Santiago Arranz Sanz

FÍSICA DEL MODELO COSMOLÓGICO ESTÁNDAR

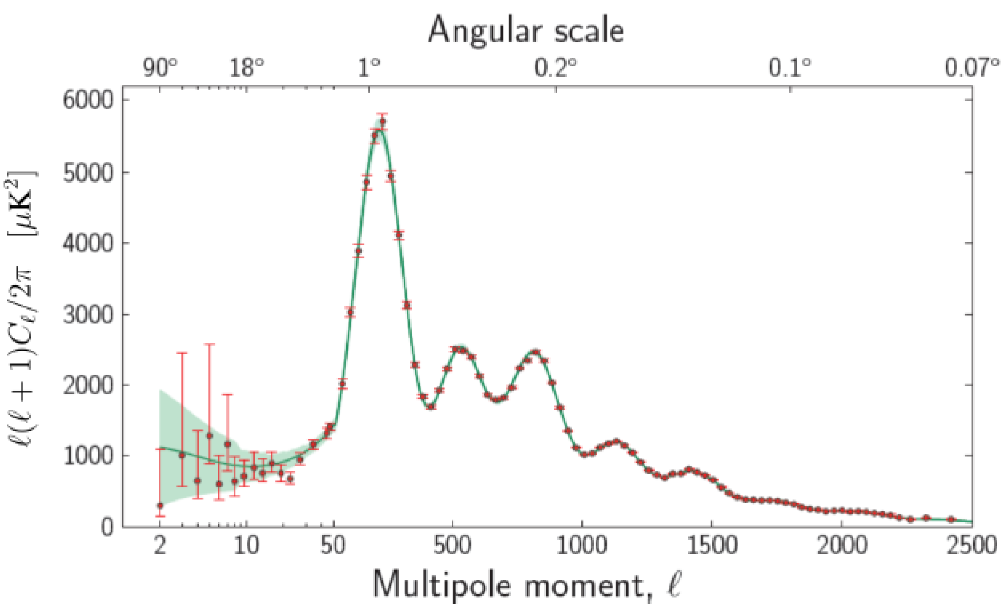
Estudio de la dependencia del espectro angular de temperatura del CMB con los parámetros cosmológicos.

El **objetivo** de la práctica es estudiar la dependencia del espectro angular de fluctuaciones de temperatura C_l con los parámetros:

1. h: El parámetro de Hubble normalizado.
2. ω_b: El parámetro de densidad bariónica.
3. n_s: Parámetro que define la potencia de la función del espectro de potencias:

$$P_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1}$$

donde $A_s = 2{,}20 \times 10^{-9}$ y $k_0 = 0{,}05$ Mpc^{-1}.



Para ello vamos a usar los siguietes paquetes de *Python* y todas las funciones que definamos las haremos depender de estos parámetros.

```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy as sp
import scipy.integrate as integrate
import matplotlib.pyplot as plt
```

Parámetros y funciones a usar.

En el guión de la práctica hemos recibido un listado y guía para construir una aproximación a la función C_l solamente valida para $l >> 100$, el cual solo tiene en cuenta el efecto *Sachs-Wolfe* ignorando las contribuciones Doppler y el efecto *Sachs-Wolfe integrado*.

$$C_l(z) \simeq 4\pi\frac{9}{25}\int P_R(k)\left[-R(z_{dec})T(k/k_{eq})+\frac{5}{3}\cos(k\cdot r_s)e^{-k^2/k_D^2}\right]^2 j_l^2(k(\eta_0-\eta_{dec}))\frac{dk}{k}$$

Las funciones y parámetros que forman parte de dicha aproximación pasarán a ser definidas a continuación. Primero definimos la constante de Hubble normalizada $h = 0{,}67$ km/s^{-1} y su versión sin normalizar $H_0 = h/2998$ Mpc^{-1}. Los parámetros que indican la densidad de energía de bariones ω_b, de radiación ω_r, materia ω_m y de energía del vacío ω_Λ están definidos como:

$$\omega_m = 0{,}14 \quad ; \quad \omega_b = 0{,}022 \quad ; \quad \omega_r = \left(1+\frac{7}{8}N_{eff}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\right)\omega_\gamma = 4{,}17\times 10^{-5}$$

donde N_{eff} es el número efectivos de neutrinos y ω_γ la denisdad de energía de neutrinos. Además ω_λ la podmeos definir como una función de h:

$$\omega_\lambda(h) = h^2-\omega_m-\omega_r$$

```
h=0.67
w_b=0.022
w_m=0.14
w_r=4.17*10**(-5)
w_lamb=lambda t: t**2-w_m-w_r
H=lambda t: t/2998
H_0=H(h)
```

Podemos definir la velocidad del sonido en función del redshift z y de la densidad de energía de materia barionica ω_b como:

$$c_s^2 = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R(z,\omega_b)} \quad \text{donde} \quad R(z,\omega_b) = \frac{3{,}04\times 10^4}{1+z}\omega_b$$

Para hemos usado las funciones lambdas y hemos marcado por defecto de ω_b el estipulado más arriba.

```
R=lambda z,wb=w_b:wb*(3.04*10**4)/(1+z)
c_s=lambda z,wb=w_b:np.sqrt( (1/3)/(1+R(z, wb)) )
```

Para definir el horizonte del sonido en el momento del desacople $z_{dec} = 1090{,}3$ usamos la aproximación a un universo plano, la definición de la ecuación del movimiento usando que $\omega_\alpha = h^2\Omega_\alpha$ con $\alpha = r, m, \Lambda$:

$$H(z)^2 = H_0^2\frac{\left[(1+z)^3\omega_m+(1+z)^4\omega_r+\omega_\Lambda\right]}{h^2} = H_0^2\cdot E(z)^2$$

