Investigación operativa. Programación lineal en las Ciencias Administrativas

Ximena Patricia Granizo Espinoza
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Investigación operativa Programación lineal en las Ciencias Administrativas

Ximena Granizo Espinoza

ESPOCH

2021

Investigación operativa.
Programación lineal en las Ciencias Administrativas

Investigación operativa.
Programación lineal en las Ciencias Administrativas

Ximena Granizo Espinoza

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
Fundada en 1972
Riobamba - Ecuador

Investigación operativa. Programación lineal en las Ciencias Administrativa

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 519.1 + 658
Investigación operativa. Programación lineal en las Ciencias Administrativas
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Dirección de Publicaciones, año 2021
164 pp. vol: 17,6 x 25 cm
ISBN: 978-9942-40-665-1
1. Investigación operativa
2. Administración de empresas

A mi adorada familia,
en especial a mis pequeñas Sofía y Pierina,
en honor al tiempo no compartido dedicado a esta obra.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La Investigación Operativa, también llamada Investigación de Operaciones (IO), tiene su origen a raíz de la época de la Segunda Guerra Mundial, entre 1939-1945, cuando surgió la necesidad de asignar los escasos recursos disponibles a las diferentes operaciones militares y a cada una de las actividades dentro de cada operación, haciéndolo de la forma más efectiva posible. Las administraciones militares americana e inglesa convocaron a una gran cantidad de científicos, para que a través de sus conocimientos multidisciplinarios, aplicaran el método científico en los problemas estratégicos y tácticos, identificados en las investigaciones realizadas a las operaciones militares. Al finalizar la guerra, el éxito logrado de la investigación de operaciones en las actividades bélicas generó un gran interés en las diversas áreas y es a partir de la década de 1950, cuando se introduce el uso de la Investigación de Operaciones en los negocios, en el gobierno y en la industria.

La investigación de operaciones adopta un punto de vista organizacional al tratar de resolver todos los conflictos de interés entre los componentes de la organización, de tal forma que el resultado propuesto sea el más conveniente para la organización completa. La investigación de operaciones pretende encontrar la mejor solución (denominada solución óptima), para el problema en estudio, el objetivo consiste en no solo mejorar el estado de las cosas, sino en identificar el mejor curso de acción posible.

Desde sus orígenes, hasta la actualidad, la investigación de operaciones ha sido considerada como una herramienta de gran utilidad en la optimización de los recursos humanos, económicos o materiales con los que dispone la organización, haciendo uso del método científico para investigar el problema en cuestión, partiendo por la observación cuidadosa, la formulación del problema identificado, la recolección de datos pertinentes, considerando que la solución proporcionada es el resultado de operaciones matemáticas que deben ser interpretadas y adaptadas a la vida real. Este libro detalla como la aplicación de los modelos de investigación de operaciones, pueden contribuir de forma eficiente en el proceso de toma de decisiones empresariales, a través de la interpretación correcta de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO I.
INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

1.1 INTRODUCCIÓN

Fue en Inglaterra donde se utilizó por primera vez el término "Investigación Operativa" (Operational Research) cuando se creó en la RAF (Royal Air Force) un grupo de científicos con el fin de estudiar cómo operar el radar, denominado Sección de investigación Operativa por estar desarrollado con las operaciones del nuevo equipo (Maroto, Alcaraz, Ginestar, & Segura , 2012).

El origen de la Investigación de Operaciones, también denominada Investigación Operativa, se remonta a muchos años, durante el período comprendido entre 1939 y 1945, en Inglaterra, durante la Segunda Guerra Mundial, nace como el resultado de la asignación de los recursos disponibles a las diversas operaciones militares, haciéndolo de una forma efectiva.

Debido a los esfuerzos bélicos, existía la urgente necesidad de asignar los recursos existentes a las distintas maniobras militares y a las actividades que componían cada operación de la manera más eficaz. Por ello, las administraciones militares americana y británica llamaron a un gran número de científicos para que aplicaran el método científico a éste y a otros problemas estratégicos y tácticos. En realidad, les solicitaron que hicieran investigación sobre operaciones militares. Estos grupos de científicos fueron los primeros equipos de investigación de operaciones. Debido al desarrollo de métodos eficaces para utilizar la nueva herramienta que representaba el radar, los científicos contribuyeron al triunfo en la guerra aérea que libró Gran Bretaña (Hillier & Lieberman, 2010).

