Rinnakkainen reitinhaku

Santeri Martikainen

Kandidaatintutkielma
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 20. joulukuuta 2016

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Santeri Martikainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Rinnakkainen reitinhaku

Oppiaine — Läroämne — Subject
Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Kandidaatintutkielma	20. joulukuuta 2016	12

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tiivistelmä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
avainsana 1, avainsana 2, avainsana 3

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa keskitytään tarkastelemaan monen yhtaikaisen toimijan (agent) reitinhakuongelmaa videopeleissä. Videopeleille on tyypillistä usean eri toimijan (agent) yhtaikainen toiminta pelikentällä, mikä edellyttää toistuvaa reitinhakua kullekin toimijalle. Reitinhaussa on pohjimmiltaan kyse mahdollisimman suoran ja nopean polun löytämisestä kahden pisteen välillä jossakin topologiassa. Pelimaailman topologia eli kenttä tai alue, jolla pelaaja ja mahdolliset ei-pelaajahahmot voivat liikkua, voi olla ulkoasultaan hyvin abstrakti ja pelkistetty, tai toisaalta vaikuttaa hyvinkin realistiselta maastolta puineen, vesistöineen, rakennuksineen ja niin edelleen.

Tyypillisesti kenttä muodostetaan soluista (cell), joista toisinaan käytetään myös nimitystä laatta (tile). Solut ovat käytännössä monikulmioita, usein joko kolmioita, neliöitä tai kuusikulmioita. Edellämainitut muodot ovat ainoat monikulmiot, joita yhdistelemällä voidaan jokin alue kattaa yhtenäisesti ilman väliin jääviä aukkoja, mikäli kenttä halutaan mallintaa keskenään samankokoisilla soluilla. Mallinnus voidaan tehdä myös vaihtelevan kokoisilla monikulmioilla. Solut joissa kentällä voidaan liikkua muodostavat reitinhaussa käytettävän verkon (graph) solmut (vertex) [1, 2].

[seuraava kappale uusiksi, jako kahtia toimintaperiaatteen mukaan ja laajennus, ehkä tekniset toteutukset kokonaan reitinhaun puolelle?]

Kyseessä on siis verkko `G=(V,E)`, missä `V` (vertex) on joukko solmuja ja `E` (edge) joukko solmuja yhdistäviä kaaria. Liikkuminen voi tapahtua joko solmusta toiseen, tai sitten solmut voivat edustaa kiintopisteitä joiden läheisyydessä voidaan liikkua ilman erillistä reitinhakua. Solmut voivat myös toimia esteinä, jolloin niihin liikkuminen on estetty. Tämä voi myös olla vain väliaikainen tila esimerkiksi jonkun toisen toimijan ollessa liikkumisen tiellä. Molemmissa tapauksissa täytyy luonnollisesti löytää reitti esteen ympäri. Topologia voi siis olla dynaaminen, eli sen rakenne saattaa muuttua kesken reittien läpikäymisen, mikä asettaa omat haasteensa reitinhaulle [1, 3].

2 Reitinhaku

Pelimaailmat koostuvat harvoin täysin esteettömistä kentistä, joten tekoälyn kontrolloimien pelihahmojen on usein kierrettävä esteiden ympäri. Eräs lähestymistapa on kaikkien mahdollisten reittien laskeminen ennakkoon, jolloin haluttu reitti kahden sijainnin välillä yksinkertaisesti haetaan taulukosta tarvittaessa.

Reitinhaku jakaantuu kahteen vaiheeseen: Toimintaympäristöstä muodostetaan ensin yksinkertaistettu malli, minkä jälkeen sitä käydään läpi jollakin algoritmilla halutun reitin löytämiseksi. Algoritmia ohjaa heuris-

tiikkafunktio jolla arvioidaan etäisyyttä kohteeseen ja siten määritetään eri reittivaihtoehtojen keskinäinen paremmuus.

Peliteollisuuden standardialgoritmi tähän tarkoitukseen on nimeltään A* (eli A-star tai A-tähti), joka perustuu niin kutsuttuun Dijkstran algoritmiin. A*:stä on kehitetty lukuisia eri variantteja eri toimintaympäristöjä ja tarpeita silmälläpitäen. Sen etuja on, että se pystyy varmuudella löytämään reitin kohteeseen, jos sellainen on ylipäänsä olemassa. Niinikään se antaa parhaan mahdollisen reitin useista vaihtoehdoista, mikäli sen heuristiikkafunktio ei yliarvioi etäisyyttä kohteeseen [2, 4, 5]. Tärkeisiin heuristisiin algoritmeihin kuuluvat myös iteratiivinen syvyys-A* (iterative-deepening-A*, IDA*) ja syvyyssuuntainen haarautuva rajattu (depth-first branch-and-bound, DFBnB) algoritmit [6].

