

Rinnakkainen reitinhaku

Santeri Martikainen

Kandidaatintutkielma
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 20. joulukuuta 2016

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department			
Matemaattis-luonnonlaitteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos			
Tekijä — Författare — Author				
Santeri Martikainen				
Työn nimi — Arbetets titel — Title				
Rinnakkainen reitinhaku				
Oppiaine — Läroämne — Subject				
Tietojenkäsittelytiede				
Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages		
Kandidaatintutkielma	20. joulukuuta 2016	11		
Tiivistelmä — Referat — Abstract				
Tiivistelmä.				
Avainsanat — Nyckelord — Keywords				
avainsana 1, avainsana 2, avainsana 3				
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited				
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information				

Sisältö

1 Johdanto	1
2 Reitinhaku	1
2.1 Dijkstran algoritmi	2
2.2 A*-algoritmi	2
3 Rinnakkainen reitinhaku	3
3.1 A*-pohjaiset algoritmit	6
3.1.1 Local Repair A* (LRA*)	6
3.1.2 Cooperative A* (CA*)	7
3.1.3 Hierarchical Cooperative A* (HCA*)	7
3.1.4 Windowed Hierarchical Cooperative A* (WHCA*) . .	9
3.1.5 Near-optimal Hierarchical Pathfinding (HPA*) . . .	10
3.2 Muut rinnakkaisen reitinhaun algoritmit	10
3.2.1 Conflict-Based Search (CBS)	10
3.2.2 Improved Conflict-Based Search (ICBS) – sulautus? .	10
3.2.3 Multi-agent Rapidly-exploring Random Tree –ehkä ei	10
3.2.4 Increasing Cost Tree Search	10
4 Yhteenvetö	10
Lähteet	11

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa keskitytään tarkastelemaan monen yhtäkaisen toimijan (agent) reitinhakuongelmaa videopeleissä. Videopeleille on tyypillistä usean eri toimijan (agent) yhtäkainen toiminta pelikentällä, mikä edellyttää toistuvaa reitinhakua kullekin toimijalle. Reitinhaussa on pohjimmiltaan kyse mahdollisimman suoran ja nopean polun löytämisestä kahden pisteen välillä jossakin topologiassa. Pelimaailman topologia eli kenttä tai alue, jolla pelaaja ja mahdolliset ei-pelaajahahmot voivat liikkua, voi olla ulkoasultaan hyvin abstrakti ja pelkistetty, tai toisaalta vaikuttaa hyvinkin realistiselta maastolta puineen, vesistöineen, rakennuksineen ja niin edelleen.

Tyypillisesti kenttä muodostetaan soluista (cell), joista toisinaan käytetään myös nimitystä laatta (tile). Solut ovat käytännössä monikulmioita, usein joko kolmioita, neliöitä tai kuusikulmioita. Edellämainitut muodot ovat ainoat monikulmiot, joita yhdistelemällä voidaan jokin alue kattaa yhtenäisesti ilman väliin jääviä aukkoja, mikäli kenttä halutaan mallintaa keskenään samankokoisilla soluilla. Mallinnus voidaan tehdä myös vaihtelevan kokoisilla monikulmioilla. Solut joissa kentällä voidaan liikkua muodostavat reitinhaussa käytettävän verkon (graph) solmut (vertex) [1, 2].

[seuraava kappale uusiksi, jako kahtia toimintaperiaatteeen mukaan ja laajennus, ehkä tekniset toteutukset kokonaan reitinhaun puolelle?]

Kyseessä on siis verkko $G=(V,E)$, missä V (vertex) on joukko solmuja ja E (edge) joukko solmuja yhdistäviä kaaria. Liikkuminen voi tapahtua joko solmusta toiseen, tai sitten solmut voivat edustaa kiintopisteitä joiden läheisyydessä voidaan liikkua ilman erillistä reitinhakua. Solmut voivat myös toimia esteinä, jolloin niihin liikkuminen on estetty. Tämä voi myös olla vain väliaikainen tila esimerkiksi jonkun toisen toimijan ollessa liikkumisen tiellä. Molemmissa tapauksissa täytyy luonnollisesti löytää reitti esteen ympäri. Topologia voi siis olla dynaaminen, eli sen rakenne saattaa muuttua kesken reittien läpikäymisen, mikä asettaa omat haasteensa reitinhaulle [1, 3].

