Sistemas a Eventos Discretos Tropicais: Comunicação e Sincronização de Semáforos

G. S. Pereira[1] G. F. de Oliveira[2] C. A. Maia[3]

[1] [2] [3]LOPAC - Dep. Engenharia Elétrica - Escola de Engenharia - UFMG - Brasil

2025
SBAI
XVII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente

Conteúdo

1. Introdução
2. Conceitos preliminares
3. Metodologia
4. Equações
5. Estudo de caso
6. Agradecimentos

Introdução

Motivação

O sistema de trânsito coordena a interação segura e eficiente entre pedestres e veículos. Sua evolução temporal não é contínua e pode ser descrita por dois fenômenos: sincronização e atraso. Por esse motivo, sua modelagem pode ser simplificada pela utilização de Grafos de Eventos Temporizados e suas equações conseguem ser linearizadas pela utilização da Álgebra (max, +).

Objetivo

Apresentar a Álgebra Tropical como uma importante ferramenta de baixo custo computacional na geração de um controle robusto em ambientes urbanos complexos.

Modelagem SEDs

Sistemas a Eventos Discretos (SEDs)

Sistemas que são movidos a ocorrência de um evento específico, diferentemente de sistemas contínuos que evoluem progressivamente com o tempo.

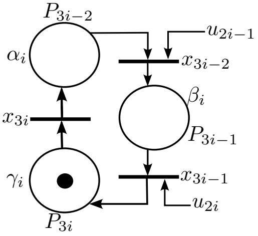
Rede de Petri P-Temporizada

Importante metodologia de modelagem de SEDs, trata-se de uma sêxtupla (P, T, A, w, m, τ) onde:

- P – é o conjunto finito de lugares;
- $T = T_0 \cup T_D$ – é o conjunto finito de transições. T_0 é o conjunto de transições imediatas e T_D é o conjunto de transições temporizadas;
- A – é o conjunto finito de arcos que ligam lugares a transições e transições a lugares;
- w – é o peso dos arcos;
- m – é um vetor linha que representa a marcação do conjunto de lugares;
- $\tau \rightarrow \mathbb{R}^+$ – é a estrutura de temporização que associa um tempo de permanência dos tokens nos lugares.

Grafo de Eventos Temporizados (GET)

Exemplo - Semáforo



Informações

Considere i a quantidade de semáforos.

- $P_i = \{P_{3i-2}, P_{3i-1}, P_i\}$
- $T_i = \{x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}\}$
- $A_i = \{(P_{3i-2} \times x_{3i-2}) \cup (x_{3i-2} \times P_{3i-1}) \cup (P_{3i-1} \times x_{3i-1}) \cup (x_{3i-1} \times P_{3i}) \cup (P_{3i} \times x_{3i}) \cup (x_{3i} \times P_{3i-2})\}$
- $\forall (p,t),(t,p) \in A,\ w((p,t)) = 1$ e $w((t,p)) = 1$
- $M_i = [m(P_{3i-2}) = 0,\ m(P_{3i-1}) = 0,\ m(P_{3i}) = 1]$
- $\tau : \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow \mathbb{R}^+$

Grafo de Eventos Temporizados (GET)

Modelagem baseada em Redes de Petri P-Temporizada, seus lugares possuem no máximo uma transição de saída e uma de entrada, além disso, o peso dos arcos é sempre unitário.

Álgebra (max,+)

Semianel Idempotente [Baccelli et al., 1992], [Heidergott et al., 2006]

Um semianel idempotente $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ é um conjunto $\mathcal{D}$, equipado com duas operações, onde $\oplus$ é associativa, comutativa e admite ε como elemento neutro, $\otimes$ é associativa e admite e como elemento neutro. A operação $\otimes$ distribui sobre a $\oplus$, e ε é absorvente, ou seja, $(a \otimes \varepsilon = \varepsilon)$.
Além disso, a operação $\oplus$ é idempotente, isto é, $\forall a \in \mathcal{D},\ a = a \oplus a$.
O conjunto $\mathcal{D}$ é uma rede (lattice), com ε como o menor elemento (fundo) e $\top$ como o maior (topo).