Como resultado del éxito de la investigación de operaciones en las operaciones bélicas, se despertó un gran interés por esta ciencia en un contexto diferente al de las operaciones militares, así es como la industria, el gobierno y las empresas adoptaron los modelos propuestos de investigación de operaciones y los aplicaron a su realidad, buscando eficiencia en el uso de sus recursos y optimización de procesos.

Al inicio de la década de los años cincuenta, los científicos introdujeron el uso de la investigación de operaciones en una serie de organizaciones industriales, de negocios y del gobierno. Desde entonces, se ha desarrollado con rapidez (Hillier & Lieberman, 2010).

En la década de 1960, la investigación de operaciones fue implantada en la formación académica de las escuelas de niveles superiores como una nueva materia de los planes y programas de estudios en Estados Unidos (Izar, 2012).

Dos factores importantes que contribuyeron en el desarrollo de la Investigación Operativa, durante sus inicios fueron el mejoramiento de las técnicas de investigación de operaciones desarrolladas por los científicos y la revolución eminente de las computadoras, lo cual contribuyó con el desarrollo de esta ciencia de manera significativa, ya que son necesarios varios cálculos que de ser realizados de manera manual, requerirían de un tiempo y esfuerzo mayor.

1.2. DEFINICIONES

Existen varias definiciones de Investigación Operativa generadas por varios autores, a continuación, se presentan algunas de estas para una mayor comprensión:

La investigación de operaciones puede definirse como un grupo de métodos y técnicas aplicables a la solución de problemas operativos de los sistemas (Izar, 2012).

La Investigación de Operaciones aspira a determinar el mejor curso de acción óptimo de un problema de decisión con la restricción de recursos limitados, aplicando técnicas matemáticas para representar por medio de un modelo y analizar problemas de decisión (Taha, 2012).

Es conocida también como ciencias de la administración o como métodos y modelos cuantitativos para la toma de decisiones (Davis & McKeown, 1986).

La investigación operativa, denominada también investigación de operaciones, contribuye con la resolución de problemas de programación lineal, mediante una serie de técnicas y métodos aplicados, los problemas propuestos están generalmente ligados a la realidad empresarial, debido a la necesidad latente de alcanzar mejores y eficientes resultados en sus operaciones, ya sea en al ámbito comercial, de producción, financiero, etc.

1.3. OBJETIVO

Como su nombre lo indica, el objetivo de esta disciplina implica "investigar sobre las operaciones". En consecuencia, esta disciplina se aplica a la problemática relacionada con la conducción y la coordinación de actividades en una organización. En esencia, la naturaleza de la organización es irrelevante, por lo cual la IO ha sido aplicada de manera extensa en áreas tan diversas como: transporte, construcción, telecomunicaciones, planeación financiera, cuidado de la salud, fuerzas armadas y servicios públicos. Así, la gama de aplicaciones es inusualmente amplia (Hillier & Lieberman, 2010).

El principal objetivo que persigue la investigación de operaciones es la optimización de los recursos, mediante la aplicación de diversos modelos, métodos y técnicas, al optimizar los recursos se pretende:

Maximizar:

- La producción
- Las ventas
- Los ingresos

Minimizar:

- Los costos
- Los gastos
- Las pérdidas

La investigación de operaciones busca siempre obtener el máximo beneficio para la empresa, la mejor solución factible. Enmarcando su accionar siempre en el proceso de toma de decisiones.

1.4. CARACTERÍSTICAS

La IO incluye el término *investigación* en el nombre porque utiliza un enfoque similar al que se aplica en las áreas científicas establecidas. El método científico se utiliza para explorar los diversos problemas que deben ser enfrentados, pero en ocasiones se usa el término *management science* o *ciencia de la administración* como sinónimo de investigación de operaciones (Hillier & Lieberman, 2010).