2 Reitinhaku

Pelimaailmat koostuvat harvoin täysin esteettömistä kentistä, joten tekölyn kontrolloimien pelihahmojen on usein kierrettävä esteiden ympäri. Eräs lähestymistapa on kaikkien mahdollisten reittien laskeminen ennakkoon, jolloin haluttu reitti kahden sijainnin välillä yksinkertaisesti haetaan taulukosta tarvittaessa.

Reitinhaku jakaantuu kahteen vaiheeseen: Toimintaympäristöstä muodostetaan ensin yksinkertaistettu malli, minkä jälkeen sitä käydään läpi jollakin algoritmillä halutun reitin löytämiseksi. Algoritmia ohjaavat heuris-

tiikkafunktio jolla arviodaan etäisyyttä kohteseen ja siten määritetään eri reittivaihtoehtojen keskinäinen paremuus.

Peliteollisuuden standardialgoritmi tähän tarkoitukseen on nimeltään A* (eli A-star tai A-tähti), joka perustuu niin kutsuttuun Dijkstran algoritmiin. A*:stä on kehitetty lukuisia eri variantteja eri toimintaympäristöjä ja tarpeita silmälläpitäen. Sen etuja on, että se pystyy varmuudella löytämään reitin kohteseen, jos sellainen on ylipäänsä olemassa. Niinkään se antaa parhaan mahdollisen reitin useista vaihtoehdosta, mikäli sen heuristiikkafunktio ei yliarvioi etäisyyttä kohteseen [2, 4, 5]. Tärkeisiin heuristisiin algoritmeihin kuuluvat myös iteratiivinen syvyys-A* (iterative-deepening-A*, IDA*) ja syvyssuuntainen haarautuva rajattu (depth-first branch-and-bound, DFBnB) algoritmit [6].

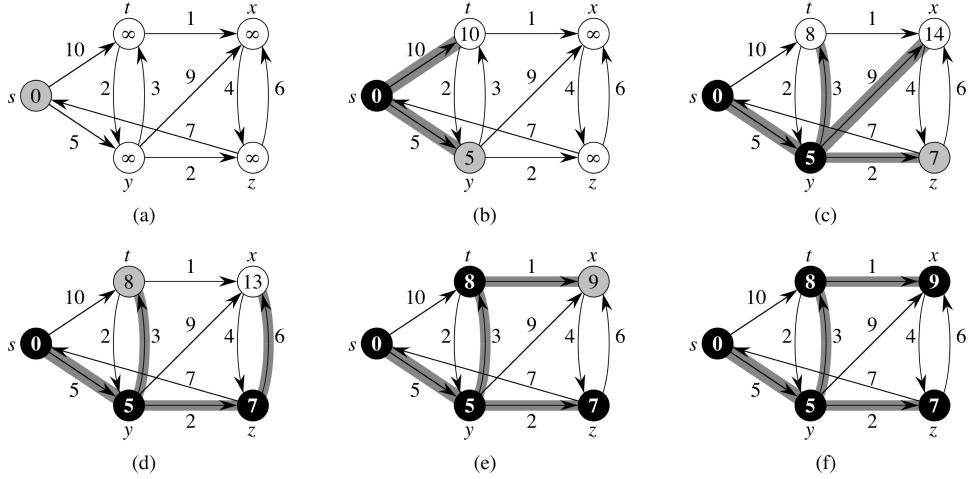
2.1 Dijkstran algoritmi

Edsger Dijkstra esitti 1959 algoritmin, joka etsii lyhimmät reitit kaikkien graafissa esiintyvien solmujen välillä [7]. Kyseessä on leveyssuuntaista hakua toteuttava algoritmi. Tämä tarkoittaa, että ensin tutkitaan kaikki lähtösolmun naapurit, sitten naapureiden naapurit ja niin edelleen, kunnes joko kaikki solmut on käyty läpi, tai jokin algoritmilelle asetettu pysähtymisehdo on täyttynyt. Tällainen ehto voi olla esimerkiksi reitin löytyminen kahden määritellyn solmun välillä.