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b$$

Exemplo: Álgebra (max,+)

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\{\mathbb{Z} \cup -\infty \cup +\infty\}, \max, +)$ é um semianel idempotente:

- $\oplus = \max$, $\otimes = +$, $\varepsilon = -\infty$, $e = 0$, $\top = +\infty$
- $1 \otimes 1 = 2$, $5 \oplus 6 = 6 \Leftrightarrow 5 \preceq 6 \Leftrightarrow 5 \wedge 6 = 5$ (ordem clássica)

Operações matriciais

Soma de matrizes

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

$$(A \otimes B)_{ik} = \bigoplus_{j=1\ldots n} (A_{ij} \otimes B_{jk})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \varepsilon & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \otimes e \oplus 5 \otimes 1 \\ \varepsilon \otimes e \oplus 3 \otimes 1 \\ 1 \otimes e \oplus 8 \otimes 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Solução de equações

Operação Estrela de Kleene *

$$a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} a^i = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$$

Aplicação

Em um semianel idempotente completo $\mathcal{D}$, a menor solução da equação implícita:

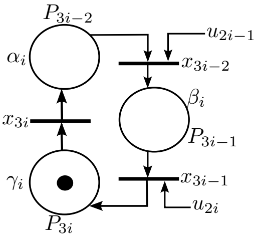
$$x = ax \oplus b \Leftrightarrow x = a^* b$$

Em particular, vale a seguinte equivalência:

$$x = ax \Leftrightarrow x = ax \oplus x \Leftrightarrow x = a^* x$$

Modelagem GET em Álgebra (max,+)

GET do Semáforo



Equações convencionais

Considere i a quantidade de semáforos.

$$\begin{cases} x_{3i-2}(k) = max(\alpha_i + x_{3i}(k), u_{2i-1}), \\ x_{3i-1}(k) = max(\beta_i + x_{3i-2}(k), u_{2i}), \\ x_{3i}(k) = \gamma_i + x_{3i-1}(k-1), \end{cases}$$

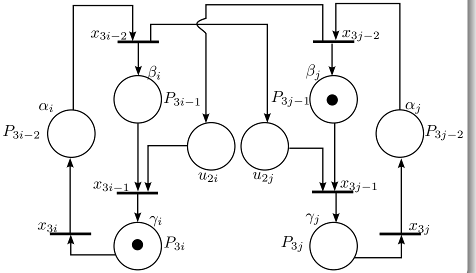
A evolução temporal do semáforo e, portanto, de uma rede de trânsito pode ser descrita por operações de atraso (soma) e sincronização (maximização).

Equações tropicais

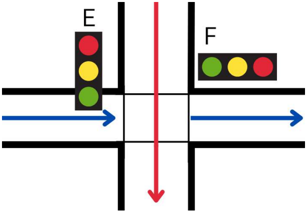
$$\begin{cases} x_{3i-2}(k) = \alpha_i \otimes x_{3i}(k-1) \oplus u_{2i-1}, \\ x_{3i-1}(k) = \beta_i \otimes x_{3i-2}(k-1) \oplus u_{2i}, \\ x_{3i}(k) = \gamma_i \otimes x_{3i-1}(k-1), \end{cases}$$

Funcionamento Restritivo

GET Restritivo



Via de trânsito

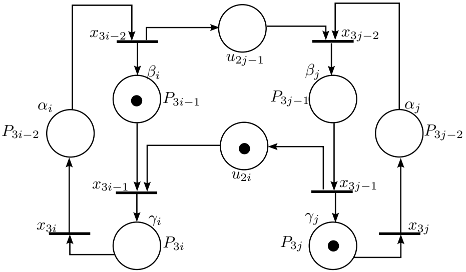


Descrição

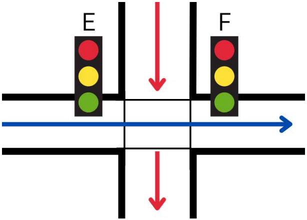
É a coordenação entre sinais de trânsito que permite um fluxo contínuo entre interseções. Por exemplo, se o semáforo E estiver verde e permitir o fluxo de veículos em um cruzamento, o semáforo correspondente F, na via transversal, deve permanecer vermelho para evitar colisões, e vice-versa. O GET que modela essa operação é mostrado na Figura acima.