Para definir el radio del horizonte de sonido trabajamos con coordenadas de comovimiento sabiendo que $dr/dt = a\cdot dx/dt = c_s(t)$, donde $a(t)$ es el factor de escala. Usando que $dt = da/(a\cdot H(a)) = da/(a\cdot H_0E(a))$ obtenemos si integramos y usamos que $a = (1+z)^{-1}$

$$r_s = \int_0^{a_{dec}}\frac{c_s(a)}{a^2H_0E(a)}da = H_0^{-1}\int_{z_{dec}}^{\infty}\frac{c_s(z)}{E(z)}dz$$

```
z_dec=1090.3
def E(z,hf=h):
    wl=w_lamb(hf)
    parte1=w_m*np.power((1+z),3) + w_r*np.power((1+z),4) + wl
```

```
    return (np.sqrt(parte1)/hf)

r_s=lambda h_p=h,wb=w_b: integrate.quad(lambda z: c_s(z,wb)/E(z,hf=h_p),z_dec,np.inf)[0]/H(h_p)
```

Para definir el tiempo conforme desde el desacoplo $\eta_0 - \eta_{dec}$ usamos un desarrollo parecido al anterior:

$$d_A^c(z_{dec}) = \eta_0 - \eta_{dec} = \int_{t_0}^{t_{dec}} \frac{dt}{a} = \int_{a_0}^{a_{dec}} \frac{da}{a^2 H} = H_0^{-1} \int_0^{z_dec} \frac{1}{E(z)} dz$$

```
d_A = lambda h_p=h: integrate.quad(lambda z: 1/E(z,h_p),0,z_dec)[0]/H(h)
```

Definimos la función de transferencia:

$$T(x) = \frac{\ln(1+0{,}171x)}{0{,}171x}\left[1 + 0{,}284x + 1{,}18x^2 + 0{,}399x^3 + 0{,}49x^4\right]^{-0{,}25}$$

y las escalas deigualdad $k_{eq} = 0{,}073\omega_m$ Mpc^{-1} y de Silk $k_D \simeq 0{,}14$ Mpc^{-1}. Recordar que la relación entre escala y multipolos viene dada por $l \simeq k d_A^c(z_{dec})$.

```
def T(x):
    parte1=np.log(1+0.171*x)/(0.171*x)
    parte2=(1 + 0.284*x + np.power(1.18*x,2) + np.power(0.399*x,3) + np.power(0.49*x,4))**(-0.25)
    return parte1*parte2
k_eq=0.073*w_m
k_d=0.14
```

Por último definimos la función del espectro de potencias con sus parámetros $A_s = 2{,}20 \times 10^{-9}$, $k_0 = 0{,}05$ Mpc^{-1} y $n_s = 0{,}97$.

$$P_R(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s - 1}$$

y la función de Bessel esférica para l usando la aproximación:

$$j_l^2(x) = \begin{cases} \left[4x^2(x^2 - l^2)\right]^{-1/2} & x > l \\ 0 & x < l \end{cases}$$

```
ns=0.97
A_s=2.2*10**(-9)
k_0=0.05
P_R=lambda k,n=ns: A_s*((k/k_0)**(n-1))
def func_bessel(x,l):
    if x>l:
        return 0.5/(x*np.sqrt(np.power(x,2)-np.power(l,2)))
    else:
        return 0
```

Función del espectro angular de temperaturas del CMB

Una vez definido todas las partes de C_l pasemos a definirla también a esta:

$$C_l(z) \simeq 4\pi \frac{9}{25} \int P_R(k) \left[-R(z_{dec})T(k/k_{eq}) + \frac{5}{3}\cos(k \cdot r_s) e^{-k^2/k_D^2}\right]^2 j_l^2(k(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{dk}{k}$$

```python
def c_l_funcion(l,Rz=R(z_dec),dA=d_A(),rs=r_s(),n_s=ns):
    def func_int(k):
        const=4*np.pi*9/25
        parte1=P_R(k,n_s)
        parte2=np.power(-Rz*T(k/k_eq)+5/3*np.cos(k*rs)*np.exp(-(k/k_d)**2),2)
        parte3=func_bessel(k*dA,l)/k
        return parte1*parte2*parte3

    limite_sup=4000/(dA)
    limite_inf=l/(dA)
    resultado=integrate.quad(func_int,limite_inf,limite_sup)[0]
    constante=4*np.pi*9/25
    return resultado*constante
```

Definido todas las funciones y descrito el comportamiento de las anisotropías de temperatura del CMB pasemos a resolver los ejercicios planteados en la práctica.

1. Ejercicio 1

Fijando los valores de los parámetros a los de la cosmología estándar: $h = 0{,}67; \quad \omega_b = 0{,}022; \quad \omega_m = 0{,}14; \quad n_s = 0{,}97$*:**

1. *Calcular* $R(z_{dec})$*,* r_s *y* $d_A^c(z_{dec})$*.*
2. *Representar gráficamente* $l(l+1)c_l/(2\pi)$ *para* $l \in [100, 1500]$.

1.1. Sacar los valores de $R(z_{dec}), d_A^c$ y r_s

Obtenemos los valores de la **Tabla 1**

```python
dic={'$R(z_{dec})$':[R(z_dec)],"$d_A^c(z_{dec})$":[d_A()],"$r_s$":[r_s()]}
tabla=pd.DataFrame(dic)
tabla
```

$R(z_{dec})$	$d_A^c(z_{dec})$	r_s
0.612847	14002.47092	145.327004

Cuadro 1: Valores de $R(z_{dec}), d_A^c(z_{dec})$ y r_s

1.2. Representar gráficamente el espectro angular de temperaturas del CMB

Vamos a recorres los valores del intervalo $[100, 1500]$ y guardaremos los C_l en un vector para posteriormente representarlos gráficamente en la **Figura 1**.

```python
l_minimo=100
l_maximo=2500
l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
longitud=len(l_array)
cl=np.zeros(longitud)
i=0
for l in l_array:
    valor=c_l_funcion(l,R(z_dec))
```

```
    cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
    i+=1

plt.figure(figsize=(10,7))
plt.title("Espectro Angular de Temperaturas", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.plot(l_array,cl*10**12)
plt.savefig("Espec.png")
plt.show()
plt.close()
```

