beta}^{13}$  при фикси-

рованном  $\theta$ . Из Рис. 17 для социальной сети Facebook при  $\lambda = 13$ ,  $\theta = 0,5$  находим  $W_{\alpha,\beta} \approx [0; 0,4) \cup (0,8; 1]$ . Этот результат согласуется с Рис. 15.

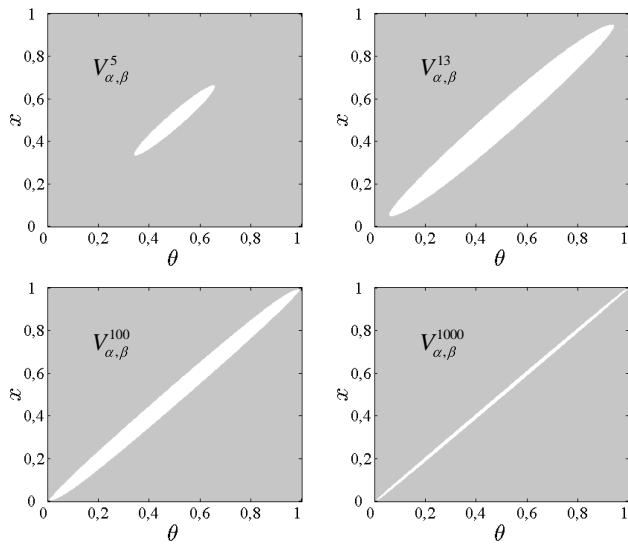


Рис. 16. Множество  $V_{\alpha,\beta}^{\lambda}$  при различных  $\lambda$  (выделено серым цветом)

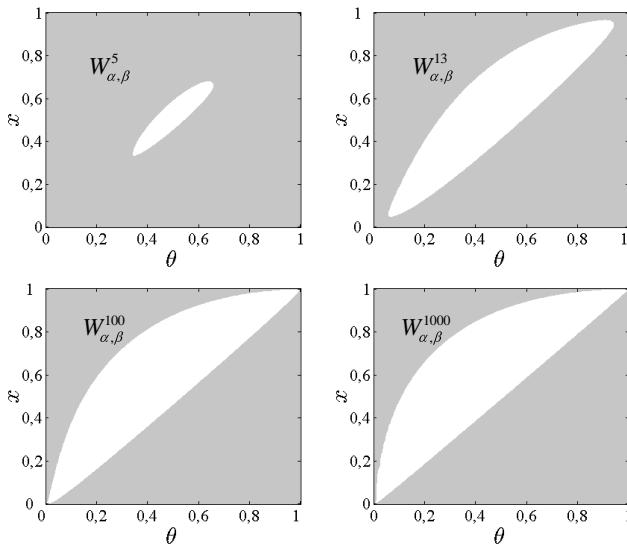


Рис. 17. Множество  $W_{\alpha,\beta}^\lambda$  при различных  $\lambda$   
(выделено серым цветом)

Теперь рассмотрим ситуацию информационного противоборства в рамках модели  $\Pi$ , т.е. добавим к множеству  $N$  конформистов  $k$  провокаторов и  $l$  иммунизаторов (множества  $K$  и  $L$  соответственно). Тогда вероятность того, что произвольно выбранный агент имеет порог, не превышающий  $x < 1$ , складывается из вероятности двух независимых событий:

- 1) вероятности того, что выбранный агент является провокатором, а именно  $\frac{k}{k+l+n}$ ;
- 2) вероятности того, что выбранный агент является конформистом и его порог не превышает  $x < 1$ :  $\frac{n}{k+l+n} F(x)$ .

Введем следующие обозначения для долей провокаторов и иммунизаторов относительно общего количества всех агентов соответственно:

$$(18) \quad \alpha' = \frac{k}{k+l+n}; \quad \beta' = \frac{l}{k+l+n}$$

(очевидно, что  $\alpha' + \beta' < 1$ ). Величины  $\alpha'$  и  $\beta'$  соответствуют в некотором смысле значениям вероятностей  $\alpha$  и  $\beta$  в рамках модели I противоборства двух центров, введенной в начале настоящего раздела. Вероятность  $\alpha$  того, что произвольно выбранный агент окажется внешне возбужденным (в рамках модели I) равна вероятности  $\alpha'$  того, что произвольно выбранный агент окажется внешним «проквокатором» (в рамках модели II). Аналогично для вероятностей  $\beta$  и  $\beta'$ .

Так как вероятность того, что порог произвольно выбранного агента не превышает единицы, равна единице, то получено новое множество агентов  $N \cup K \cup L$ , пороги которых являются независимыми и одинаково распределенными величинами со следующей функцией распределения, соответствующей модели II:

$$(19) \quad F_{KL}(\alpha', \beta', x) = \begin{cases} \alpha' + 1 - \alpha' - \beta' F(x), & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Функции распределения (10) и (19) различны, соответственно модели I и II настоящего подраздела не являются эквивалентными.

Утверждение 5.8. В модели II множество достижимости  $W_{KL} = (0, 1]$ . Если  $F(0) = 0$ , то  $W_{KL} = [0, 1]$ .

Доказательство утверждения 5.8. Точка 1 достигается в силу определения (19).

Пусть  $x_1 \in (0, 1)$ . Если  $x_1 \in x: F(x) = 0$ , то выполнения равенства  $F_{KL}(\alpha'_1, \beta'_1, x_1) = x_1$  необходимо и достаточно, чтобы  $\alpha'_1 = x_1$ ,  $\beta'_1$  – любое, удовлетворяющее неравенству  $\alpha'_1 + \beta'_1 < 1$ . Производная слева функции  $F_{KL}(\alpha'_1, \beta'_1, x)$  (ее существование следует из монотонности функции распределения) в точке  $x_1$   $F'_{KL+}(x_1) = 0$ . То есть функция  $F_{KL}(\alpha'_1, \beta'_1, x)$  пересекает биссектрису «слева сверху». Если  $x: F(x) = 0 = \emptyset$ , то точка  $x_1 = 0$  недостижима в силу неравенства  $\alpha' + \beta' < 1$ .

Если  $F(x_1) > 0$ , то можно подобрать такое малое  $\varepsilon > 0$ , что выполнены следующие неравенства:  $x_1 - \varepsilon \geq 0$ ,  $1 - x_1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{F(x_1)}\right) \geq 0$ ,

$$1 - \frac{\varepsilon}{F(x_1)} > 0 \text{ и } \varepsilon F'_+ x_1 < F(x_1).$$

Пусть  $\alpha'_1 = x_1 - \varepsilon \geq 0$  в силу первого неравенства и, решив уравнение  $F_{KL}(\alpha'_1, \beta'_1, x_1) = x_1$  относительно  $\beta'_1$ , получим для него:  $\beta'_1 = \beta'_1 = 1 - x_1 + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{F(x_1)}\right)$ . Из вышеприведенной системы неравенств следует, что  $\beta'_1 \geq 0$  и  $\alpha'_1 + \beta'_1 < 1$ . Таким образом, получена функция распределения  $F_{KL}(\alpha'_1, \beta'_1, x)$ , пересекающая биссектрису в точке  $x_1$ , причем «слева сверху». •

На Рис. 18 приведен график точек равновесия для модели II для социальной сети Facebook ( $\theta = 0,5$ ,  $\lambda_F = 13$ ) при функции распределения (17).

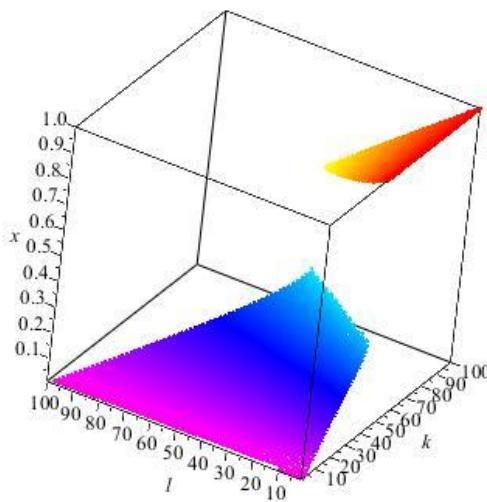


Рис. 18. Результат численного вычисления положения равновесия для  $k$  провокаторов и  $l$  иммунизаторов при  $n = 100$

Полученные результаты анализа одновременных «противоположно направленных» воздействий на рассматриваемую сетевую структуру – свойства монотонности равновесия по управлению (утверждения 5.3 и 5.4) и свойства структуры множеств достижимости (утверждения 5.5–5.7) являются основой для теоретико-игрового изучения моделей информационного противоборства (см. раздел 10).

Итак, предложено *макроописание* (в терминах третьего раздела настоящей работы) порогового поведения толпы в результате оказываемых на нее управлеченческих воздействий. Существенным плюсом использования подобных стохастических моделей представляется простой вид аналитической зависимости функций распределения порогов агентов (и, следовательно, равновесных состояний толпы) от выбираемых управлений. Эта «простота» дает возможность ставить и решать задачи управления («возбуждения» и «иммунизации» толпы), анализировать информационное противоборство субъектов, осуществляющих управление толпой. Рассмотрены два вида управления: воздействие на пороги агентов и управление составом. В

простейшем случае полученные модели управления эквивалентны, но в случае противоречия они существенно отличаются.

Перспективными направлениями дальнейших исследований представляются следующие.

Во-первых, идентификация типовых функций распределения порогов (по аналогии с выражением (17), результатами, представленными в примере 5.5 выше, и др.) и анализ соответствующих типовых управленческих решений.

Во-вторых, развитие моделей коллективного поведения, в которых пороги агентов и пороговое поведение последних являлись бы следствиями каких-либо более общих содержательно интерпретируемых предположений.

И, наконец, в-третьих, сведение задачи информационного противоречия в управлении толпой к теоретико-игровой постановке позволяет применять к этому важному классу задач весь богатый аппарат современной теории игр.

## 6. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЛПОЙ

В настоящем разделе рассматриваются модели централизованного, децентрализованного и распределенного управления возбуждением сети взаимодействующих целенаправленных агентов [57].

**Содержательная постановка задачи.** Пусть имеется множество взаимосвязанных (в смысле влияния друг на друга при принятии решений) агентов. Изменение состояний некоторых агентов в начальный момент времени приводит к тому, что под влиянием этих изменений меняются и состояния других агентов. Природа и характер подобной динамики могут быть различными, в зависимости от содержательной интерпретации сети – это и модели распространения возбуждения в биологической сети (например, сети нейронов [103]), модели отказов (в более общем случае – структурной динамики) в информационно-управляющих и сложных технических системах [42, 62], модели диффузии инноваций, модели информационной безопасности, модели просачивания/заражения, модели консенсуса и др. – см. обзор в [25].

Задача управления (целенаправленного «возбуждения» сети) заключается в поиске такого множества агентов, на которых оказыва-

ется определенное первоначальное воздействие, при котором сеть оказывается в требуемом состоянии. В такую абстрактную постановку вписываются задачи информационного управления в социальных сетях [1, 25], управления коллективным пороговым поведением и др.

**Сеть.** Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  – конечное множество *агентов*, входящих в АСС, описываемую ориентированным графом  $\Gamma = (N, E)$ , где  $E \subseteq N \times N$  – множество дуг. Пусть каждый агент может находиться в одном из двух состояний – «0» или «1» (например, бездействовать или действовать, не быть или быть в возбужденном состоянии). Обозначим через  $x_i \in \{0; 1\}$  состояние  $i$ -го агента,  $i \in N$ , через  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор их состояний. Условно переход от бездействия к действию будем называть «возбуждением» соответствующего агента.

**Поведение агентов.** Предположим, что первоначально все агенты бездействуют, а динамика сети описывается отображением  $\Phi: 2^N \rightarrow 2^N$ , где  $\Phi(S) \subseteq N$  – множество агентов, находящихся в состоянии «1» после окончания переходного процесса, вызванного «возбуждением» сети – изменением в начальный момент времени (отметим, что в настоящем разделе считается, что управленческие воздействия оказываются однократно) состояний (с бездействия на действие) агентов из множества (коалиции)  $S \subseteq N$ .

Относительно отображения  $\Phi(\cdot)$  предположим, что оно обладает следующими свойствами:

**A.1** («рефлексивность»).  $\forall S \subseteq N$  выполнено  $S \subseteq \Phi(S)$ ;

**A.2** («монотонность»).  $\forall S, U \subseteq N: S \subseteq U$  выполнено  $\Phi(S) \subseteq \Phi(U)$ .

**A.3.** («выпуклость»).  $\forall S, U \subseteq N: S \cap U = \emptyset$  выполнено  $\Phi(S) \cup \Phi(U) \subseteq \Phi(S \cup U)$ .

По заданному отображению  $\Phi(\cdot)$  можно определить функцию  $\hat{G}: \{0; 1\}^n \rightarrow \{0; 1\}^n$ , которая вектору у начальных состояний агентов ставит в соответствие вектор их конечных состояний:

$$\hat{G}_i(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \Phi(\{j \in N \mid x_j = 1\}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Также можно определить состояния агентов, которые «опосредованно возбуждаются»:

$$G_i(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \hat{G}_i(\bar{x}) = 1 \text{ и } x_i = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i \in N.$$

Структура изложения материала настоящего раздела следующая: сначала формулируется задача централизованного управления возбуждением сети и приводится ее пример для случая порогового поведения агентов. Затем дается постановка задачи децентрализованного управления, при котором агенты самостоятельно принимают решения о своем «возбуждении», и исследуется вопрос о реализуемости (с теоретико-игровой точки зрения) эффективных или заданных состояний сети. В качестве примера рассматривается задача управления толпой; приводится описание модели информационного противоборства субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях сети и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия.

## 6.1. Задача централизованного управления

Пусть заданы функции множеств  $C: 2^N \rightarrow \mathbb{R}^1$  и  $H: 2^N \rightarrow \mathbb{R}^1$ , интерпретируемые как затраты  $C(S)$  на начальное изменение состояния агентов из коалиции  $S$  и соответственно как выигрыш  $H(W)$  от результирующего «возбуждения» коалиции  $W$ , где  $S, W \in 2^N$ . То, какие субъекты несут эти затраты, определяется ниже в зависимости от конкретной постановки задачи.

Целевую функцию субъекта, осуществляющего управление (назовем его *центром*), представим в виде разности между выигрышем и затратами. Тогда задача централизованного управления будет заключаться в выборе центром такого множества первоначально возбуждаемых агентов, которое максимизировало бы его целевую функцию  $v(S)$ :

$$(1) \quad v(S) = H(\Phi(S)) - C(S) \rightarrow \max_{S \subseteq N},$$

то есть, в данном случае затраты несет центр и выигрыш получает он же.

Решение  $S^* \subseteq N$  дискретной задачи (1) в общем случае (без введения дополнительных предположений о свойствах функций  $C(\cdot)$  и  $H(\cdot)$ , а также отображения  $\Phi(\cdot)$ ) требует перебора всех  $2^n$  возможных коалиций. Отдельный интерес представляет разработка эффективных методов решения этой задачи (примерами удачных постановок

задач оптимизации состава системы, в которых удается использовать достаточно простые алгоритмы, являются [101, 108, 114 и др.]). Состояние  $S^*$  ACC, максимизирующее целевую функцию (1), назовем *эффективным*.

Частным является случай аддитивных по агентам функций затрат и выигрыша:

$$(2) \quad u(S) = \sum_{i \in \Phi(S)} H_i - \sum_{j \in S} c_j,$$

где  $(c_i, H_i)_{i \in N}$  – заданные неотрицательные константы. Пока для простоты будем рассматривать именно аддитивный случай (2).

В задаче централизованного управления агенты (узлы сети) в определенном смысле пассивны – агенты из множества  $S$  «возбуждаются» центром, затем это возбуждение распространяется в соответствии с оператором  $\Phi(\cdot)$ .

Отметим, что возможны и другие постановки задачи управления, например, максимизация выигрыша при ограниченности затрат (при аддитивных по агентам функциях затрат и выигрыша соответствующая задача будет задачей о ранце) или минимизация затрат на обеспечение заданной величины выигрыша и т.д.

Для больших сетей (сетей, содержащих большое число агентов) дискретные задачи типа (1) обладают высокой вычислительной сложностью, поэтому в этих случаях целесообразно рассмотрение сетей как случайных графов с заданными вероятностными характеристиками [65, 83, 86], и постановка задачи управления в терминах ожидаемых значений (например, экстремизации математического ожидания числа возбужденных агентов).

Примером является пороговое поведение. Агенты в сети *влияют* друг на друга – наличие дуги  $(i, j)$  от вершины  $i$  к вершине  $j$  соответствует влиянию  $i$ -го агента на  $j$ -го (будем считать, что петли отсутствуют). Обозначим через  $N^{\text{in}}(i) = \{j \in N \mid \exists (j; i) \in E\}$  множество «соседей» – агентов, влияющих на  $i$ -го агента («предшественников»), через  $N^{\text{out}}(i) = \{j \in N \mid \exists (i; j) \in E\}$  – множество агентов («последователей»), на которые влияет  $i$ -ый агент,  $n^{\text{out}}(i) = |N^{\text{out}}(i)|$ ,  $n^{\text{in}}(i) = |N^{\text{in}}(i)|$ .

Процесс коллективного принятия агентами решений можно описывать различными моделями (см. обзоры в [10, 25, 40, 69], модели консенсуса [1, 72] типа модели Де Грота [92]). Рассмотрим в качестве примера частный случай порогового поведения агентов:

$$(3) \quad x_i^t = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n-1} \sum_{j \in N^{in}(i)} x_j^{t-1} \geq \theta_i, \\ x_i^{t-1}, & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $x_i^t$  – состояние  $i$ -го агента в момент времени  $t$ ,  $\theta_i \in [0; 1]$  – порог этого агента,  $t = 1, 2, \dots$ ; при заданных начальных условиях:  $x_i^0 = x_i$ ,  $i \in N$ . В модели (3) считается, что, будучи один раз возбужденным (в результате управленческого воздействия или под воздействием уже возбужденных соседей), агент не может вернуться к «бездействию». Очевидно, что для любого графа  $\Gamma$  в рамках динамики, описываемой выражением (3): число действующих агентов со временем не убывает, переходный процесс заканчивается не более чем за  $n$  шагов, соответствие между начальным и конечным состояниями удовлетворяет предположениям А1-А.3.

Представляет интерес частный случай *порогового поведения при единичных порогах* ( $\theta_i = 1$ ,  $i \in N$ ), то есть когда для возбуждения агента достаточно, чтобы возбудился хотя бы один из его предшественников. Соответствующее отображение  $\Phi(\cdot)$  будет «линейно»:  $\forall S, U \subseteq N: S \cap U = \emptyset$  выполнено  $\Phi(S) \cup \Phi(U) = \Phi(S \cup U)$ , то есть его можно представить в виде  $\Phi_0(S) = \bigcup_{i \in S} \Phi_0(\{i\})$ . А функция (2) при

этом субаддитивна, т.е.  $\forall S, U \subseteq N: S \cap U = \emptyset$  выполнено  $u(S \cup U) \leq u(S) + u(U)$ .

Пусть граф  $\Gamma$  ацикличен, а затраты на первоначальное возбуждение любого агента одни и те же и равны  $c$  (удельные затраты). Найдем для каждого агента  $i \in N$  множество  $M_i$  всех его «косвенных последователей», то есть таких агентов (включая его самого), к которым в рассматриваемом графе есть путь от данного агента. Вычислим  $h_i = \sum_{j \in M_i} H_j$  – выигрыш от возбуждения  $i$ -го агента. В

силу ацикличности графа и одинаковости затрат, имеет смысл возбуждать только агентов, не имеющих предшественников (обозначим множество таких агентов через  $M \subseteq N$ ). Тогда задача (1) примет вид:

$$\sum_{j \in \bigcup_{i \in S} M_i} H_j - c |S| \rightarrow \max_{S \subseteq N} .$$

Несмотря на введение множества упрощающих предположений (пороговое поведение, единичность порогов, равенство затрат,

ацикличность графа влияния), получающаяся задача централизованного управления все равно не допускает аналитического решения и требует перебора всех подмножеств множества  $M$ . Для ее решения можно использовать различные эвристики – например, считать «оптимальным» возбуждение тех агентов, для которых выигрыш превышает затраты:  $S^* = \{i \in M \mid h_i \geq c\}$ ; или упорядочить агентов из множества  $M$  в порядке убывания величин  $h_i$  и включать их в искомое множество, начиная с первого до тех пор, пока прирост соответствующего «выигрыша» превышает удельные затраты.

Итак, задачи централизованного управления возбуждением сети редко допускают простые решения. Рассмотрим возможные постановки и методы решения задач децентрализованного управления – когда агенты принимают решения о «возбуждении» самостоятельно.

## 6.2. Задачи децентрализованного управления

Пусть задан *механизм* (процедура принятия управленческих решений [108, 114])  $\sigma = \{\sigma_i(G(\bar{x})) \geq 0\}_{i \in N}$  распределения выигрышей между агентами, причем дополнительные (в соответствии с механизмом  $\sigma$ ) выигрыши могут получать только те агенты, которые в начальный момент времени действовали (распределению подлежит «выигрыш» от опосредованного возбуждения других агентов).

Предположим, что агенты активны, то есть в начальный момент времени при известном им механизме  $\sigma$  они однократно одновременно и независимо принимают решение о своем состоянии – будут они действовать или бездействовать. Дальнейшая динамика состояний агентов описывается по-прежнему оператором  $\mathcal{Q}(\cdot)$ .

Целевую функцию  $i$ -го агента  $f_i(\bar{x})$  будем считать равной разности между его выигрышем и затратами:

$$(4) \quad f_i(\bar{x}) = \sigma_i(G(\bar{x})) + (H_i - c_i) x_i, \quad i \in N.$$

Здесь, если агент принимает решение возбудиться, то он несет затраты на свое возбуждение и получает выигрыш  $H_i$ , плюс то, что он получает от центра в соответствии с механизмом. «Самовозбуждением» будем называть выгодность для агента возбудиться независимо от используемого механизма. Из (4) следует, что, если для  $i$ -го агента выполнено  $H_i > c_i$ , то он самовозбуждается. Для исключения «самовозбуждения» активных агентов в дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать, что выполнено условие  $c_i > H_i, i \in N$ .

Возможны различные механизмы распределения выигрыша между агентами. Типовыми примерами являются следующие *сбалансированные* (то есть, такие, в которых сумма выигрышей агентов равна выигрышу центра от «опосредованного возбуждения») механизмы – *механизм равного распределения*:

$$(5) \sigma_i(G(\bar{x})) = \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x})}{\sum_{j \in N} x_j} x_i, i \in N,$$

*механизм распределения пропорционально затратам*:

$$(6) \sigma_i(G(\bar{x})) = \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x})}{\sum_{k \in N} c_k x_k} c_i x_i, i \in N$$

*и механизм распределения пропорционально предельному вкладу*:

$$(7) \sigma_i(G(\bar{x})) = \frac{[\sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}) - \sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}_{-i}, 0)]}{\sum_{k \in N} x_k [\sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}) - \sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}_{-k}, 0)]} \sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}) x_i, i \in N.$$

В соответствии с выражениями (4)-(7), центр перераспределяет между теми агентами, кто сам первоначально возбудился, выигрыш от опосредованного возбуждения ими других агентов. При этом на опосредованное возбуждение никто не несет затрат.

**Равновесные и эффективные состояния сети.** Вектор  $y^*$  по определению является *равновесием Нэша* [29, 110] игры агентов, если

$$(8) \sigma_i(G(\bar{x}^*)) + (H_i - c_i) x_i^* \geq \sigma_i(G(\bar{x}_{-i}^*, 1 - x_i^*)) + (H_i - c_i) (1 - x_i^*), i \in N.$$

В равновесии Нэша действующим агентам невыгодно изменять свое состояние на бездействие (при условии, что остальные не меняют своих состояний), а бездействующим агентам невыгодно изменять свое состояние на действие. То есть, для действующих агентов (то есть таких агентов  $i \in N$ , что  $x_i^* = 1$ ) выполнено

$$(9) \sigma_i(G(\bar{x}^*)) + H_i \geq c_i,$$

а для бездействующих агентов (то есть таких агентов  $i \in N$ , что  $y_i^* = 0$ ) выполнено

$$(10) \sigma_i(G(x_{-i}^*, 1)) + H_i \leq c_i.$$

Запишем и проанализируем условия (9)-(10) для механизма (5). В механизме равногого распределения для действующих в равновесии агентов

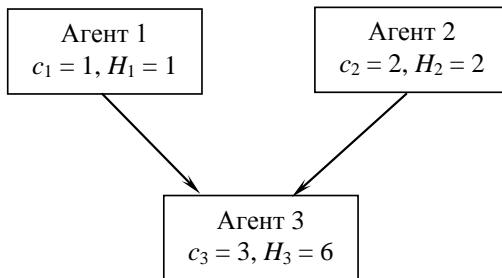
$$(11) \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(\bar{x}^*)}{\sum_{j \in N} x_j^*} + H_i \geq c_i,$$

а для бездействующих в равновесии агентов

$$(12) c_i \geq \frac{\sum_{j \in N} H_j G_j(x_{-i}^*, 1)}{\sum_{j \in N} x_j^* + 1} + H_i.$$

Возникает вопрос, как соотносятся множество решений задачи централизованного управления и множество равновесий Нэша, то есть в каких случаях можно децентрализованно *реализовать* эффективное (по критерию (1) или (2)) состояние сети. Верна ли, например, гипотеза, что одно из эффективных состояний является равновесным, или что среди равновесий существует хотя бы одно эффективное? Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующих, что связь между множествами эффективных состояний и равновесий Нэша нетривиальна, а обе гипотезы в общем случае неверны.