Funcionamento Cooperativo

GET Cooperativo



Via de trânsito

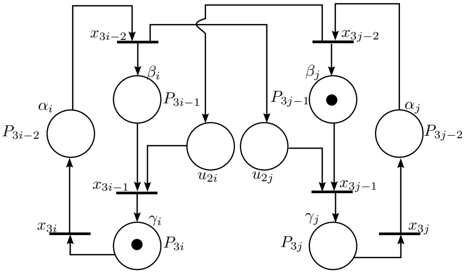


Descrição

Ocorre quando existem dois semáforos, E e F, posicionados sequencialmente na mesma via onde E antecede um cruzamento e F o sucede. Nesse caso, se E ficar verde mas F permanecer vermelho, os veículos podem ficar presos na área do cruzamento. Portanto, é essencial garantir que E permaneça vermelho quando F estiver vermelho e que F abra quando E abrir. O GET que modela essa operação é mostrado na Figura acima.

Equações (max,+) Restritivas

GET Restritivo

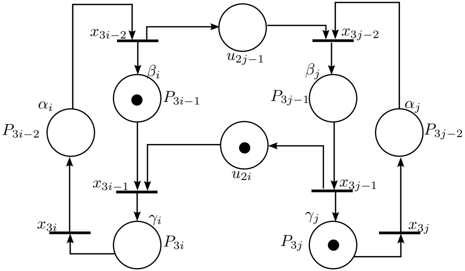


Equações

$$\begin{cases} x_{3i-2}(k) = \alpha_i \otimes x_{3i}(k), \\ x_{3i-1}(k) = \beta_i \otimes x_{3i-2}(k) \oplus x_{3j-2}(k), \\ x_{3i}(k) = \gamma_i \otimes x_{3i-1}(k-1), \\ x_{3j-2}(k) = \alpha_j \otimes x_{3j}(k), \\ x_{3j-1}(k) = \beta_j \otimes x_{3j-2}(k-1) \oplus x_{3i-2}(k), \\ x_{3j}(k) = \gamma_j \otimes x_{3j-1}(k). \end{cases}$$

Equações (max,+) Cooperativas

GET Cooperativo



Equações

$$
\begin{cases}
x_{3i-2}(k) = \alpha_i \otimes x_{3i}(k), \\
x_{3i-1}(k) = \beta_i \otimes x_{3i-2}(k-1) \oplus x_{3j-1}(k-1), \\
x_{3i}(k) = \gamma_i \otimes x_{3i-1}(k), \\
x_{3j-2}(k) = \alpha_j \otimes x_{3j}(k), \\
x_{3j-1}(k) = \beta_j \otimes x_{3j-2}(k), \\
x_{3j}(k) = \gamma_j \otimes x_{3j-1}(k-1).
\end{cases}
$$

Obtenção da Equação geral

Definição

Primeiramente, é necessário definir a equação e seus componentes:

$$x(k) = A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k) \tag{1}$$

onde $x(k)$ é o vetor das datas do k^{th} disparo para as transições, A_0 e A_1 são matrizes de coeficientes para as transições atuais e anteriores, respectivamente, B é a matriz de coeficientes do controlador, e $u(k) = F_0 \otimes x(k) \oplus F_1 \otimes x(k-1)$ é o vetor de controle responsável por fazer a comunicação entre todos os sinais e evitar acidentes.

Desenvolvimento

$$x(k) = (A_0 \oplus F_0) \otimes x(k) \oplus (A_1 \oplus F_1) \otimes x(k-1) \tag{2}$$

Essa equação é simplificada utilizando a operação estrela de Kleene, conforme:

$$x(k) = (A_0 \oplus F_0)^*(A_1 \oplus F_1) \otimes x(k-1) \tag{3}$$

Autovalor e Autovetor

Obtenção

O comportamento dinâmico do sistema é dado por:

$$x(k) = A_F \otimes x(k-1)$$

$$A_F = (A_0 \oplus F_0)^*(A_1 \oplus F_1)$$

É desejável que o sistema opere periodicamente da seguinte maneira:

$$x(k) = \lambda \otimes x(k-1)$$

sendo λ o tempo de ciclo estabelecido para o sistema.
Dessa forma, mostramos que:

$$A_F \otimes x(0) = \lambda \otimes x(0)$$

ou seja, $x(0)$ é um autovetor associado ao autovalor λ para a matriz A_F.
A matriz A_F depende diretamente das matrizes A_0, A_1, F_0 e F_1, as quais são obtidas diretamente do sistema a ser controlado. Estando A_F definida e fixando-se um estado inicial $x(0)$, é possível calcular o autovalor λ, que representa o ciclo da rede de trânsito.