Kuvassa 1 nähdään miten viisisolmuisessa graafissa löydetään lyhyimät reitit solmujen (ympyrät) välillä. Solmuja yhdistää joukko suunnattuja kaaria, joiden vieressä oleva luku kuvailee painoa, eli sen kulkemisen hintaa. Ainoastaan lähtösolmu s on tässä vaiheessa saanut numeroarvon, joka kuvailee sen etäisyyttä lähtösolmuun. Kohdassa b on tutkittu ne solmut joihin edellisestä solmesta pääsee, sekä asetettu niille etäisyysarvot. C-kohdassa on jälleen jatkettu yksi askel eteenpäin, mutta on huomattava kuinka solmun t arvo on nyt muuttunut b-kohtaan verrattuna. Tämä johtuu siitä, että y -solmun kautta kulkeva reitti on havaittu lyhyemmäksi kuin suora yhteys s -ja t -solmujen välillä. Tätä jatketaan niin kauan kunnes koko graafi on käyty läpi [7, 8]. Dijkstran algoritmia käytetään edelleen muun muassa joissakin tietoliikenneverkkojen reititysprotokollissa.

2.2 A*-algoritmi

Dijkstran algoritmiin perustuva A* toteuttaa niin sanottua paras ensityyliä, jossa jokaisen solmun tai solun kohdalla pyritään ensiksi etenemään suoraan kohti maalia. Jos tiellä on jokin este, algoritmi pyrkii kiertämään sen. Tämä tapahtuu etenemällä valitsemalla tähänastisen reitin viereisistä soluista ne joista arviodaan olevan lyhin etäisyys maaliin. Tätä jatketaan kunnes joko päästään kohteseen, tai selviää että reittiä ei ole. A* poikkeaa siis Dijkstran algoritmista hakeutumalla koko ajan maalin suuntaan. Tämä



Kuva 1: Graafin läpikäynti Dijkstran algoritilla

tapahtuu heuristiikkafunktion avulla.

Kaikille algoritmin käsittelymille solmuille lasketaan arvo kaavalla

$$f(n) = g(n) + h(n) \quad (1)$$

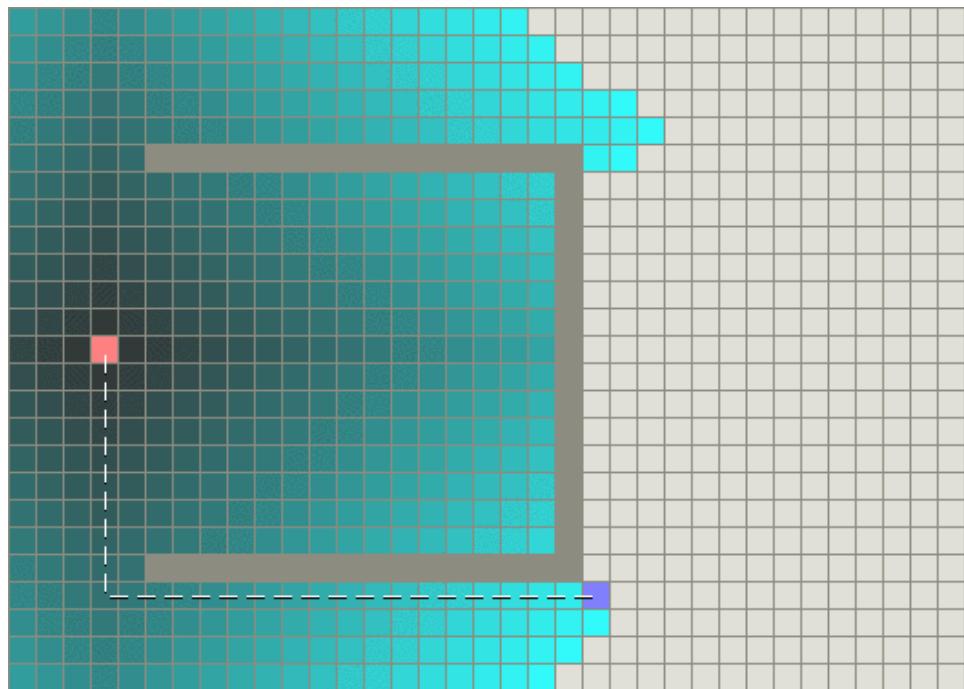
missä $g(n)$ on lyhin tunnettu reitti lähtösolmesta solmuun n ja $h(n)$ on heuristinen arvio etäisyydestä maalisolmuun [4, 9]. Näin jokaisen läpikäydyn solmun kohdalla tiedetään sillä lasketusta arvosta kuinka suoralla reitillä kohteeseen ollaan. Solmuille voidaan myös asettaa edellämainittuun kaavaan lisättävä arvo tekemään siihen siirtymisestä hintavampaa ja näin mallintaa hitaampaa kulkuyhteyttä kahden paikan välillä.