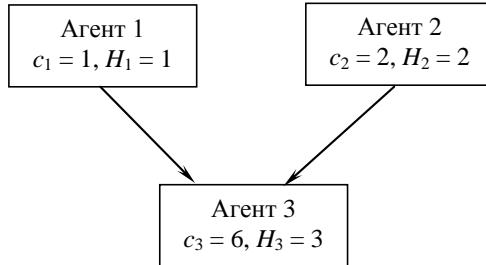
Пример 6.1. Пусть имеются три агента с единичными порогами (см. (3)), затраты и выигрыши которых (отметим, что условие  $c_i > H_i$ ,  $i \in N$ , в данном случае не выполняется) приведены на следующем рисунке:



Эффективными в данном примере являются три вектора состояний агентов:  $(0; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$  и  $(1; 1; 0)$ . Равновесиями Нэша, независимо от механизма распределения выигрышей, являются четыре остальных вектора состояний, отличных от  $(0; 0; 0)$ . Таким

образом, в настоящем примере ни одно из четырех равновесий Нэша не эффективно, и ни одно из эффективных состояний не является равновесным. •

Пример 6.2. Пусть в условиях предыдущего примера изменились только затраты и выигрыш третьего агента:



Эффективными в данном примере являются те же три вектора состояний агентов:  $(0; 1; 0)$ ,  $(1; 0; 0)$  и  $(1; 1; 0)$ . Равновесие Нэша – вектор  $(1; 1; 0)$  – единственно и эффективно. •

Таким образом, вопрос выбора механизмов распределения выигрыш, осуществляющих децентрализованную реализацию эффективных состояний сети, в общем случае остается открытым.

Механизмы (5)-(7) сбалансированы – в их рамках центр распределяет между первоначально действующими агентами весь (!) выигрыш от «опосредованного возбуждения сети». Такого рода механизмы можно условно считать механизмами *мотивационного управления* (см. [114]) – центр побуждает агентов к выбору тех или иных состояний как равновесий их игры. Альтернативой является более жесткое *институциональное управление* [114], заключающееся в установлении центром ограничений и норм деятельности агентов. Рассмотрим соответствующую модель применительно к задаче возбуждения сети.

**Институциональное управление.** Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$(13) f_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x}) + (H_i - c_i) x_i,$$

где  $s_i(\bar{x}) \geq 0$  – выплачиваемое центром  $i$ -му агенту вознаграждение, зависящее в общем случае от вектора состояний (действий) всех агентов,  $i \in N$ . Совокупность зависимостей вознаграждений агентов  $s(\bar{x}) = \{s_i(\bar{x})\}_{i \in N}$  от вектора действий агентов, следяя [108, 114], назовем *вектор-функцией стимулирования* агентов со стороны цен-

тра. Эта зависимость есть ни что иное, как частный случай введенного выше механизма распределения выигрыша между агентами.

Фиксируем некоторое множество агентов  $V$ . Рассмотрим следующую задачу «институционального управления» – найти минимальную (в смысле суммарных затрат центра на стимулирование) вектор-функцию стимулирования, которая реализует «возбуждение» в точности заданного множества  $V$  агентов как равновесие Нэша  $\bar{x}^*(s(\cdot))$  их игры. Формально эту задачу можно записать следующим образом:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in N} s_i(x^*) \rightarrow \min_{s(\cdot)} \\ x_i^*(s(\cdot)) = 1, i \in V, \\ x_j^*(s(\cdot)) = 0, j \notin V. \end{array} \right.$$

Непростая на первый взгляд задача (14) решается достаточно просто с использованием *теоремы о декомпозиции игры агентов* [114]. Рассмотрим следующую вектор-функцию стимулирования:

$$(15) \quad s_i^*(\bar{x}) = \begin{cases} c_i - H_i + \varepsilon_i, & \text{если } i \in V \text{ и } x_i = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где  $\varepsilon_i$  – сколь угодно малая строго положительная константа (если выбрать эти константы равными нулю, то агенты будут безразличны между действием и бездействием, и все основные приводимые ниже выводы останутся в силе в рамках гипотезы благожелательности [99, 108, 114]),  $i \in V$ .

Легко убедиться, что при использовании центром механизма (15) выбор единичных действий агентами из множества  $V$  (и только ими!) является единственным *равновесием в доминантных стратегиях* [29, 110] игры агентов с целевыми функциями (13).

Также легко проверить, что механизм (15) является  $\varepsilon_V$ -оптимальным решением задачи (14), где  $\varepsilon_V = \sum_{i \in V} \varepsilon_i$ .

Следует сделать терминологическое замечание: хотя формально задача (14) является задачей стимулирования (мотивационного управления), ее решение (15) можно интерпретировать, скорее, как институциональное управление – агентам установлены достаточно строгие нормы деятельности: при любом отклонении от предписан-

ных центром действий они жестко наказываются (их стимулирование равно нулю).

Целевую функцию центра  $F(\cdot)$  будем считать равной разности между выигрышем от возбуждения множества  $\Phi(V)$  агентов и суммарными затратами на стимулирование (15), реализующего возбуждение агентов из множества  $V$  (см. также выражение (2)), то есть

$$(16) \quad F(V) = \sum_{i \in \Phi(V)} H_i - \sum_{j \in V} s_j(y^*) = \sum_{i \in \Phi(V)} H_i + \sum_{j \in V} H_j - \sum_{i \in V} c_i - \varepsilon_V.$$

Сравнивая выражения (16) и (2), получаем, что при достаточно малых значениях  $\varepsilon_V$  (а этот параметр, как отмечалось выше, может быть выбран сколь угодно малым) выполнено  $F(V) \geq u(V)$ . Казалось бы, задача децентрализации решена! На самом деле, решена только отчасти, так как в механизмах типа (5)-(7) центр не указывает агентам в явном виде, каких действий он от них ожидает, предоставляя возможность «самостоятельно» разыграть игру (основная идея децентрализации управления как раз и состоит в том, чтобы сконструировать такую процедуру автономного взаимодействия агентов, которая приводила бы к выбору ими эффективного, в смысле централизованного критерия, вектора действий). В «механизме» (15) присутствует явное указание центра, выбора каких действий от кого из агентов он ожидает. Кроме того, задачу централизованного управления типа (1) центр все равно вынужден решать, то есть, зная каков его оптимальный (в смысле минимальности затрат на стимулирование возбуждаемых агентов) выигрыш (16), он должен определить, какую коалицию ему следует первоначально возбуждать:

$$(17) \quad F(V) \rightarrow \max_{V \subseteq N}.$$

Таким образом, плюсом децентрализованных механизмов является то, что в них агенты могут обладать неполной информацией (от каждого из них не требуется вычисления равновесия Нэша (8) или решения задач дискретной оптимизации типа (1) или (17)). Минусом является сложность (даже невозможность в общем случае) решения задачи поиска эффективного децентрализованного механизма.

Плюсом централизованного механизма является то, что в нем все «когнитивные» (информационные и вычислительные) затраты несет центр; но затраты эти могут оказаться очень высокими.

В качестве примера рассмотрим задачу управления толпой.

**Пример: «возбуждение» толпы.** Выше рассмотрена модель управления толпой, члены которой (агенты) принимают решения о своем действии или бездействии в зависимости от числа ужé действующих агентов. При этом для центра существенно (является критерием эффективности) число (или доля) действующих агентов. В терминах модели, рассматриваемой в настоящем разделе, задачу управления можно сформулировать как выбор множества первоначально возбуждаемых агентов, при котором число опосредованно возбужденных будет максимально (или минимально, равно заданному и т.д.), а затраты на управление не превысят существующего бюджетного ограничения  $C_0$ , то есть:

$$(18) \begin{cases} |\Phi(S)| \rightarrow \max, \\ S \subseteq N \\ C(S) \leq C_0. \end{cases}$$

Пусть поведение агентов описывается выражением (3), а граф связей между агентами является полным. Перенумеруем агентов в порядке возрастания значений их порогов:  $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_n$ . Обозначим через  $P(x) = \frac{1}{n} |\{i \in N : \theta_i < x\}|$  функцию распределения порогов агентов, через  $\{x_t\}_{t \geq 0}$  – последовательность долей действующих агентов (в дискретном времени, где  $t$  обозначает номер момента времени (шага)).

Предположим, что известна доля  $x_0$  агентов, действующих на нулевом шаге. Доля агентов, пороги которых не превышают  $x_0$ , составляет  $P(x_0)$ , поэтому на первом шаге  $x_1 = \max \{x_0; P(x_0)\}$ . На следующем шаге будет действовать такая доля агентов  $x_2$ , что пороги агентов, входящих в нее, не превышают  $x_1$ , т.е.  $x_2 = \max \{x_1; P(x_1)\}$ . Рассуждая аналогичным образом, для последующих шагов можно записать следующее рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения множества агентов (см. также выражение (2.7)):

$$(19) x_{k+1} = \max \{x_k; P(x_k)\}.$$

Положения равновесия системы (19) определяются начальной точкой  $x_0$  и точками пересечения графика функции  $P(\cdot)$  с биссектрисой первого квадранта:  $P(x) = x$ . Устойчивыми могут быть точки равновесия, в которых график функции  $P(\cdot)$  пересекает биссектрису,

приближаясь к ней «сверху». Пример функции распределения порогов приведен на Рис. 19 (см. нижний график; для наглядности рассмотрен непрерывный случай), устойчивыми являются точки  $x_2^*$  и  $x_4^*$ .

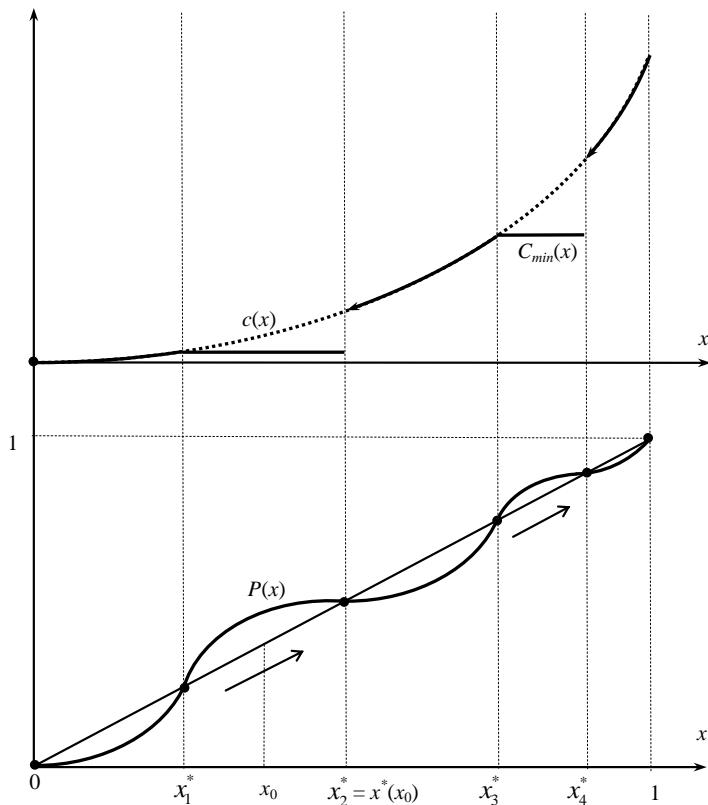


Рис. 19. Функция распределения порогов и функции затрат

Обозначим через  $\Psi(P(\cdot)) \subseteq [0;1]$  множество корней уравнения  $P(x) = x$  (это множество не пусто, так как одним из корней всегда является единица) и определим  $x^*(x_0) = \min \{y \in \Psi(P(\cdot)): y > x_0\}$ .

Например, для точки  $x_0$ , изображенной на Рис. 19, выполнено  $x^*(x_0) = x_2^*$ . Из (19) и условий устойчивости равновесий следует, что

$$(20) \quad \Phi(x_0) = \begin{cases} x_0, & \text{если } P(x_0) \leq x_0, \\ x^*(x_0), & \text{если } P(x_0) > x_0. \end{cases}$$

Если  $c(x_0)$  – затраты (неубывающая функция) на первоначальное возбуждение заданной доли  $x_0 \in [0; 1]$  агентов (отметим, что в рамках рассматриваемой модели коллективного поведения подразумевается, что в первую очередь возбуждению подлежат агенты с меньшими порогами), то с учетом (20) задача (18) примет вид:

$$(21) \quad \begin{cases} \Phi(x_0) \rightarrow \max_{x_0 \in [0;1]}, \\ c(x_0) \leq C_0. \end{cases}$$

Обозначим  $x^+ = \max \{x \in [0;1] : c(x) \leq C_0\}$ . В силу неубывания функции (20), решение задачи (21) очевидно – следует реализовывать максимальное допустимое (с точки зрения ограничений на затраты) действие  $x^+$ . Если, при прочих равных, следует стремиться к минимизации затрат, то оптимальное решение  $x_0^*$  таково:

$$(22) \quad x_0^* = \begin{cases} x^+, & \text{если } P(x^+) \leq x^+, \\ \max \{y \in \Psi(P(\cdot)) : y < x^+\}, & \text{если } P(x^+) > x^+. \end{cases}$$

Можно решить и обратную (по отношению к (21)) задачу – найти минимальные затраты  $C_{\min}(x)$  по реализации начального возбуждения, приводящего к итоговой доле возбужденных агентов в толпе, не меньшей заданного значения  $x \in [0; 1]$ . Пример решения этой задачи приведен на Рис. 19.

Отметим, что выше считалось, что целью управляющего органа является максимизация числа возбужденных агентов. В случае, когда целью является минимизация активности толпы, соответствующие задачи ставятся и решаются аналогично, так как результаты анализа устойчивых состояний и их зависимости от параметров модели (см. Рис. 19) позволяют конструктивно характеризовать зависимость результирующих состояний от начальных.

**Информационное противоборство.** Выше сеть рассматривалась как объект управления, осуществляемого одним субъектом – центром. В случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях сети и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия (так называемая

система с распределенным контролем [28, 58, 114]), возникает взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на сеть, называется *информационным противоборством* (см. обзор [52]). Такие ситуации обычно описываются игрой в нормальной форме между центрами, причем выбираемые центрами стратегии определяют параметры игры между агентами. Примерами служат модели информационного противоборства в социальных сетях [25] и на когнитивных картах [41, 113]. Возможны и более сложные ситуации, когда, управляемые воздействия «несимметричны» – например, в ситуации «нападение/защита» один центр действует на начальные состояния агентов, а другой (одновременно с первым или уже зная его выбор) изменяет структуру связей между ними или/и их пороги. Такие ситуации могут быть описаны в рамках моделей иерархических игр.

Приведем описание теоретико-игровой модели информационного противоборства при управлении возбуждением сети. Пусть имеются два центра, которые в начальный момент времени могут осуществлять управляемые воздействия на сеть – однократно, одновременно и независимо изменять начальные состояния агентов из множеств  $S_1 \subseteq N$  и  $S_2 \subseteq N$  соответственно. Предположим, что известна зависимость  $\hat{\Phi}(S_1, S_2)$  конечного состояния сети от этих управляемых воздействий. Целевые функции центров представим в виде разностей между их выигрышами и затратами:  $v_i(S_1, S_2) = H_i(\hat{\Phi}(S_1, S_2)) - C_i(S_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Получили игру в нормальной форме между двумя центрами. Если один из центров обладает правом первого хода, то получим игру Штакельберга (или игру типа  $\Gamma_1$  [99, 114]), которая может интерпретироваться как ситуация «защита-нападение» или «информационное воздействие-противодействие». Примеры постановки и решения подобных задач для управления толпой приведены в десятом разделе.

Таким образом, выше рассмотрена общая постановка задачи «возбуждения» сети, констатирована нетривиальность децентрализованной реализации эффективного равновесия и предложен эффективный механизм институционального управления.

Перспективным представляется, во-первых, исследование влияния свойств графа связей между агентами и принципов принятия ими решений на свойства оптимального решения той или иной

задачи управления. В моделях настоящего раздела оба этих фактора (структура взаимодействия агентов и модели их кооперативного поведения) «спрятаны» в операторе  $\Phi(\cdot)$ . Выделение в явном виде и исследование, хотя бы частных случаев (ациклических графов, конкретных пороговых и других моделей принятия агентами решений), может дать нетривиальные содержательно интерпретируемые результаты.

Во-вторых, так как типовой триадой типов управления [114] является институциональное, мотивационное и информационное, и первые два из них так или иначе упомянуты выше, то анализ моделей информационного управления в задачах возбуждения сети представляется чрезвычайно перспективным.

В-третьих, наличие сети агентов, принимающих стратегические решения, подсказывает возможность использования результатов исследования кооперативных игр на графах (в которых граф коммуникаций между агентами ограничивает возможности образования коалиций и взаимодействие между ними [81, 87, 111, 115]). Однако, в задачах возбуждения сети граф коммуникаций относится, скорее, к возможности влияния одних агентов на других (определяет целевые функции агентов и, следовательно, характеристическую функцию кооперативной игры), нежели чем к возможности образования тех или иных коалиций.

В-четвертых, требуется дальнейшее исследование механизмов распределения выигрыша (типа механизмов (5)-(7)), в том числе – в рамках принятой в теории коллективного выбора (см., например, [49]) традиции – характеризация их классов, обладающих заданными свойствами (например, таким свойством, как реализация эффективных состояний).

И, наконец, в-пятых, перспективными представляются дальнейшие исследования децентрализации задачи «возбуждения» сети. Подходы алгоритмической теории игр [79, 118] и распределенной оптимизации [88, 89, 116] подсказывают, что необходимо искать такие простые процедуры локального поведения агентов, которые приводили бы к состоянию, оптимальному в рамках исходной задачи (типа задач (1) и (17)), обладающей очень высокой исходной вычислительной сложностью.

## 7. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЛПОЙ (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ)

В настоящем разделе, написанном совместно с И.Н. Барабановым, формулируется и решается задача динамического управления возбуждением толпы в дискретном и непрерывном времени за счет выбора числа внедряемых в каждом периоде времени «провокаторов» [2].

В [13] и в пятом разделе ставилась и решалась статическая задача управления возбуждением толпы за счет внедрения в нее «провокаторов», причем число провокаторов выбиралось однократно и оставалось постоянным в течение всего рассматриваемого временного горизонта.

В настоящем разделе используется базовая модель возбуждения толпы в дискретном времени [13], но предполагается, что число «провокаторов» может варьироваться в каждый из моментов времени. Структура изложения такова: описывается модель толпы; анализируются модели с ограничением на количество внедряемых провокаторов, число которых изменяется дискретно; рассматриваются непрерывные (по доле провокаторов) модели и вероятностные модели выявления провокаторов.

### 7.1. Постановка задачи управления

Пусть число агентов велико и пусть агенты одинаковы в том смысле, что все они действуют по правилу (1). При этом пороги  $\theta_i$  являются реализациями одной и той же случайной величины. Обозначим через  $F(\cdot): [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  функцию распределения порогов агентов;  $F(\cdot)$  – неубывающая функция, определенная на единичном отрезке (множестве возможных значений порогов агентов), в каждой точке непрерывная слева и имеющая предел справа.

Предположим, что известна доля  $x_k$  агентов, действующих на  $k$ -м шаге ( $k = 0, 1, \dots$ ). Для последующих шагов справедливо следующее рекуррентное соотношение, описывающее динамику поведения множества агентов (см. выражение (2.7)):

$$(1) \quad x_{l+1} = F(x_l), \quad l = k, k + 1, \dots$$

В соответствии с результатами пятого раздела, при добавлении  $m_0$  провокаторов получается новое множество агентов, пороги кото-

рых – реализации случайной величины со следующей функцией распределения:

$$(2) \hat{F} x, m_0 = \frac{m_0}{m_0 + n} + \left(1 - \frac{m_0}{m_0 + n}\right) F x .$$

Равновесие коллективного поведения динамической системы (1) при функции распределения (2) обозначим через  $x^*(m_0)$ .

Рассмотрим *фиксированный временной горизонт* – первые  $K$  моментов времени. Воспользовавшись выражениями (1) и (2) и предполагая, что в общем случае число провокаторов  $m_k$  в различные моменты времени  $k = 0, 1, \dots, K - 1$  может быть различным, получим управляемую (в качестве управления на  $k$ -м шаге выступает количество внедряемых провокаторов  $m_{k-1}$ ) динамическую систему, описывающую ожидаемую долю действующих агентов:

$$(3) x_k = \frac{m_{k-1}}{m_{k-1} + n} + \left(1 - \frac{m_{k-1}}{m_{k-1} + n}\right) F x_{k-1} , \quad k = 0, 1, \dots, x_0 = 0.$$

Для динамической системы (3) можно ставить и решать различные задачи управления, т.е. рассматривать *динамические модели управления возбуждением толпы* – см. ниже.

## 7.2. Модели с ограничением на общее число провокаторов

Начнем с простейшего случая, когда ограничение на число провокаторов в каждом периоде имеет вид

$$(4) 0 \leq m_k \leq M, \quad k = 0, 1, \dots, K - 1,$$

а критерием эффективности является доля агентов, действующих в заданном периоде  $K$ . Соответствующая задача *терминального управления* имеет вид

$$(5) \begin{cases} x_K(m) \rightarrow \max_m \\ (3), (4). \end{cases}$$

Утверждение 7.1. Решение задачи (5) есть  $m_k = M$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ .

Доказательство утверждения 7.1. Рассмотрим правую часть выражения (3). В силу свойств функции распределения  $F(\cdot)$ , монотонности  $\frac{u}{u + n}$  по  $u \in N$  и того, что  $\frac{u}{u + n} \leq 1$  при любых  $u, n \in N$ ,

выражение  $\frac{u}{u+n} + \left(1 - \frac{u}{u+n}\right)F(v)$  монотонно возрастает по  $u \in N$  и  $v \in [0; 1]$ .

Рассмотрим момент времени  $k = K - 1$ . Максимум  $x_K$  достигается при максимально возможном  $x_{K-1}$  и  $m_{K-1} = M$ . Рассматривая последовательно аналогично все предыдущие периоды  $0 \leq k < K - 1$ , получаем, что и для них оптимальным является выбор  $m_l = M$ . •

Следствие. Если  $m = (m_0, \dots, m_{K-1})$  – неубывающая последовательность, то  $x_k(m)$  также является неубывающей последовательностью.

Обозначим через  $l(\hat{x}, m) = \min \{k = 1, \dots, K \mid x_k(m) \geq \hat{x}\}$  самый ранний момент времени, в который доля действующих агентов достигнет заданного значения  $\hat{x}$  (если множество  $\{k = 1, \dots, K \mid x_k(m) \geq \hat{x}\}$  пусто, то положим  $l(\hat{x}, m) = +\infty$ ). В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать следующую задачу о быстродействии:

$$(6) \quad \begin{cases} l(\hat{x}, m) \rightarrow \min_m, \\ (3), (4). \end{cases}$$

Утверждение 7.2. Решение задачи (6) есть  $m_k = M, k = 0, 1, \dots, K-1$ .

Доказательство утверждения 7.2. Фиксируем произвольный момент времени  $k$ :  $0 < k \leq K$  и произвольный момент времени  $k'$ :  $0 \leq k' < k$ . Из (7) и доказательства утверждения 1 следует, что

$$\forall m_{k'} < M \quad x_k(M, \dots, m_{k'}, \dots, M) \leq x_k(M, \dots, M, \dots, M). \bullet$$

Содержательно, в рамках задач (5) или (6) центру наиболее выгодно внедрить в толпу в начальный момент времени максимальное допустимое число провокаторов и больше ничего не делать (не пытаться, например, потом уменьшать, а затем опять увеличивать число внедренных провокаторов). Такая структура оптимального решения обусловлена тем, что в моделях (5) и (6) центр не несет затрат на внедрение провокаторов.

Сформулируем одно очевидное утверждение, касающееся числа  $M$  – максимально возможного количества провокаторов: если  $M$  удовлетворяет условию  $M \geq n\hat{x}/(1 - \hat{x})$ , то задача быстродействия может быть решена за один шаг. Если это условие не выполняется, то существует такая (пассивная) толпа (т.е. такая функция распреде-

ления  $F(\cdot)$ ), что значение  $\hat{x}$  не будет достигнуто ни за какое конечное число шагов.