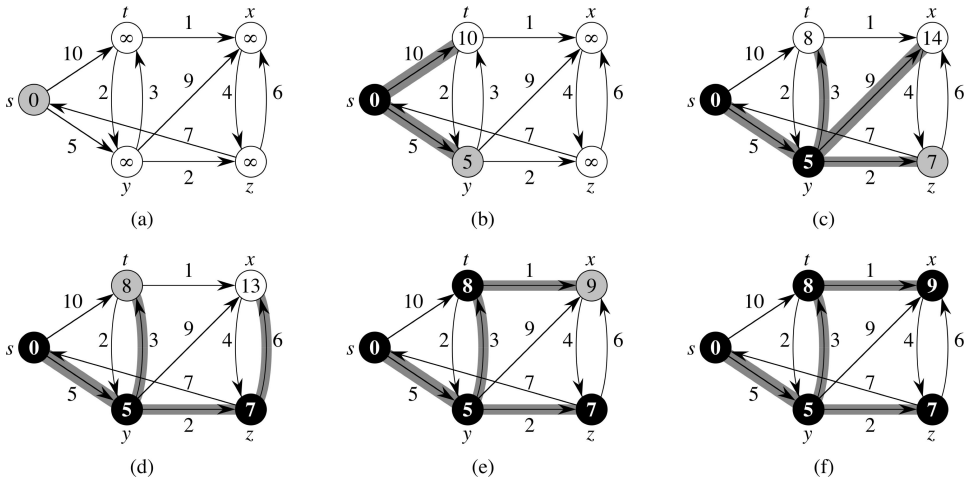
2.1 Dijkstran algoritmi

Edsger Dijkstra esitteli 1959 algoritmin, joka etsii lyhimmät reitit kaikkien graafissa esiintyvien solmujen välillä [7]. Kyseessä on leveyssuuntaista hakua toteuttava algoritmi. Tämä tarkoittaa, että ensin tutkitaan kaikki lähtösolmun naapurit, sitten naapureiden naapurit ja niin edelleen, kunnes joko kaikki solmut on käyty läpi, tai jokin algoritmille asetettu pysähtymisehto on täyttynyt. Tällainen ehto voi olla esimerkiksi reitin löytyminen kahden määritellyn solmun välillä.

Kuvassa 1 nähdään miten viisisolmuisessa graafissa löydetään lyhyimmät reitit solmujen (ympyrät) välillä. Solmuja yhdistää joukko suunnattuja kaaria, joiden vieressä oleva luku kuvaa kaaren painoa, eli sen kulkemisen hintaa. Ainoastaan lähtösolmu s on tässä vaiheessa saanut numeroarvon, joka kuvaa sen etäisyyttä lähtösolmuun. Kohdassa b on tutkittu ne solmut joihin edellisestä solmusta pääsee, sekä asetettu niille etäisyysarvot. C-kohdassa on jälleen jatkettu yksi askel eteenpäin, mutta on huomattava kuinka solmun t arvo on nyt muuttunut b-kohtaan verrattuna. Tämä johtuu siitä, että y-solmun kautta kulkeva reitti on havaittu lyhyemmäksi kuin suora yhteys s- ja t-solmujen välillä. Tätä jatketaan niin kauan kunnes koko graafi on käyty läpi [7, 8]. Dijkstran algoritmia käytetään edelleen muun muassa joissakin tietoliikenneverkkojen reititysprotokollissa.

2.2 A*-algoritmi

Dijkstran algoritmiin perustuva A* toteuttaa niin sanottua paras ensin -tyyliä, jossa jokaisen solmun tai solun kohdalla pyritään ensiksi etenemään suoraan kohti maalia. Jos tiellä on jokin este, algoritmi pyrkii kiertämään sen. Tämä tapahtuu etenemällä valitsemalla tähänastisen reitin viereisistä soluista ne joista arvioidaan olevan lyhyin etäisyys maaliin. Tätä jatketaan kunnes joko päästään kohteeseen, tai selviää että reittiä ei ole. A* poikkeaa siis Dijkstran algoritmista hakeutumalla koko ajan maalin suuntaan, mikä



Kuva 1: Graafin läpikäynti Dijkstran algoritmilla

tapahtuu heuristiikkafunktion avulla (algoritmi 1:n rivi 13).