Apresentação da Rede de trânsito

Mapa

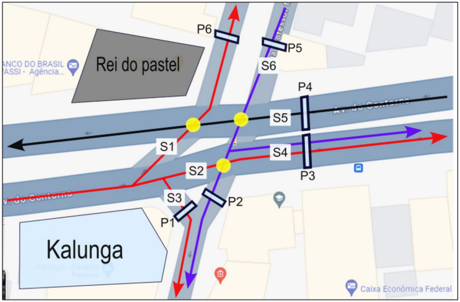


Figure 1: Cruzamento na Av. do Contorno em Belo Horizonte-MG.

Proposta

Vamos construir um código em ScicosLab (software gratuito com suporte para Álgebra (max,+)) que deve fornecer gráficos da evolução temporal da cruzamento acima. Dessa maneira, é possível comprovar que a Álgebra Tropical é uma excelente ferramenta para modelagem e simulação de redes de trânsito.

Informações necessárias

Input do código

- Número de sinais : p;
- Matriz de Temporização: $T(p, 3)$;
  Composta por p linhas, representando cada semáforo, e 3 colunas, onde cada coluna corresponde à duração de uma cor específica: amarelo, vermelho e verde, nessa ordem. Por exemplo, um elemento na linha n e coluna 3 representa a duração do sinal verde para o semáforo n.
- Marcação inicial : $M_0(p, 3)$;
  Composta por p linhas, onde p é o número total de sinais, e 3 colunas, cada uma correspondente a uma cor: amarelo, vermelho e verde. Cada entrada nessa matriz é binária, com um valor de 1 indicando a cor ativa para um determinado sinal. Por exemplo, se o elemento na linha n e coluna 1 for 1, isso indica que o semáforo número n inicialmente é amarelo.
- Quantidade de transições a serem registradas : k;

Informações necessárias

Input do código

- Matriz de operação Cooperativa: M_{cop};
  Define as relações cooperativas entre os sinais de trânsito, permitindo a implementação da coordenação em sua operação. Ela possui p linhas e p colunas, onde cada entrada é binária. Um valor de 1 na linha m e coluna n indica que o sinal m opera cooperativamente com o sinal n.
- Matriz de operação Restritiva: M_{rst};
  Define as relações restritivas entre os sinais de trânsito. Assim como a matriz cooperativa, ela possui p linhas e p colunas. Um valor de 1 na linha m e coluna n indica que o sinal m restringe a operação do sinal n.

Informações extraídas

Matriz M_0

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz T

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 49 & 67 \\ 4 & 36 & 80 \\ 4 & 39 & 77 \\ 4 & 27 & 89 \\ 4 & 71 & 45 \\ 4 & 84 & 32 \\ 5 & 81 & 34 \\ 5 & 40 & 75 \\ 5 & 93 & 22 \\ 5 & 49 & 66 \\ 5 & 36 & 79 \\ 5 & 71 & 44 \end{bmatrix}$$

Informações extraídas da rede

Matriz M_{cop}

$$M_{\text{cop}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Informações extraídas da rede

Matriz M_{rst}

$$
M_{\text{rst}} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Output do código

Gráficos

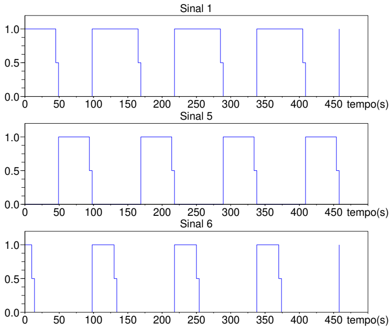


Figure 2: Operação restritiva: S1, S5 e S6

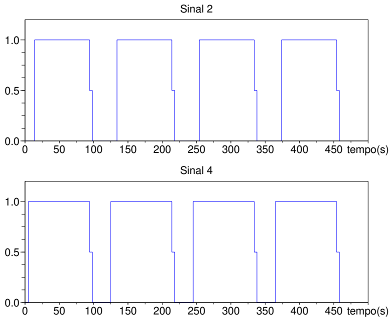


Figure 3: Operação cooperativa: S2 e S4

Observação

O software permite selecionar quais gráficos serão gerados.

Link para o Software

Github

https://github.com/santastico/SBAI2025˙Semaforos˙AlgebraTropical

Agradecimentos