Приведенная оценка на максимальное необходимое число провокаторов является достаточно грубой и в случае больших  $\hat{x}$  может достигать больших значений, в частности при  $\hat{x} \geq 0,5$  имеем  $M \geq n$ , что означает, что число провокаторов должно превышать численность самой толпы. Формально построенная модель допускает произвольное (в том числе как угодно большое) число провокаторов, однако очевидно, что большое количество провокаторов необходимо вводить для толпы, близкой к вырожденной с точки зрения возбудимости, для которой функция распределения порогов близка к нулю почти на всем отрезке  $[0; 1]$ .

Ниже рассматриваются возможные постановки задач управления, учитывающие затраты центра.

Модели, учитывающие затраты центра. При известной неубывающей функции затрат  $c(m)$ , более общей, чем задача (5), является следующая *задача целочисленного динамического программирования* (общее число вариантов  $- M^K$ ):

$$(7) \quad \begin{cases} H(x_K(m)) - c(m) \rightarrow \max_m, \\ (3), (4). \end{cases}$$

Например, при фиксированной «цене»  $\lambda \geq 0$  содержания одного провокатора в единицу времени, затраты центра примут вид

$$(8) \quad c(m) = \lambda \sum_{k=0}^{K-1} m_k.$$

Возможным вариантом задач типа (7)-(8) будет *задача минимизации затрат* по обеспечению к моменту времени  $K$  заданной доли  $\hat{x}$  действующих агентов:

$$(9) \quad \begin{cases} c(m) \rightarrow \min_m, \\ x_K(m) \geq \hat{x}, \\ (3), (4), (8). \end{cases}$$

Эти задачи рассматриваются в следующем подразделе.

### 7.3. Непрерывные управление

Пусть  $M$  и  $n$  велики. Обозначим:  $\delta_k = \frac{m_k}{m_k + n}$ ,  $\lambda_0 = \lambda n$ . Условие

(4) примет вид  $\delta_k \in [0; \Delta]$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ , где  $\Delta = \frac{M}{M + n}$ , тогда затраты (8) можно записать как

$$(10) \quad c(\delta) = \lambda_0 \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k},$$

где  $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{K-1})$ ,  $\delta_k$  – действительные числа,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ .

Динамическую систему (3) с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$(11) \quad x_k(\delta) = \delta_{k-1} + 1 - \delta_{k-1} F x_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, x_0 = 0.$$

Исследуем свойства множества достижимости

$$D = \bigcup_{\delta: 0 \leq \delta_k \leq \Delta, k=0, K-1} x_K(\delta) \subseteq [0; 1].$$

По аналогии с доказательством утверждения 7.1 можно показать, что  $x_K(\delta)$  монотонно по  $\delta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ . Если эта зависимость является непрерывной, то (11) задает непрерывное монотонное (в смысле конуса) отображение  $[0; \Delta]^K$  в  $[0; 1]$ , т.е. справедливо следующее

Утверждение 7.3. Если функция распределения  $F(\cdot)$  непрерывна, то  $D = [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)]$ .

С точки зрения возможных приложений значительный интерес представляет случай так называемых *унифицированных решений*  $\hat{\delta} = (\rho, \dots, \rho)$ , при использовании которых доля  $\rho \in [0; \Delta]$  провокаторов во всех периодах времени одинакова. Обозначим через  $D_0 = \bigcup_{\rho \in [0; \Delta]} x_K(\rho, \dots, \rho) \subseteq [0; 1]$  множество достижимости в унифицированном случае. Так как  $x_K(\rho, \dots, \rho)$  – монотонное непрерывное отображение  $[0; \Delta]$  в  $[0; 1]$ , причем  $x_K(0, \dots, 0) = 0$ , то  $D_0 = D$  и справедливо следующее

Утверждение 7.4. Если функция распределения  $F(\cdot)$  непрерывна, то для любой допустимой последовательности  $\delta$  существует эквивалентное унифицированное решение  $\hat{\delta}$ , т.е. допустимое  $\hat{\delta}$ , такое что  $x_K(\delta) = x_K(\hat{\delta})$ .

Содержательно утверждение 7.4 означает, что с точки зрения множества достижимости центр может ограничиться унифицированными решениями.

Утверждение 7.4 неконструктивно, так как оно констатирует существование эквивалентного унифицированного решения, но ничего не говорит о том, как его найти. В ряде частных случаев (в том числе см. пример 7.1) удается найти в явном виде выражение для доли действующих в  $k$ -м периоде агентов, а также эквивалентное унифицированное решение.

Пример 7.1. Пусть распределение порогов агентов равномерное:  $F(x) = x$ . Возьмем произвольный момент времени  $l: 0 \leq l \leq K-1$  и произвольное приращение времени  $s: l+s \leq K$ . По индукции можно доказать, что

$$(12) \quad x_{l+s} = 1 + (x_l - 1) \prod_{j=0}^{s-1} (1 - \delta_{l+j}).$$

Если выбрать число  $\rho$  из условия

$$(13) \quad (1 - \rho)^s = \prod_{j=0}^{s-1} (1 - \delta_{l+j}),$$

т.е. значение  $(1 - \rho)$  есть среднее геометрическое значений  $1 - \delta_{l+j}$ , то из начального состояния  $x_l$  получится одно и то же конечное состояние  $x_{l+s}$  при использовании последовательности управлений

$\delta_l, \dots, \delta_{l+s-1}$  и  $\underbrace{\rho, \dots, \rho}_s$ . Поскольку момент времени  $l$  и приращение времени можно брать произвольными, то таким образом можно заменить всю последовательность управлений  $\delta$  на последовательность одинаковых управлений.

Если  $F(x) = x$ , то при  $x_0 = 0$  из (12)-(13) сразу следует

$$(14) \quad x_k(\delta) = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_i - \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^{k-1} \delta_i \delta_j + \sum_{\substack{i,j,l=0 \\ i \neq j \neq l}}^{k-1} \delta_i \delta_j \delta_l - \sum_{\substack{i,j,l,s=0 \\ i \neq j \neq l \neq s}}^{k-1} \delta_i \delta_j \delta_l \delta_s + \dots \bullet$$

Пример 7.2. Пусть  $K = 2$  и  $F(x) = x$ . Из (14) следует, что  $x_1 = \delta_0$ ,  $x_2 = \delta_0 + \delta_1 - \delta_0 \delta_1$ . Пусть  $H(x) = x$ , и затраты определяются в виде (10). Тогда задача (7) примет вид

$$\delta_0 + \delta_1 - \delta_0 \delta_1 - \lambda_0 \left[ \frac{\delta_0}{1-\delta_0} + \frac{\delta_1}{1-\delta_1} \right] \rightarrow \max_{\delta_0, \delta_1 \leq \Delta}.$$

Решение этой задачи:

$$\delta_0 = \delta_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} \leq 0, \\ 1 - \sqrt[3]{\lambda_0}, & \text{если } 0 < 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} < \Delta, \\ \Delta, & \text{если } 1 - \sqrt[3]{\lambda_0} \geq \Delta; \end{cases}$$

т. е. решение будет зависеть от цены содержания провокатора в единицу времени. При высокой цене провокаторов внедрять вообще не выгодно. •

Пример 7.3. Пусть, как и в примере 7.2,  $F(x) = x$ . Рассмотрим задачу (9) минимизации затрат на провокаторов при условии достижения определенного значения  $\hat{x}$  за  $K$  шагов:

$$\begin{cases} \frac{\delta_0}{1-\delta_0} + \dots + \frac{\delta_{K-1}}{1-\delta_{K-1}} \rightarrow \min_{0 \leq \delta_0, \dots, \delta_{K-1} \leq \Delta}, \\ 1 - (1 - \delta_0) \dots (1 - \delta_{K-1}) \geq \hat{x} \end{cases}$$

Условия существования решения этой задачи, заключающиеся в том, что множество переменных, по которому берется минимум целевой функции, не пусто, вводят ограничения на параметры задачи:  $\Delta \geq 1 - \sqrt[K]{1 - \hat{x}}$ , т.е. для достижения цели нужно иметь в своем распоряжении достаточное число провокаторов.

В силу монотонности целевой функции по каждой переменной ограничение выполняется как равенство, а в силу симметрии задачи минимум будет достигаться при одинаковых значениях  $\delta_i$ . Таким образом, решением данной задачи будет  $\delta_0 = \dots = \delta_{K-1} = 1 - \sqrt[K]{1 - \hat{x}}$ . •

Задача (7)-(8) для рассматриваемого случая непрерывных переменных примет следующий простой вид:

$$(15) \begin{cases} H(x_K(\delta)) - c(\delta) \rightarrow \max_{\delta}, \\ (10), (11), \delta_k \in [0; \Delta]. \end{cases}$$

Задача (15) может быть решена численно при известных функциях выигрыша, затрат и распределения порогов. В частности, в силу утверждения 7.3 может быть использован двухшаговый метод, на первом этапе которого ищется

$$C(z) = \min_{\delta: \delta_k \in [0; \Delta], x_K(\delta) = z} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k}, z \in [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)],$$

а на втором шаге решается скалярная задача

$$z^* = \arg \max_{z \in [0; x_K(\Delta, \dots, \Delta)]} [H(z) - \lambda_0 C(z)].$$

Другим возможным вариантом постановки задачи управления возбуждением толпы при  $H(x) = x$ , является следующий:

$$(16) \begin{cases} x_K(\delta) + \sum_{k=0}^{K-1} \left[ x_k(\delta) - \lambda_0 \frac{\delta_k}{1 - \delta_k} \right] \rightarrow \max_{\delta}, \\ (14), \delta_k \in [0; \Delta]. \end{cases}$$

Структура целевой функции в задаче (16) отличается от терминальной задачи (15) тем, что в первой выигрыш включает сумму долей действующих агентов во всех периодах времени.

Запишем «уравнение Беллмана» для задачи (16) в рамках выражения (10) при  $H(x) = x$  (что по умолчанию будем предполагать в дальнейшем):

$$(17) B(x, w) = w + (1 - w) F(x) - \lambda_0 \frac{w}{1 - w} \rightarrow \max_{w \in [0; \Delta]}.$$

Внутренний максимум в задаче (17), найденный из условий первого порядка, обозначим как

$$(18) w(x) = \max \{ \min \{ \Delta; 1 - \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} \}; 0 \}.$$

В силу монотонности функции распределения  $w(x)$  – невозрастающая функция.

Вычисляя  $B(x, w(x)) = 1 + \lambda_0 - 2 \sqrt{\lambda_0(1 - F(x))}$ , получаем, что решение задачи (17) имеет три возможных «режима» (две границы отрезка  $[0; \Delta]$  или внутренняя точка (18)):

$$(19) w^*(x) = \arg \max_{w \in \{0; w(x); \Delta\}} B(x, w).$$

Качественный анализ зависимости решения (19) от параметра  $\lambda$  (напомним, что этот параметр отражает стоимость внедрения одного провокатора на один период времени) свидетельствует, что при очень высоких значениях  $\lambda$  оптимальным является нулевое число провокаторов ( $w = 0$ ), при очень низких значениях  $\lambda$  – максимально возможное число провокаторов ( $w = \Delta$ ). При «промежуточных»

значениях  $\lambda$  оптимальными могут оказаться отличные от нуля или  $\Delta$  доли внедряемых провокаторов.

Обозначим через  $\delta^*$  решение задачи (16). Для динамической системы (11) справедливо следующее

Утверждение 7.5. Если для всех  $x \in [0; x^*(\Delta)]$  выполнено

$$(20) F(x) \geq 1 - (1 - x)^2 / \lambda_0,$$

то  $x_k(\delta^*)$  – неубывающая по  $k$  последовательность.

Доказательство утверждения 7.5. Подставив выражение (18) в (11), получим условие монотонности в следующем виде:

$$1 - \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} + \sqrt{\frac{\lambda_0}{1 - F(x)}} F(x) \geq x,$$

что после преобразований приводит к выражению (20). •

Утверждение 7.6. Если функция распределения такова, что для всех  $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1]: \alpha \geq \beta, \gamma \leq x^*(\Delta)$  выполнено

$$(21) \beta + (1 - \beta)F(\alpha + (1 - \alpha)F(\gamma)) \leq \alpha + (1 - \alpha)F(\beta + (1 - \beta)F(\gamma)),$$

то существует оптимальная неубывающая последовательность  $\delta^*$ .

Доказательство утверждения 7.6. Пусть  $\exists l: 0 < l < K - 1$  и  $\delta_l^* > \delta_{l+1}^*$ . Если удастся найти  $\delta_l \in [0; \Delta]$  и  $\delta_{l+1} \in [0; \Delta]$  такие, что

$$(П1) \delta_l \leq \delta_{l+1},$$

$$(П2) x_{l+2}(x_l, \delta_l, \delta_{l+1}) = x_{l+2}(x_l, \delta_l^*, \delta_{l+1}^*),$$

$$(П3) c(\delta^*) \geq c(\delta_0^*, \dots, \delta_{l-1}^*, \delta_l, \delta_{l+1}, \delta_{l+2}^*, \dots, \delta_{K-1}^*),$$

то это будет свидетельствовать, что  $\delta_0^*, \dots, \delta_{l-1}^*, \delta_l, \delta_{l+1}, \delta_{l+2}^*, \dots, \delta_{K-1}^*$  также является решением задачи (15).

Выберем  $\delta_l = \delta_{l+1}^*, \delta_{l+1} = \delta_{l+1}^* + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in [0; \delta_l^* - \delta_{l+1}^*]$ , тогда (П1) выполнено. Условие (П3) будет выполнено в силу монотонности функции затрат, а из выражения (П2) получим

$$\delta_{l+1} + (1 - \delta_{l+1})F(\delta_l + (1 - \delta_l)F(x_l)) = \delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)),$$

т.е.

$$(П4) \varepsilon = \frac{(1 - \delta_{l+1}^*)[F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)) - F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l))]}{1 - F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l))}.$$

Отметим, что при  $F(x) = x \varepsilon \equiv \delta_l^* - \delta_{l+1}^*$ .

Из выражения (П4) следует, что всегда  $\varepsilon \geq 0$ , а условие  $\varepsilon \leq \delta_l^* - \delta_{l+1}^*$  можно записать в виде

$$\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(\delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(x_l)) \leq \delta_l^* + (1 - \delta_l^*)F(\delta_{l+1}^* + (1 - \delta_{l+1}^*)F(x_l)).$$

В силу того, что  $x_l \leq x^*(\Delta)$ , и условия (21), последнее неравенство выполнено.

Приведенные выше рассуждения показывают, что убывающий участок из пары рядом стоящих элементов последовательности управлений  $\delta$  можно заменить на «эквивалентный» неубывающий с сохранением значений  $x$  и условия оптимальности. Осталось показать, что, применяя эту операцию конечное число раз, можно сделать всю последовательность  $\delta$  неубывающей. Действительно, пусть  $\delta_m^*$  – минимальное значение из всей последовательности. Применим описанную процедуру конечное число раз (не более  $K$ ) для того, чтобы это значение стояло на нулевом месте в новой последовательности. Далее найдем следующее минимальное значение и передвижением его на первое место за не более чем  $(K - 1)$  перестановок и т.д. Таким образом, число примененных перестановок будет ограничено сверху числом  $K + (K - 1) + \dots + 1 = K(K + 1) / 2$ . •

Класс функций распределения, удовлетворяющих условию (21), не пуст. Так, ему удовлетворяет  $F(x) = x^2$  при  $\gamma \leq \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ , т.е. при  $\Delta \leq 0,388$ ; для равномерного распределения ( $F(x) = x$ ) (21) обращается в тождество.

Аналогичный утверждению 7.6 результат, по-видимому, справедлив и для «вогнутых» функций распределения (с обратным неравенством типа (21)). Однако для них отличное от нуля РКП достижимо при сколь угодно малых управлении (см. модели в пятом разделе), поэтому с точки зрения приложений этот случай представляется менее интересным.

В заключение настоящего подраздела рассмотрим «асимптотику» решаемых задач при  $K = +\infty$ . Предположим, что: функция распределения порогов  $F(\cdot)$  непрерывна, имеет единственную точку перегиба,  $F(0) = 0$ , уравнение  $F(x) = x$  имеет на отрезке  $[0; 1]$  единственное решение – точку  $q > 0$ , причем  $\forall x \in (0; q) F(x) < x$ ,  $\forall x \in (q; 1) F(x) > x$ . Примерами функций распределений порогов, удовлетворяющих введенным предположениям, являются функции, построенные на основании идентификации по результатам анализа ряда реальных онлайновых социальных сетей [4]. Также будем считать, что целью управления является «возбуждение» всех агентов с наименьшими затратами.

Из введенных предположений о свойствах функции распределения порогов следует, что если для некоторого периода времени  $l$  выполнено  $x_l > q$ , то для всех  $k > l$  при  $\delta_k \equiv 0$  последовательность  $x_k(\delta)$  является неубывающей, причем  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 1$ . Содержательно это

свойство означает, что рассматриваемая толпа такова, что *область притяжения* нулевого положения равновесия в отсутствии управления составляет полуинтервал  $[0; q]$ , т.е. в ней достаточно обеспечить «искусственное» возбуждение более чем  $q$  (доли) агентов, а затем даже в отсутствии управления эта толпа будет «сама» стремиться к единичному равновесному состоянию.

Обозначим через  $\delta^l$  решение следующей задачи:

$$(22) \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\delta_k}{1 - \delta_k} \rightarrow \min_{\delta: \delta_k \in [0; \Delta], x_l(\delta) > q}.$$

Вычислим  $Q_l = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\delta_k^l}{1 - \delta_k^l}$  и найдем  $l^* = \arg \min_{l=1, 2, \dots} Q_l$ .

Решение задачи (22) существует при условии

$$\forall x \in [0, q] \rightarrow \Delta + (1 - \Delta)F(x) > x,$$

которое также можно записать в виде

$$(23) \Delta > \max_{x \in [0, q]} [x - (1 - \Delta)F(x)].$$

Обозначим через  $\Delta^*$  инфимум тех  $\Delta$ , которые удовлетворяют (27). Содержательно величина  $\Delta^*$  представляет собой минимальное значение доли провокаторов, необходимое для того, чтобы толпа «проскочила» неустойчивое положение равновесия  $q$ , после чего двигалась бы к устойчивому равновесию, в котором возбуждены все агенты. Эта величина, зависящая от формы кривой  $F(x)$  на отрезке  $[0; q]$ , представляет собой количественную характеристику свойства толпы не возбуждаться сильно при небольших количествах провокаторов. В этом смысле  $\Delta^*$  отражает «инертность» толпы.

Утверждение 7.7.  $\Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}$ .

Доказательство утверждения 7.7. Возьмем произвольное число  $\Delta$ , удовлетворяющее (23), т.е.  $\Delta + (1 - \Delta)F(x) - x > 0$ . Перепишем это

выражение в виде  $(1 - F(x)) \left( \Delta - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) > 0$ . Так как первый сомножитель положителен, отсюда следует, что

$$\forall x \in [0, q] \rightarrow \Delta > \frac{x - F(x)}{1 - F(x)},$$

откуда

$$\Delta \geq \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)},$$

т.е. число  $\max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}$  является нижней гранью чисел  $\Delta$ , удовлетворяющих (23). С другой стороны, для всех  $\varepsilon > 0$  число  $\max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \varepsilon$  нижней гранью не является, поскольку для меньшего числа  $\Delta = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \frac{\varepsilon}{2}$  условие (23) выполняется

$$\begin{aligned} (1 - F(x)) \left( \Delta - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) &= \\ = (1 - F(x)) \left( \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} \right) &\geq \\ \geq (1 - F(x)) \frac{\varepsilon}{2} &> 0 \quad \forall x \in [0, q]. \end{aligned}$$

Тем самым по определению инфимума  $\Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)}.$  •

В силу введенных предположений о свойствах функции распределения структура оптимального решения рассматриваемой задачи характеризуется следующим образом.

Утверждение 7.8. Если выполнено условие (23), то

$$\delta_0^{l^*} = (\delta_0^{l^*} > 0; \delta_1^{l^*} > 0; \dots; \delta_{l^*-1}^{l^*} > 0; 0; 0; \dots).$$

Содержательно утверждение 7.8 означает, что с точки зрения минимизации затрат на возбуждение толпы, удовлетворяющей введенным предположениям, управление, вычисляемое в соответствии с (23), должно быть отличным от нуля только в первые (включая нулевой)  $l^*$  моментов времени.

Пример 7.4. В [4] и третьем разделе настоящей работы приведена двухпараметрическая (с параметрами  $a$  и  $b$ ) функция распределения порогов, наилучшим образом описывающая структуру распространения активности в русскоязычных сегментах онлайновых

социальных сетей (СС) LiveJournal, FaceBook и Twitter. Эта функция имеет вид (см. выражение 3.17)

$$(24) F_{a,b}(x) = \frac{\operatorname{arctg}(a(x-b)) + \operatorname{arctg}(ab)}{\operatorname{arctg}(a(1-b)) + \operatorname{arctg}(ab)}, a \approx [7; 15], b \in [0; 1].$$

Выберем  $a = 13$  (параметр, соответствующий СС Facebook),  $b = 0,4$  (см. рисунок). Тогда  $q \approx 0,375$  и  $\Delta^* \approx 0,169$ . •

Отметим, что выше рассматривался случай управляемого вывода толпы из области притяжения нуля  $[0; q]$ . Возможны случаи, когда «самовозбуждение» толпы происходит из-за того, что соответствующими оказываются реализации случайной величины для порогов агентов с теоретической функцией распределения  $F(\cdot)$ . Модели, использующие для описания подобных эффектов аппарат больших уклонений, рассматривались в [14, 67].

## 7.4. Вероятностные модели выявления провокаторов

Модифицируем рассматриваемую модель следующим образом. Пусть в периоде времени  $k$ , после того как центр выбрал соответствующую долю провокаторов  $\delta_k$ , другой субъект (назовем его условно *метацентр*) наблюдает ситуацию и с вероятностью  $p(\delta_k)$  обнаруживает наличие провокаторов (где  $p(\cdot): [0;1] \rightarrow [0;1]$  – неубывающая функция,  $p(0) = 0$ ). В случае обнаружения провокаторов «игра останавливается», и доля действующих агентов во все последующие периоды времени равна нулю. Если метацентр провокаторов не обнаружил, то доля действующих агентов определяется (11), центр выбирает  $\delta_{k+1}$  и т.д.

Вероятность того, что провокаторы не будут обнаружены до  $K$ -го периода, равна

$$(25) P_K(\delta) = \prod_{k=0}^{K-1} (1 - p(\delta_k)).$$

Задачу управления, решаемую центром, при этом можно формулировать, например, следующим образом:

$$(26) \begin{cases} x_K(\delta) \rightarrow \max_{\delta}, \\ P_K(\delta) \geq \hat{P}, \\ (11), \delta_k \in [0; \Delta], \end{cases}$$

где  $\hat{P}$  - заданная вероятность того, что в  $K$ -ый момент времени в толпе будут иметься действующие агенты. Задача (25)-(26) с формальной точки зрения аналогична задаче (15) и в каждом конкретном случае может быть решена численно. Тем не менее в некоторых случаях можно априори сказать что-то о структуре оптимального решения. Например, следующее утверждение гласит, что если пороги агентов распределены равномерно, то оптимальным является унифицированное решение (в котором доля внедряемых в каждом периоде времени провокаторов постоянна – см. также утверждение 4).

Утверждение 7.9. Если  $F(x) = x$  и  $p(\rho) = \rho$ , то существует оптимальное унифицированное решение  $\rho^*$  задачи (25)-(26):

$$(27) \rho^* = \min \{ \Delta; 1 - (\hat{P})^{1/K} \}.$$

Доказательство утверждения 7.9. В силу неубывания  $x_K(\delta)$  и невозрастания  $P_K(\delta)$  по всем элементам вектора  $\delta$  ограничение  $P_K(\delta) \geq \hat{P}$  в оптимальном решении выполняется как равенство.

В силу утверждения 4 для любой последовательности  $\delta$  существует эквивалентное ей (с точки зрения терминального значения доли действующих агентов) унифицированное решение.

Пусть в последовательности  $\delta$  существует  $l: 0 < l < K - 1$  и  $\delta_l \neq \delta_{l+1} \in [0; \Delta]$ . Покажем, что при  $p(\rho) = \rho$  выполнено

$$P_K(\delta) = P_K(\delta_0, \dots, \delta_{l-1}, \rho(\delta_l, \delta_{l+1}), \rho(\delta_l, \delta_{l+1}), \delta_{l+2}, \dots, \delta_{K-1}).$$

Действительно, воспользовавшись выражением (25), нетрудно убедиться, что  $(1 - \delta_l)(1 - \delta_{l+1}) \equiv (1 - \rho(\delta_l, \delta_{l+1}))^2$ .