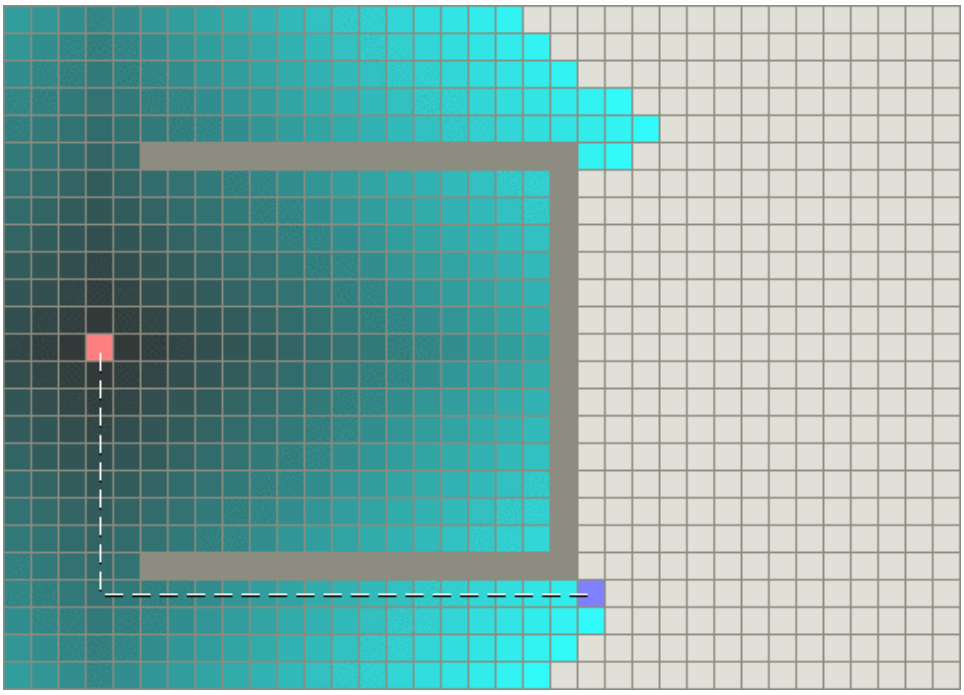
Kaikille algoritmin käsittelemille solmuille lasketaan arvo kaavalla

$$f(n) = g(n) + h(n) \tag{1}$$

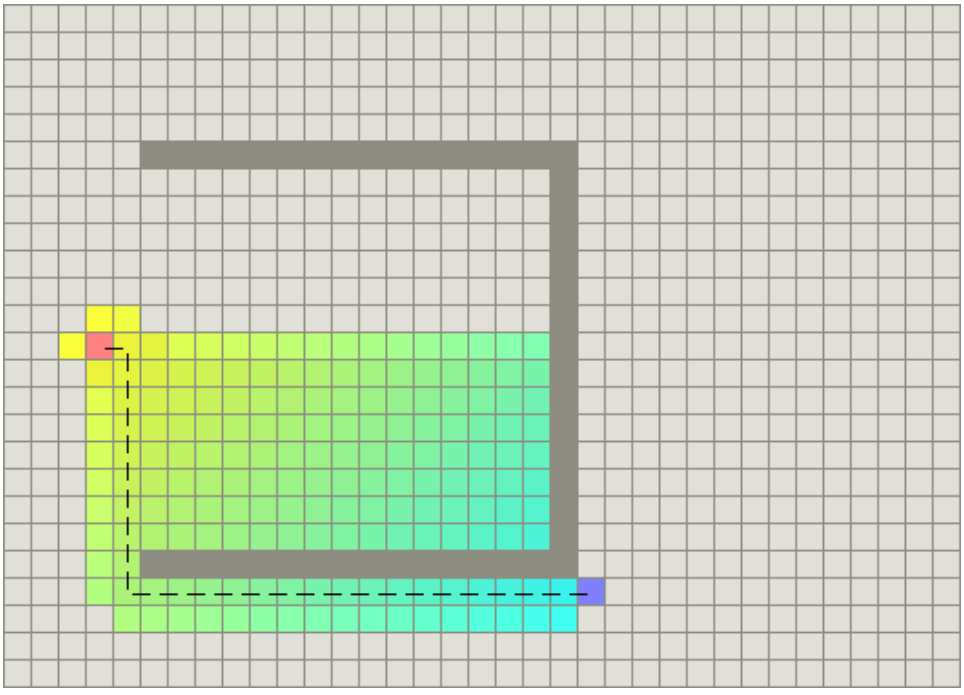
missä $g(n)$ on lyhin tunnettu reitti lähtösolmusta solmuun n ja $h(n)$ on heuristinen arvio etäisyydestä maalisolmuun [4, 9]. Näin jokaisen läpikäydyn solmun kohdalla tiedetään sille lasketusta arvosta kuinka suoralla reitillä kohteeseen ollaan. Solmuille voidaan myös asettaa edellämainittuun kaavaan lisättävä arvo tekemään siihen siirtymisestä hintavampaa ja näin mallintaa hitaampaa kulkuyhteyttä kahden paikan välillä.