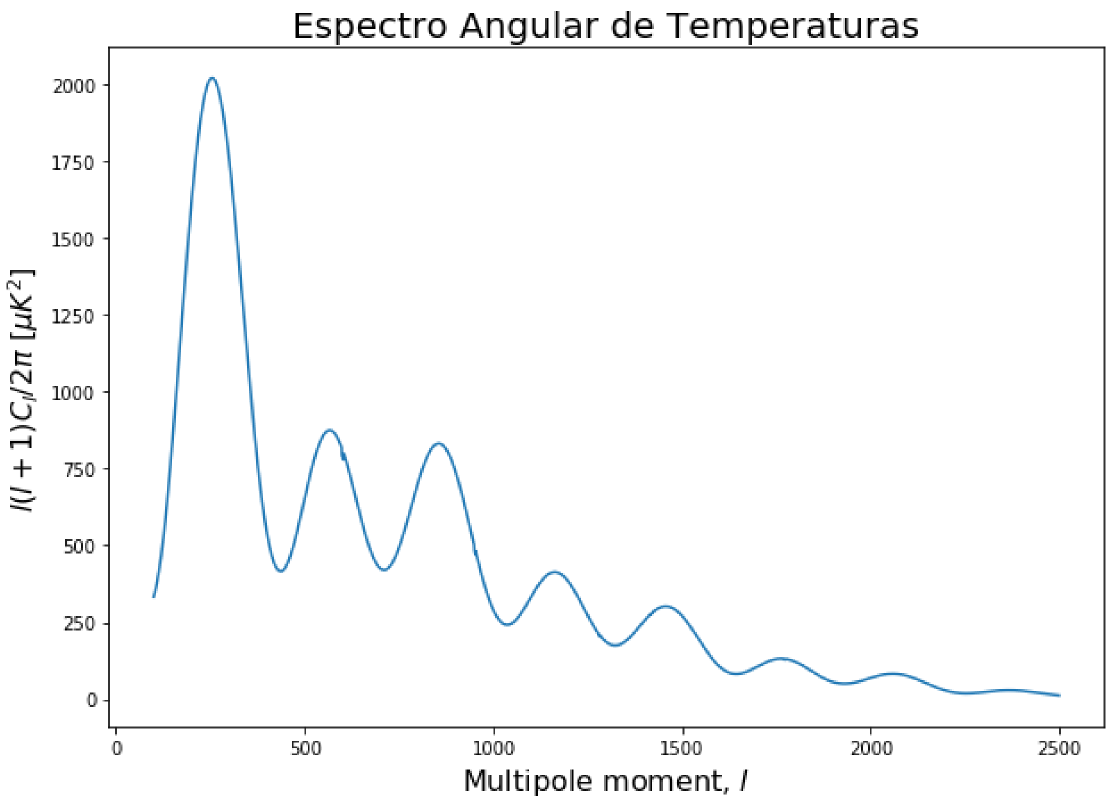


Figura 1: Espectro angular de Temperaturas del CMB.

2. Ejercicio 2

Estudiar la dependencia del espectro en los parámetros $R(z_{dec})$, r_s y $d_A^c(z_{dec})$ variando cada uno de ellos independientemente.

Vamos a definir cuatro tipos de coeficientes de variación $\sigma = 0{,}5, 1, 1{,}5, 2$ y veremos cuales son los efectos de las variaciones de $R(z_{dec}) \cdot \sigma$, $r_s \cdot \sigma$ y $d_A^c(z_{dec}) \cdot \sigma$ en el C_l. Primero empezaremos por $R(z_{dec})$ en la figura 2.

```
variacion=np.array([1,0.5,1.5,2])
paso=len(variacion)

```

```
plt.figure(figsize=(10,7))
dA=d_A()
rs=r_s()
for j in range(0,paso):
    sig=variacion[j]
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0
    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,R(z_dec)*sig,dA,rs)
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
        i+=1

    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$R_z=R(z_d)*{:.2f}$".format(sig))

plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $R(z_{dec})$", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_R_z.png")
plt.show()
plt.close()
```