Выражение (27) следует из унифицированности оптимального решения и выражения (25). •

Отметим, что еще одной возможной вероятностной моделью обнаружения провокаторов является основывающаяся на предположении, что в случае обнаружения метацентром провокаторов в периоде  $k$  их число в следующем периоде времени обнуляется, а дальше «игра» продолжается, но при условии, что в распоряжении центра остается доля  $\Delta - \delta_k$  провокаторов.

Таким образом, в настоящем разделе описаны различные задачи возбуждения толпы на основе модели Грановеттера с дискретным временем. Рассмотрен конечный и бесконечный временной горизонт. Для ряда задач с заданными характеристиками толпы приведены оптимальные в том или ином смысле решения, либо показано,

каким образом задачи сводятся к известным задачам численной оптимизации.

## 8. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ТОЛПОЙ (НЕПРЕРЫВНОЕ ВРЕМЯ)

Настоящий раздел, написанный совместно с И.Н. Барабановым, посвящен моделям управления толпой с непрерывным временем [3]. Формулируется и решается задача динамического управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет выбора числа внедряемых в каждый момент времени «провокаторов».

Собственно модель толпы (обобщение модели Грановеттера на случай непрерывного времени) заимствована из работ [66, 76]. Так, считается, что, если известна доля  $x_0 \in [0; 1]$  агентов, действующих в начальный (нулевой) момент времени, то в дальнейшем ее эволюция во времени  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  описывается уравнением

$$(1) \dot{x} = F(x) - x,$$

где  $F(\cdot)$  – известная непрерывная функция, обладающая свойствами функции распределения и содержательно являющаяся функцией распределения порогов агентов, такая что  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$ . Введение управления (добавление провокаторов)  $u(t) \in [0; 1]$  по аналогии с тем, как это делается в [13], а также в пятом и седьмом разделах, приводит к управляемой динамической системе

$$(2) \dot{x} = u(t) + (1 - u(t))F(x) - x.$$

Изложение материала настоящего раздела следующее: изучаются множество достижимости и свойство «монотонности траекторий» по управлению, затем исследуется случай постоянных управлений, после чего задачи возбуждения всей толпы, и, наконец, исследуется случай позиционного управления.

### 8.1. Множество достижимости и монотонность

Сформулируем следующую лемму, результат которой используется ниже.

Рассмотрим функции  $G_1(x, t)$  и  $G_2(x, t): R \times [t_0, +\infty) \rightarrow R$  непрерывно дифференцируемые по  $x$  и непрерывные по  $t$ . Кроме того, будем считать, что функции  $G_1$  и  $G_2$  таковы, что решения задач

Коши для дифференциальных уравнений  $\dot{x} = G_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , с начальными условиями  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 \in R$  бесконечно продолжимы по  $t$ . Обозначим эти решения задач Коши  $x_i(t, (t_0, x_0))$ ,  $i = 1, 2$  соответственно.

Лемма 8.1. Пусть  $\forall x \in R, \forall t \geq t_0 \rightarrow G_1(x, t) > G_2(x, t)$ . Тогда  $\forall t > t_0 \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ .

Доказательство леммы 8.1. По условию леммы,  $G_1(x_0, t_0) > G_2(x_0, t_0)$ , т.е.  $\frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \Big|_{t=t_0} > \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \Big|_{t=t_0}$ . По-

этому найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что  $\forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ , т.е. график решения первого уравнения лежит выше графика второго на всем полуинтервале  $(t_0, t_0 + \varepsilon]$ . Покажем, что такое расположение графиков справедливо для всех  $t \geq t_0$ .

Предположим противное, т.е.  $\exists \hat{t} : x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) = x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)) = \hat{x}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\hat{t}$  – первый момент достижения графиком  $x_2$  графика  $x_1$ , т.е.  $\hat{t} = \inf t > t_0 + \varepsilon : x_1(t, (t_0, x_0)) = x_2(t, (t_0, x_0)) < +\infty$ . Очевидно, что  $\hat{t} \geq t_0 + \varepsilon > t_0$  и что  $\forall t \in (t_0, \hat{t}) \rightarrow x_1(t, (t_0, x_0)) > x_2(t, (t_0, x_0))$ . Отсюда для  $\tau \in [0, \hat{t} - t_0)$  справедливо

$$x_1(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_1(\hat{t}, (t_0, x_0)) > x_2(\hat{t} - \tau, (t_0, x_0)) - x_2(\hat{t}, (t_0, x_0)),$$

так как вторые слагаемые в обеих частях этого неравенства одинаковы и равны  $\hat{x}$ . Поделим обе части неравенства на  $-\tau$  (знак неравенства сменится на противоположный) и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . В результате получим соотношение для производных решений  $x_1$  и  $x_2$  в точке  $\hat{t}$ :  $\frac{d}{dt} x_1(t, (t_0, x_0)) \Big|_{t=\hat{t}} \leq \frac{d}{dt} x_2(t, (t_0, x_0)) \Big|_{t=\hat{t}}$ , откуда

следует, что  $G_1(\hat{x}, \hat{t}) \leq G_2(\hat{x}, \hat{t})$ . Выполнение этого неравенства одновременно с выполнением условия утверждения невозможно, следовательно, предположение неверно. •

Заметим, что для справедливости утверждения леммы не обязательно рассматривать неравенство  $G_1(x, t) > G_2(x, t)$  при всех  $x \in R$ ,

достаточно ограничиться объединением множеств достижимости уравнений  $\dot{x} = G_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  при выбранных значениях начальных условий  $(t_0, x_0)$ .

Обозначим через  $x_t(u)$  значение доли действующих агентов в момент времени  $t$  при использовании управления  $u(\cdot)$ . В силу того, что  $\forall x \in [0; 1] F(x) \leq 1$ , а правая часть выражения (1) монотонно возрастает по  $u$  при каждом  $t$ , справедливо следующее

Утверждение 8.1. Пусть функция  $F(x)$  такова, что  $F(x) < 1$  при  $x \in [0; 1)$ . Если  $\forall t \geq t_0 \rightarrow u_1(t) > u_2(t)$  и  $x_0(u_1) = x_0(u_2)$  ( $x_0 < 1$ ), то  $\forall t > t_0 x_t(u_1) > x_t(u_2)$ .

Действительно, в силу условий утверждения при всех  $t$  и  $x < 1$  выполняется неравенство

$$u_1(t) + (1 - u_1(t))F(x) - x > u_2(t) + (1 - u_2(t))F(x) - x,$$

поскольку выпуклая комбинация различных чисел (1 и  $F(x)$ ) строго монотонна. Точка  $x = 1$  является положением равновесия (1) при любых управлениях  $u(t)$ , следовательно, она не достижима ни при каких конечных  $t$ . Применяя лемму 8.1, получим, что при одинаковых начальных условиях  $x_t(u_1) > x_t(u_2)$ .

Предположим, что на управления наложено *ограничение*:

(3)  $u(t) \leq \Delta$ ,  $t \geq t_0$ ,

где  $\Delta \in [0; 1]$  – некоторая константа.

Далее будем считать, что  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = x(0) = 0$ , т.е. в начальный момент времени толпа не возбуждена.

Если *критерием эффективности* является доля агентов, действующих в заданный момент времени  $T > 0$ , то соответствующая задача *терминального управления* имеет вид:

$$(4) \begin{cases} x_T(u) \rightarrow \max, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Приведем ряд утверждений (утв. 8.2-8.4), являющихся аналогами соответствующих утверждений седьмого раздела.

Утверждение 8.2. Решение задачи (4) имеет вид:  $u(t) = \Delta$ ,  $t \in [0; T]$ .

Обозначим через  $\tau(\hat{x}, u) = \min \{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$  самый ранний момент времени, в который доля действующих агентов достигнет заданного значения  $\hat{x}$  (если множество  $\{t \geq 0 \mid x_t(u) \geq \hat{x}\}$  пусто, то

положим  $\tau(\hat{x}, u) = +\infty$ ). В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать следующую задачу о быстродействии:

$$(5) \quad \begin{cases} \tau(\hat{x}, u) \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \\ (2), (3). \end{cases}$$

Утверждение 8.3. Решение задачи (5) имеет вид:  $u(t) = \Delta$ ,  $t \in [0; \tau]$ .

Содержательно, как и в моделях с дискретным временем (см. седьмой раздел), в рамках задачи (4) или (5) центру наиболее выгодно внедрить в толпу в начальный момент времени максимальное допустимое число провокаторов и больше ничего не делать (не пытаться, например, потом уменьшать, а затем опять увеличивать число внедренных провокаторов в последующие моменты времени). Такая структура оптимального решения обусловлена тем, что в моделях (4) и (5) центр не несет затрат на внедрение и/или содержание провокаторов.

Исследуем свойства множества достижимости  
 $D = \bigcup_{u(t) \in [0; \Delta]} x_T(u)$ ,  $D \subseteq [0; 1]$  в силу того, что правая часть динамиче-

ской системы (2) обращается в ноль при  $x = 1$ .

С точки зрения возможных приложений значительный интерес представляет случай т.н. *постоянных управлений*:  $u(t) = v$ ,  $t \geq 0$ , при использовании которых доля  $v \in [0; \Delta]$  провокаторов во все моменты времени одинакова. Обозначим через  $x_T(\Delta) = x_T(u(t) \equiv \Delta)$ ,  $t \in [0; T]$ , через  $D_0 = \bigcup_{v \in [0; \Delta]} x_T(v) \subseteq [0; 1]$  - множество достижимости

при постоянных управлениях. Так как  $x_T(v)$  - монотонное (в силу утверждения 8.1) непрерывное отображение  $[0; \Delta]$  в  $[0; 1]$ , причем  $x_T(0) = 0$ , то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8.4.  $D_0 = [0; x_T(\Delta)]$ .

Рассмотрим модели, учитывающие затраты центра на управление. При фиксированной «цене»  $\lambda \geq 0$  содержания одного провокатора в единицу времени, затраты центра за время  $\tau \geq 0$  примут вид:

$$(6) \quad c_\tau(u) = \lambda \int_0^\tau u(t) dt.$$

Пусть заданы монотонные функции: терминальный выигрыш центра  $H(\cdot)$  от доли действующих агентов и текущий выигрыш  $h(\cdot)$ . Тогда «обобщением» задачи (4) будет задача

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t))dt - c_T(u) \rightarrow \max_u, \\ (2), (3). \end{array} \right.$$

Если заданы ограничения на «суммарные» затраты  $C$  центра, то задачу типа (7) можно сформулировать в виде:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(x_T(u)) + \int_0^T h(x(t))dt \rightarrow \max_u, \\ (2), c_T(u) \leq C. \end{array} \right.$$

Возможным вариантом задач типов (4), (5), (7), (8) будет *задача минимизации затрат* по обеспечению к моменту времени  $T$  заданной доли  $\hat{x}$  действующих агентов:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_T(u) \rightarrow \min_u, \\ x_T(u) \geq \hat{x}, \\ (2). \end{array} \right.$$

Задачи типа (7)-(9) приводятся к стандартным задачам оптимального управления.

Пример 8.1. Рассмотрим задачу (9) в случае, когда  $F(x) = x$ . Предположим, что  $x_0 = 0$ , а затраты центра задаются (6) с  $\lambda_0 = 1$ . В результате получим следующую задачу оптимального программного управления с закрепленными концами:

$$(10) \quad \begin{aligned} & \dot{x} = u(1-x), \\ & x(0) = 0, x(T) = \hat{x}, \\ & 0 \leq u \leq \Delta, \\ & \int_0^T u(t)dt \rightarrow \min_{u \in [0, \Delta]}. \end{aligned}$$

Запишем функцию Понtryгина:  $H = \psi(u(1-x)) - u$  для (10). В соответствии с принципом максимума эта функция должна принимать максимальные значения по  $u$ . В силу линейности функции по  $u$

максимум достигается на концах отрезка  $[0, \Delta]$  в зависимости от знака коэффициента при  $u$ , т.е. можно записать

$$(11) \quad u = \frac{\Delta}{2} \operatorname{sign} \psi 1-x -1 +1 .$$

Линейность по управлению функции Понтрягина является следствием линейности по управлению и правой части динамической системы (2), и функционала (6). То есть справедливо следующее

Утверждение 8.5. Если ограничения в задачах оптимального управления типа (7)-(9) линейны по управлению, то оптимальное программное управление будет иметь структуру, описываемую выражением (11), в рамках которой значение управления в каждый момент времени равно либо максимальной, либо минимально возможной, величине.

Уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi} = u(1-x), \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = u\psi.$$

Краевые условия накладываются только на первое уравнение. Решением первого уравнения при  $u=0$  будет константа, а при  $u=\Delta$  – функция  $x(t)=1-1-x(t_0) e^{-\Delta t-t_0}$ .

Из этого выражения возникает ограничение на максимальное число провокаторов, необходимое для того, чтобы суметь перевести толпу из нулевого положения в  $\hat{x}$ :  $\Delta \geq \frac{1}{T} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$ .

При этом существует минимальное время  $t_{\min} = \frac{1}{\Delta} \log \frac{1}{1-\hat{x}}$ , в

течение которого управление должно принимать максимальное значение  $\Delta$ , а в остальные моменты управление должно быть равным нулю. В частности, одним из решений задачи (10) будет

$$(12) \quad u = \begin{cases} \Delta, & t \leq t_{\min} \\ 0, & t_{\min} < t \leq T \end{cases}$$

когда максимальное количество провокаторов вводится сразу и поддерживается постоянным в течение  $t_{\min}$ .

Структура оптимального решения данной задачи (кусочно-постоянная функция, принимающая значения 0 или  $\Delta$ ) может при-

вести к необходимости минимизировать количество переключений (разрывов) управления. Такое дополнительное ограничение содер- жательно оправдывается тем, что центр может нести какие-либо дополнительные затраты на ввод или вывод провокаторов. В случае, когда подобное ограничение имеет место в рассматриваемой задаче, из всего множества оптимальных управлений наилучшими остаются либо (12), либо управление  $u = \begin{cases} \Delta, & t \in [T - t_{\min}, T], \\ 0, & t < T - t_{\min}. \end{cases} \bullet$

## 8.2. Постоянные управлений

Из выражения (6) следует, что при постоянных управлениях  $c_t(v) = \lambda v \tau$ . При заданных функциях  $F(\cdot)$  (т.е. при известной зависимости  $x_t(v)$ ) задачи (7)-(9) сводятся к типовым задачам скалярной оптимизации.

Пример 8.2. Пусть  $F(x) = x$ ,  $T = 1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $H(x) = x$ ,  $h(x) = \gamma x$ , где  $\gamma \geq 0$  – известная константа. Из выражения (1) находим:

$$(13) \quad x_t(u) = 1 - \exp \left( - \int_0^t u(y) dy \right).$$

При постоянных управлениях  $x_t(v) = 1 - e^{-vt}$ .

Задача (7) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(14) \quad e^{-v} \left( \frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} - \lambda v \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

Задача (8) примет вид следующей задачи скалярной оптимизации:

$$(15) \quad e^{-v} \left( \frac{\gamma}{v} - 1 \right) - \frac{\gamma}{v} \rightarrow \max_{v \in [0; \Delta]}.$$

Задача (9) примет вид:  $\begin{cases} v \rightarrow \min_{v \in [0; 1]}, \\ 1 - e^{-v} = \hat{x}. \end{cases}$  Ее решение:  $v = \ln(\frac{1}{1 - \hat{x}})$ .  $\bullet$

## 8.3. Задача возбуждения всей толпы

Рассмотрим «асимптотику» решаемых задач при  $T = +\infty$ . В на- стоящем разделе будем предполагать, как и для аналогичной модели

седьмого раздела, что функция  $F(\cdot)$  имеет единственную точку перегиба,  $F(0) = 0$ , уравнение  $F(x) = x$  имеет на интервале  $(0; 1)$  единственное решение — точку  $q > 0$ , причем  $\forall x \in (0; q) F(x) < x, \forall x \in (q; 1) F(x) > x$ . Примеры функций  $F(\cdot)$ , удовлетворяющих введенным предположениям, приведены в третьем разделе. Также будем считать, что целью управления является «воздушение» всех агентов с наименьшими затратами.

Из введенных предположений о свойствах функции  $F(\cdot)$  следует, что если для некоторого момента времени  $\tau$  выполнено  $x(\tau) > q$ , тогда, даже при  $u(t) \equiv 0 \forall t > \tau$ , траектория  $x_\tau(u)$  будет неубывающей, причем  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_\tau(u) = 1$ . Содержательно это свойство означает, что рассматриваемая толпа такова, что *область притяжения* нулевого положения равновесия в отсутствии управления (без внедренных провокаторов) составляет полуинтервал  $[0; q)$ , т.е. в этой толпе достаточно обеспечить «искусственное» возбуждение более чем  $q$  (доли) агентов, а затем даже в отсутствии управления эта толпа будет «сама» стремиться к единичному равновесному состоянию.

Обозначим через  $u^\tau$  решение следующей задачи:

$$(16) \quad \int_0^\tau u(t) dt \rightarrow \min_{u: u(t) \in [0; \Delta], x_\tau(u) > q} .$$

Вычислим  $Q_\tau = \int_0^\tau u^\tau(t) dt$  и найдем  $\tau^* = \arg \min_{\tau \geq 0} Q_\tau$ .

Решение задачи (16) существует (см. содержательные интерпретации выше) при условии

$$(17) \quad \Delta > \Delta^* = \max_{x \in [0, q]} \frac{x - F(x)}{1 - F(x)} .$$

В силу введенных предположений о свойствах функции распределения, структура оптимального решения рассматриваемой задачи характеризуется следующим образом.

Утверждение 8.6. Если выполнено условие (17), то  $u^\tau(t) \equiv 0$  при  $t > \tau$ .

## 8.4. Позиционное управление

Выше рассматривалась задача синтеза оптимального программного управления. В то же время, в задачах управления возбуждени-  
113

ем толпы может использоваться и позиционное управление. Рассмотрим два возможных варианта, имеющих прозрачные содержательные интерпретации.

В первом случае задача заключается в поиске закона позиционного управления  $\tilde{u}(x):[0;1] \rightarrow [0;1]$ , обеспечивающего максимальное возбуждение толпы (в смысле задач (4) или (5)) при тех или иных ограничениях на траекторию системы и/или на управления.

Пусть управление ограничено по аналогии с выражением (3):

$$(18) \quad \tilde{u}(x) \leq \Delta, x \in [0;1],$$

и имеется дополнительное ограничение на траекторию

$$(19) \quad \dot{x}(t) \leq \delta, t \geq 0,$$

где  $\delta > 0$  – известная константа. Содержательно условие (19) означает, например, что слишком быстрый рост (в смысле прироста в единицу времени) доли возбужденных агентов обнаруживается соответствующими органами, делающими дальнейшее управление невозможным. Следовательно, центр, решающий задачу управления возбуждением толпы, должен стремиться максимизировать значение доли возбужденных агентов при условиях (18) и (19). Решение соответствующей задачи, в силу свойств динамической системы (2), устанавливаемых леммой 8.1, имеет простой вид:

$$(20) \quad \tilde{u}^*(x) = \min \left\{ \Delta; \max \left\{ 0; \frac{x + \delta - F(x)}{1 - F(x)} \right\} \right\}.$$

Дробь, фигурирующая в выражении (20), получается в результате приравнивания правой части (1) константе  $\delta$ .

Отметим, что при малых значениях  $\delta$  может оказаться, что не существует неотрицательного управления, удовлетворяющего (19).

Пример 8.4. Пусть в условиях примера 8.3  $\delta = 0,35$ . Тогда оптимальное значение позиционного управления приведено на Рис. 20 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция  $F(\cdot)$ , тонкой непрерывной линией – ограничение сверху, фигурирующее в выражении (21)). •

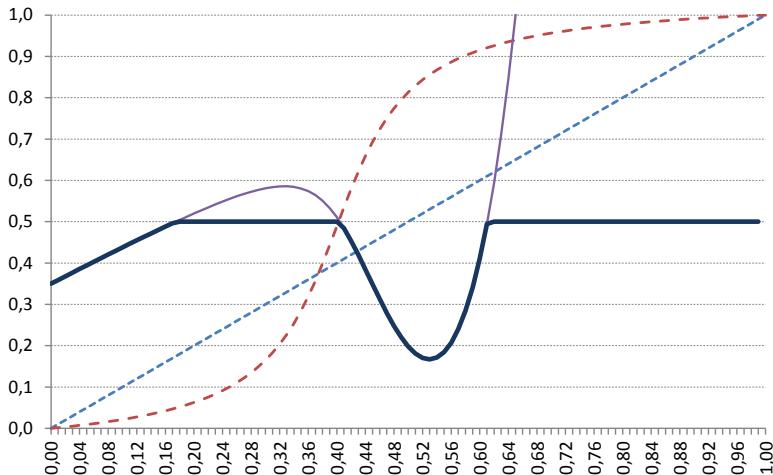


Рис. 20. Оптимальное позиционное управление в примере 8.4 •

Второй случай позиционного управления относится к так называемой задаче иммунизации сети (см. пятый раздел), в которой управляющий орган заинтересован в снижении доли действующих агентов, причем возможными управлениями с его стороны является число (или доля) внедряемых в топу иммунизаторов – агентов, которые всегда бездействуют.

Как показано выше, если  $w \in [0; 1]$  – доля иммунизаторов, то динамика доли действующих агентов будет удовлетворять уравнению

$$(21) \dot{x} = (1-w)F(x) - x, \quad x \in [0; 1].$$

Пусть  $\tilde{w}(x):[0;1] \rightarrow [0;1]$  – позиционное управление, тогда, если цель управляющего органа – снижение доли действующих агентов:

$$(22) \dot{x}(t) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

то из (21) получаем следующее условие на позиционное управление:

$$(23) \tilde{w}(x) \geq 1 - \frac{x}{F(x)}.$$

Величина  $\Delta_{\min} = \max_{x \in [0:1]} (1 - \frac{x}{F(x)})$  характеризует минимальные ограничения на размер управлений в каждый момент времени, при котором система (21) «управляема» в смысле (22).

Пример 8.5. В условиях примера 8.4 ограничение (23) снизу на величину позиционного управления изображено жирной линией на Рис. 21 (пунктиром на данном рисунке изображены биссектриса и функция распределения  $F(\cdot)$ ).

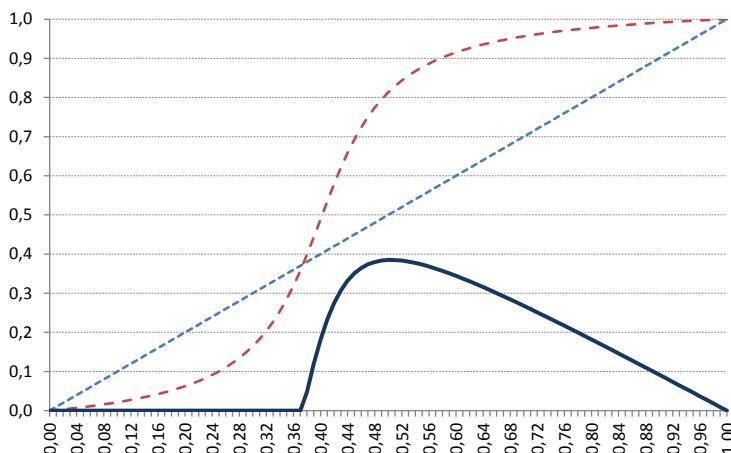


Рис. 21. Минимальное позиционное управление в примере 5

Величина  $\Delta_{\min}$  в рассматриваемом примере равна примерно 0,385.

В настоящем разделе описаны задачи управления возбуждением толпы в непрерывном времени за счет внедрения в нее провокаторов или иммунизаторов.

Значительный интерес для дальнейших исследований представляет рассмотрение дифференциальной игры, описывающей ситуацию информационного противоборства между двумя управляющими органами, принимающими в непрерывном времени решения о долях (или количествах) внедряемых провокаторов  $u$  и иммунизаторов  $w$  соответственно (соответствующая статическая задача, которая может служить «точкой отсчета», рассмотрена в [66]). Объект

управления при этом будет описываться динамической системой

$$\dot{x} = u(1-w) + (1-u-w+2uw)F(x) - x.$$

Вторым перспективным направлением представляется рассмотрение задач динамического (программного и/или позиционного) управления толпой, описываемой уравнением переноса:

$$(24) \frac{\partial}{\partial t} p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} [u + (1-u)F(x) - x] p(x,t) = 0,$$

т.е. моделью, в которой состояние толпы в каждый момент времени описывается не скалярной долей действующих агентов, а соответствующим распределением  $p(x, t)$  вероятностей.

## 9. МИКРОМДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

Для описания задач информационного противоборства, решаемых на самом верхнем (пятом) уровне иерархии описания АСС (см. введение), необходимо иметь простые результаты анализа информационного взаимодействия агентов и информационного управления ими.