Kuvassa 2 on havainnollistettu Dijkstran algoritmin löytämä reitti yksinkertaisessa ruudukossa. Liikkuminen on rajoitettu niin sanottuun Manhattan -tyyliin, missä sallitut kulkusuunnat ovat neljä pääilmansuuntaa. Esteenä toimivat solmut on väritetty tummanharmaalla ja algoritmin läpikäymät solmut turkoosilla. Jälkimmäisen värisävyt kuvaavat laskennallista etäisyyttä vaaleanpunaiseen lähtösolmuun. Kuten kuvasta nähdään, Dijkstra käy läpi varsin suuren osan kentän solmuista, mutta löytää suorimman reitin violetilla merkittyyn kohteeseen.

Kuvassa 3 voidaan nähdä ero A*-algoritmin toimintaperiaatteessa. Nyt tutkittuja solmuja on paljon vähemmän heuristiikan ohjatessa läpikäynnin suuntaa. Vaikka reitit hieman poikkeavatkin toisistaan, ne ovat annettujen ennakkoehtojen valossa yhtä pitkiä.



Kuva 2: Esteen kiertäminen Dijkstran algoritmilla



Kuva 3: Esteen kiertäminen A-algoritmilla*

Algorithm 1 A*-algoritmin pseudokoodi

```
1: procedure ASTAR(startnode, goalnode)
2:     initialize the open list
3:     initialize the closed list
4:     put the starting node on the open list (you can leave its f at zero)

5:     while the open list is not empty do
6:         find the node with the least f on the open list, call it 'q'
7:         pop q off the open list
8:         generate q's 8 successors and set their parents to q
9:         for each successor do
10:            if successor is the goal then
11:                stop search
12:            successor.g = q.g + distance between successor and q
13:            successor.h = distance from goal to successor
14:            successor.f = successor.g + successor.h
15:            if a node with the same position as successor is in the OPEN
               list which has a lower f than successor then
16:                skip this successor
17:            if a node with the same position as successor is in the CLOSED
               list which has a lower f than successor then
18:                skip this successor
19:            otherwise, add the node to the open list
20:        end for
21:        push q on the closed list
22:    end while
23: end procedure
```

2.3 Puurakenteet

3 Rinnakkainen reitinhaku

Videopeleissä on yleensä useita, jopa satoja tai tuhansia, eri toimijoita, joille on löydettävä reitit kohteisiinsa. Tällainen monen toimijan rinnakkainen reitinhaku (multi-agent pathfinding, MAPF) tuo yksittäisen toimijan reitinhakuun verrattuna uusia ongelmia. On ratkaistava muun muassa sallitaanko reittien risteäminen, voiko kaksi tai useampi toimijaa olla samaan aikaan samassa paikassa, tuleeko liikkumista porrastaa odottamalla että reitti edessä vapautuu ja tuleeko toimijan väistää ollessaan toisen tiellä [10]. Näiden ongelmien ratkaisemiseen kehitetyistä algoritmeja useimmat hyödyntävät A*-algoritmia [4].

Mitä enemmän toimijoita tutkittavalla alueella on, sitä oleellisemmaksi muodostuu yhteentörmäyksien ja tahattoman reittien sulkemisen Yksi oleellinen ero lähestymistavoissa on käsitelläänkö toimijoita yhdistettynä (coupled) toimijana, vai toisistaan erotettuina (decoupled) toimijoina. Erotetussa menetelmässä reitit lasketaan jokaiselle toimijalle erikseen ja mahdolliset yhteentörmäykset ratkaistaan valitulla menettelyllä sikäli kuin niitä tapahtuu. Tämä menetelmä on tyypillinen tilanteille, joissa toimijoita on verrattaen paljon [11].