Algunas de las características más importantes de la Investigación Operativa son las siguientes:

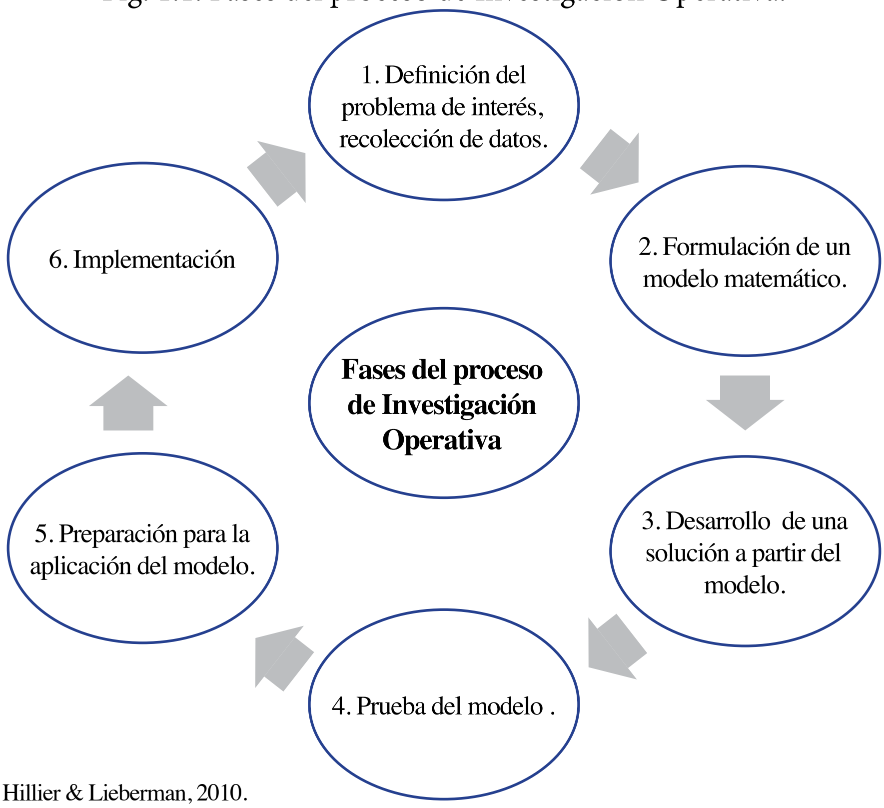
- Analiza los aspectos más importantes para encontrar la solución óptima a un problema determinado.
- Utiliza el método científico que consiste en la definición del problema, formulación de la hipótesis, la experimentación y la verificación.
- La investigación de operaciones contribuye con la optimización de la producción en el ámbito empresarial, a través de la utilización de diversos métodos desarrollados específicamente dentro de esta área.
- La investigación de operaciones ha desarrollado diversas técnicas como la programación lineal y no lineal, programación dinámica, teoría de colas etc.
- Representa el problema de estudio en forma cuantitativa, facilitando así el análisis y evaluación del mismo, haciendo uso de un criterio común.

1.5. FASES DEL PROCESO DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Las fases usuales de un estudio de investigación de operaciones son las siguientes (Hillier & Lieberman, 2010):

1. Definición del problema de interés y recolección de datos relevantes.
2. Formulación de un modelo matemático que represente el problema.
3. Desarrollo de un procedimiento basado en computadora para derivar una solución para el problema a partir del modelo.
4. Prueba del modelo y mejoramiento de acuerdo con las necesidades.
5. Preparación para la aplicación del modelo prescrito por la administración.
6. Implementación.

Fig. 1.1. Fases del proceso de Investigación Operativa.



Fuente: Hillier & Lieberman, 2010.

1.5.1. Definición del problema de interés y recolección de datos relevantes

La primera fase consiste en el estudio del sistema y la elaboración de un resumen, en donde se define de manera detallada el problema analizado. Esta etapa incluye la determinación de los objetivos a cumplir, las restricciones o limitaciones del sistema, las relaciones existentes entre el área de estudio con otras áreas de la organización, las diversas alternativas de solución posibles, el tiempo límite disponible para tomar la decisión, etc.

La definición correcta del problema es fundamental, ya que los resultados del proceso afectarán directamente a la toma de decisiones en la organización. Durante la definición del problema se debe realizar un análisis técnico detallado y considerar todas las opciones posibles de solución. La organización debe evaluar todas las posibilidades y seleccionar aquella que se adapte mejor a los objetivos planteados.

En la formulación del problema es necesario involucrar a los directivos de la organización, para conocer de cerca los objetivos planteados, considerando también que es a ellos, a quien concierne el proceso de toma de decisiones en la organización.