Первый класс моделей, в которых удалось конструктивно «спрятать» всю цепочку от первого уровня до пятого, составляют модели АСС, описываемых в терминах микромодели - «задач о консенсусе» (или так называемых «марковских» моделей), что дало возможность развить соответствующие теоретико-игровые модели информационного противоборства [21], рассматриваемые в настоящем разделе. В этих моделях игроки, оказывая воздействия на элементы сети, заинтересованы в тех или иных ее состояниях; при этом сеть описывается микромоделью, учитывающей индивидуальные действия агентов.

Вторым удачным примером служит описываемый в следующем разделе подход к построению теоретико-игровых моделей информационного противоборства, «надстраиваемых» над пороговыми макромоделями толпы.

Общим для обоих подходов является стремление «надстроить» над моделью АСС теоретико-игровую модель взаимодействия управляющих субъектов. Демонстрации возможности этого симбиоза (точнее – сведения задач анализа информационного противобор-

ства в АСС к тем или иным хрестоматийным задачам теории игр) и посвящен настоящий раздел, изложение материала которого имеет следующую структуру: описывается модель сети, модель информационного управления и теоретико-игровая модель информационного противоборства. Затем приводятся примеры, в которых равновесием игры являются: равновесие в доминантных стратегиях, равновесие Нэша, «контрактное равновесие» (которое эффективно по Парето), равновесие Штакельберга, информационное равновесие, равновесие в безопасных стратегиях.

## 9.1. Микромодель и информационное управление

Рассмотрим АСС, состоящую из  $n$  агентов. *Мнение*  $i$ -го агента в момент времени  $t$  – действительное число  $x_i^t$ ,  $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Информационное влияние агентов друг на друга будем в рамках традиции марковских моделей [25, 72, 92, 116] отражать неотрицательной стохастической по строкам *матрицей доверия*  $A = \|a_{ij}\|$ , где  $a_{ij}$  – степень доверия  $i$ -го агента  $j$ -му агенту,  $i, j \in N$ . Будем считать, что вектор  $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$  начальных мнений агентов задан, и в каждом периоде  $i$ -ый агент изменяет свое мнение с учетом мнений тех агентов, которым он доверяет, включая доверие к собственному мнению, следующим образом:

$$(1) \quad x_i^t = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j^{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, i \in N.$$

Пусть взаимодействие агентов продолжается достаточно долго для того, чтобы можно было воспользоваться следующей оценкой вектора их итоговых («равновесных») мнений (условия сходимости можно найти в [18, 72]):

$$(2) \quad x = A^\infty x^0.$$

$$\text{где } A^\infty = [\lim_{t \rightarrow \infty} (A)^t].$$

В ходе дальнейшего изложения материала настоящего раздела будем считать, что каждый агент хоть сколько-нибудь доверяет всем остальным агентам, то есть  $a_{ij} > 0$ ,  $i, j \in N$ . В [25] показано, что в рамках этого предположения:

– все строки матрицы  $A^\infty$  одинаковы (обозначим  $r_j = a_{ij}^\infty > 0$ ,  $i, j \in N$ ), а элементы этой матрицы можно интерпретировать как **влияльность** агентов;

– итоговые мнения всех агентов одинаковы (обозначим  $X = x_i$ ,  $i \in N, X \in \mathbb{R}^1$ ),

то есть выражение (2) примет вид (отметим, что качественно схожий результат получается в моделях социальных сетей, в которых доверие определяется репутацией агентов [23]):

$$(3) X = \sum_{j \in N} r_j x_j^0.$$

*Информационное управление* в АСС заключается, в том числе, в целенаправленном воздействии на начальные мнения агентов с целью обеспечить требуемые (для субъекта, осуществляющего управление) значения их итоговых мнений.

Пусть имеются два игрока, каждый из которых может влиять на начальные мнения некоторых агентов. Обозначим  $F \subseteq N$  – множество агентов, чьи мнения формируются первым игроком (агенты **влияния** первого игрока),  $S \subseteq N$  – множество агентов, чьи мнения формируются вторым игроком (агенты **влияния** второго игрока),  $F \cap S = \emptyset$ . Предположим, что информационное управление является унифицированным [114], то есть у всех агентов из множества  $F$  формируется начальное мнение  $u \in U$ , а у всех агентов из множества  $S$  формируется начальное мнение  $v \in V$ , где  $U$  и  $V$  – отрезки  $\mathbb{R}^1$ .

Обозначим  $r_F := \sum_{i \in F} r_i$ ,  $r_S := \sum_{j \in S} r_j$ ,  $X^0 := \sum_{k \in N \setminus (F \cup S)} r_k x_k^0$ , тогда выражение (3) примет вид:

$$(4) X(u, v) = r_F u + r_S v + X^0,$$

то есть итоговое мнение агентов будет линейно зависеть от управлений  $u$  и  $v$ , входящих соответственно с весами  $r_F > 0$  и  $r_S > 0$ , где  $r_F + r_S \leq 1$ , которые определяются суммарной влиятельностью агентов влияния.

В качестве отступления отметим, что отличным от рассматриваемого случая является ситуация, когда агенты влияния не меняют своих мнений:  $a_{ij} = 0$ ,  $j \neq i$ ,  $i \in F \cup S$  (см. также модели влияния СМИ в [25]).

Имея зависимость (4) итогового мнения агентов от управляющих воздействий, можно формулировать теоретико-игровую модель

взаимодействия игроков, осуществляющих эти воздействия. Для этого необходимо определить их целевые функции. Предположим, что целевая функция первого (второго) игрока  $f_F(u, v) = H_F(X(u, v)) - c_F(u)$  ( $f_S(u, v) = H_S(X(u, v)) - c_S(v)$ ) определяется разностью между его «доходом», зависящим от итогового мнения агентов, и затратами на осуществление управления.

Совокупность  $\Gamma = \{f_F(u, v), f_S(u, v), u \in U, v \in V\}$  целевых функций и множеств допустимых действий двух игроков задают семейство *игр*, различия между которыми порождаются конкретизацией информированности игроков и порядка функционирования (см. [114]).

Если описание игры  $\Gamma$  и выражение (4) являются общим знанием среди игроков, которые выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, то получаем *игру в нормальной форме*, для которой можно искать и исследовать *равновесия Нэша*, их эффективность по Парето и т.д. Фиксируя последовательность выбора игроками своих действий, получим ту или иную иерархическую игру [19, 99]. Отказавшись от гипотезы об общем знании, получим рефлексивную игру [59, 60] и т.п. – ряд частных случаев рассматривается ниже (подробно обсуждать содержательные интерпретации, за редким исключением, не будем в силу прозрачности последних; см. также примеры в [22, 24, 25]).

## 9.2. «Антагонистическая» игра

В качестве «статус-кво» выберем нулевое значение мнений агентов ( $X^0 = 0$ ) и будем считать, что первый игрок заинтересован в максимизации итогового мнения ( $H_F(X) = X$ ), а второй – в минимизации ( $H_F(X) = -X$ ), причем «ресурсы управления» у игроков одинаковы ( $U = V = [d; D]$ ,  $d < -1 \leq 1 < D$ ), как и функции затрат ( $c_F(u) = u^2/2$ ,  $c_S(v) = v^2/2$ ).

Целевые функции игроков

$$(5) f_F(u, v) = r_F u + r_S v - u^2/2$$

и

$$(6) f_S(u, v) = -r_F u - r_S v - v^2/2.$$

сепарабельны по соответствующим действиям, значит (см. [29, 114]), при одновременном независимом выборе игроками действий существует *равновесие в доминантных стратегиях* – РДС ( $u^d, v^d$ ), где  $u^d = r_F$ ,  $v^d = -r_S$ .

Одной из точек Парето является вектор  $(u^P, v^P)$ , максимизирующий сумму целевых функций игроков, где  $u^P = 0, v^P = 0$ .

РДС не эффективно по Парето:

$$f_F(u^d, v^d) + f_S(u^d, v^d) = -[(r_F)^2 + (r_S)^2]/2 < f_F(u^P, v^P) + f_S(u^P, v^P) = 0,$$

а точка Парето неустойчива относительно индивидуальных отклонений игроков.

Определим стратегию наказания для первого (второго) игрока как такое его действие, которое является наихудшим для оппонента:  $u^P = D, v^P = d$ . В рассматриваемой модели доминантные стратегии игроков являются *гарантирующими*. Вычислим гарантированные выигрыши игроков:

$$f_F^{\text{МГР}} = f_F(u^d, v^P) = (r_F)^2/2 + r_S d, \quad f_S^{\text{МГР}} = f_S(u^P, v^d) = (r_S)^2/2 - r_F D.$$

Если существует третья сторона, обладающая правом контролировать выполнение игроками взятых на них обязательств [114], то, при заключении *контрактов* следующего вида («пакт о ненападении»):

$$(7) \quad \hat{u}(v) = \begin{cases} 0, & v = 0 \\ u^P, & v \neq 0 \end{cases}, \quad \hat{v}(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ v^P, & u \neq 0 \end{cases},$$

игрокам будет выгодно их выполнять, если имеет место

$$(8) \quad \begin{cases} (r_F)^2 + 2r_S d \leq 0, \\ (r_S)^2 \leq 2r_F D, \end{cases}$$

что приведет к устойчивой реализации точки Парето. Аналогичного результата можно добиться, используя стратегии наказания в *повторяющихся играх*. Анализ условия (8) свидетельствует, что «*контрактное равновесие*» реализуемо, если влиятельности агентов влияния первого и второго игроков различаются не слишком сильно (на Рис. 22 заштрихована область 0AB, удовлетворяющая условию (8) при  $d = -1, D = 1$ ).

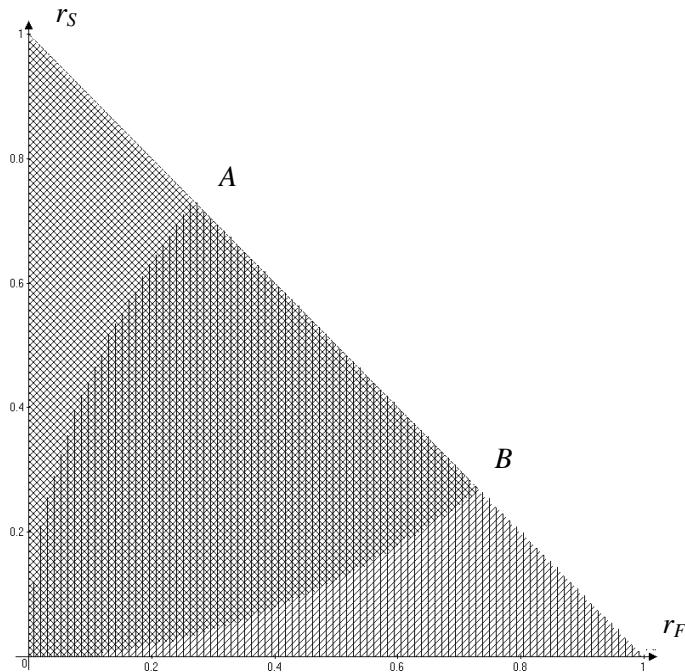


Рис. 22. Область значений «весов» агентов влияния, при которых существует «контрактное» равновесие

### 9.3. Игра с «непротивоположными» интересами

Рассмотрим игру в нормальной форме, отличающуюся от описанной в предыдущем подразделе только функциями «дохода» игроков, а именно выберем  $H_F(X) = X - 2X^2$ ,  $H_S(X) = X - X^2$  (первый игрок хотел бы добиться итогового мнения  $X_F = 0.25$ , а второй – мнения  $X_S = 0.5$ ).

## Целевые функции игроков

$$(9) f_F(u, v) = (r_F u + r_S v) - 2(r_F u + r_S v)^2 - u^2 / 2$$

И

$$(10) f_S(\mu, \nu) = (r_E \mu + r_S \nu) - (r_E \mu + r_S \nu)^2 - \nu^2 / 2$$

уже не сепарабельны по соответствующим действиям, поэтому найдем равновесие Нэша:

$$(11) \quad u^* = \frac{r_F - 2r_F(r_S)^2}{4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1}, \quad v^* = \frac{r_S + 2r_S(r_F)^2}{4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1}.$$

На Рис. 23 представлено параметрическое множество равновесий Нэша (при  $r_F = 0.1$  и  $r_S \in [0; 0.9]$ ).

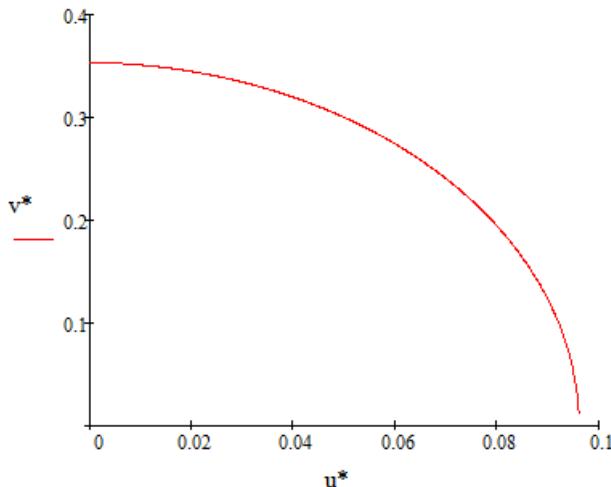


Рис. 23. Множество равновесий Нэша

На Рис. 24 представлены графики зависимости равновесных действий игроков от долей агентов влияния или, что в данном случае эквивалентно, от суммарных репутаций агентов влияния  $r_S$  и  $r_F$ . График слева характеризует общий вид зависимости, а справа – на интервалах допустимых значений для  $r_S$  и  $r_F$ . В частности, можно заметить, что чем больше суммарная репутация агентов влияния второго игрока, тем меньше равновесное управляющее воздействие первого игрока и больше равновесное управляющее воздействие второго игрока, то есть первый игрок стремится достичь меньшего мнения, а второй игрок – большего.

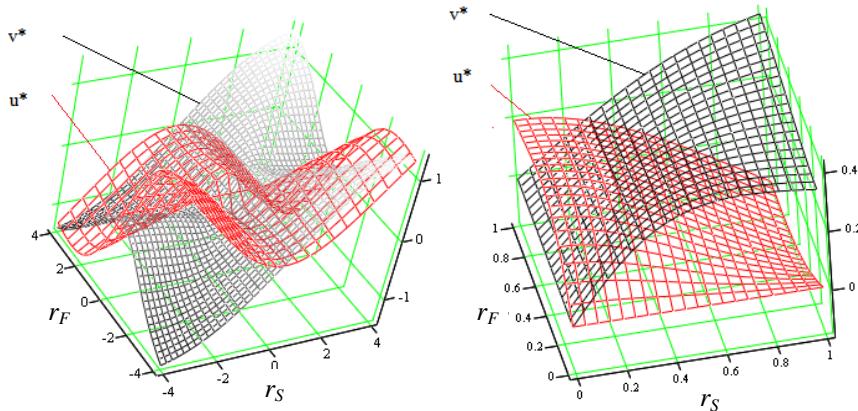


Рис. 24. Трехмерные графики  $u^*$  и  $v^*$

Теперь рассмотрим иерархическую игру типа  $\Gamma_1$ , в которой игроки имеют целевые функции (9) и (10), и первый игрок обладает правом первого хода.

Рассмотрим ход второго игрока. На этом этапе он уже знает действие  $u$  первого игрока и максимизирует свой выигрыш, выбирая действие:  $v^*(u) = \frac{r_S - 2r_S r_F u}{2(r_S)^2 + 1}$ . Множество выбора второго игрока

состоит из единственного действия. Гарантирующая стратегия первого игрока в игре  $\Gamma_1$  и его стратегия в равновесии Штакельберга [19, 99]:

$$u^* = \frac{r_F - 2r_F(r_S)^2}{4(r_F)^2 + 4(r_S)^4 + 4(r_S)^2 + 1}; v^* = \frac{2(r_S)^3 - (2(r_F)^2 + 1)r_S}{4(r_F)^2 + 4(r_S)^4 + 4(r_S)^2 + 1}.$$

#### 9.4. Рефлексивная игра

Рассмотрим целевые функции, отличающиеся от описанных в предыдущем подразделе только функциями затрат игроков:  $c_F(u) = u^2 / (2 q_F)$ ,  $c_S(v) = v^2 / (2 q_S)$ , где  $q_F = 1$  и  $q_S = 1/2$  – «эффективность» игроков. Предположим, что каждый игрок знает свою эффективность, первый игрок считает, что общим знанием является  $q_S = 1$ , второй игрок информирован об этом и знает истинную эффектив-

ность первого игрока. Граф такой рефлексивной игры [60] имеет вид:  $2 \leftarrow 1 \leftrightarrow 12$ .

Тогда первый игрок в соответствии с выражением (11) выберет  $u^* = \frac{r_F - 2r_F(r_S)^2}{4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1}$ . Исходя из этого, второй агент выберет свой

наилучший ответ  $v^* = \frac{0.5r_S(1+2(r_F)^2)(1+2(r_S)^2)}{(1+(r_S)^2)(4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1)}$ . При этом в сети

установится следующее итоговое мнение:

$X = \frac{(r_F)^2 + (r_S)^4 + 0.5(r_S)^2}{(1+(r_S)^2)(4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1)}$ , которое в общем случае будет

отличаться от ожидаемого первым игроком  $X^1 = \frac{(r_F)^2 + (r_S)^2}{4(r_F)^2 + 2(r_S)^2 + 1}$ ,

то есть информационное равновесие не является стабильным [60]. Для заданного выше графа рефлексивной игры информационное равновесие будет стабильным только в двух случаях: либо представление первого игрока об эффективности второго истинно, либо суммарная репутация агентов влияния второго игрока равна нулю (однако ранее предполагалось, что значение репутации больше нуля).

## 9.5. Равновесие в безопасных стратегиях

Рассмотрим игру, в которой  $H_F(X(u, v)) = \begin{cases} h_F > 0, X \geq \hat{X} \\ 0, X < \hat{X} \end{cases}$ ,

$H_S(X(u, v)) = \begin{cases} h_S > 0, X < \hat{X} \\ 0, X \geq \hat{X} \end{cases}$ ,  $c_F(u) = u$ ,  $c_S(v) = v$ ,  $U = V = [d; D]$ ,  $d < -1 \leq 1 < D$ , причем  $h_F > D$ ,  $h_S > |d|$ . Содержательно, первый игрок заинтересован в принятии некоторого решения (для чего необходимо, чтобы мнение членов сети превысило порог  $\hat{X}$ ), второй игрок заинтересован в блокировании этого решения.

Пусть для определенности  $r_F D + r_S d + X^0 > \hat{X}$ . В рассматриваемой игре не существует равновесия Нэша, но существует *равновесие в безопасных стратегиях* (РБС) [34] (см. также конкурсные

модели в [33, 114]), которое имеет вид:  $((\hat{X} - r_S d - X^0) / r_F + \varepsilon, 0)$ , где  $\varepsilon$  – произвольно малая строго положительная константа. Содержательно РБС таково, что первый игрок обеспечивает принятие нужного ему решения, причем второй игрок, даже если выберет максимально возможные (максимальные по абсолютной величине) действия, все равно не сможет изменить результат.

В настоящем разделе рассмотрен ряд достаточно частных примеров, демонстрирующих возможность использования аппарата теории игр для описания процесса и результата информационного противоборства в АСС. Описанная модель, несмотря на свою простоту, демонстрирует многообразие возможных теоретико-игровых постановок (равновесие в доминантных стратегиях, равновесие Нэша, «контрактное равновесие», иерархические игры типа  $\Gamma_1$  или Штакельберга, рефлексивные игры, равновесие в безопасных стратегиях). В целом же, та или иная конкретная модель информационного противоборства, естественно, должна формулироваться с учетом, во-первых, специфики решаемой практической задачи, а, во-вторых, возможности идентификации моделируемой системы – параметров сети, возможных действий игроков, их предпочтений и информированности.

Теоретико-игровые модели информационного противоборства над АСС имеют приложения в задачах: обеспечения информационной безопасности телекоммуникационных сетей, онлайновых социальных сетей, противодействия деструктивным информационным воздействиям на социальные группы различного масштаба, предупреждения их массовых противоправных действий и др.

В качестве перспективных направлений дальнейших исследований выделим разработку и изучение теоретико-игровых моделей информационного противоборства в АСС в условиях:

- последовательного выбора игроками своих действий с учетом наблюдаемой динамики состояния сети (игры «защита-нападение» с описанием динамики мнений (распространения информационной эпидемии или вирусов в сети);

- многократного выбора игроками своих действий при неполной информации о действиях оппонентов и состоянии сети.

## 10. МАКРОМДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА

В настоящем разделе в рамках стохастических моделей управления толпой (см. пятый раздел) исследованы теоретико-игровые задачи информационного противоборства, когда агентами управляют одновременно два субъекта с несовпадающими интересами относительно числа действующих в равновесии агентов. При этом сеть описывается макромоделью, в рамках которой основным параметром является доля действующих агентов.

Структура изложения такова: сначала описывается информационное противоборство в рамках стохастических моделей управления толпой, затем приводятся оригинальные результаты анализа теоретико-игровых моделей информационного противоборства в терминах игр в нормальной форме (для которых характеризуются равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях), а также иерархических и рефлексивных игр. Многочисленные примеры содержат аналитические зависимости равновесий от параметров моделей.

### 10.1. Модель информационного противоборства

Рассмотрим толпу как объект управления, осуществляемого двумя субъектами – *центрами*. Так как поведение динамической системы (2.7), описывающей изменение во времени доли действующих агентов, определяется функцией распределения порогов  $F(\cdot)$ , то будем анализировать управленческие воздействия, приводящие к изменению этой функции распределения.

Отметим, что в четвертом и пятом разделах решалась задача определения множества/доли первоначально возбуждаемых агентов или/и функции распределения их порогов, приводящих к требуемому равновесию. В рассматриваемых в настоящем разделе моделях агенты возбуждаются «самостоятельно».

Обозначим через  $\Lambda(x) = \{(\delta, \gamma) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid x^*(\delta, \gamma) = x\}$  множество комбинаций управлений, реализующих заданное значение  $x \in [0; 1]$  как РКП (см. модель II в пятом разделе).

Для исследования теоретико-игровых моделей взаимодействия центров нам потребуется результат, который доказывается полностью по аналогии с утверждениями 3 и 4 в работе [13].

Утверждение 10.1. В модели II РКП  $x^*(\delta, \gamma)$ :

- 1) монотонно (нестрого) возрастает по  $\delta$ ; а для строгой монотонности достаточно выполнения условия:  $F(1 - 0) < 1$  или  $\gamma > 0$ ;
- 2) монотонно (нестрого) убывает по  $\gamma$ ; а для строгой монотонности достаточно выполнения условия:  $F(0) > 0$  или  $\delta > 0$ .

Пример 10.1. В качестве примера функции распределения порогов агентов рассмотрим равномерное распределение  $F(x) = x$ , для которого  $x^*(\delta, \gamma) = \delta / (\delta + \gamma)$ ,  $\Lambda(x) = \{(\delta, \gamma) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid \gamma / \delta = (1 / x - 1)\}$ . •

Сделав маленькое отступление, отметим, что в социально-экономических и организационных системах в случае, когда существует несколько субъектов, заинтересованных в тех или иных состояниях управляемой системы (например, сети взаимодействующих агентов) и имеющих возможность оказывать на нее управляющие воздействия (так называемая *система с распределенным контролем* [28, 58, 114]), возникает, как и в рассматриваемом нами случае, взаимодействие между этими субъектами, которое в случае информационных воздействий, оказываемых ими на объект управления, называется *информационным противоборством*.

Далее рассматривается ряд теоретико-игровых моделей взаимодействия центров, результаты информационных воздействий которых на толпу определяются выражением (5.10) в рамках модели I или выражением (5.19) в рамках модели II.

## 10.2. Игра в нормальной форме

**Модель I.** Предположим, что имеются два центра, которые осуществляют информационное воздействие на толпу, разыгрывая *игру в нормальной форме*, т. е. выбирая свои стратегии ( $\alpha \in [0; 1]$  и  $\beta \in [0; 1]$  соответственно) однократно, одновременно и независимо. Пусть *целевые функции* первого и второго центров имеют соответственно вид:

- (1)  $f_\alpha(\alpha, \beta) = H_\alpha(x^*(\alpha, \beta)) - c_\alpha(\alpha)$ ,
- (2)  $f_\beta(\alpha, \beta) = H_\beta(x^*(\alpha, \beta)) - c_\beta(\beta)$ ,

причем *выигрыши* первого центра  $H_\alpha(\cdot)$  – возрастающая функция (он заинтересован в максимизации числа возбужденных агентов), а

выигрыш второго центра  $H_\beta(\cdot)$  – убывающая функция (он заинтересован в минимизации числа возбужденных агентов), а обе функции затрат  $c_\alpha(\cdot)$  и  $c_\beta(\cdot)$  – строго возрастающие и  $c_\alpha(0) = c_\beta(0) = 0$ .