Kuvassa 2 on havainnollistettu Dijkstran algoritmin löytämä reitti yksinkertaisessa ruudukossa. Liikkuminen on rajoitettu niin sanottuun Manhattan-tyyliin, missä sallitut kulkusuunnat ovat neljä pääilmansuuntaa. Esteenä toimivat solmut on väritetty tummanharmaalla ja algoritmin läpikäymät solmut turkoosilla. Jälkimmäisen värisävyt kuvaavat laskennallista etäisyyttä vaaleanpunaiseen lähtösolmuun. Kuten kuvasta nähdään, Dijkstra käy läpi varsin suuren osan kentän solmuista, mutta löytää suorimman reitin violetilla merkityyn kohteeseen.

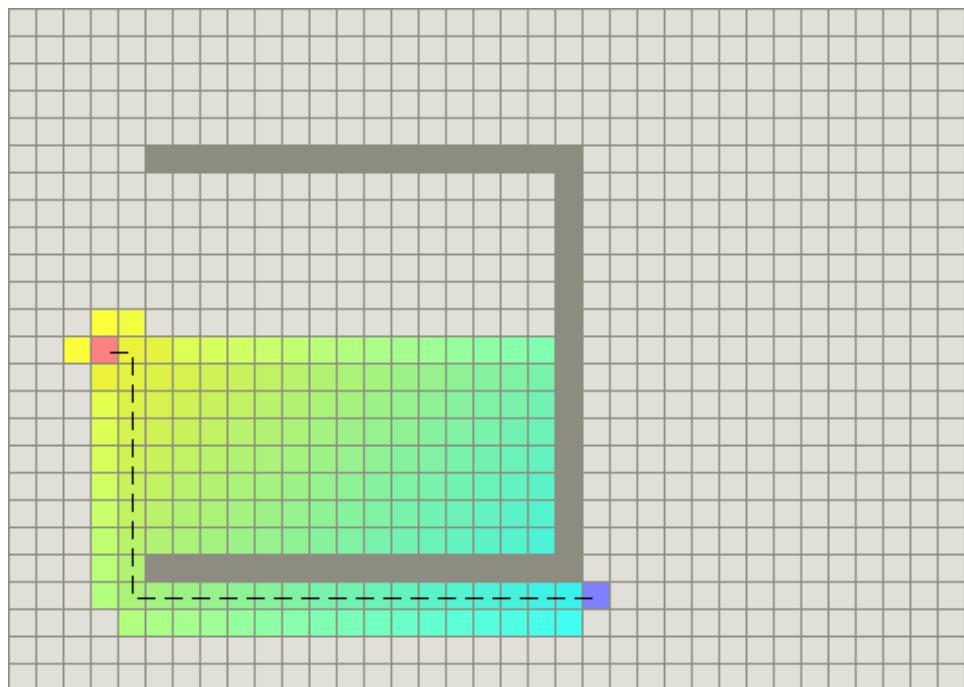
Kuvassa 3 voidaan nähdä ero A*-algoritmin toimintaperiaatteessa. Nyt tutkittuja solmuja on paljon vähemmän heuristiikan ohjatessa läpikäynnin suuntaa. Vaikka reitit hieman poikkeavatkin toisistaan, ne ovat annettujen ennakkoehtojen valossa yhtä pitkiä.

3 Rinnakkainen reitinhaku

Videopeleissä on yleensä useita, jopa satoja tai tuhansia, eri toimijoita, joille on löydettävä reitit kohteisiinsa. Tällainen monen toimijan rinnakkainen



Kuva 2: Esteen kiertäminen Dijkstran algoritmillä



Kuva 3: Esteen kiertäminen A*-algoritmillä

Algorithm 1 A*-algoritmin pseudokoodi

```
1: procedure ASTAR(startnode, goalnode)
2:   initialize the open list
3:   initialize the closed list
4:   put the starting node on the open list (you can leave its f at zero)

5:   while the open list is not empty do
6:     find the node with the least f on the open list, call it 'q'
7:     pop q off the open list
8:     generate q's 8 successors and set their parents to q
9:     for each successor do
10:       if successor is the goal then
11:         stop search
12:         successor.g = q.g + distance between successor and q
13:         successor.h = distance from goal to successor
14:         successor.f = successor.g + successor.h
15:         if a node with the same position as successor is in the OPEN
           list which has a lower f than successor then
             skip this successor
17:         if a node with the same position as successor is in the CLOSED
           list which has a lower f than successor then
             skip this successor
19:         otherwise, add the node to the open list
20:     end for
21:     push q on the closed list
22:   end while
23: end procedure
```

reitinhaku (multi-agent pathfinding, MAPF) tuo yksittäisen toimijan reitinhakuun verrattuna uusia ongelmia. On ratkaistava muun muassa sallitaanko reittien risteäminen, voiko kaksi tai useampi toimijaa olla samaan aikaan samassa paikassa, tuleeko liikkumista porrastaa odottamalla että reitti edessä vapautuu ja tuleeko toimijan väistää ollessaan toisen tiellä [10]. Näiden ongelmien ratkaisemiseen kehitetyistä algoritmeja useimmat hyödyntävät A*-algoritmia [4].