Yhdistetyssä menetelmässä kaikkia toimijoita käsitellään sen sijaan kokonaisuutena. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi varaamalla graafin solmuja toimijoiden käyttöön siksi aikaa kun näiden odotetaan oman reitinhakunsa perusteella niissä olevan. Lukuisten toimijoiden yhtäaikainen huomioonottaminen luonnollisesti lisää ongelman monimutkaisuutta. Jos meillä on graafi, jonka haarautuvuus (branching) b, niin erotetussa menetelmässä jokaisella toimijalla on $O(b + 1)$ mahdollista liikettä, eli siirtymät toisiin solmuihin ja paikallaan odottaminen. Yhdistetyssä menetelmässä on sen sijaan joka askeleella otettava myös huomioon k toimijaa, jolloin mahdollisia liikkeitä on $O(b + 1)^k$. Tämä hidastaa reittien laskemista [11].

3.1 A*-pohjaiset algoritmit

(jako A*/ei-A*? – hierarkia vai ei? – yhdistetty/erotettu?)

kuvaukset:

Pattern Databases

Independence detection (ID)

Operator decomposition (OD)

Enhanced partial expansion (EPE)

3.1.1 Local Repair A* (LRA*)

LRA* on itse asiassa yleistermi joukolle A*-pohjaisia algoritmeja, jotka jakavat saman toimintaperiaatteen: Jokainen toimija etsii reitin A*:lla ja

seuraa sitä siihen asti kunnes siirtyminen seuraavaan solmuun saisi aikaan yhteentörmäyksen jonkun toisen toimijan kanssa, eli solmu johon pitäisi siirtyä on varattu. Tällöin tehdään uusi A*-haku ja jatketaan niin kauan kunnes on tultu maaliin.

Syklit ovat tässä menetelmässä sekä mahdollisia että yleisiä, joten ongelmaa on pyritty ratkaisemaan lisäämällä niin kutsuttua kohinaa etäisyysheuristiikkaan joka kerta kun yhteentörmäys havaitaan [12]. Jos siis jatkuvasti kohdataan esteitä jossakin solmussa tai jollakin alueella, niin algoritmin laskeman kustannuksen sinne etenemisestä pitäisi ennenpitkää nousta niin suureksi, että toimija hakeutuu ongelma-alueen ympäri tai etsii kokonaan uuden reitin.

Tällainen lähestymistapa johtaa ruuhkatilanteissa helposti oudolta näyttävään poukkoiluun, ja sen myötä prosessoriajan hävikkiin kun jokaisen yhteentörmäyksen yhteydessä reitti pitää laskea uudestaan.

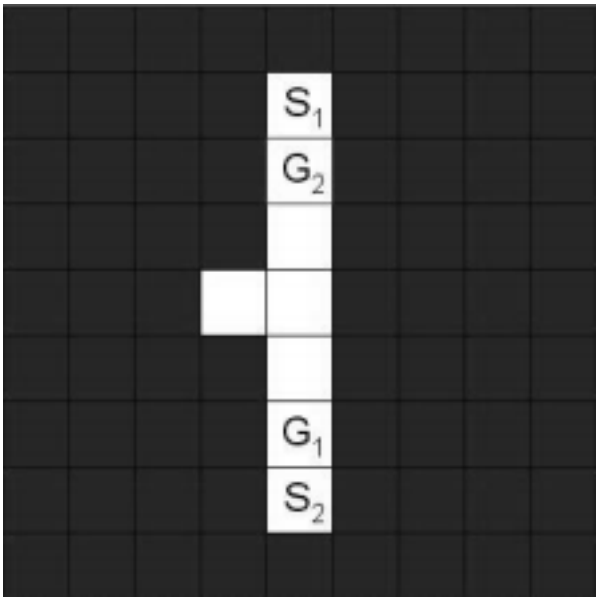
3.1.2 Cooperative A* (CA*)

CA* pyrkii estämään yhteentörmäykset ennalta ottamalla aikaulottuvuuden huomioon reittejä suunniteltaessa. Jokaiselle toimijalle lasketaan reitti A*-algoritmilla ja suunnitellun reitin solut merkitään taulukkoon, esimerkiksi kolmiulotteiseen hajautustauluun, jossa kaksi ensimmäistä alkiota merkitsevät x- ja y-koordinaatteja, ja kolmas alkio aikaa milloin kyseinen solmu on tämän toimijan käytössä. Nyt seuraavien toimijoiden reittejä laskettaessa voidaan verrata suunniteltuja askeleita edellämainittuun taulukkoon ja odottamalla havaituissa törmäystilanteissa halutun reittisolmun vapautumista.