Коль скоро описана игра в нормальной форме, возникает набор типовых для теории игр вопросов: каково *равновесие Нэша* ( $\alpha^*, \beta^*$ ) игры центров, в каких ситуациях оно доминирует с точки зрения центров ситуацию *статус-кво* – РКП в отсутствие управления (т. е. когда выполнено  $f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) \geq f_\alpha(0, 0)$ ,  $f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \geq f_\beta(0, 0)$ ), каково множество Парето-эффективных ситуаций, когда существует *равновесие в доминантных стратегиях* (РДС) и т. п.

Обозначим через  $f(\alpha, \beta) = f_\alpha(\alpha, \beta) + f_\beta(\alpha, \beta)$  *утилитарную функцию колективной полезности* (ФКП) [49]. Пару стратегий центров  $(\hat{\alpha}; \hat{\beta}) = \arg \max_{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2} f(\alpha, \beta)$  назовем *утилитарным решением*.

Роль приведенных в пятом разделе результатов и результата утверждения 10.1 для теоретико-игрового анализа заключается в следующем. Целевые функции центров (1) и (2) зависят как от их стратегий ( $\alpha$  и  $\beta$  или  $\delta$  и  $\gamma$ ), так и от РКП, зависящего, в свою очередь, от этих стратегий. Свойства монотонной зависимости РКП от стратегий центров (непрерывность этой зависимости, если требуется, может быть проверена в каждом конкретном случае), а также реализуемость всего единичного отрезка в качестве РКП при выборе центрами соответствующих стратегий, дают возможность «транслировать» свойства функций выигрыша и затрат на зависимость этих параметров непосредственно от стратегий центров. Так, например, если  $H_\delta(x^*(\delta, \gamma))$  – возрастающая функция  $x^*$ , то в рамках условий утверждения 10.1 выигрыш первого центра является возрастающей функцией его стратегии, и т. д.

Простейшим является случай *игры с противоположными интересами*, в которой первый центр заинтересован в возбуждении максимального числа агентов, а второй – наоборот. Без учета затрат на управление (считая  $c_\alpha(\cdot) \equiv 0$ ,  $c_\beta(\cdot) \equiv 0$ ) из выражений (1) и (2) получим:

$$(3) \quad \hat{f}_\alpha(\alpha, \beta) = x^*(\alpha, \beta), \quad \hat{f}_\beta(\alpha, \beta) = 1 - x^*(\alpha, \beta).$$

При этом, очевидно,  $f(\alpha, \beta) \equiv 1$ . Из неубывания  $x^*(\alpha, \beta)$  по  $\alpha$  и невозрастания по  $\beta$  следует справедливость следующего утверждения 10.2, которое (как и его «аналоги» для модели II – см. утверждения 10.4 и 10.5 далее), с одной стороны, в определенному смысле,

тривиально, так как является следствием монотонности целевых функций агентов по их действиям, а, с другой стороны, позволяет в соответствующих вырожденных случаях обосновывать существование РДС и находить его.

Утверждение 10.2. В модели I в игре противоположными интересами без учета затрат центров на управление существует РДС их игры:  $\alpha_{\text{РДС}} = 1, \beta_{\text{РДС}} = 1$ .

Интересно отметить, что в этом равновесии функция распределения порогов агентов совпадает с исходной функцией распределения, т. е.  $F_{1,1}(x) \equiv F(x)$ , следовательно, не изменяется и РКП, т. е. РДС «совпадает» с ситуацией статус-кво.

Пример 10.2. Пусть  $F(x) = x$ , тогда

$$(4) x^{I^*}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial x^{I^*}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\beta(1-\beta)}{(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)^2}, \quad \frac{\partial x^{I^*}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)^2},$$

откуда следует, что  $x^{I^*}(\alpha, \beta)$  возрастает по первому аргументу и убывает по второму при любых допустимых значениях соответствующего другого аргумента. Поэтому без учета затрат центров на управление РДС игры центров с целевыми функциями (3) будет выбор ими единичных стратегий:  $\alpha_{\text{РДС}} = 1, \beta_{\text{РДС}} = 1$ . Естественно, эта точка будет и равновесием Нэша (РН) игры центров. В настоящем примере  $W = [0; 1]$ . Отметим, что в РДС реализуется то же состояние толпы, что и в отсутствие управления. •

Рассмотрим теперь случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 10.3. Если в модели I  $x^*(\alpha, \beta)$  – непрерывная функция, выполнены условия  $F(0) > 0$  и  $F(1 - 0) < 1$ ,  $W = [0; 1]$ , функции выигрыша центров – ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат – выпуклые, то существует равновесие Нэша игры центров.

Справедливость тривиального утверждения 10.3 (и его «аналога» для модели II – утверждения 10.6) непосредственно следует из достаточных условий [29, 110] существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

В следующем примере существует единственное РН.

Пример 10.3. Пусть  $F(x) = x$ ,  $H_\alpha(x) = x$ ,  $H_\beta(x) = 1 - x$ ,  $c_\alpha(\alpha) = -\ln(1 - \alpha)$ ,  $c_\beta(\beta) = -\lambda \ln(1 - \beta)$ . Из условий первого порядка получаем:  $\beta = (1/\lambda) \alpha$ . При  $\lambda = 1$  находим:  $\alpha^* = 1/4$ ,  $\beta^* = 1/4$ . При этом  $x^*(\alpha^*, \beta^*) = 1/2$ ,  $f_\alpha(\alpha^*, \beta^*) = f_\beta(\alpha^*, \beta^*) \approx -0,2$ .

Отметим, что в равновесии оба центра имеют меньшие значения целевых функций, чем в *точке «статус-кво»*  $(0; 0)$  (так как  $f_\alpha(0, 0) = 1$ ,  $f_\beta(0, 0) = 0$ ). Утилитарным решением в этом случае является также вектор нулевых стратегий. •

**Модель II.** Пусть целевые функции первого и второго центров имеют соответственно вид (1) и (2) с точностью до замены  $\alpha$  на  $\delta$  и  $\beta$  на  $\gamma$ .

Утверждение 10.4. В модели II в игре с противоположными интересами без учета затрат центров на управление не существует конечного РДС или РН их игры.

Справедливость утверждения 10.4 следует из неограниченности множеств допустимых стратегий центров, а также монотонности  $x^*(\delta, \gamma)$  по обеим переменным (см. утверждение 10.1). Из этих же свойств следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 10.5. Если в модели II множества допустимых стратегий центров ограничены:  $\delta \leq \delta_{\max}$ ,  $\gamma \leq \gamma_{\max}$ , то в игре с противоположными интересами без учета затрат центров на управление существует РДС их игры:  $\delta^{\text{РДС}} = \delta_{\max}$ ,  $\gamma^{\text{РДС}} = \gamma_{\max}$ .

Рассмотрим случай, когда затраты центров отличны от нуля.

Утверждение 10.6. Если в модели II  $x^*(\delta, \gamma)$  – непрерывная функция, выполнены условия утверждения 10.1, функции выигрыша центров ограниченные, линейные или вогнутые по их стратегиям, а функции затрат – выпуклые, имеющие в нуле нулевые производные и стремящиеся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности, то существует конечное равновесие Нэша игры центров.

Справедливость утверждения 10.6 следует из того, что в рамках его условий целевые функции центров вогнуты по их стратегиям и принимают неотрицательные значения на ограниченном множестве значений аргументов, т. е. можно воспользоваться достаточными условиями [29, 110] существования равновесия Нэша в непрерывных играх.

Пример 10.4. Пусть  $F(x) = x$ ,  $H_\delta(x) = x$ ,  $H_\gamma(x) = 1 - x$ ,  $c_\delta(\delta) = \delta^2$ ,  $c_\gamma(\gamma) = \lambda^2 \gamma^2$ . В примере 10.1 найдено РКП  $x^*(\delta, \gamma) = \delta / (\delta + \gamma)$ . Получаем следующие выражения для целевых функций центров:

$$(5) f_\delta(\delta, \gamma) = \delta / (\delta + \gamma) - \delta^2,$$

$$(6) f_\gamma(\delta, \gamma) = 1 - \delta / (\delta + \gamma) - \lambda^2 \gamma^2.$$

Убедившись в вогнутости целевых функций (5) и (6) соответственно по  $\delta$  и  $\gamma$ , дифференцируем их, приравниваем производные

$$\text{нулю и находим РН: } \delta^* = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{1+\lambda}, \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{1}{1+\lambda}.$$

При этом РКП  $x^*(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ , а значения целевых функций в РН:  $f_\delta(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda(1+2\lambda)}{2(1+\lambda)^2}$ ,  $f_\gamma(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda+2}{2(1+\lambda)^2}$ .

Утилитарная ФКП  $f(\delta, \gamma) = f_\delta(\delta, \gamma) + f_\gamma(\delta, \gamma)$  достигает максимума (принимает единичное значение) на векторе нулевых стратегий.

Значение утилитарной ФКП в РН  $f(\delta^*, \gamma^*) = 1 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$ , т. е. величи-

на  $\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}$  характеризует, насколько РН «хуже» в смысле утилитарной ФКП, чем оптимум последней. •

### 10.3. Пороговые функции выигрыша

Для содержательных интерпретаций важен случай, когда *функции выигрыша* центров *пороговые*, т. е. имеют вид:

$$(7) H_{\alpha(\beta)}(x) = \begin{cases} H_{\alpha(\beta)}^+, & \text{если } x \geq (\leq) \theta_\alpha(\theta_\beta), \\ H_{\alpha(\beta)}^-, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $H_{\alpha(\beta)}^+ > H_{\alpha(\beta)}^-$ , т. е. первый центр получает больший выигрыш тогда, когда доля действующих агентов не меньше порога  $\theta_\alpha \in [0; 1]$ , а второй центр – при условии, что доля действующих агентов не превышает порога  $\theta_\beta \in [0; 1]$ . Обозначим через  $\hat{x}$  РКП в отсутствие воздействий центров, т. е.  $\hat{x} = x^*(0, 0)$ . Введем следующие предположения.

**Предположение А.1.** Множество достижимости  $W$  – единичный отрезок,  $x^*(\alpha, \beta)$  – строго монотонная непрерывная функция своих переменных (соответствующие достаточные условия приведены

выше и/или могут быть проверены в каждом конкретном случае), а функции затрат центров строго монотонны.

**Предположение A.2.** Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно любое РКП из  $[\hat{x}; 1]$ ; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно любое РКП из  $[0; \hat{x}]$ .

Из структуры целевых функций центров и предположений A.1 и A.2 следует, что для первого (второго) центра реализовывать РКП, превышающие порог  $\theta_\alpha$  (строго меньшие порога  $\theta_\beta$ ), не выгодно.

**Модель I.** Запишем определение равновесия Нэша  $(\alpha^*, \beta^*)$ :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in [0; 1] \quad H_\alpha(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha^*) \geq H_\alpha(x^*(\alpha, \beta^*)) - c_\alpha(\alpha), \\ \forall \beta \in [0; 1] \quad H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta^*)) - c_\beta(\beta^*) \geq H_\beta(x^*(\alpha^*, \beta)) - c_\beta(\beta). \end{cases}$$

Начнем анализ с частного случая  $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$ .

Обозначим через  $\alpha(\theta) = \min \{\alpha \in [0; 1] \mid x^*(\alpha, 0) = \theta\}$ ,  $\beta(\theta) = \min \{\beta \in [0; 1] \mid x^*(0, \beta) = \theta\}$ .

Определим множество

$$(8) \quad \Omega_{\alpha, \beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid x^*(\alpha, \beta) = \theta\},$$

$$c_\alpha(\alpha) \leq H_\alpha^+ - H_\alpha^-, \quad c_\beta(\beta) \leq H_\beta^+ - H_\beta^-,$$

т. е. множество пар стратегий центров, приводящих к таким РКП  $\theta$ , что каждый из центров при этом имеет значение целевой функции не меньшее, чем при выборе стратегии, изменяющей его выигрыш (17). Множество (18) по аналогии с работами [58, 114], назовем **множеством компромисса**.

Из определений РН и множества компромисса следует, что, если последнее не пусто, то реализация РКП  $\theta$  в смысле утилитарной ФКП не менее выгодна для агентов, чем сохранение статус-кво  $\hat{x}$ . Более того, легко видеть, что центрам не выгодно реализовывать никакие РКП, кроме, возможно,  $\hat{x}$  или  $\theta$ .

**Утверждение 10.7.** Если  $\theta_\beta = \theta_\alpha = \theta$  и выполнено предположение A.1, то РН может быть только двух типов:

1)  $(0; 0)$  является РН, если

$$(9) \quad \hat{x} \leq \theta \text{ и } c_\alpha(\alpha(\theta)) \geq H_\alpha^+ - H_\alpha^-$$

или

$$(10) \quad \hat{x} \geq \theta \text{ и } c_\beta(\beta(\theta)) \geq H_\beta^+ - H_\beta^-;$$

2) множество РН включает в себя множество  $\Omega_{\alpha, \beta}(\theta)$ , если оно не пусто.

Если дополнительно выполнено предположение А.2, то  $(\alpha(\theta); 0)$  является РН, если

$$(11) \hat{x} \leq \theta \text{ и } c_\alpha(\alpha(\theta)) \leq H_\alpha^+ - H_\alpha^-;$$

$(0; \beta(\theta))$  является РН, если

$$(12) \hat{x} \geq \theta \text{ и } c_\beta(\beta(\theta)) \leq H_\beta^+ - H_\beta^-.$$

Исследуем теперь связь множества компромисса с утилитарным решением. Обозначим через

$$(13) C(\theta) = \min_{(\alpha, \beta) \in \Omega_{\alpha, \beta}(0)} [c_\alpha(\alpha) + c_\beta(\beta)]$$

минимальные суммарные затраты центров по реализации РКП  $\theta$ . Утилитарное решение в рассматриваемом случае удовлетворяет условиям:

– если  $\hat{x} \leq \theta$ , то  $f(\hat{\alpha}; \hat{\beta}) = \max \{ H_\alpha^- + H_\beta^+; H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta) \}$ ;

– если  $\hat{x} \geq \theta$ , то  $f(\hat{\alpha}; \hat{\beta}) = \max \{ H_\alpha^+ + H_\beta^-; H_\alpha^+ + H_\beta^+ - C(\theta) \}$ .

Соответственно, если при  $\hat{x} \leq \theta$   $C(\theta) \leq H_\alpha^+ - H_\alpha^-$ , а при  $\hat{x} \geq \theta$   $C(\theta) \leq H_\beta^+ - H_\beta^-$ , то множество компромисса включает в себя утилитарное решение.

Как показывает пример 10.5, предположение А.2 существенно для структуры РН.

**Пример 5.** Пусть  $F(x) = x$ ,  $\theta = 1/2$ ,  $H_\alpha^- = H_\beta^- = 0$ ,  $H_\alpha^+ = H_\beta^+ = 1$ ,  $c_\alpha(\alpha) = -\ln(1-\alpha)$ ,  $c_\beta(\beta) = -\ln(1-\beta)$ . Легко убедиться (см. также пример 3), что вектор нулевых стратегий не является РН. Из результатов примера 10.2 и выражений (8) – (13) получаем:

$$\Omega_{\alpha, \beta}(1/2) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha + \beta - 2\alpha\beta} = 1/2, \ln(1-\alpha) \geq -1, \ln(1-\beta) \geq -1 \},$$

т. е.  $\Omega_{\alpha, \beta}(1/2) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \alpha = \beta, 0 < \alpha, \beta \leq 1 - 1/e \}$ . В рассматриваемом примере  $\varepsilon$ -оптимальным утилитарным решением будет вектор стратегий центров  $(\varepsilon, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon \in (0; 1 - 1/e]$ . •

Перейдем теперь к общему случаю, когда пороги центров, фигурирующие в их функциях выигрыша (7), различны. Рассмотрим наиболее интересное для практических приложений (ситуация информационного противоборства) соотношение порогов центров:

$$(14) \theta_\beta < \hat{x} < \theta_\alpha.$$

Определим следующие функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно  $+\infty$ ):

$$C_\alpha(x, \beta) = \min_{\{\alpha \in [0;1] \mid x^*(\alpha, \beta) = x\}} c_\alpha(\alpha), \quad C_\beta(x, \alpha) = \min_{\{\beta \in [0;1] \mid x^*(\alpha, \beta) = x\}} c_\beta(\beta).$$

Из неубывания функций затрат и структуры функций выигрыша (7) следует, что реализация РКП из интервала  $(\theta_\beta; \theta_\alpha)$  центрам не выгодна по сравнению с сохранением статус-кво  $\hat{x}$ . Введем предположение, являющееся ослаблением предположения А.2.

**Предположение А.3.** Первый центр при нулевой стратегии второго может реализовать самостоятельно РКП  $\theta_\alpha$ ; а второй центр при нулевой стратегии первого может реализовать самостоятельно РКП  $\theta_\beta$ .

Из определения равновесия Нэша и свойств целевых функций центров следует

Утверждение 10.8. Если выполнено условие (14) и предположения А.1 и А.3, то РН игры центров характеризуются следующим образом:

–  $(0; 0)$  является РН, если

$$(15) \begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \leq H_\alpha^-, \\ H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \leq H_\beta^-; \end{cases}$$

–  $(\alpha(\theta_\alpha); 0)$  является РН, если

$$(16) \begin{cases} H_\alpha^+ - c_\alpha(\alpha(\theta_\alpha)) \geq H_\alpha^-, \\ H_\beta^- \geq H_\beta^+ - C_\beta(\theta_\beta, \alpha(\theta_\alpha)); \end{cases}$$

–  $(0; \beta(\theta_\beta))$  является РН, если

$$(17) \begin{cases} H_\beta^+ - c_\beta(\beta(\theta_\beta)) \geq H_\beta^-, \\ H_\alpha^- \geq H_\alpha^+ - C_\alpha(\theta_\alpha, \beta(\theta_\beta)). \end{cases}$$

**Модель II** для случая пороговых функций выигрыша центров строится полностью аналогично модели I с точностью до замены  $\alpha$  на  $\delta$ , и  $\beta$  – на  $\gamma$ . Проиллюстрируем утверждение 10.8 примером для модели II.

Пример 10.6. Пусть  $F(x) = 1/3 + 2x^2/3$ ,  $\theta_\gamma = 0,4$ ,  $\theta_\delta = 0,6$ ,  $H_\delta^- = H_\gamma^- = 0$ ,  $H_\delta^+ = H_\gamma^+ = 1$ ,  $c_\delta(\delta) = \delta^2$ ,  $c_\gamma(\gamma) = \lambda^2 \gamma^2$ .

Найдем:  $\hat{x} = 1/2$ ,  $\gamma(\theta_\gamma) \approx 0,1$ ,  $\delta(\theta_\delta) \approx 0,07$ .

Пусть  $\lambda = 2$ . Тогда ни одно из условий (15) – (17) не выполнено, следовательно, РН не существует.

Пусть  $\lambda = 20$ . Условия (15) и (17) не выполнены, выполнено условие (16). Следовательно,  $(0,07; 0) – \text{РН.}$  •

Пример 10.7. Пусть в условиях примера 10.6  $\theta_\gamma = \theta_\delta = \theta = 0,4$ ,  $\lambda = 20$ . Найдем

$$\Omega_{\delta,\gamma}(0,4) = \{\delta \in [0; 1], \gamma \in [0; 0,05] \mid \gamma = 0,1 + 1,5 \delta\} = \emptyset.$$

Условие (15) выполнено, т. е.  $(0; 0) – \text{РН.}$  •

В случае отсутствия РН перспективным представляется поиск и анализ равновесий в безопасных стратегиях (РБС). Первоначально РБС было предложено в работе [34] и затем сформулировано в новой, более простой, форме в работах [35, 104]. Эта концепция равновесия основана на понятии угрозы. Для игрока существует угроза, если некоторый другой игрок может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш и при этом одновременно уменьшить выигрыш первого игрока. *Равновесие в безопасных стратегиях* определяется как игровой профиль, удовлетворяющий условиям:

- ни для одного из игроков не существует угроз;
- ни один игрок не может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш, не создав при этом для себя угрозы потерять больше, чем он выигрывает.

Пусть выполнены предположения А.1 и А.2. Определим функции (если множество, по которому вычисляется минимум, пусто, то будем считать, что значение функции равно  $+\infty$ ):

$$C_\delta(x, \gamma) = \min_{\{\delta \geq 0 \mid x^*(\delta, \gamma) = x\}} c_\delta(\delta), \quad C_\gamma(x, \delta) = \min_{\{\gamma \geq 0 \mid x^*(\delta, \gamma) = x\}} c_\gamma(\gamma).$$

Из определения РБС (см. выше и работы [34, 35]) и свойств целевых функций центров следует

Утверждение 10.9. Пусть выполнены предположения А.1 и А.2. Тогда в модели II:

1) точка равновесия  $(\delta_{\text{РБС}}; 0)$  является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение  $\delta_{\text{РБС}}$ , для которого

$$\begin{cases} x^*(\delta_{\text{РБС}}, 0) \geq \theta_\delta, \\ H_\delta^+ - c_\delta(\delta_{\text{РБС}}) \geq H_\delta^-, \\ H_\gamma^+ - C_\gamma(\theta_\gamma, \delta_{\text{РБС}}) \leq H_\gamma^-; \end{cases}$$

2) точка равновесия  $(0; \gamma_{\text{РБС}})$  является РБС, если существует минимальное неотрицательное значение  $\gamma_{\text{РБС}}$ , для которого

$$\begin{cases} x^*(0; \gamma_{\text{РБС}}) \leq \theta_\gamma, \\ H_\gamma^+ - c_\gamma(\gamma_{\text{РБС}}) \geq H_\gamma^-, \\ H_\delta^+ - C_\delta(\theta_\delta, \gamma_{\text{РБС}}) \leq H_\delta^-. \end{cases}$$

Пример 10.8. Пусть в условиях примера 10.6  $\lambda = 2$ , т. е. РН при таких значениях параметров не существует. Из первой системы неравенств утверждения 10.9 находим:  $\delta_{\text{РБС}} \approx 0,816$  реализует единичное РКП. Вторая система неравенств утверждения 10.9 не имеет решения, т. е. найденное РБС единственно. •

Отметим, что выбор таких параметров, как пороги в функциях выигрыша центров и сами размеры выигрышней, может рассматриваться в качестве *метауправления*. Действительно, зная зависимость равновесия игры центров от этих параметров, можно рассматривать трехуровневые модели (метауровень – центры – агенты) – ставить и решать задачи выбора таких допустимых значений параметров игры центров, которые приводят в ней к равновесию, реализующему требуемое РКП агентов. Приведем пример.

Пример 10.9. Рассмотрим в условиях примера 6 при  $\lambda = 20$  задачу выбора таких значений  $H_\delta^+$  и  $H_\gamma^+$ , при которых вектор нулевых стратегий центров является РН их игры. В соответствии с условием (15) для этого достаточно уменьшить значение  $H_\delta^+$  до  $4,9 \cdot 10^{-4}$ .

Рассмотрим теперь в условиях примера 6 при  $\lambda = 20$  задачу выбора таких значений  $H_\delta^+$  и  $H_\gamma^+$ , при которых в равновесии реализуется РКП  $\theta_\gamma = 0,4$ . Для этого в соответствии с выражением (17) достаточно выбрать  $H_\delta^+ \leq 0,029$  и  $H_\gamma^+ \geq 4$ . •

Завершив рассмотрение игр в нормальной форме, перейдем к их «расширениям» – иерархическим и рефлексивным играм двух центров. Следует признать, что рассматриваемые ниже примеры игр различных типов имеют характер лишь иллюстрации возможности описания и изучения соответствующих классов теоретико-игровых моделей информационного противоборства. Их подробное и систематическое исследование является перспективной задачей будущих исследований.

## 10.4. Иерархическая игра

В задачах управления толпой возможны ситуации, когда игроки (центры) принимают решения последовательно. При этом существенна информированность каждого из игроков на момент принятия им решения, а также множества их допустимых стратегий (см. классификацию и результаты исследования *иерархических игр* в хрестоматийной монографии [99]). Над каждой игрой в нормальной форме может быть «надстроена» та или иная иерархическая игра [52, 113, 114]. Более того, следует различать два варианта:

1) один из центров выбирает свою стратегию, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию, после чего осуществляется информационное воздействие на агентов. В результате функция распределения порогов принимает вид (6) (или (9)). Именно этот случай иллюстрируется ниже;

2) один из центров выбирает свою стратегию и осуществляет свое информационное воздействие на агентов, затем другой центр, зная выбор оппонента, выбирает свою стратегию и осуществляет свое информационное воздействие на агентов.

В модели I оба варианта эквивалентны (приводят к одной и той же функции распределения порогов (6)), а в модели II различаются.