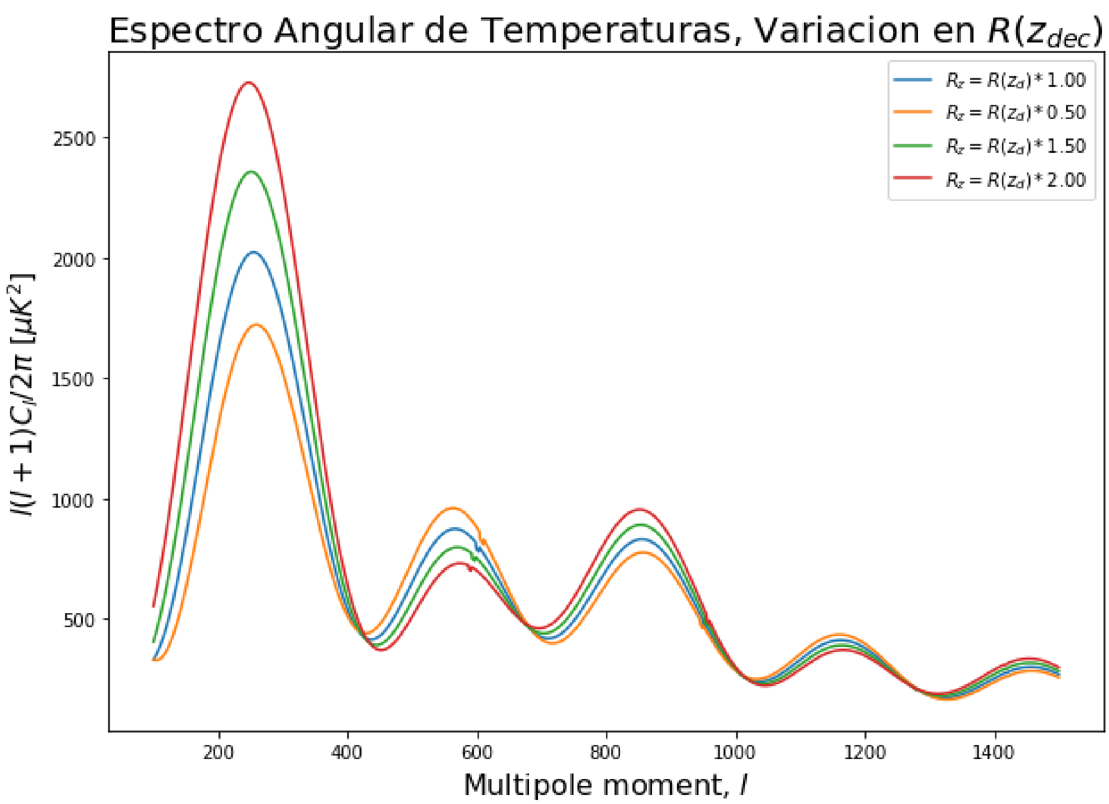


Figura 2: Espectro angular de Temperaturas del CMB variandp $R(z_{dec})$.

Observamos que los picos no se mueven de lugar, sino que solo suben y bajan en su magnitud. Es de resaltar que en los picos pares la proporcionalidad entre el valor de $R(z_{dec})$ y la magnitud de los picos es inversa, es decir, cuanto menor es el valor de $R(z_{dec})$ mayor es la magnitud del pico, mientras que para los picos impares ocurre el efecto contrario.

Calculamos las variaciones para d_A en la **Figura 3**.

```
variacion=np.array([1,0.5,1.5,2])
paso=len(variacion)
plt.figure(figsize=(10,7))
Rz=R(z_dec)
rs=r_s()
for j in range(0,paso):
    sig=variacion[j]
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0
    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,Rz,dA=d_A()*sig,rs=rs)
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
        i+=1

    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$d=d_A^c(z)*{:.2f}$".format(sig))

plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $d_A^c(z_{dec})$", fontsize
    =20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_d_a.png")
plt.show()
plt.close()
```

Para este caso observamos que los picos se desplazan de izquierda a derecha en función de si son más pequeños o más grandes respectvamente. Con respecto a la magnitud de los picos se observa un ligero crecimiento de magnitud según aumenta el valor de $d_A^c(z_{dec})$.

Calculamos las variaciones para r_s en la **Figura 4**.

```
variacion=np.array([1,0.5,1.5,2])
paso=len(variacion)
plt.figure(figsize=(10,7))
Rz=R(z_dec)
dA=d_A()
for j in range(0,paso):
    sig=variacion[j]
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0
    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,Rz,dA,rs=r_s()*sig)
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
```

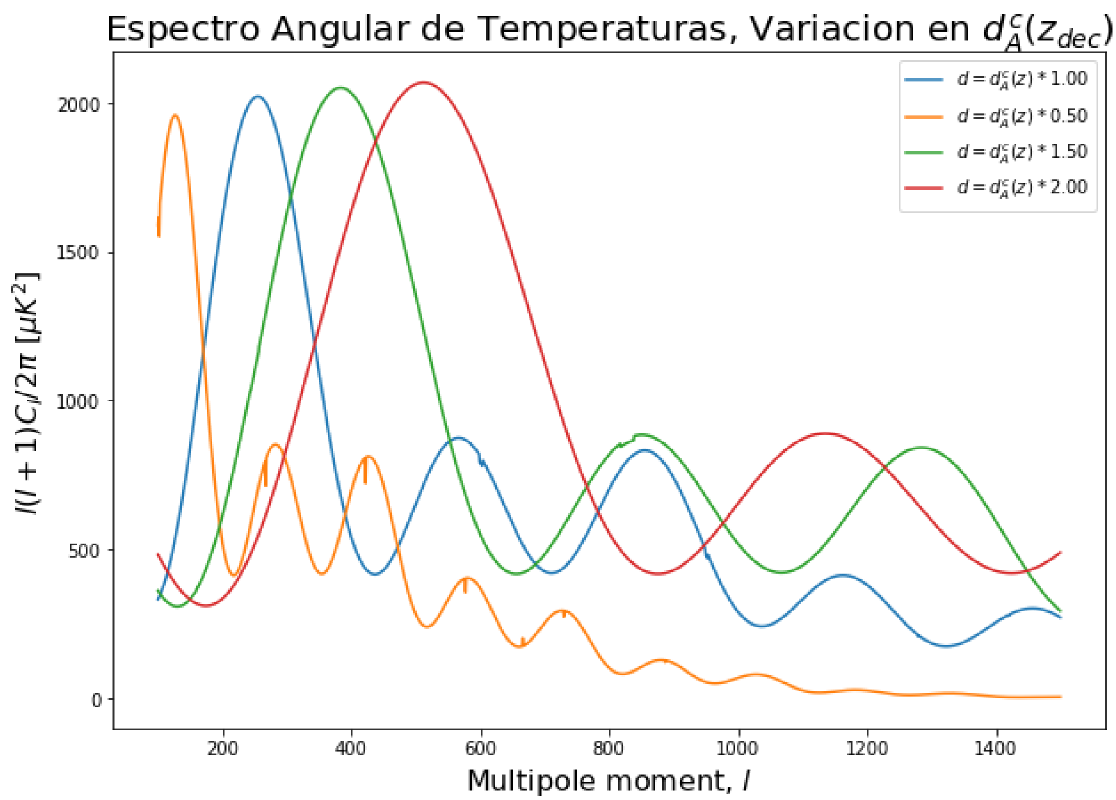


Figura 3: Espectro angular de Temperaturas del CMB variando $d_A^c(z_{dec})$.

```
        i+=1

    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$r=r_s*{:.2f}$".format(sig))

plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $r_s$", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_r_s.png")
plt.show()
plt.close()
```

Para las variaciones del horizonte del sonido se ve que existe un desplazamiento de izquierda a derecha según el valor de r_s crece o decrece respectivamente y un aumento en la magnitud de los picos con respecto al crecimiento del valor r_s.