Tämän algoritmin heikkoutena on kyvyttömyys ratkaista joitakin verrattaen yksinkertaisia tilanteita. Kuvassa 1 nähdään tilanne, missä toimijat S1 ja S2 pyrkivät vastaavasti maaleihin G1 ja G2. Intuitiivisesti nähdään, että jommankumman toimijan olisi mahdollista joko väistää sivulle tai nämä voisivat vaihtaa paikkoja kohdatessaan ja jatkaa sitten määränpäihinsä. Perusmuotoinen CA* ei kuitenkaan pysty tällaiseen ratkaisuun, sillä algoritmissa ei ole tällaista toiminnallisuutta.

3.1.3 Hierarchical Cooperative A* (HCA*)

R.C.Holte ja kumppanit esittelivät vuonna 1996 hierarkkisen A*-reitinetsintäalgoritmin HA* [13] ratkaisemaan CA*-algoritmin ongelmia. Siinä varsinaisen topologian rinnalla käytetään toista, abstraktia, topologiaa auttamaan A*-agoritmia löytämään kohteeseen. Alkuperäisen topologian solmut ryhmitetään halutun abstraktioetäisyyden perusteella isommiksi abstraktiosolmuiksi, ja tätä jatketaan rekursiivisesti niin kauan, kunnes koko topologiasta on muodostettu yksittäinen abstraktiosolmu. Varsinaisen topologian rinnalla on nyt siis monitasoinen abstraktiohierarkia, jonka alimmalla tasolla on al-

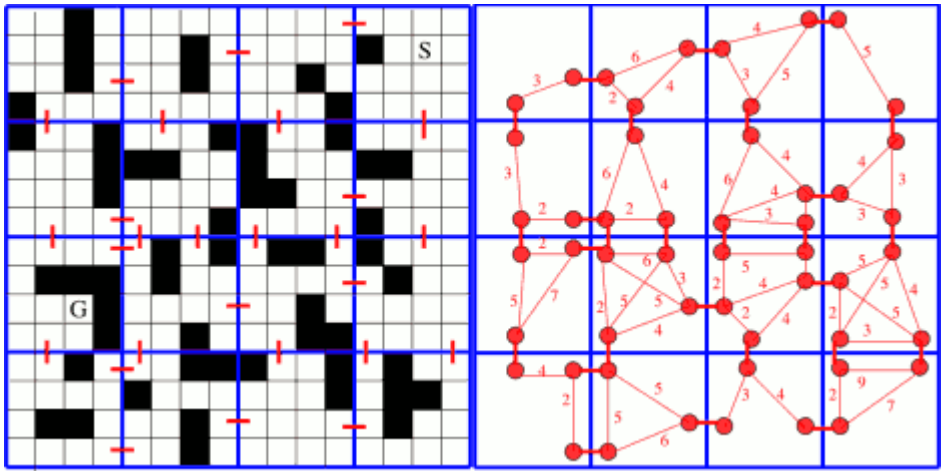


Kuva 4: Esimerkki kohtaamis-ongelmasta, jossa toimijat S1 ja S2 voivat päästä maalisolmuihin G1 ja G2 vain jos jompikumpi väistää sivulle.

kuperäinen topologia. Tätä monitasoista hierarkiaa käytetään heuristiikan apuna ja liikkumalla siinä tasolta toiselle sen mukaan miten tarkkaa jakoa esimerkiksi esteiden ympärillä tarvitaan, ja käyttämällä sen antamia etäisyyksiä reitinhakualgoritmin apuna. Etäisyydet kohteeseen lasketaan vain tarvittaessa [12]. [aukaisu]

HCA* eli hierarkkinen yhteistoiminnallinen A*-reitinetsintäalgoritmi puolestaan käyttää yksinkertaistettua hierarkiaa, joka koostuu vain yhdestä topologian kaksiulotteisesta abstraktiosta jättäen huomiotta niin aikaulottuvuuden, solmujen varaustaulun, kuin muut toimijat. Kuvassa 2 nähdään esimerkki topologian abstraktiosta, missä vasemmalla oleva ruudukko on mallinnettu graafiksi jakamalla se isommiksi abstraktiosolmuiksi (siniset kehykset). Kirjaimet S ja G viittaavat lähtö- ja maalisolmuihin. Oikeanpuoleisessa kuvaan on puolestaan merkitty punaisella jokaisen abstraktiosolmun sisällä olevat solmut ja niitä yhdistävät kaaret. Kaaren vierellä oleva luku tarkoittaa kaaren painoa, eli kuinka suuri hinta kaaren kulkemisella on.