В играх типа  $\Gamma_1$  (в том числе в играх Штакельберга [99, 110]) множества допустимых стратегий центров такие же, что и в исходной игре в нормальной форме, а центр, делающий ход вторым, знает выбор центра, сделавшего первый ход. Соответствующие ситуации могут интерпретироваться как управление и *контроль* (например, при заданном значении  $\alpha$  выбрать  $\beta$ , или наоборот). Если исходная игра в нормальной форме допускает простой анализ и исследование зависимости равновесий от параметров модели, то и с изучением соответствующей игры типа  $\Gamma_1$  проблем, как правило, не возникает.

Рассмотрим ряд примеров иерархических игр для первого варианта модели I для случая пороговых функций выигрыша центров.

Пример 10.10. Пусть в условиях примера 10.5  $\theta = 1/3$ , сначала первым центром выбирается параметр  $\alpha$ , а затем вторым центром (при известном выборе первого) – параметр  $\beta$  (так называемая игра  $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ ). Из выражений (4) и (10) получаем:

$$\Omega_{\alpha, \beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \beta = \frac{\alpha(1-\theta)}{\alpha + \theta - 2\alpha\theta}, 0 < \alpha, \beta \leq 1 - 1/e\}.$$

Если первый центр выбирает стратегию  $\alpha^S$ , то наилучший ответ второго центра

$$\begin{aligned}\beta^S(\alpha^S) &= \arg \max_{\beta \in [0:1]} [H_\beta(x^*(\alpha^S)(\alpha, \beta)) - c_\beta(\beta)] = \\ &= \arg \max_{\beta \in [0:1]} \left[ \begin{cases} 1, & \text{если } x^*(\alpha^S, \beta) \leq \theta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} + \ln(1 - \beta) \right] = \frac{2\alpha}{\alpha + 1},\end{aligned}$$

т. е. второму центру выгодно выбрать минимальное  $\beta$ , которое при данном  $\alpha^S$  приводит к РКП  $\theta$ . Получаем, что целевая функция первого центра может быть записана в виде:  $H_\alpha(x^*(\alpha^S, \beta^S(\alpha^S))) - c_\alpha(\alpha^S) = 1 - c_\alpha(\alpha^S)$ , где  $0 < \alpha \leq 1 - 1/e$ . Таким образом,  $\varepsilon$ -оптимальным (где  $\varepsilon$  – сколь угодно малая строго положительная величина) решением  $(\alpha^{S*}, \beta^{S*})$  игры  $\Gamma_1(\alpha, \beta)$  будет пара стратегий  $(\varepsilon, 2\varepsilon/(\varepsilon+1))$ , приводящих к выигрышам центров  $1 + \ln(1 - \varepsilon)$  и  $1 + \ln(1 - 2\varepsilon/(\varepsilon+1))$  соответственно. Отметим, что, во-первых, это решение близко к утилитарному (так как оба центра выбирают близкие к нулю стратегии). Во-вторых, центр, делающий второй ход, несет большие затраты. •

Пример 10.11. Пусть в условиях примера 10.10 сначала вторым центром выбирается параметр  $\beta$ , а затем первым центром (при известном выборе второго) – параметр  $\alpha$  (игра  $\Gamma_1(\beta, \alpha)$ ). Из выражений (4) и (10) получаем:

$$\Omega_{\alpha, \beta}(\theta) = \{(\alpha, \beta) \in [0; 1]^2 \mid \alpha = \theta\beta / (1 - \beta - \theta + 2\beta\theta), 0 < \alpha, \beta \leq 1 - 1/e\}.$$

При этом  $\varepsilon$ -оптимальным (где  $\varepsilon$  – сколь угодно малая строго положительная величина) решением рассматриваемой игры  $\Gamma_1(\beta, \alpha)$  будет пара стратегий  $(\varepsilon / (2 - \varepsilon), \varepsilon)$ , приводящих к выигрышам центров  $1 + \ln(1 - \varepsilon / (2 - \varepsilon))$  и  $1 + \ln(1 - \varepsilon)$  соответственно. Отметим, что это решение также близко к утилитарному. Опять же, центр, делающий второй ход, несет большие затраты. •

Примеры 10.10 и 10.11 позволяют выдвинуть (известную в теории иерархических игр и ее приложениях) гипотезу: решения игр  $\Gamma_1(\alpha, \beta)$  и  $\Gamma_1(\beta, \alpha)$  принадлежат множеству компромисса (если оно не пусто), причем имеет место борьба за первый ход (как правило, центр, делающий первый ход, вынуждает оппонента «согласиться» с невыгодным для последнего равновесием). Это свойство встречается во многих моделях управления организационными системами [114].

Рассмотрим теперь игры типа  $\Gamma_2$ , в которых центр, делающий ход первым, имеет более богатое множество возможных стратегий

[99], а именно, он может выбирать и сообщать центру, делающему второй ход, зависимость своих действий от действий последнего. В рамках идеологии теоремы Гермейера о структуре решения игры  $\Gamma_2$  [99] можно предположить, что, если множество компромисса не пусто, то оптимальная стратегия первого центра (первым выбирающего  $\alpha$ , т. е. в игре  $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta)$ ) имеет вид:

$$(18) \alpha^{G^*}(\beta) = \begin{cases} \alpha^{S^*}, & \text{если } \beta = \beta^{S^*}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Содержательно, стратегия (18) заключается в том, что первый центр предлагает второму реализовать решение  $(\alpha^{S^*}, \beta^{S^*})$  игры  $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ . Если второй центр отказывается, то первый угрожает использовать свою наихудшую для оппонента стратегию. В рамках стратегии (18) игра  $\Gamma_2(\alpha(\cdot), \beta)$  дает в равновесии центрам те же выигрыши, что и игра  $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ .

Игра  $\Gamma_2(\beta(\cdot), \alpha)$ , а также иерархические игры для модели II описываются полностью аналогично.

## 10.5. Рефлексивная игра

Над игрой в нормальной форме можно «надстраивать» *рефлексивные игры* [59, 60], в которых игроки обладают нетривиальной взаимной информированностью о существенных параметрах. Предположим, что функция распределения  $F(r, x)$  задана параметрически, и неопределенность отражается параметром  $r \in Y$ . Следуя работе [60], представления первого центра о неопределенном параметре  $r$  будем обозначать  $r_1$ , второго —  $r_2$ , представления первого центра о представлениях второго —  $r_{12}$  и т. д.

Пример 10.12. Пусть в модели II  $F(r, x) = r + (1 - r)x$ ,  $r \in Y = [0; 1]$ ,  $H_\delta(x) = x$ ,  $H_r(x) = 1 - x$ ,  $c_\delta(\delta) = \delta$ ,  $c_\gamma(\gamma) = \lambda \gamma$ . Найдя РКП  $x^*(\delta, \gamma) = (\delta + r) / (\delta + \gamma + r)$ , получаем выражения для целевых функций центров:

$$(19) f_\delta(\delta, \gamma) = (\delta + r) / (\delta + \gamma + r) - \delta,$$

$$(20) f_\gamma(\delta, \gamma) = 1 - (\delta + r) / (\delta + \gamma + r) - \lambda^2 \gamma.$$

Если значение параметра  $r \in [0; 1]$  является общим знанием [60] среди центров, то из выражений (19) и (20) находим параметрическое РН игры центров

$$(21) \delta^* = \left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 - r,$$

$$(22) \gamma^* = \frac{1}{(1+\lambda^2)^2}$$

и реализуемое этими стратегиями РКП

$$(23) x^*(\delta^*, \gamma^*) = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}.$$

Отметим, что равновесная стратегия второго центра (22), а также соответствующее РКП (23) в условиях общего знания не зависят от значения параметра  $r \in [0; 1]$ . Ситуация меняется, если общее знание относительно этого параметра отсутствует.

Пусть  $r_1 = r_{12} = r_{121} = r_{1212} = \dots$ , т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией  $r_1$  о неопределенном параметре  $r$  и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть  $r_2 = r_{21} = r_{212} = r_{2121} = \dots = r$ , т. е. второй центр знает истинное значение параметра  $r$  и считает его общим знанием (т. е. второй центр не знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины).

Из выражений (21) и (22) находим *информационное равновесие* [60, 73] игры центров

$$\delta_* = \left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 - r_1, \gamma_* = \frac{1}{(1+\lambda^2)^2}$$

и реализуемое в этом равновесии РКП

$$(24) x^*(\delta_*, \gamma_*) = \frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}{1 + \lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}.$$

Видно, что в общем случае РКП зависит от информированности центров, и в случае общего знания (чему соответствует  $r_1 = r$ ) выражение (24) переходит в выражение («3). Осуществляя, как метауправление, *информационное управление* – например, изменения представления первого центра о значении неопределенного параметра, можно соответственно менять и РКП. •

Пример 10.13. Пусть в условиях примера 10.12 второй центр адекватно информирован о представлениях первого центра (т. е. второй центр знает о том, что представления первого центра могут отличаться от истины):  $r_{21} = r_{212} = r_{2121} = \dots = r_1$ . Тогда первый центр

будет в информационном равновесии по-прежнему выбирать стратегию  $\delta_* = \left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 - r_1$ , а второй центр выберет

$$\gamma_*(r_1, r) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 - r_1 + r} + r_1 - r - \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2},$$

что приведет к реализации РКП

$$x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = \lambda \frac{\lambda^2 + (r - r_1)(1 + \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2 \sqrt{\left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 - r_1 + r}}.$$

Легко убедиться, что в случае общего знания, т. е. при  $r_1 = r$  справедливо  $x^*(\delta_*, \gamma_*(r_1, r)) = x^*(\delta^*, \gamma^*)$ .

Таким образом, настоящий пример иллюстрирует, что в рефлексивных играх на равновесие существенно влияет не только информированность агентов (она не изменилась по сравнению с примером 10.11), но и их *взаимная информированность*, т. е. представления об информированности оппонентов, представления о представлениях и т. д. [60]. •

Отметим, что нетривиальная взаимная информированность центров может иметь место не только относительно параметров функции распределения порогов агентов, но и относительно параметров функций выигрыша и/или функций затрат центров и др.

**Пример 10.14.** Пусть в условиях примера 10.12 первый центр неадекватно информирован о параметре  $\lambda$  функции затрат второго центра, который знает истинное значение этого параметра и считает, что первый центр адекватно информирован.

Пусть  $\lambda_1 = \lambda_{12} = \lambda_{121} = \lambda_{1212} = \dots$ , т. е. первый центр обладает некоторой (в общем случае неправильной) информацией  $\lambda_1$  о неопределенном параметре  $\lambda$  и считает, что его представления истинны и составляют общее знание. Пусть  $\lambda_2 = \lambda_{21} = \lambda_{212} = \lambda_{2121} = \dots = \lambda$ , т. е. второй центр знает истинное значение параметра  $\lambda$  и считает его общим знанием. Из выражений (31) и (32) получаем реализуемое в

информационном равновесии РКП:  $x^* = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \left( \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda^2} \right)^2}$ , которое в

случае общего знания (чему соответствует  $\lambda_1 = \lambda$ ) переходит в РКП (36). •

Итак, в настоящем разделе показано, как, располагая предложеной в работе [13] (см. также пятый раздел) стохастической моделью управления толпой, «надстраивать» над ней различные теоретико-игровые модели взаимодействия управляющих субъектов, оказывающих информационные воздействия на толпу в собственных интересах. Относительная «простота» модели объекта управления (толпы) позволяет применить разнообразный инструментарий теории игр – исследовать не только игры в нормальной форме, но и иерархические, рефлексивные и другие игры.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется идентификация и выделение типовых функций распределения порогов агентов, что позволит синтезировать соответствующие шаблоны управлений и решений задач информационного управления и информационного противоборства.

## 11. МОДЕЛИ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ ТОЛПЫ

Выше в настоящей работе динамика доли действующих агентов описывалась разностными или дифференциальными уравнениями типа (2.7), (3.12), (7.1), (8.1) и т.п., в которых в правой части фигурировала функция распределения порогов агентов. Если пороги агентов являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, т.е. если имеется *вероятностная неопределённость* относительно значений порогов агентов, то можно рассматривать события (и оценивать их вероятности), заключающиеся в выходе системы из некоторого заданного множества состояний (т.е. в т.н. *спонтанном возбуждении толпы* или «самовозбуждении толпы»). При этом обычно используется техника больших уклонений [93] – примером являются асимптотические результаты, полученные в [14, 67]. Ниже в настоящем разделе теоретические оценки типа больших уклонений уточняются при помощи численных оценок, полученных методом статистических испытаний. Полученные результаты дают возможность оценить надёжность обеспечения невозбуждения толпы в тех случаях, когда вероятности событий слишком малы для применения метода статистических испытаний [68].

**Модель поведения толпы.** Рассмотрим конечное множество агентов  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждый из агентов имеет некоторый порог  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $i \in N$ . На шаге  $k$  агент  $i \in N$  выбирает одно из двух состояний  $\omega_{ik} \in \{0, 1\}$ , а его состояние на шаге  $(k+1)$  определяется по правилу:

$$(1) \quad \omega_{i,k+1} = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i \geq 0, \\ 0, & \frac{1}{n} \sum_j \omega_{jk} - \theta_i < 0. \end{cases}$$

Согласно правилу (1), агент действует, если состояние системы  $x_k = \frac{1}{n} \sum_i \omega_{ik}$  не ниже, чем его порог. Динамика состояния системы во времени при этом подчиняется рекуррентному соотношению

$$(2) \quad x_{k+1} = F_n x_k ,$$

где

$$(3) \quad F_n x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{\theta_i \leq x} ,$$

$\chi(\cdot)$  обозначает индикатор множества.

В работах [14, 67] был рассмотрен случай, когда в правой части выражения (1) имеется неопределенность: вместо известных порогов агентов рассматривается последовательность  $\theta_1, \omega, \dots, \theta_n, \omega$  независимых одинаково распределенных (с распределением  $F(\cdot)$ ) случайных величин на вероятностном пространстве  $\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$ . Такая ситуация возникает, например, когда пороги агентов не известны точно, но агенты выбраны случайно из множества агентов с известным распределением порогов.

Эмпирическая функция распределения порогов агентов в этом случае запишется как

$$(4) \quad F_n x, \omega = \frac{1}{n} \sum_i \chi_{\theta_i \leq x} .$$

При фиксированных  $F$  и  $x_0$ , получаем, что выражением

$$x_1^n \omega = F_n x_0, \omega ,$$

...

$$(5) x_k^n \omega = F_n x_{k-1} \omega , \omega ,$$

...

$$x_K^n \omega = F_n x_{K-1} \omega , \omega$$

задана последовательность случайных конечных последовательностей  $\bar{x}^n \omega = (x_1^n(\omega), \dots, x_K^n(\omega))$  - траекторий системы, каждая из которых имеет некоторое распределение  $P_n$  на пространстве  $\mathfrak{R}^K$ , определяемое как  $P_n A = \mathbb{P} \omega : \bar{x}^n \omega \in A$  - то есть, выражение (5) описывает *стохастическое пороговое поведение*.

В работе [67] была доказана следующая асимптотика, изучаемая обычно в теории больших уклонений [93], для распределений траекторий системы:

$$(6) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n U \geq -\inf_U H \bar{y}$$

для любого открытого множества  $U \in \mathcal{B} S$ , и

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n C \leq -\inf_C H \bar{y}$  - для любого замкнутого множества  $C \in \mathcal{B} S$ , где

$$(7) H \bar{y} = \begin{cases} y_1 \ln \frac{y_1}{F y_0} + \sum_{k=1}^{K-1} y_{k+1} - y_k \ln \frac{y_{k+1} - y_k}{F y_k - F y_{k-1}} + 1 - y_K \ln \frac{1 - y_K}{1 - F y_{K-1}}, \bar{y} \in Y_1, \\ 1 - y_1 \ln \frac{1 - y_1}{1 - F y_0} + \sum_{k=1}^{K-1} y_k - y_{k+1} \ln \frac{y_k - y_{k+1}}{F y_{k-1} - F y_k} + y_K \ln \frac{y_K}{F y_{K-1}}, \bar{y} \in Y_2, \\ +\infty, \bar{y} \notin Y_1 \cup Y_2, \end{cases}$$

и введены обозначения  $y_0 := x_0$ ,  $0 \cdot \ln 0 := 0$ ,

$$Y_1 = \bar{y} \in [0, 1]^K : y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = y_{m+1} = \dots = y_K, m \in \{0, \dots, K\},$$

$$Y_2 = \bar{y} \in [0, 1]^K : y_0 > y_1 > y_2 > \dots > y_m = y_{m+1} = \dots = y_K, m \in \{0, \dots, K\}.$$

В третьем разделе (см. выражение (3.17)) были описаны результаты идентификации функций распределения реальных онлайновых социальных сетей, где  $\lambda \in [0, +\infty)$  - параметр, носящий название

«коэффициент неоднородности» и характеризующий степень отличия функции распределения от равномерного распределения, а  $\theta \in [0, 1]$  - параметр, характеризующий происходящий в сети процесс принятия решения и называемый «единий относительный порог».

Исследуем вероятность события  $A \in \mathcal{F}$ , состоящего в том, что случайный процесс (5) с заданным начальным условием (например,  $x_0 = 0.2$ ) превысит в некоторый момент времени «точку выхода»  $x_{\text{вых}} = 0.5$  (соответствующую, например, ситуации, когда толпа считается возбужденной, или ситуации, когда  $\forall x \in [x_{\text{вых}}; 1] F(x, \theta, \lambda) \geq x$ , т.е. дальнейшая динамика процесса (2) приведет к возбуждению всей толпы) при различных количествах  $n$  агентов в системе. Формальное определение данного события запишется как

$$(8) A^n = \{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N}, x_k^n \omega > x_{\text{вых}}\}.$$

Событие  $A^n$  далее называется *выходом из области* толпы, состоящей из  $n$  агентов. Вероятность выхода из области в описанной модели зависит только от теоретической функции распределения порогов агентов  $F(\cdot)$  и их количества  $n$ . В случае функций распределения из двухпараметрического семейства (3.17) введём для нее обозначение

$$(9) P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda = \mathbb{P} \{\omega \in A^n, F(x) = F(x, \theta, \lambda)\}.$$

Асимптотическая оценка (6) для вероятности принимает вид

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda = -\inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y}).$$

**Оценка вероятности выхода из области.** Оценка (10) может быть переписана в виде

$$(11) P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda = c(n, \theta, \lambda) e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})},$$

где  $c(n, \theta, \lambda)$  удовлетворяет для всех  $\theta$  и  $\lambda$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log c(n, \theta, \lambda)}{n} = 0,$$

то есть изменяется «меньше чем экспоненциально» по  $n$ . Не зная «константы»  $c(n, \theta, \lambda)$ , нельзя определить значение вероятности

$P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda$  с заданной точностью. По этой причине утверждения типа (10) иногда называют «*грубая логарифмическая асимптотика*». Асимптотика (10) может применяться для получения численной оценки вероятности  $P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda$  только при наличии дополнительной информации о константе  $c_{n, \theta, \lambda}$ . В [68] значение этой константы определялось приближённо при помощи полученной методом статистических испытаний оценки  $\tilde{P}_{\text{вых}}^n \theta, \lambda$ , изображённой на Рис. 25 и Рис. 26. Подробное описание алгоритма проведения статистических испытаний приведено в [68].

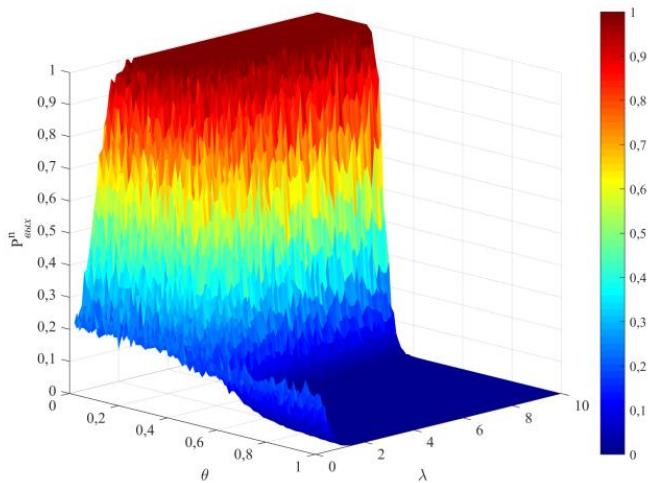


Рис. 25. Зависимость вероятности  $P_{\text{вых}}^n \theta, \lambda$  выхода из области от параметров  $\theta$  и  $\lambda$ , полученная методом статистических испытаний при  $n = 50$

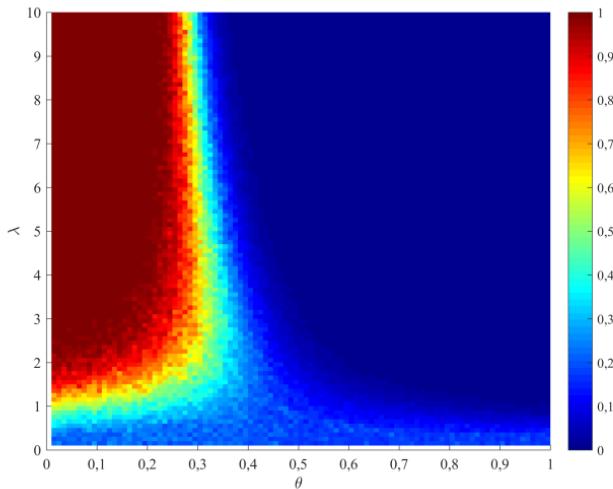
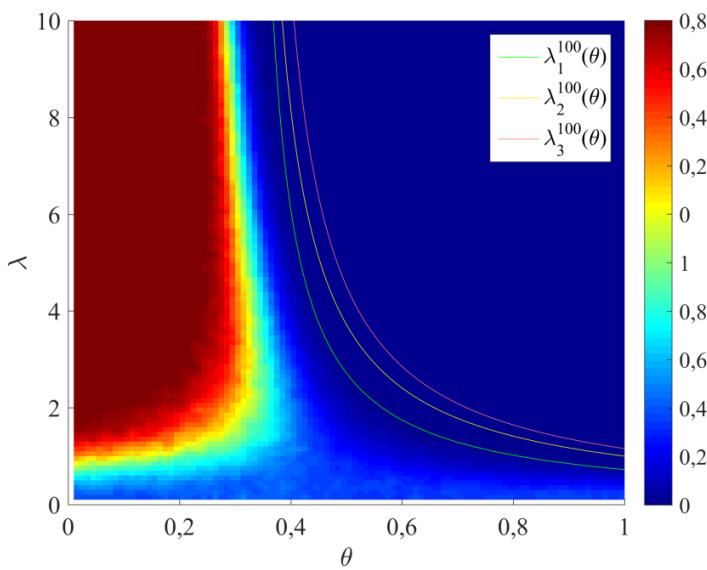
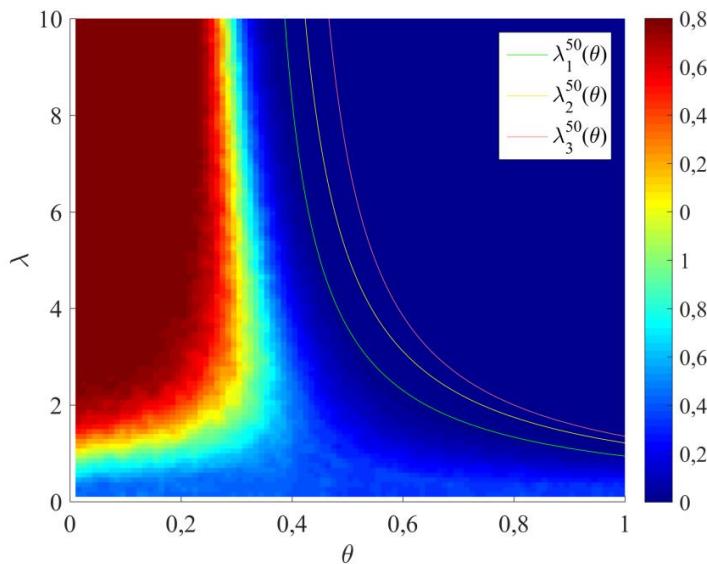


Рис. 26. Зависимость вероятности  $P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$  выхода из области от параметров  $\theta$  и  $\lambda$  – проекция поверхности, приведенной на Рис. 25, на плоскость  $(\theta, \lambda)$

На Рис. 27 изображены линии уровня  $\tilde{P}_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)$ , определяемые как функции  $\lambda_1^n(\theta)$ ,  $\lambda_2^n(\theta)$  и  $\lambda_3^n(\theta)$ , удовлетворяющие

$$(13) \quad \tilde{P}_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda_1^n(\theta)) = 10^{-2}, \quad \tilde{P}_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda_2^n(\theta)) = 10^{-3}, \quad \tilde{P}_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda_3^n(\theta)) = 10^{-4}.$$



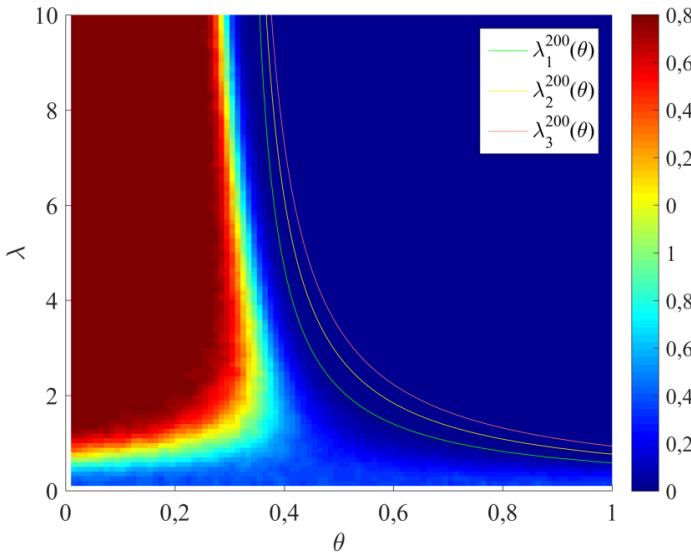


Рис. 27. Кривые равной вероятности выхода (линии уровня) для различного числа агентов:  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 100$  и  $n_3 = 200$

При помощи метода численной оптимизации в [68] вычислялась оценка  $\hat{I}(\theta, \lambda)$  функции  $I(\theta, \lambda) = \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})$ . Далее, оценка константы  $c(n, \theta, \lambda)$  находилась по формуле

$$(14) \quad \hat{c}(\theta, \lambda) = \frac{\hat{P}_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda)}{e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})}},$$

при  $n = 200$ . При значениях  $n$ , для которых методом статистических испытаний невозможно получить оценку вероятности, с использованием (14) можно записать «совмещённую» оценку в виде

$$(15) \quad P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda) = \hat{c}(\theta, \lambda) e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F(\cdot, \theta, \lambda), \bar{y})}.$$

Важно отметить, что данная оценка получена объединением аналитического результата (10) и численных расчётов.