3. Ejercicio 3

Estudiar la dependencia del espectro con h. Considerar, aparte del valor estándar, $h = 0{,}5$ y $h = 0{,}8$ con el resto de parámetros fijos. Comprobar que el valor de h no afecta a la altura de los picos pero sí a su posición. Explicar este efecto en términos de lo visto en la cuestión 2.

De la misma manera que en el ejercicio 2 y dado que hemos definido las funciones que conforman el C_l en función de h vamos a visualizar los cambios de que sufre las anisotropías de temperatura del CMB cuando el valor de h cambia.

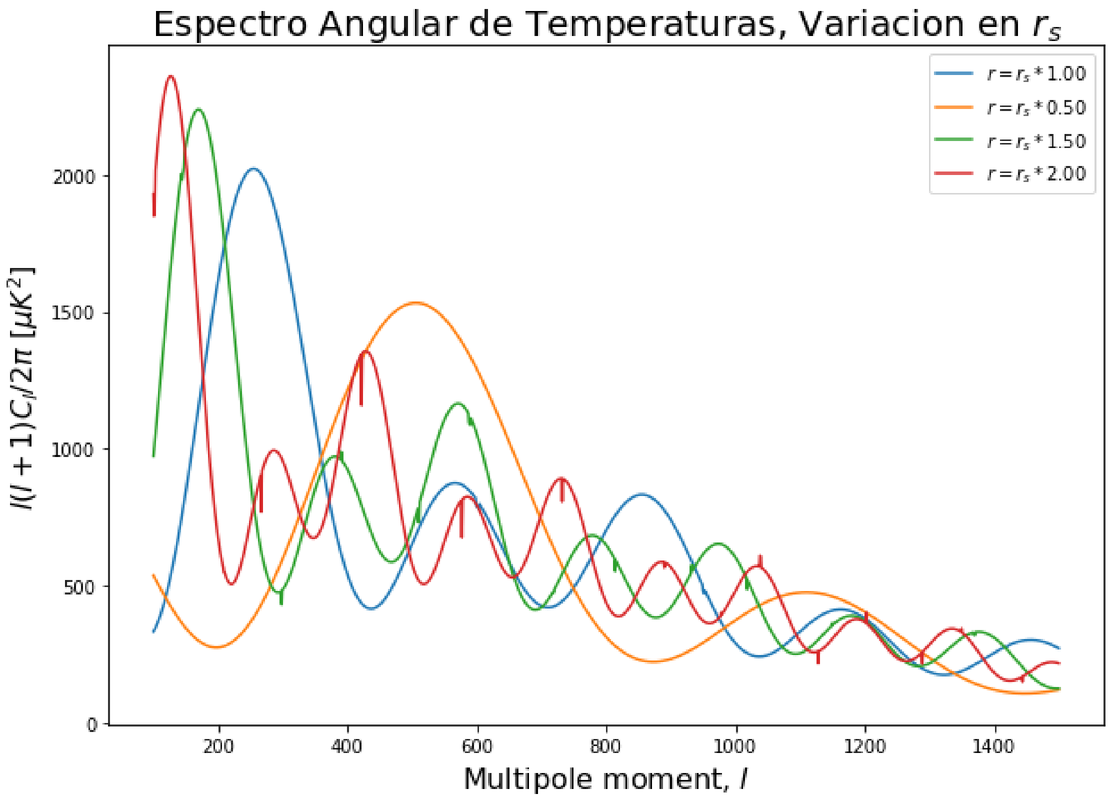


Figura 4: Espectro angular de Temperaturas del CMB variando r_s.

(**Figura 5**)

```
paso=3
h_array=np.array([h,0.5,0.8])

plt.figure(figsize=(10,7))
Rz=R(z_dec)
for j in range(0,paso):
    h_l=h_array[j]
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0

    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,Rz,d_A(h_p=h_l),r_s(h_p=h_l))
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
        i+=1

    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$h={:.2f}$".format(h_array[j]))

plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $h$", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
```

```python
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_h.png")
plt.show()
plt.close()
```