1.5.2. Formulación de un modelo matemático que represente el problema

Una vez definido el problema, se procede con la formulación de un modelo matemático, el mismo que representa la esencia en si del problema. Al hablar de modelo, se hace referencia a una representación idealizada, los modelos forman parte de la vida cotidiana, entre los ejemplos más conocidos se pueden mencionar modelos de avión, modelos de autos, modelos de casa, globos terráqueos, entre otros.

El modelo matemático utilizado para representar un problema existente en la organización está conformado por un sistema de ecuaciones y expresiones matemáticas relacionadas que describen al mismo. De esta forma, las ***n*** decisiones que se deban tomar, serán consideradas como ***variables del problema o variables de decisión***, para la definición de las mismas suele utilizarse letras del alfabeto, comúnmente (X_1, X_2, …, X_n) para las cuales deben determinarse los valores respectivos. El objetivo que persigue el problema, generalmente la maximización de utilidades o la minimización de recursos, se denomina función objetivo, la variable a optimizar suele estar representada por la letra **Z**, expresando la ecuación matemática en función de las variables del problema y sus coeficientes (Max. o Min. $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... C_nX_n$). Donde: C_1, C_2, …C_n, son los coeficientes de la función objetivo y X_1, X_2, …, X_n, son las variables del problema. Las limitaciones o condiciones a cumplir son denominadas ***restricciones*** y se debe plantear una ecuación para cada restricción en función de las variables del problema, comúnmente las restricciones son desigualdades del tipo mayor o igual que (≥) y /o del tipo menor o igual que (≤), existiendo también restricciones de igualdad (=).

El modelo matemático planteado permitirá conocer los valores de las variables de decisión de manera que se cumpla con la función objetivo (maximización o minimización), sujetándose a las restricciones del problema.

1.5.3. Obtención de soluciones a partir del modelo

Una vez que se ha formulado el modelo matemático para el problema identificado, el paso siguiente es obtener una solución a partir del modelo. La solución puede ser desarrollada a través del uso de software disponibles o mediante procedimientos matemáticos iterativos de solución.

En este paso, se pretende encontrar la mejor solución, conocida como solución óptima, considerando que dicha solución es óptima únicamente respecto al modelo en cuestión. Se debe también considerar que al tratarse de un modelo (una idealización de la realidad), no está cien por ciento garantizado que la solución obtenida sea la mejor solución a implantarse; sin embargo, si se procedió con la correcta formulación y verificación del modelo, la solución obtenida constituirá una excelente opción de acción en la vida real.

1.5.4. Prueba del modelo y mejoramiento de acuerdo con las necesidades

Este paso consiste en probar el modelo con la finalidad de validarlo, durante este procedimiento se pueden identificar varios errores cometidos durante la formulación y proceder a corregirlos. Generalmente, la forma más común de validar un modelo es someterlo a datos pasados y verificar si reproduce los resultados de entonces, de esta manera se pueden tener datos que respaldan la validez del mismo.

Cuando se emplean las alternativas de solución y se estiman sus desempeños históricos hipotéticos, se pueden reunir evidencias sobre la precisión del modelo para predecir los efectos relativos de los diferentes cursos de acción (Hillier & Lieberman, 2010).

1.5.5. Preparación para la aplicación del modelo

Cuando el modelo va a ser utilizado en varias ocasiones, se debe instalar un sistema documentado para aplicarlo, considerando lo que establece la administración. Las bases de datos y los sistemas de información administrativos pueden proporcionar la entrada actualizada para el modelo cada vez que se use, en cuyo caso se necesitan programas de interfaz, es decir, interacción con el usuario (Hillier & Lieberman, 2010).

1.5.6. Implementación

Consiste en la última etapa de un estudio de IO, y se trata de la implementación del modelo, según considere la administración. En esta etapa se evidenciarán los resultados del estudio, por lo que el equipo de investigación de operaciones debe involucrarse de manera tal que interprete las soluciones del modelo y corrija los errores que podrían presentarse.

La etapa de implementación incluye varios pasos (Hillier & Lieberman, 2010):

1. El equipo de IO explica a la administración el nuevo sistema que debe adoptar y su relación con la realidad operativa.
2. Los dos grupos comparten la responsabilidad de desarrollar los procedimientos que se requieren para poner el sistema en operación.
3. La administración capacita al personal que participa en el proceso y se inicia el nuevo curso de acción.