Mitä enemmän toimijoita tutkittavalla alueella on, sitä oleellisemmaksi muodostuu yhteen törmäyksien ja tahattoman reittien suljemisen Yksi oleellinen ero lähestymistavoissa on käsitellään kaksi toimijoita yhdistetynä (coupled) toimijana, vai toisistaan erotettuna (decoupled) toimijoina. Eerotetussa menetelmässä reitit lasketaan jokaiselle toimijalle erikseen ja mahdolliset yhteen törmäykset ratkaistaan valitulla menettelyllä sikäli kuin niitä tapahtuu. Tämä menetelmä on tyypillinen tilanteille, joissa toimijoita on verrattaen paljon [11].

Yhdistetyssä menetelmässä kaikkia toimijoita käsitellään sen sijaan kokonaisuutena. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi varaa malla graafin solmuja toimijoiden käyttöön siksi aikaa kun näiden odotetaan oman reitinhakunsa perusteella niissä olevan. Lukuisten toimijoiden yhtäaikainen huomioonottaminen luonnollisesti lisää ongelmaa monimutkaisuutta. Jos meillä on graafi, jonka haarautuvuuus (branching) b , niin erotetussa menetelmässä jokaisella toimijalla on $O(b + 1)$ mahdollista liikettä, eli siirtymät toisiin solmuihin ja paikallaan odottaminen. Yhdistetyssä menetelmässä on sen sijaan joka askeleella otettava myös huomioon k toimijaa, jolloin mahdollisia liikkeitä on $O(b + 1)^k$. Tämä hidastaa reittien laskemista [11].

3.1 A*-pohjaiset algoritmit

(jako A*/ei-A*? – hierarkia vai ei? – yhdistetty/erotettu?)
kuvaukset:

Pattern Databases

Independence detection (ID)

Operator decomposition (OD)

Enhanced partial expansion (EPE)

3.1.1 Local Repair A* (LRA*)

LRA* on itse asiassa yleistermi joukolle A*-pohjaisia algoritmeja, jotka jakavat saman toimintaperiaatteen: Jokainen toimija etsii reitin A*:lla ja seuraa sitä siihen asti kunnes siirtyminen seuraavaan solmuun saisi aikaan yhteen törmäyksen jonkin toisen toimijan kanssa, eli solmu johon pitäisi siirtyä on varattu. Tällöin tehdään uusi A*-haku ja jatketaan niin kauan kunnes on tultu maaliin.

Syklit ovat tässä menetelmässä sekä mahdollisia että yleisiä, joten ongelmaa on pyritty ratkaisemaan lisäämällä niin kutsuttua kohinaa etäisyyshueristiikkaan joka kerta kun yhteen törmäys havaitaan [12]. Jos siis jatkuvasti kohdataan esteitä jossakin solmussa tai jollakin alueella, niin algoritmin laskeman kustannuksen sinne etenemisestä pitäisi ennenpitkää nousta niin suureksi, että toimija hakeutuu ongelma-alueen ympäri tai etsii kokonaan uuden reitin.

Tällainen lähestymistapa johtaa ruuhkatilanteissa helposti oudolta näytävään poukkoiluun, ja sen myötä prosessoriajan hävikkiin kun jokaisen yhteen törmäyksen yhteydessä reitti pitää laskea uudestaan.