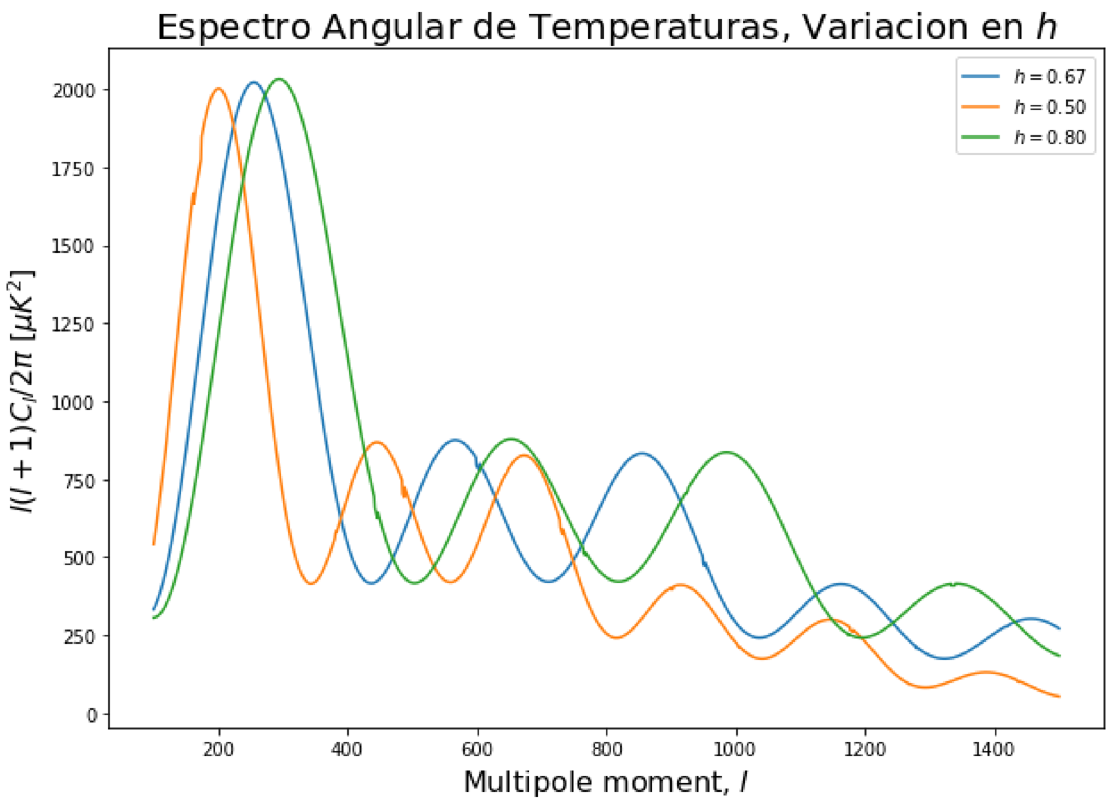


Figura 5: Espectro angular de Temperaturas del CMB variando h

Observamos las variaciones muy similares a cuando solo modificabamos $d_A^c(z_{dec})$ en el ejercicio 2. Esto ocurre por la función $E(z)$ definida como:

$$E(z,h)^2 = \frac{(1+z)^3\omega_m + (1+z)^4\omega_r + h^2 - \omega_m - \omega_r}{h^2} = \frac{[(1+z)^3 - 1]\omega_m + [(1+z)^4 - 1]\omega_r + h^2}{h^2}$$

sustituyendo en las ecuaciones del horizonte de sonido y del tiempo conforme:

$$r_s = 2998\int_{z_{dec}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{([(1+z)^3 - 1]\omega_m + [(1+z)^4 - 1]\omega_r + h^2)^{1/2}}dz$$

$$d_A^c(z_{dec}) = 2998\int_0^{z_{dec}} \frac{dz}{([(1+z)^3 - 1]\omega_m + [(1+z)^4 - 1]\omega_r + h^2)^{1/2}}$$

Vemos que la dependencia en h tanto para el horizonte de sonido como para la distancia del tiempo conforme es la misma sin embargo parece que solo se nota las variaciones en $d_A^c(z_{dec})$. Esto es por los límites de integración de las respectivas integrales. Por un lado tenemos en $d_A^c(z_{dec})$ cuyos límites son entre 0 y 1090, esto hace que las variaciones en h dentro del denominador sean más siginifacitvas que para el horizonte del sonido donde sus límites son 1090 y ∞. Esto hace que las variaciones en r_s no seán signifactivas mientras que para $d_A^c(z_{dec})$ sí que lo sean como muestra la siguiente **Tabla 2**.

```python
R_ar=np.array([R(z_dec)]*3)
d_ar=np.array([d_A(h_p=h),d_A(h_p=0.5),d_A(h_p=0.8)])
r_ar=np.array([r_s(h_p=h),r_s(h_p=0.5),r_s(h_p=0.8)])
dic={'$R(z_{dec})$':R_ar,"$d_A^c(z_{dec})$":d_ar,"$r_s$":r_ar}
tabla=pd.DataFrame(dic)
tabla
```

$R(z_{dec})$	$d_A^c(z_{dec})$	r_s
0.612847	14002.470920	145.327004
0.612847	11022.872357	145.327004
0.612847	16134.698481	145.327004

Cuadro 2: Tabla de las variaciones de h

4. Ejerciio 4

Estudiar la dependencia del espectro con ω_b. Considerar, aparte del valor estándar, $\omega_b = 0{,}01$ y $\omega_b = 0{,}04$ con el resto de parámetros fijos. Comprobar que aumentar ω_b incrementa los picos impares y disminuye los pares. Explicar este efecto en términos de lo visto en la cuestión 2.

De manera similar a antes procedemos a ver las modificaciones que sufre C_l cuando modificamos la cantidad de densidad de energía de bariones. (**Figura 6**).

```python
w_b1=0.01
w_b2=0.04

paso=3
wb_array=np.array([w_b,w_b1,w_b2])

plt.figure(figsize=(10,7))
dA= d_A()

d_arr=np.array([dA]*3)
R_arr=np.zeros(3)
r_arr=np.zeros(3)
for j in range(0,paso):
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0
    Rz=R(z_dec,wb=wb_array[j])
    rs=r_s(wb=wb_array[j])
    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,Rz,dA,rs)
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
        i+=1
    R_arr[j]=Rz
    r_arr[j]=rs
    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$\omega_b={:.2f}$".format(wb_array[j]))

```

```
plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $\omega_b$", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_wb.png")
plt.show()
plt.close()
```