Durante la fase de implementación es importante continuar supervisando el funcionamiento del mismo, ya que, en caso de existir desviaciones puede ser revisado y modificado.

1.6. MODELOS PROTOTIPOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

El modelo expresa de una manera razonable las funciones matemáticas que representan el comportamiento del mundo real supuesto (Taha, 2012).

Un modelo en sí puede ser considerado como la representación de una situación real; en el caso de Investigación Operativa, se hace uso de modelos matemáticos para la resolución de problemas de la vida real, los cuales son representados a través de una ecuación, o sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de un cierto fenómeno dado en un determinado sistema.

La modelización es el centro del proceso de toma de decisiones, el centro de la actividad en Investigación de Operaciones. El modelo no es la realidad, sin embargo, contiene partes de ella (Carro, 2014). Por esta razón es fundamental considerar dos aspectos importantes al momento de modelar: si el modelo diseñado se asemeja a la vida real y si el modelo ha logrado representar los aspectos más importantes para el problema de decisión.

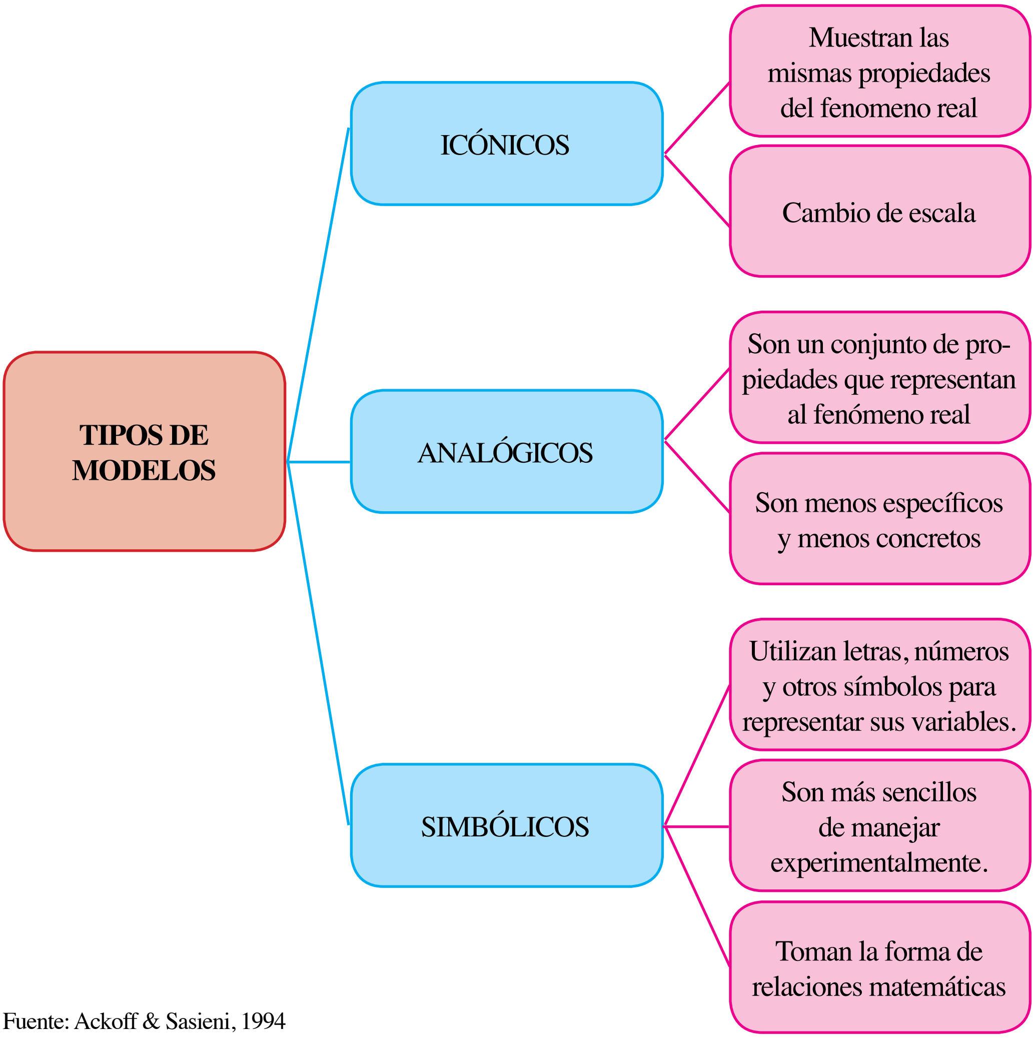
La clasificación de modelos varía dependiendo de las funciones que realizan, del propósito para el cual fue diseñado, según el tema o tipo de información que utilizan, etc.