Имея оценки типа (15) для вероятностей неблагоприятных событий, можно ставить и решать соответствующие задачи управления – выбора управляемых параметров с целью минимизировать

данную вероятность, или минимизировать затраты по обеспечению непревышения вероятностью заданного порога и т.д.

**Обеспечение надежности социальных систем.** Рассмотрим социальную систему (АСС - толпу, социальную сеть и т.п.) со стохастическим пороговым поведением (5). Как показано в [14], такая система не более чем за  $n$  шагов приходит к «равновесию» (действия агентов перестают изменяться). В силу случайности порогов агентов, состояние системы, при котором достигается это равновесие (результатирующее состояние), случайно.

Выше были приведены оценки вероятности события, состоящего в том, что результатирующее состояние системы находится вне заданной области (при условии, что первоначально система находилась в заданной области), при различных значениях коэффициента неоднородности и единого относительного порога системы. Вероятность выхода системы из заданной области, как было показано выше, в общем случае зависит от параметров системы.

Рассмотрим задачу обеспечения надёжности социальной системы [68] при условии, что вероятность выхода  $p$  известна как функция основных параметров системы:

$$p = p(n, \theta, \lambda) \equiv P_{\text{вых}}^n(\theta, \lambda).$$

Пусть реализация порогов агентов, и, следовательно, достижение равновесия, повторяется многократно через равные промежутки времени  $\tau$ , которые называются «*быстрое время*». Тогда за время  $t$ , называемое «*медленное время*», достижение равновесия произойдёт  $m = t / \tau$  раз, где  $\cdot$  обозначает целую часть числа.

Согласно [16], *надёжностью социальной системы* называется вероятность сохранения её основных параметров внутри допустимой области (в случае толпы допустимым является невозбуждение толпы). Для социальной системы основным наблюдаемым параметром является среднее действие агентов (доля действующих агентов). Допустимой областью является множество  $0, x_{\text{вых}}$ . Так как достижение равновесия многократно повторяется во времени, то надёжность зависит от рассматриваемого промежутка времени. Обозначим через  $R(t)$  *функцию выживания* - вероятность того, что за время  $t$  система ни разу не выйдет из допустимой области. Функция выживания, согласно определению надёжности, является надёжностью системы на временном интервале  $t$ .

Введём бернуллиевскую случайную величину  $\xi_i \in \{0, 1\}$ , которая равна единице, если система в момент времени  $t_m = m\tau$  вышла из допустимой области, и равна нулю в противоположном случае. Вероятности этих событий равны соответственно  $p$  и  $1-p$ . Функция выживания по определению может быть записана как

$$R(t) \equiv \mathbb{P}[\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{t/\tau} = 0],$$

что приводит к результату

$$(16) \quad R(t) = 1 - p^{\left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil}.$$

При малых  $p$ , таких что  $p \ll 1/m = 1/\tau$ , выражение (16) может быть приближено

$$(17) \quad R(t) = 1 - p \left[ \frac{t}{\tau} \right].$$

Задача управления надёжностью социальных систем состоит в том, чтобы найти множество параметров, при которых надёжность системы при заданном времени  $T$  окажется не меньше, чем заданный порог  $\delta$ .

Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть задача состоит в обеспечении надёжности  $\delta = 0.99$  для социальной системы с числом агентов  $n = 10^7$  на промежутке времени, таком что  $m = \left\lceil \frac{t}{\tau} \right\rceil = 10^3$ .

Решение этой задачи выглядит следующим образом.

1) Подставить данные в уравнение (16) и найти максимально допустимую вероятность  $p$ . В данном случае применимо приближение (17), принимающее вид  $\delta = 1 - pm$ , откуда выражает-

$$\text{ся } p = \frac{1-\delta}{m} = \frac{10^{-2}}{10^3} = 10^{-5}.$$

2) Решить уравнение  $\hat{c}(\theta, \lambda) e^{-n \inf_{\bar{y} \in A^n} H(F, \theta, \lambda, \bar{y})} = p$  и найти соответствующую линию уровня  $\hat{\lambda}(\theta)$  в пространстве параметров  $\theta, \lambda$ . Множество значений параметров  $\theta, \lambda$ , обеспечивающих надёжность не менее  $\delta$ , лежит «правее и выше» найденной линии уровня - в области, приведенной на Рис. 28.

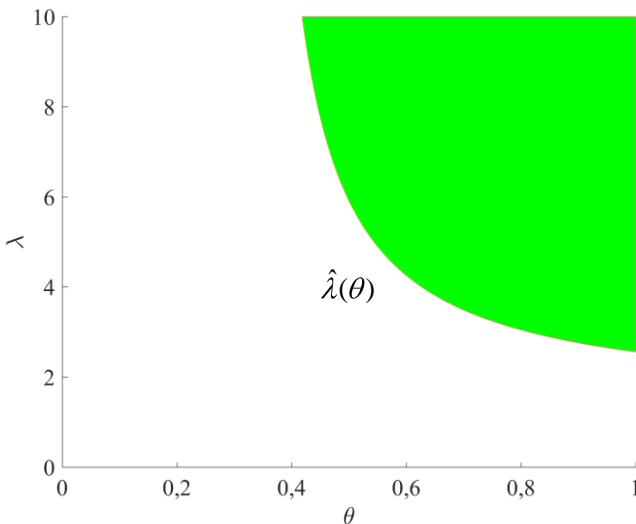


Рис. 28. Линия уровня  $\hat{\lambda}(\theta)$  и множество значений параметров  $\theta, \lambda$ , обеспечивающих надёжность, не превышающую  $\delta$

Завершив рассмотрение примера, отметим, что задача обеспечения надёжности социальной системы – её нахождения в заданном множестве состояний – требует оценки вероятностей редких событий. Зачастую эти вероятности настолько малы, что не позволяют применять для своей оценки метод статистических испытаний. Точные аналитические оценки и метод замены меры не всегда удаётся применить в связи со сложностью исследуемых моделей. Выше и в [68] показано, что грубая логарифмическая асимптотика типа больших уклонений может применяться для численной оценки вероятностей редких событий при помощи «калибровки» оценки методом статистических испытаний на множестве параметров, позволяющих получать оценки этим методом.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен ряд моделей (детерминированных и стохастических, статических и динамических) управления

толпой. Интересно отметить существование определенного «баланса», с одной стороны, между простотой и детальностью описания индивидуального взаимодействия агентов, свойственного микромоделям, и сложностью и агрегированностью описания АСС, характерным для макромоделей. Действительно, аналитические результаты при решении задач управления АСС удается получить либо для линейной микромодели (см. выражения (3.1), (9.1) и т.п.), либо для нелинейной макромодели типа (2.7) – см. Рис. 29.

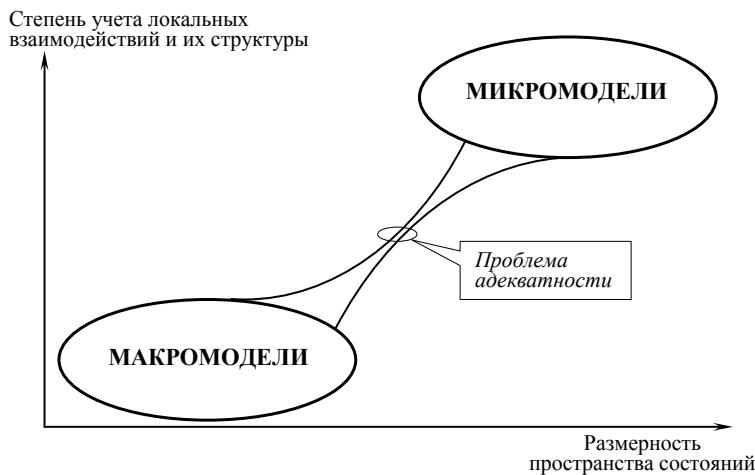


Рис. 29. Микро- и макромодели АСС

В качестве перспективных направлений текущих и дальнейших исследований можно выделить:

- 1) желательность более тесного взаимопроникновения математического моделирования и подходов психологии и социологии толпы;
- 2) необходимость накопления эмпирической базы описания АСС, разработки общих методов их идентификации;
- 3) развитие имитационных агентных математических моделей управления толпой;
- 4) развитие аналитических математических моделей управления толпой, включая:

- привлечение аппарата и результатов исследования динамики (в т.ч. - пороговой) АСС в различных предметных областях – диффузия инноваций, нейронные сети, генетические сети и др. – см. обзоры в [5, 6, 25, 40, 57, 69];

- стохастические модели редких событий (например «самовозбуждение» толпы), в т.ч. с использованием аппарата больших уклонений (см. одиннадцатый раздел и [14, 67, 68]);

- теоретико-игровые модели порогового коллективного поведения и их использование в широком спектре прикладных задач;

- постановку и решение задач управления АСС, описываемых вероятностной моделью Грановеттера (8.24);

- постановку и решение динамических задач информационного противоборства в АСС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Барабанов И.Н., Коргин Н.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Динамическая модель информационного управления в социальных сетях // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 11. – С. 172–182.
2. Барабанов И.Н., Новиков Д.А. Динамические модели управления возбуждением толпы в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. - 2016. - № 9.
3. Барабанов И.Н., Новиков Д.А. Динамические модели управления возбуждением толпы в непрерывном времени // Управление большими системами. - 2016. - № 62.
4. Батов А.В., Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодели социальных сетей: идентификация и имитационные эксперименты // Проблемы управления. – 2014. – № 6. – С. 45–51.
5. Бреер В.В. Модели конформного поведения. Ч. 1. От философии к математическим моделям // Проблемы управления. – 2014. – № 1. – С. 2–13.
6. Бреер В.В. Модели конформного поведения. Ч. 2. Математические модели // Проблемы управления. – 2014. – № 2. – С. 2–17.
7. Бреер В.В., Мирзоян Г.Л., Новиков Д.А. Инновационная олигополия Курно // Проблемы управления. - 2015. - № 5. - С. 45-57.
8. Бреер В.В. Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга – к М. Грановеттеру) // Проблемы управления. - 2016. - № 1. - С. 11–20.
9. Бреер В.В. Теоретико-игровая модель неанонимного порогового конформного поведения // Управление большими системами. – 2010. – № 31. – С. 162–176.
10. Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного колективного поведения // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 10. – С. 111–126.
11. Бреер В.В., Новиков Д.А. Модели управления толпой // Проблемы управления. – 2012. – № 2. – С. 38–44.
12. Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Микро- и макромодели социальных сетей: основы теории // Проблемы управления. – 2014. – № 5. – С. 28–33.
13. Бреер В.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Стохастические модели управления толпой // Управление большими системами. – 2014. – № 52. – С. 85–117.

14. Бреер В.В., Рогаткин А.Д. Вероятностная модель порогового поведения в мультиагентных системах // Автоматика и Телемеханика. – 2015. – № 8. – С. 56–77.
15. Бреер В.В. Стохастические модели социальных сетей // Управление большими системами. – 2009. – № 27. – С. 169–204.
16. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. - М.: Синтег, 1997. - 188 с.
17. Бухарин С. Н., Цыганов В.В. Методы и технологии информационных войн. – М.: Академический проект, 2007. – 384 с.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
19. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
20. Грачев Г., Мельник И. Манипулирование личностью: организация, способы и технологии информационно-психологического воздействия. – М.: Институт философии РАН, 1999. – 153 с.
21. Губанов Д.А., Калашников А.О., Новиков Д.А. Теоретико-игровые модели информационного противоборства в социальных сетях // Управление большими системами. – 2010. – № 31. – С. 192-204.
22. Губанов Д. А., Новиков Д. А. Модели распределенного контроля в социальных сетях // Системы управления и информационные технологии. - 2009. - № 3.1 (37). - С. 124-129.
23. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели репутации и информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. – 2009. – № 26.1. – С. 209–234.
24. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // Проблемы управления. –2009. – № 5. – С. 28–35.
25. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. – М.: Физматлит, 2010. – 244 с.
26. Губанов Д.А. Обзор онлайновых систем репутации/доверия // Интернет-конференция по проблемам управления / ИПУ РАН. – М., 2009. – URL: [www.mtas.ru/forum](http://www.mtas.ru/forum).
27. Губанов Д.А., Чхартишвили А.Г. Акциональная модель влиятельности пользователей в социальной сети // Проблемы управления. – 2014. – № 4. – С. 20–25.

28. Губко М.В., Караваев А.П. Согласование интересов в матричных структурах управления // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 10. – С. 132–146.
29. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: СИНТЕГ, 2002. – 148 с.
30. Евин И.А. Введение с теорио сложных сетей // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 121–141.
31. Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. – СПб.: Питер, 2000. – 448 с.
32. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Синтез динамических моделей информационного управления в многоагентных сетях // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». – 2015. – № 1. – С. 58–66.
33. Иващенко А.А., Новиков Д.А. Модели и методы организационного управления инновационным развитием фирмы. – М.: Ленанд, 2006. – 332 с.
34. Исаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 3. – С. 139–153.
35. Исаков М.Б., Исаков А.Б. Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях // Управление большими системами. – 2014. – № 51. – С. 130–157.
36. Колчин В.Ф. Случайные графы. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 256 с.
37. Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления. – М.: ИПУ РАН, 2011. – 133 с.
38. Краснощеков П.С. Некоторые результаты математического моделирования одного механизма коллективного поведения // Социология: 4М. – 1994. – № 3-4. – С. 65 – 83.
39. Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 7. – С. 76 – 92.
40. Кузнецов О.П. Сложные сети и распространение активности // Автоматика и Телемеханика. - 2015. - № 12. - С. 3–22.
41. Куливец С.Г. Моделирование конфликтных ситуаций с несогласованными представлениями у агентов на основе игр на линейных когнитивных картах // Проблемы управления. – 2010. – № 4. – С. 42–48.

42. Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кочкаров А.А., Сомов Д.С. Использование сценарного и индикаторного подходов для управления живучестью, стойкостью и безопасностью сложных технических систем. – М.: ИПУ РАН, 2011. – 116 с.
43. Кульба В.В., Чернов И.В., Шелков А.Б., Шульц В.Л. Сценарный анализ в управлении геополитическим информационным противоборством. – М.: Наука, 2015. – 542 с.
44. Лебон Г. Психология народов и масс. - СПб.: Макет, 1995. - 311 с.
45. Майерс Д. Социальная психология. – С.-Пб.: Питер, 2002. – 688 с.
46. Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. – М.: Наука: Физматлит. 1998. – 528 с.
47. Минаев В.А., Овчинский А.С., Скрыль С.В., Тростянский С.Н. Как управлять массовым сознанием: современные модели. – М.: МВТУ, 2012. – 213 с.
48. Московичи С. Век толп: Исторический трактат по психологии масс. – М.: Центр психологии и психотерапии, 1996. - 478 с.
49. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.
50. Назаретян А.П. Психология стихийного массового поведения: Толпа, слухи, политические и рекламные кампании. 2-е изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 160 с.
51. Новиков Д.А. Большие данные: от Браге к Ньютону // Проблемы управления. – 2013. – № 6. – С. 15–23.
52. Новиков Д.А. Игры и сети // Математическая теория игр и ее приложения. – 2010. – № 2. – С. 107–124.
53. Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами. – 2012. – № 37. – С. 25–62.
54. Новиков Д.А. Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 160 с.
55. Новиков Д.А. Математические модели формирования и функционирования команд. – М.: Физматлит, 2008. – 184 с.
56. Новиков Д.А. Модели информационного противоборства в управлении толпой // Проблемы управления. - 2015. - № 3. - С. 29–39.

57. Новиков Д.А. Модели управления возбуждением сети // Тр. XII Всероссийского совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. – М.: ИПУ РАН, 2014. - С. 6314–6325.
58. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. – М.: ИПУ РАН, 2001. – 118 с.
59. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. – М.: СИНТЕГ, 2003. – 160 с.
60. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и управление. – М.: Физматлит, 2012. – 412 с.
61. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
62. Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. – М.: Наука, 2006. – 410 с.
63. Почебут Л.Г. Социальная психология толпы. – СПб.: Речь, 2004. – 240 с.
64. Почепцов Г.Г. Информационно-психологическая война. – М.: Синтег, 2000. – 180 с.
65. Райгородский А.М. Модели случайных графов и их применения // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2. – № 4. – С. 130–140.
66. Рогаткин А.Д. Модель Грановеттера с непрерывным временем // Управление большими системами. – 2016. – № 60. – С. 139–160.
67. Рогаткин А.Д. Большие уклонения в социальных системах с пороговым конформным поведением // Автоматика и Телемеханика. - 2016. - № 12.
68. Рогаткин А.Д. Оценка вероятности редких событий в поведении толпы // Управление большими системами. – 2016. - № 63.
69. Словохотов Ю.Л. Физика и социофизика. Ч. 1–3 // Проблемы управления. – 2012. – № 1. – С. 2–20; № 2. – С. 2–31; № 3. – С. 2–34.
70. Холщевников В.В., Самошин Д.А. Эвакуация и поведение людей при пожарах: Учеб. пособие. - М.: Академия ГПС МЧС России, 2009. - 212 с.
71. Чалдини Р. Психология влияния. – СПб.: Питер, 2001. – 304 с.

72. Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П. Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 3. – С. 136–151.
73. Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. – М.: ПМСОФТ, 2005. – 227 с.
74. Шейнов В. П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). – М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 848 с.
75. Ширяев А.Н. Вероятность: учеб. пособие для вузов. – М: Наука, 1989. – 640 с.
76. Akhmetzhanov A.R., Worden L., Dushoff J. Effects of Mixing in Threshold Models of Social Behavior // Phys. Rev. – 2013. – E 88. – 012816.
77. Akopov A.S., Beklaryan L.A. Simulation of Human Crowd Behavior in Extreme Situations // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 79. – N 1. – P. 121–138.
78. Albert R., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. – 2002. – N 74. – P. 47–97.
79. Algorithmic Game Theory (ed. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., and Vazirani V.). - N.Y.: Cambridge University Press, 2009. – 776 p.
80. Allport F. Social Psychology. - Boston: Houghton Mifflin, 1924. - 453 p.
81. Aumann R., Dreze J. Cooperative Games with Coalitional Structures // International Journal of Game Theory. – 1974. – Vol. 3. – P. 217–237.
82. Banerjee A. A Simple Model of Herd Behavior // Quarterly Journal of Economics. – 1992. – Vol. 107. N 3. – P. 797–817.
83. Barabasi A., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. – 1999. – № 286. – P. 509–512.
84. Barabasi A. Scale-free Networks // Scientific American. – 2003. – № 5. – P. 50 – 59.
85. Beklaryan A.L., Akopov A.S. Simulation of Agent-rescuer Behavior in Emergency Based on Modified Fuzzy Clustering / Proceedings of the 15th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2016). Singapore, 20116. – P. 1275-1276.
86. Bollobas B. Random Graphs. – Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – 520 p.

87. Brink R., Khmelnitskaya A., Van der Laan G. An Efficient and Fair Solution for Communication Graph Games // *Economic Letters*. – 2012. – Vol. 117. – P. 786–789.
88. Boyd S., Parikh N., Chu E., et al. Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers // *Foundations and Trends in Machine Learning*. – 2011. – N. 3(1). – P. 1–122.
89. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 727 p.
90. Chen N. On the Approximability of Influence in Social Networks // *SIAM J. Discrete Math.* – 2009. – Vol. 23. – P. 1400–1415.
91. Crowd Behavior at Mass Gatherings: A Literature Review / K. Zeitz, H. Tan, M. Grief, et al. // *Prehospital and Disaster Medicine*. – 2008. – Vol. 24. - N 1. – P. 32–38.
92. De Groot M. Reaching a Consensus // *Journal of American Statistical Association*. – 1974. – N 69. – P. 118–121.
93. Deuschel J., Stroock D. *Large Deviations*. – N.Y.: Academic Press, 1989. - 283 p.
94. Dorogovtsev S. *Lectures on Complex Networks*. – Oxford: Oxford University Press, 2010. – 144 p.
95. Dorogovtsev S., Mendes J. *Evolution of Networks*. – Oxford: Clarendon Press, 2010. – 264 p.
96. Durrett R. *Random Graph Dynamics*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 212 p.
97. Erdos P., Renyi A. On random graphs // *Publ. Math. Debrecen*. – 1959. – N 6. – P. 290–297.
98. Festinger L. A Theory of Social Comparison Processes // *Human Relations*. – 1954. – N 7. – P. 117–140.
99. Germeier Yu. *Non-antagonistic Games*. - Dordrecht, Boston: D. Reidel Pub. Co., 1986. – 327 p.
100. Goldenberg J., Libai B., Muller E. Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-mouth // *Marketing Letters*. – 2001. – Vol. 12. – N 3. – P. 211–223.
101. Gomez D., Gonzalez-Aranguena E., Manuel C. et al Centrality and Power in Social Networks: a Game Theoretic Approach // *Mathematical Social Sciences*. – 2003. – Vol. 46. – P. 27–54.
102. Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // *The American Journal of Sociology*. – 1978. – Vol. 83. – N 6. – P. 1420–1443.

103. Idiart M., Abbott L. Propagation of Excitation in Neural Network Models // Networks. – 1993. – Vol. 4. – P. 285–294.
104. Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in secure strategies / CORE Discussion Paper 2012/61. – Louvain-la-Neuve: CORE, 2012. – 38 p.
105. Kempe D., Kleinberg J., Tardos E. Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // Proc. 9th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining, 2003. – P. 137–146.
106. Kirman A. Ants, Rationality and Recruitment // The Quarterly Journal of Economics. – 1993. – Vol. 108. - No. 1. – P. 137–156.
107. Lin Y., Shi X., Wei Y. On Computing PageRank via Lumping the Google Matrix // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 224. – N 2. – P. 702–708.
108. Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations / Ed. by Prof. D. Novikov. – New York: Nova Science Publishers, 2013. – 163 p.
109. Miller D. Introduction to Collective Behavior and Collective Action. – Illinois: Waveland Press, 2013. – 592 p.
110. Myerson R. Game Theory: Analysis of Conflict. – Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press, 2001. – 600 p.
111. Myerson R. Graphs and Cooperation in Games // Mathematics of Operations Research. – 1977. – Vol. 2. – P. 225–229.
112. Nemhauser G., Wolsey L., Fisher M. An Analysis of the Approximations for Maximizing Submodular Set Functions // Mathematical Programming. – 1978. – Vol. 14. – P. 265–294.
113. Novikov D. Cognitive Games: a Linear Impulse Model // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71. – N 10. – P. 718–730.
114. Novikov D. Theory of Control in Organizations. – N.-Y.: Nova Science Publishers, 2013. – 341 p.
115. Owen G. Values of Games with a priori Unions / Henn R, Moeschlin O (eds.) Essays in Mathematical Economics and Game Theory. - Berlin: Springer-Verlag, 1977. – P. 76–88.
116. Ren W., Yongcan C. Distributed Coordination of Multi-agent Networks. – London: Springer, 2011. – 307 p.
117. Schelling T. Micromotives and Macrobbehaviour. – New York, London: Norton & Co Ltd, 1978. – 256 p.
118. Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. – N.Y.: Cambridge University Press, 2008. – 532 p.