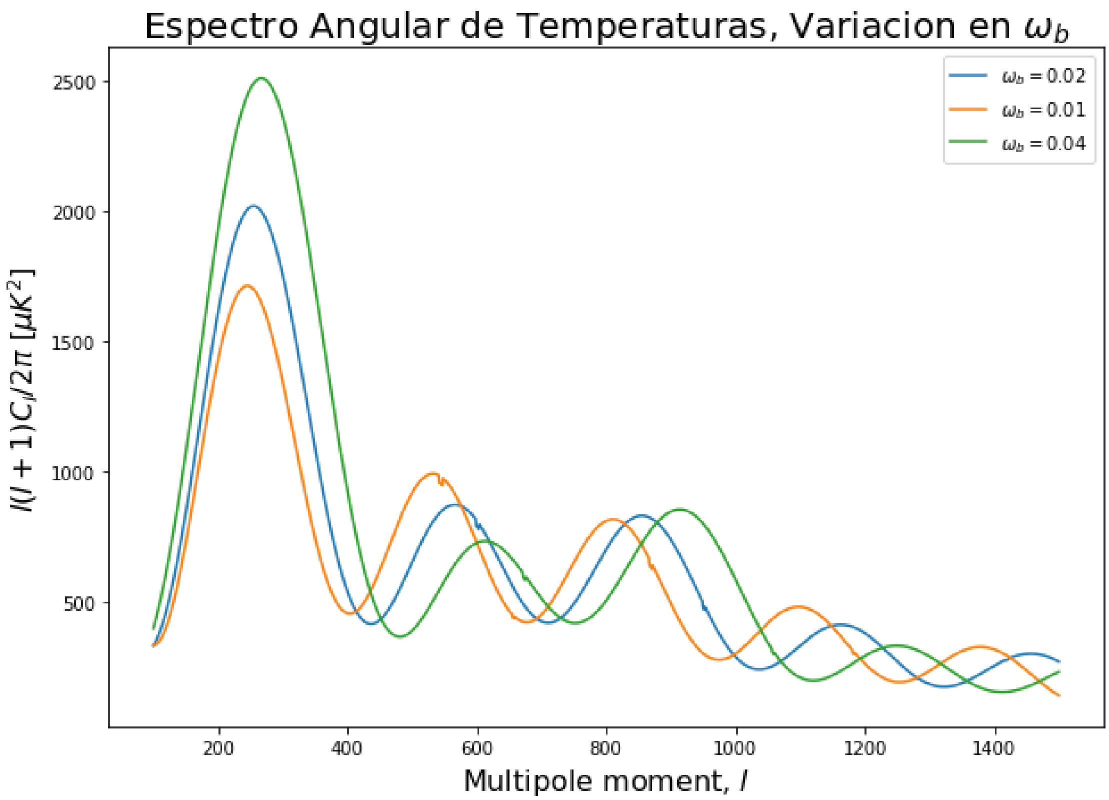


Figura 6: Espectro angular de Temperaturas del CMB variando ω_b

Al igual que ocurría en el ejercicio 2 cuando varíamos el valor de $R(z_{dec})$ los picos de las anisotropías de temperatura del CMB varían en su magnitud, creciendo en el caso de los picos impares y decreciendo en los picos pares. Esto ocurre ya que al variar el valor de ω_b estamos modificando el valor de $R(z, \omega_b) = \omega_b \cdot 3{,}04 \times 10^4/(1+z)$. Por otro lado vemos una variación en la posición de los picos a diferencia que en el ejercicio 2, esto es porque al variar ω_b estamos modificando también el valor de c_s del cual depende r_s. Estas modificaciones origina una traslación de los picos a la derecha según aumenta r_s, al igual que pasaba en el ejercicio 2. Dichas variaciones en estos parametros las podemos observar en la siguiente **Tabla 3**

$R(z_{dec})$	$d_A^c(z_{dec})$	r_s
0.612847	14002.47092	145.327004
0.278567	14002.47092	153.797226
1.114267	14002.47092	135.476638

Cuadro 3: Valores de $R(z_{dec}), d_A^c(z_{dec})$ y r_s

5. Ejercicio 5

Estudiar la dependencia del espectro con n_s. Considerar, aparte del valor estándar, $n_s = 0{,}7$ y $n_s = 1{,}2$ con el resto de parámetros fijos. Determinar el multipolo l correspondiente a la escala del pivote k_0 y explicar el efecto.

Empezaremos igual que en los ejercicios anteriores y marcaremos el multipolo correspondiente a k_0 con una línea vertical. Hay que fijarse, dado que n_s solo aparece en P_R dentro de la aproximación de C_l, para el multipolo. (**Figura 7**)

```
paso=3

ns_1=0.7
ns_2=1.2
ns_array=np.array([ns,ns_1,ns_2])

plt.figure(figsize=(10,7))
dA =d_A()
rs=r_s()
Rz=R(z_dec)

l_0=k_0*dA

l_M=0
l_m=50000
for j in range(0,paso):
    l_minimo=100
    l_maximo=1501
    l_array=np.array(range(l_minimo,l_maximo))
    longitud=len(l_array)
    cl=np.zeros(longitud)
    i=0
    for l in l_array:
        valor=c_l_funcion(l,Rz,dA,rs,ns_array[j])
        constante=4*np.pi*9/25
        cl[i]=valor*l*(l+1)/(2*np.pi)
        i+=1

    if np.max(cl*10**12)>l_M :
        l_M=np.max(cl*10**12)
    if np.min(cl*10**12)<l_m :
        l_m=np.min(cl*10**12)

    plt.plot(l_array,cl*10**12,label="$n_s={:.2f}$".format(ns_array[j]))

vy=np.linspace(l_m,l_M,1000)
vx=np.ones(1000)*l_0
plt.plot(vx,vy,'r:',label="$l_0\simeq k_0d_A^c(z_{dec})$")
plt.annotate("$l_0={:.2f}$".format(l_0),(l_0+10,l_M-100),fontsize=16)
plt.title("Espectro Angular de Temperaturas, Variacion en $n_s$", fontsize=20)
plt.ylabel("$l(l+1)C_l/2\pi\ [\mu K^2]$", fontsize=16)
plt.xlabel("Multipole moment, $l$", fontsize=16)
plt.legend()
plt.savefig("Espec_ns.png")
plt.show()
plt.close()
```