Kun reitti on laskettava uudelleen esimerkiksi jonkun toisen toimijan tullessa eteen, pyritään säästämään resursseja käyttämällä käänteistä jatkettavaa A*-hakua RRA* (Reverse Resumable A*) abstraktiotasolla. Siinä missä alkuperäinen reitti haettiin lähtöpisteestä maaliin, RRA* etsii reitin maalista haluttuun solmuun, kuten toimijaa lähimpään abstraktiotason



Kuva 5: Vasemmalla olevasta ruudukosta on muodostettu hierarkiamallin mukainen abstraktio.

solmuun [12]. Mikäli tässä vaiheessa optimaalisen reitin varrella on muita toimijoita, tulee lasketusta reitistä näiden väistämisen vuoksi luonnollisesti pidempi, aivan kuten alkuperäisen reitinhaunkin suhteen.

Ongelmana tämän algoritmin käytössä on reitinhaun lopettamisen määritteleminen, sillä vaikka jokin toimija olisi jo tullut päämääräänsä, sen täytyy mahdollisesti vielä väistää jotain toista toimijaa ja hakeutua tämän jälkeen uudestaan maaliin [1]. Niinikään toimijoiden vuorojärjestyksellä on väliä: Staattinen vuorottelu voi johtaa siihen, ettei reittiä maaliin koskaan löydetä joidenkin toimijoiden sulkiessa toisiltaan tien. Tämä voidaan välttää antamalla toimijoille erilaiset prioriteetit jo alun alkaen, tai sitten sitten korkeampi prioriteetti voidaan antaa halutuille toimijoille vuorotellen lyhyeksi aikaa [12]. Tässä, kuten aiemmissakin yhteistoiminnallisissa reitinhakualgoritmeissa, on resurssien käytön suhteen ongelmana potentiaalisesti turhaan tehty työ.

3.1.4 Windowed Hierarchical Cooperative A* (WHCA*)

WHCA* eroaa HCA*:sta siinä, että konkreettisen topologian tasolla reittejä ei lasketa maaliin asti, vaan reitinhaku on rajoitettu johonkin ennaltamääriteltyyn syvyyteen. Jotta toimijat saadaan hakeutumaan varmasti oikeaan suuntaan, lasketaan reitti abstraktiotasolla sen sijaan maaliin asti [12, 1]. Kun reittiä on kuljettu johonkin ennaltamääriteltyyn raja-arvoon asti, kuten puolet aiemmin lasketusta reitistä, lasketaan uusi osittainen reitti ja niin edelleen. ”Windowed” tarkoittaa tässä siis aikaikkunaa tai kehystä, mihin asti konkreettinen reitti on nähtävillä ja mitä siirretään aina tarpeen mukaan. Resurssien käyttöä voidaan myös tasata antamalla toimijoille erikokoiset

ikkunat, niin että taakka reittien laskemisesta jakautuu mahdollisimman tasaisesti ajan suhteen. Kuten HCA*, myös WHCA* hyödyntää RRA*:ta ja hyödyntää edellisen ikkunan aikana tehtyä hakua, mikä luonnollisesti tarkoittaa toimijakohtaista kirjanpitoa läpikäydyistä solmuista.

3.1.5 Near-optimal Hierarchical Pathfinding (HPA*)

3.2 Muut rinnakkaisen reitinhaun algoritmit

3.2.1 Conflict-Based Search (CBS)

Rinnakkaisen reitinhaun optimoimiseen pyrkivä CBS-algoritmi [4] käyttää kaksitasoista lähestymistapaa, missä ensin käydään läpi ylemmän tason binääristä rajoituspuuta (constraint tree). Rajoituspuun jokaisessa solmussa on joukko rajoitteita (tieto siitä milloin joku topologian solmu on jonkun toimijan varaama), jotka kuuluvat jollekin yksittäiselle toimijalle. Toisekseen rajoituspuun solmuihin on myös talletettu joukko alemmalta tasolta saatuja reittejä, yksi jokaista toimijaa kohti, joiden tulee olla vapaita tiedetyistä yhteentörmäyksistä. Kolmantena niissä on myös yhteenlaskettu solmun reittikustannus, joka koostuu yksittäisen toimijan koko siihenastisen polun kustannuksesta. Rajoituspuu on järjestetty reittikustannuksen mukaan.