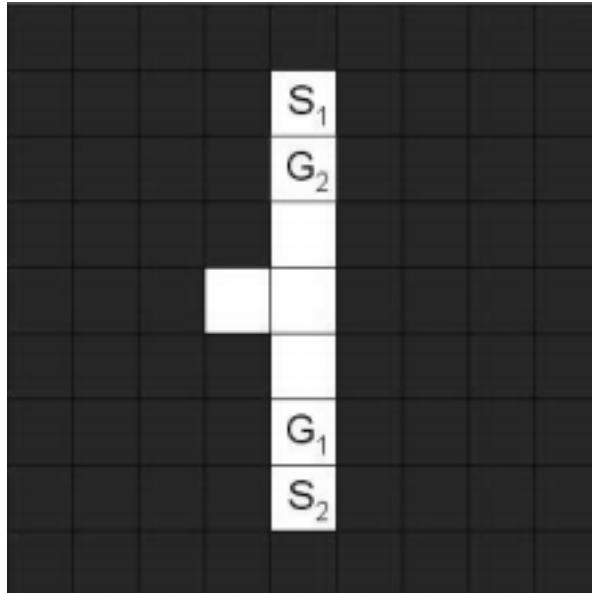
3.1.2 Cooperative A* (CA*)

CA* pyrkii estämään yhteen törmäykset ennalta ottamalla aikauottuvuuden huomioon reittejä suunniteltaessa. Jokaiselle toimijalle lasketaan reitti A*-algoritmillä ja suunnitellun reitin solut merkitään taulukkoon, esimerkiksi kolmiulotteiseen hajautustauluun, jossa kaksi ensimmäistä alkiota merkitsevät x- ja y-koordinaatteja, ja kolmas alkio aikaa milloin kyseinen solmu on tämän toimijan käytössä. Nyt seuraavien toimijoiden reittejä lasketaessa voidaan verrata suunniteltuja askeleita edellämainittuun taulukkoon ja odottamalla havaituissa törmäystilanteissa halutun reittisolmun vapautumista.

Tämän algoritmin heikkoutena on kyyttömyys ratkaista joitakin vertrattaen yksinkertaisia tilanteita. Kuvaassa 1 nähdään tilanne, missä toimijat S1 ja S2 pyrkivät vastaavasti maaleihin G1 ja G2. Intuitiivisesti nähdään, että jommankumman toimijan olisi mahdollista joko väistää sivulle tai nämä voisivat vaihtaa paikkoja kohdateissaan ja jatkaa sitten määränpäihinsä. Perusmuotoinen CA* ei kuitenkaan pysty tällaiseen ratkaisuun, sillä algoritmista ei ole tällaista toiminnallisuutta.

3.1.3 Hierarchical Cooperative A* (HCA*)

R.C.Holte ja kumppanit esittelivät vuonna 1996 hierarkkisen A*-reitinetsintä-algoritmin HA* [13] ratkaisemaan CA*-algoritmin ongelmia. Siinä varsinaisen topologian rinnalla käytetään toista, abstraktia, topologiaa auttamaan A*-algoritmia löytämään kohteeseen. Alkuperäisen topologian solmut ryhmiteetään halutun abstraktioetäisyyden perusteella isommiksi abstraktiosolmuiksi, ja tästä jatketaan rekursiivisesti niin kauan, kunnes koko topologiasta on muodostettu yksittäinen abstraktiosolmu. Varsinaisen topologian rinnalla on nyt siis monitasoinen abstraktiohierarkia, jonka alimmalla tasolla on alkuperäinen topologia. Tätä monitasoista hierarkiaa käytetään heuristiikan apuna ja liikkumalla siinä tasolta toiselle sen mukaan miten tarkkaa jakoa esimerkiksi esteiden ympärillä tarvitaan, ja käyttämällä sen antamia etäisyyksiä reitinhakualgoritmin apuna. Etäisyydet kohteeseen lasketaan vain

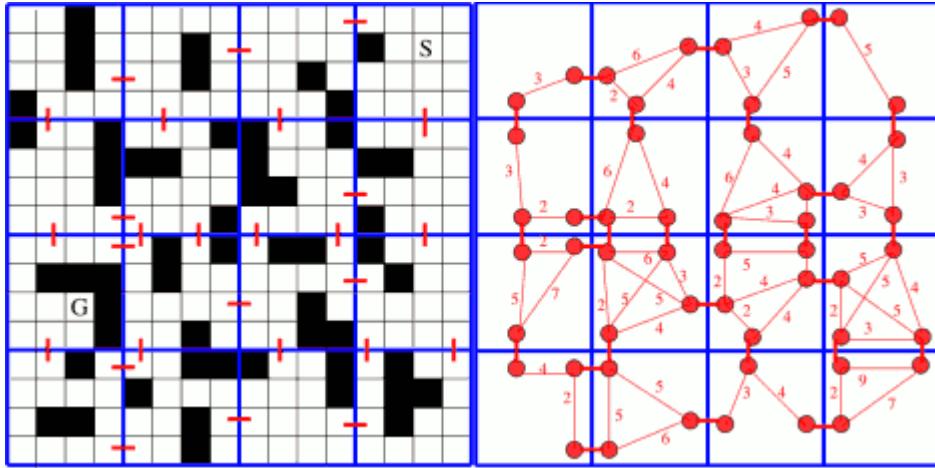


Kuva 4: Esimerkki kohtaamis-ongelmasta, jossa toimijat S_1 ja S_2 voivat päästä maalisolmuihin G_1 ja G_2 vain jos jompikumpi väistää sivulle.