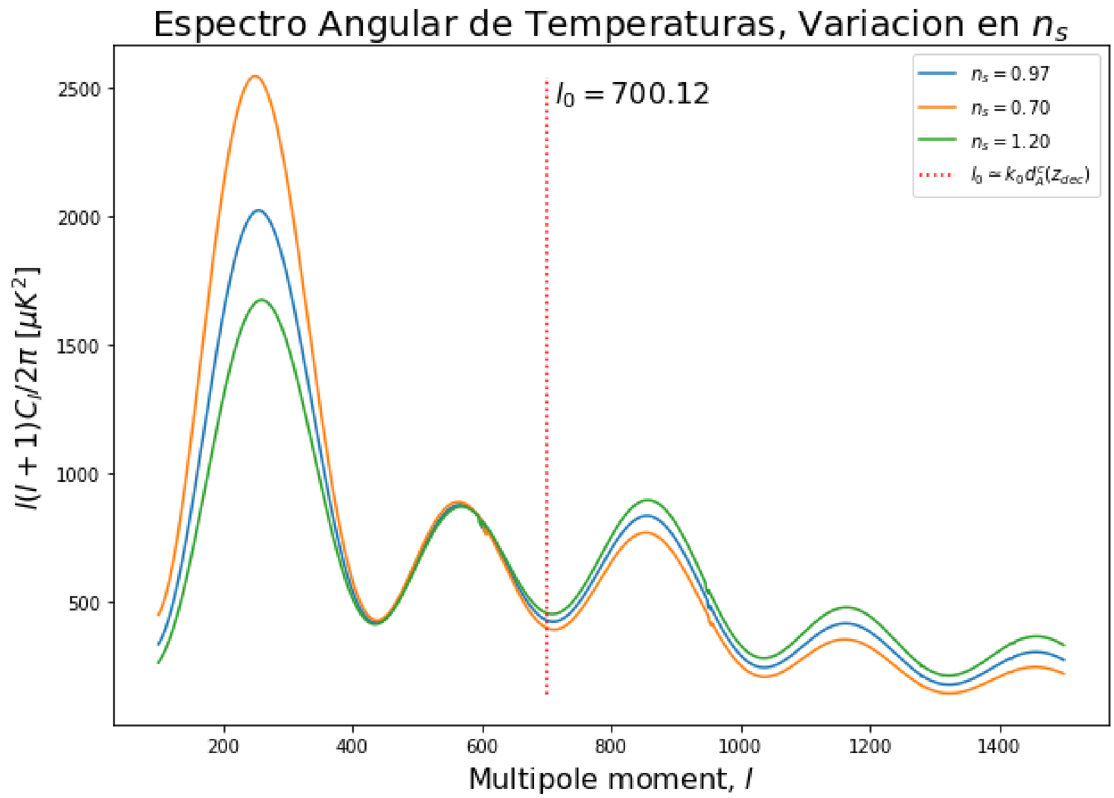


Figura 7: Espectro angular de Temperaturas del CMB variando n_s

Observamos que la posición de lo picos no varía, solo su magnitud. Para un valor menor de n_s el primer pico es superior en magnitud, pero a medida que aumenta l se hacen más pequeños con respecto a las anisotropías de T del CMB para n_s superiores.

Por otro lado parece que vemos que a partir de $l > l_0$ los picos con un mayor n_s empiezan a ser superores que los de n_s menores. Veamos posibles explicaciones a esto analizando primero la función del espectro de potencias. Sea $n_1 > n_2 > 0$ entonces definiendo $P_R^i(k) = P_R(k, n_s = n_i)$ tenemos:

$$P_R^1(k) - P_R^2(k) = A_s \left[\left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_1 - 1} - \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_2 - 1} \right] = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } k \leq k_0 \\ < 0 & \text{si } k < k_0 \end{cases}$$

Por otro lado si tomamos un $l > l_0$ y si definimos $C_l^i = C_l(n_s = n_i)$ tenemos que:

$$C_l^1 - C_l^2 = 4\pi \frac{9}{25} \int \left[P_R^1(k) - P_R^2(k) \right] j_l^2(k \cdot d_A^c(z_{dec})) F(k) dk$$

donde $F(k) = \left[-R(z_{dec}) T(k/k_{eq}) + \frac{5}{3} \cos(k \cdot r_s) \right]^2 / k$.Dado que $l > l_0$ tenemos que si $l \simeq k_l d_A^c(z_{dec})$ entonces $k_l > k_0$ y la función de Bessel esférica de la ecuación va a responder:

$$j_l^2(k \cdot d_A^c(z_{dec})) = \begin{cases} \left[4k^2 d_A^c(z_{dec})^4 (k^2 - k_l^2) \right]^{-1/2} & k > k_l \\ 0 & k < k_l \end{cases}$$

Es decir para k menores a k_0 la función de Bessel se anulara mientras que para $k > k_l > k_0$ la función será siempre positiva. Por tanto, combinando con el resultado de la función del espectro d epotencias tenemos:

$$C_l^1 - C_l^2 = 4\pi \frac{9}{25} \int_{k_l}^{\infty} \frac{P_R^1(k) - P_R^2(k)}{2kd_A^c(z_{dec})^2\sqrt{k^2 - k_l^2}} \cdot F(k)dk > 0$$

Podemos observar en la imagen que a partir de $l > l_0$ las líneas nunca se cortan y la magnitud siempre es mayor para los n_s mayores, tal como indica el resultado que acabamos de desarrollar.

Por otro cuando $l < l_0$ obtenemos el efecto contrario. Dado que la función de Bessel esférica para $x > l$ se tiene que $j_l^2(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ tenemos que los primeros $k < k_l < k_0$ pesan más en la integral, donde:

$$P_R^1(k) - P_R^2(k) < 0$$

De esta manera cuando $l << l_0$ se tiene que $C_l^1 < C_l^2$ llegando a tener valores más altos de C_l cuanto más pequeño es n_s, tal y como vemos.