Determinación de los parámetros cosmológicos a partir del análisis de datos de supernovas de tipo Ia

1.- Distancia por luminosidad y módulo de distancia

La distancia por luminosidad a una supernova con corrimiento al rojo (*redshift*) z en un modelo cosmológico con secciones espaciales planas, densidad de materia Ω_M y con ecuación de estado para la energía oscura ω, tiene la siguiente expresión,

$$d_L(z, \Omega_M, \omega) = (1+z)\, H_0^{-1} \int_0^z dy\, \frac{1}{\sqrt{\Omega_M\,(1+y)^3 + (1-\Omega_M)\,(1+y)^{3(1+\omega)}}}, \tag{1}$$

en unidades de $c = 1$. El correspondiente módulo de distancia se define como:

$$\mu_{th}(z, \Omega_M, \omega, \tilde{M}) = m - M = 5\, \log_{10}\left(\frac{d_L}{\mathrm{Mpc}}\right) + 25 = 5\, \log_{10}(d_L\, H_0) + \tilde{M}, \tag{2}$$

el valor de $\tilde{M}$ depende en general de cantidades astrofísicas y de H_0, por lo tanto, se puede suponer que es independiente del *redshift*. Como veremos en la siguiente sección, a partir de las medidas de μ_i^{obs} con su error $\sigma_{\mu\, i}$ para distintas supernovas, podemos construir la función χ^2 para el modelo (1),

$$\chi^2(\Omega_M, \omega, \tilde{M}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\mu_i^{obs} - \mu_{th}(z_i, \Omega_M, \omega, \tilde{M})\right)^2}{\sigma_{\mu\, i}^2}. \tag{3}$$

El objetivo de la práctica consiste en analizar esta función $\chi^2(\Omega_M, \omega, \tilde{M})$ y extraer los valores de los parámetros que mejor ajustan para distintos casos.

2.- Likelihood, función χ^2 e intervalos de confianza

En esta práctica vamos a ver cómo extraer, a partir de unos datos con unas incertidumbres, los parámetros de un modelo que mejor se ajustan junto con los intervalos de confianza correspondientes. Para ello se define la función de verosimilitud (*likelihood*) como la probabilidad de observar unos datos asumiendo como cierto un modelo con unos parámetros determinados. Maximizando esta distribución de probabilidad, obtenemos los valores de los parámetros que mejor ajustan a unos datos observados.

Los intervalos de confianza serán las regiones del espacio de parámetros, centradas en el valor de mejor ajuste, que abarquen una cierta probabilidad. Los intervalos de [σ_1, σ_2, σ_3] son aquellos que engloban el [68.27 %, 95.45 %, 99.73 %] de probabilidad respectivamente. El *likelihood* se construye de la siguiente forma,

$$\mathcal{L} = e^{-\chi^2/2}, \tag{4}$$

la función χ^2 se define como,

$$\chi^2(p,q) = \sum_{i=1} \frac{\left(\mu_i - \mu_i^{modelo}(p,q)\right)^2}{\sigma_{\mu\, i}^2}, \tag{5}$$

donde (p,q) son los parámetros del modelo, μ_i son los datos experimentales, $\sigma_{\mu\, i}$ sus errores, y μ_i^{modelo} los valores predichos por el modelo en cuestión. El valor de los parámetros que mejor ajusten a los datos serán los que minimicen χ^2 [1].

Podemos calcular los intervalos de confianza de los parámetros a partir de χ^2 [2]. Cuanto mayor es la diferencia $\Delta\chi^2$ respecto al χ^2_{min} del mejor ajuste, peor es el ajuste a los datos; los valores de $\Delta\chi^2$ que corresponden a [σ_1, σ_2, σ_3] dependen del número de parámetros del modelo. Para un único parámetro tenemos que $\Delta\chi^2(\sigma_k) = k^2$, en el caso de tener dos parámetros $\Delta\chi^2$ para [σ_1, σ_2, σ_3] es igual a [2.30, 6.18, 11.83] respectivamente.