tarvittaessa [12]. [aukaisu]

HCA* eli hierarkkinen yhteistoiminnallinen A*-reitinetsintäalgoritmi puolestaan käyttää yksinkertaistettua hierarkiaa, joka koostuu vain yhdestä topologian kaksilottoteisesta abstraktiosta jättäen huomiotta niin aikaulot-tuvuuden, solmujen varaustaulun, kuin muut toimijat. Kuvassa 2 nähdään esimerkki topologian abstraktiosta, missä vasemmalla oleva ruudukko on mallinnettu graafiksi jakamalla se isommiksi abstraktiosolmuiksi (siniset kehykset). Kirjaimet S ja G viittaavat lähtö- ja maalisolmuihin. Oikeanpuoleisessa kuvaan on puolestaan merkitty punaisella jokaisen abstraktiosolmun sisällä olevat solmut ja niitä yhdistävät kaaret. Kaaren vierellä oleva luku tarkoittaa kaaren painoa, eli kuinka suuri hinta kaaren kulkemisella on.

Kun reitti on laskettava uudelleen esimerkiksi jonkun toisen toimijan tullessa eteen, pyritään säätämään resursseja käyttämällä käänteistä jatkettavaa A*-hakua RRA* (Reverse Resumable A*) abstraktiotasolla. Siinä missä alkuperäinen reitti haettiin lähtöpisteestä maaliin, RRA* etsii reitin maalista haluttuun solmuun, kuten toimijaa lähimpään abstraktiotason solmuun [12]. Mikäli tässä vaiheessa optimaalisen reitin varrella on muita toimijoita, tulee lasketusta reitistä näiden väistämisen vuoksi luonnollisesti pidempi, aivan kuten alkuperäisen reitinhaunkin suhteen.



Kuva 5: Vasemmalla olevasta ruudukosta on muodostettu hierarkiamallin mukainen abstraktio.

Ongelmana tämän algoritmin käytössä on reitinhaun lopettamisen määritteleminen, sillä vaikka jokin toimija olisi jo tullut päämääränsä, sen täytyy mahdollisesti vielä väistää jotain toista toimijaa ja hakeutua tämän jälkeen uudestaan maaliin [1]. Niinkään toimijoiden vuorojärjestyksellä on väliä: Staattinen vuorottelu voi johtaa siihen, ettei reittiä maaliin koskaan löydetä joidenkin toimijoiden sulkiessa toisiltaan tien. Tämä voidaan välttää antamalla toimijoille erilaiset prioriteetit jo alun alkaen, tai sitten sitten korkeampi prioriteetti voidaan antaa halutuille toimijoille vuorotellen lyhyeksi aikaa [12]. Tässä, kuten aiemmissakin yhteistoiminnallisissa reitinhakualgoritmeissa, on resurssien käytön suhteen ongelmana potentiaalisesti turhaan tehty työ.

3.1.4 Windowed Hierarchical Cooperative A* (WHCA*)

WHCA* eroaa HCA*:sta siinä, että konkreettisen topologian tasolla reittejä ei lasketa maaliin asti, vaan reitinhaku on rajoitettu johonkin ennaltamääriteltyyn syvyyteen. Jotta toimijat saadaan hakeutumaan varmasti oikeaan suuntaan, lasketaan reitti abstraktiotasolla sen sijaan maaliin asti [12, 1]. Kun reittiä on kuljettu johonkin ennaltamääriteltyyn raja-arvoon asti, kuten puolet aiemmin lasketusta reitistä, lasketaan uusi osittainen reitti ja niin edelleen. "Windowed" tarkoittaa tässä siis aikaikkunaata tai kehystä, mihin asti konkreettinen reitti on nähtävillä ja mitä siirretään aina tarpeen mukaan. Resurssien käyttöä voidaan myös tasata antamalla toimijoille erikokoiset ikkunat, niin että taakka reittien laskemisesta jakautuu mahdollisimman tasaisesti ajan suhteen. Kuten HCA*, myös WHCA* hyödyntää RRA*:ta ja hyödyntää edellisen ikkunan aikana tehtyä hakua, mikä luonnollisesti tarkoittaa toimijakohtaista kirjanpitoa läpikäydyistä solmuista.