Alemmalla tasolla puolestaan voidaan käyttää tavanomaista yhden toimijan reitinhakualgoritmia kuten A* käyttäen samalla hyväksi ylemmältä tasolta saatua tietoa siitä, milloin ja missä on odotettavissa yhteentörmäys jonkun toisen toimijan kanssa. Mikäli kaikesta huolimatta alemmalla tasolla havaitaan yhteentörmäyksiä, päivitetään ylemmän tason rajoituspuuta vastaavasti ja laajennetaan rajoituspuuta lisäämällä siihen solmuja uusin rajoittein. [selvennys, solmujen lapset]

Improved Conflict-Based Search (ICBS)

3.2.2 Multi-agent Rapidly-exploring Random Tree (MA-RRT*)

3.2.3 Increasing Cost Tree Search

4 Yhteenveto

Algorithm 2 High-level of ICBS

```
1: Main(MAPF problem instance)
2:     Init R with low-level paths for the individual agents
3:     insert R into OPEN
4:     while OPEN not empty do
5:         N ← best node from OPEN // lowest solution cost
6:         Simulate the paths in N and find all conflicts
7:         if N has no conflict then
8:             return N.solution // N is goal
9:         C ← find-cardinal/semi-cardinal-conflict(N) // (PC)
10:        if C is not cardinal then
11:            if Find-bypass(N, C) then // (BP)
12:                Continue
13:        if should-merge(a_i, a_j) then // Optional, MA-CBS:
14:            a_ij = merge(a_i, a_j)
15:            if MR active then // (MR)
16:                Restart search
17:            Update N.constraints()
18:            Update N.solution by invoking low-level(a_ij)
19:            Insert N back into OPEN
20:            continue // go back to the while statement
21:        foreach agent a_i in C do
22:            A ← Generate Child(N, (a_i, s, t))
23:            Insert A into OPEN
24: Generate Child(Node N, Constraint C = (a_i, s, t))
25:    A.constraints ← N.constraints + (a_i, s, t)
26:    A.solution ← N.solution
27:    Update A.solution by invoking low level(a_i)
28:    A.cost ← SIC(A.solution)
29:    return A
```

Lähteet

[1] Adi Botea, Bruno Bouzy, Michael Buro, Christian Bauckhage, and Dana Nau. Pathfinding in games. *Dagstuhl Follow-Ups*, 6, 2013.

[2] Xiao Cui and Hao Shi. A*-based pathfinding in modern computer games. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 11(1):125–130, 2011.

[3] Zeyad Abd Algfoor, Mohd Shahrizal Sunar, and Hoshang Kolivand. A comprehensive study on pathfinding techniques for robotics and video games. *International Journal of Computer Games Technology*, 2015:7, 2015.

[4] Guni Sharon, Roni Stern, Ariel Felner, and Nathan R Sturtevant. Conflict-based search for optimal multi-agent pathfinding. *Artificial Intelligence*, 219:40–66, 2015.

[5] Adi Botea, Martin Müller, and Jonathan Schaeffer. Near optimal hierarchical path-finding. *Journal of game development*, 1(1):7–28, 2004.

[6] Ariel Felner, Richard E Korf, and Sarit Hanan. Additive pattern database heuristics. *J. Artif. Intell. Res.(JAIR)*, 22:279–318, 2004.

[7] EW Dijkstra. Numerische mathematik. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.

[8] S Skiena. Dijkstra's algorithm. *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, Reading, MA: Addison-Wesley*, pages 225–227, 1990.

[9] Bryan Stout. Smart moves: Intelligent pathfinding. *Game developer magazine Vol. 10*, pages 28–35, 1996.

[10] Esra Erdem, Doga Gizem Kisa, Umut Öztok, and Peter Schueller. A general formal framework for pathfinding problems with multiple agents. In *AAAI*, 2013.

[11] Guni Sharon, Roni Stern, Meir Goldenberg, and Ariel Felner. The increasing cost tree search for optimal multi-agent pathfinding. *Artificial Intelligence*, 195:470–495, 2013.

[12] David Silver. Cooperative pathfinding. *AIIDE*, 1:117–122, 2005.

[13] Robert C Holte, Maria B Perez, Robert M Zimmer, and Alan J MacDonald. Hierarchical A*: Searching abstraction hierarchies efficiently. In *AAAI/IAAI, Vol. 1*, pages 530–535. Citeseer, 1996.