Por último, hay ocasiones en las que el *likelihood* depende de parámetros del modelo que no nos interesan, en esta situación se realiza la marginalización de parámetros. Ésta consiste en integrar el *likelihood* en los parámetros que buscamos marginalizar, en el caso de que el *likelihood* sea Gaussiano en dichos parámetros el procedimiento es,

$$\mathcal{L}_m(p) = \int \mathcal{L}(p,q)\, dq = \mathcal{L}(p, q_m(p)), \tag{6}$$

donde $q_m(p)$ es el valor de q que maximiza $\mathcal{L}$ (y minimiza χ^2) para cada valor de p. Este método es equivalente a minimizar $\chi^2(p,q)$ de forma que resolviendo $\partial\chi^2(p,q)/\partial q = 0$ obtenemos $q_m(p)$ y podemos definir $\chi^2_m(p) = \chi^2(p, q_m(p))$. Éste es el método que utilizaremos en la práctica.

[1] Nótese que, aunque $\mathcal{L}$ es Gaussiano en χ^2 como se ve en (4), no tiene por que ser Gaussiano en los parámetros del modelo.

[2] Este método sólo es válido cuando el *likelihood* es Gaussiano, si no es sólo una aproximación. En esta práctica usaremos este método como aproximación.

1. - Construir una función en Matlab que tenga como variables de entrada: el valor de Ω_M, el valor de ω y un vector con distintos valores del *redshift*. Y como variable de salida un vector con los valores de $d_L(z,\, \Omega_M,\, \omega)$ para cada valor del *redshift* del vector de entrada (en unidades de H_0^{-1}).

2. - Haciendo uso de la función anterior y de la función **plot**, dibujar d_L (z, 0.3, -1) para $z \in$ (0, 1.5). ¿Cuál es el valor de d_L (0.5, 0.3, -1)?

3. - Como hemos visto en el guión, hay veces que no nos interesa algún parámetro del problema y es conveniente marginalizarlo. En el caso de las supernovas, vamos a marginalizar el parámetro $\tilde{M}$. Calcular el valor $\tilde{M}_m(\Omega_M,\, \omega)$ que minimiza $\chi^2(\Omega_M,\, \omega,\, \tilde{M})$, definiendo así la función χ^2 marginalizada $\chi^2_m(\Omega_M,\, \omega) = \chi^2(\Omega_M,\, \omega,\, \tilde{M}_m(\Omega_M,\, \omega))$.

4. - Construir una función en Matlab que, usando la función $d_L(z,\, \Omega_M,\, \omega)$, calcule $\chi^2_m(\Omega_M,\, \omega)$ para los datos de supernovas $Union2.mat$. Al cargar estos datos, se definen en el workspace las variables z, m, dm; siendo z el vector de *redshift* de las supernovas (ordenado de menor a mayor), m los valores de μ^{obs} y dm los valores de σ_μ de cada *redshift*. ¿Cuál es el valor de χ^2_m (0.3, -1)?

Ahora que tenemos definidas las funciones necesarias, vamos a analizar distintos modelos. El primer modelo que analizaremos es el modelo de ΛCDM, en el cual sólo tenemos Ω_M como único parámetro libre.

5. - Calcular el valor de Ω_M que mejor ajusta a los datos de supernovas, para ese valor ¿cuál es el valor de χ^2?

6. - Calcular los errores de 1 σ, tanto por la derecha como por la izquierda, del parámetro Ω_M anterior.

7. - Calcular el valor de χ^2 para un universo de Einstein-de Sitter y comparar su valor con el valor de χ^2 para el mejor ajuste. Representar el módulo de distancia en función del redshift para el caso del mejor ajuste y para el Universo de Einstein - de Sitter, junto con los datos de las supernovas con sus errores. ¿Cuántas sigmas separan ambos ajustes?

8. - Determinar la distancia por luminosidad y la distancia comóvil en Mpc a una supernova con $z = 1$ para el mejor ajuste obtenido de Ω_M en ΛCDM ($H_0^{-1} = 4285\,\mathrm{Mpc}$).

9. - Para finalizar, vamos a considerar el modelo ωCDM. En él tenemos dos parámetros libres Ω_M y ω. Calcular los valores de $(\Omega_M,\, \omega)$ que mejor ajustan a los datos de supernovas y representar en un gráfico de $(\Omega_M,\, \omega)$, los contornos de 1, 2 y 3 σ. Obtener los errores superiores e inferiores para Ω_M y ω a partir de la región de 1 σ.