3.1.5 Near-optimal Hierarchical Pathfinding (HPA*)

3.2 Muut rinnakkaisen reitinhaun algoritmit

3.2.1 Conflict-Based Search (CBS)

Rinnakkaisen reitinhaun optimoimiseen pyrkivä CBS-algoritmi [4] käyttää kaksitasoista lähestymistapaa, missä ensin käydään läpi ylemmän tason binääristä rajoituspuuta (constraint tree). Rajoituspuun jokaisessa solmussa on joukko rajoitteita (tieto siitä milloin joku topologian solmu on jonkin toimijan varama), jotka kuuluvat jollekin yksittäiselle toimijalle. Toiseksi rajoituspuun solmuihin on myös talletettu joukko alemmalta tasolta saatuja reittejä, yksi jokaista toimijaa kohti, joiden tulee olla vapaita tiedetyistä yhteentörmäyksistä. Kolmantena niissä on myös yhteenlaskettu solmun reittikustannus, joka koostuu yksittäisen toimijan koko siihenastisen polun kustannuksesta. Rajoituspuu on järjestetty reittikustannuksen mukaan.

Alemmalla tasolla puolestaan voidaan käyttää tavanomaista yhden toimijan reitinhakualgoritmia kuten A* käytäen samalla hyväksi ylemmältä tasolta saatua tietoa siitä, milloin ja missä on odotettavissa yhteentörmäys jonkin toisen toimijan kanssa. Mikäli kaikesta huolimatta alemalla tasolla havaitaan yhteentörmäyksiä, päivitetään ylemmän tason rajoituspuuta vastaavasti ja laajennetaan rajoituspuuta lisäämällä siihen solmuja uusin rajoittein. [selvennys, solmujen lapset]

3.2.2 Improved Conflict-Based Search (ICBS) – sulautus?

3.2.3 Multi-agent Rapidly-exploring Random Tree –ehkä ei MA-RRT*

3.2.4 Increasing Cost Tree Search

4 Yhteenveton

Lähteet

- [1] Adi Botea, Bruno Bouzy, Michael Buro, Christian Bauckhage, and Dana Nau. Pathfinding in games. *Dagstuhl Follow-Ups*, 6, 2013.
- [2] Xiao Cui and Hao Shi. A*-based pathfinding in modern computer games. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 11(1):125–130, 2011.
- [3] Zeyad Abd Algfoor, Mohd Shahrizal Sunar, and Hoshang Kolivand. A comprehensive study on pathfinding techniques for robotics and video games. *International Journal of Computer Games Technology*, 2015:7, 2015.
- [4] Guni Sharon, Roni Stern, Ariel Felner, and Nathan R Sturtevant. Conflict-based search for optimal multi-agent pathfinding. *Artificial Intelligence*, 219:40–66, 2015.
- [5] Adi Botea, Martin Müller, and Jonathan Schaeffer. Near optimal hierarchical path-finding. *Journal of game development*, 1(1):7–28, 2004.
- [6] Ariel Felner, Richard E Korf, and Sarit Hanan. Additive pattern database heuristics. *J. Artif. Intell. Res.(JAIR)*, 22:279–318, 2004.
- [7] EW Dijkstra. Numerische mathematik. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [8] S Skiena. Dijkstra’s algorithm. *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Reading, MA: Addison-Wesley, pages 225–227, 1990.
- [9] Bryan Stout. Smart moves: Intelligent pathfinding. *Game developer magazine Vol. 10*, pages 28–35, 1996.
- [10] Esra Erdem, Doga Gizem Kisa, Umut Öztok, and Peter Schueller. A general formal framework for pathfinding problems with multiple agents. In *AAAI*, 2013.
- [11] Guni Sharon, Roni Stern, Meir Goldenberg, and Ariel Felner. The increasing cost tree search for optimal multi-agent pathfinding. *Artificial Intelligence*, 195:470–495, 2013.
- [12] David Silver. Cooperative pathfinding. *AIIDE*, 1:117–122, 2005.
- [13] Robert C Holte, Maria B Perez, Robert M Zimmer, and Alan J MacDonald. Hierarchical A*: Searching abstraction hierarchies efficiently. In *AAAI/IAAI, Vol. 1*, pages 530–535. Citeseer, 1996.