Los modelos de Investigación Operativa más usuales son:

- Modelo Icónico
- Modelo Analógico
- Modelo Simbólico o Matemático

En la figura 1.2. se muestran los modelos de Investigación Operativa más usuales y sus características (Ackoff & Sasieni, 1994):

Fig. 1.2. Modelos de I.O. y sus características.



Fuente: Ackoff & Sasieni, 1994

1.6.1. Modelo Icónico

Se trata de una representación física de un objeto, pudiendo ser en forma idealizada (bosquejo) o a escala. Como ejemplo de modelo icónico, se tiene los mapas, planos, maquetas, prototipos, etc.

1.6.2. Modelo Analógico

Este tipo de modelo puede representar situaciones dinámicas o cíclicas, son los más usuales y pueden representar las características y propiedades del acontecimiento que se estudia. Por ejemplo: Curvas de oferta y demanda, diagramas de flujo.

1.6.3. Modelo Simbólico o Matemático

Es una representación de la realidad a través de cifras, símbolos matemáticos y funciones, que permiten describir y analizar el comportamiento del sistema. Se emplea cuando la función objetivo y las restricciones (limitaciones) del modelo se pueden expresar en forma cuantitativa o matemática como funciones de las variables de decisión.

Un modelo matemático busca representar una realidad mediante el uso de relaciones matemáticas, a través de la lógica, con el objetivo de ayudar en el proceso de toma de decisiones (Martínez & Vértiz, 2015).

El modelo matemático se compone de una serie de ecuaciones y/o desigualdades de tipo algebraico, una ecuación propone la igualdad entre dos términos, izquierdo y derecho, mediante el uso del sigo igual (=).

Los elementos que conforman una ecuación son los siguientes:

- Variable: representada por una letra y hace referencia a aquello que se desconoce.

- Coeficiente: es un número que multiplica a la variable.

- Constante: número que forma parte de la ecuación, pero no va acompañado de una variable.

- Operador: son aquellos símbolos que representan una operación.

Ejemplo de ecuación:

$$\boxed{12X + 6Y = 30}$$

Donde:

X, Y, son variables.

12 y 6, son coeficientes.

30 es la constante.

El signo más (+), es el operador.

Entre las desigualdades es posible encontrar las siguientes relaciones:

- $X < Y$
- $X > Y$
- $X \leq Y$
- $X \geq Y$

Los signos menor o igual que (≤) y mayor o igual que (≥) denotan también la posibilidad de igualdad entre los dos términos de la ecuación.

Entre los modelos matemáticos tenemos los siguientes:

- Cuantitativos y cualitativos
- Estándares y hechos a la medida
- Probabilísticos y determinísticos
- Descriptivos y de optimización
- Estáticos y dinámicos
- De simulación y no simulación

- Modelo Cualitativo: el análisis de los problemas que se presentan en una organización, parte con la definición de un modelo cualitativo hasta llegar a un modelo cuantitativo.

- Modelos Cuantitativos: se construyen mediante la inserción de símbolos matemáticos para representar relaciones entre variables y constantes. Una ecuación constituye un modelo de este tipo.

- Modelos Estándar: Se conoce como modelos estándar aquellos en los cuales es posible sustituir valores con la finalidad de obtener una respuesta y son aplicables a problemas o situaciones afines. Por ejemplo: el cálculo de costos, gastos, de pérdidas y ganancias, etc.

- Modelos hechos a la medida: conocidos con ese nombre por la particularidad de ser diseñado para un resolver un problema en específico.

- Modelos Probabilístico o estocástico: se basan en información probabilística sobre los datos que se manejan.

- Modelos determinísticos: emplean información conocida con exactitud, o que a su vez puede ser obtenida con bastante precisión.

- Modelos Descriptivos: modelos que no indican acción alguna que hay que realizar, sólo presentan una relación que expresa lo que sucede en el mundo real.

- Modelos de Optimización: Presentan un curso de acción a seguir. Son también llamados modelos normativos.

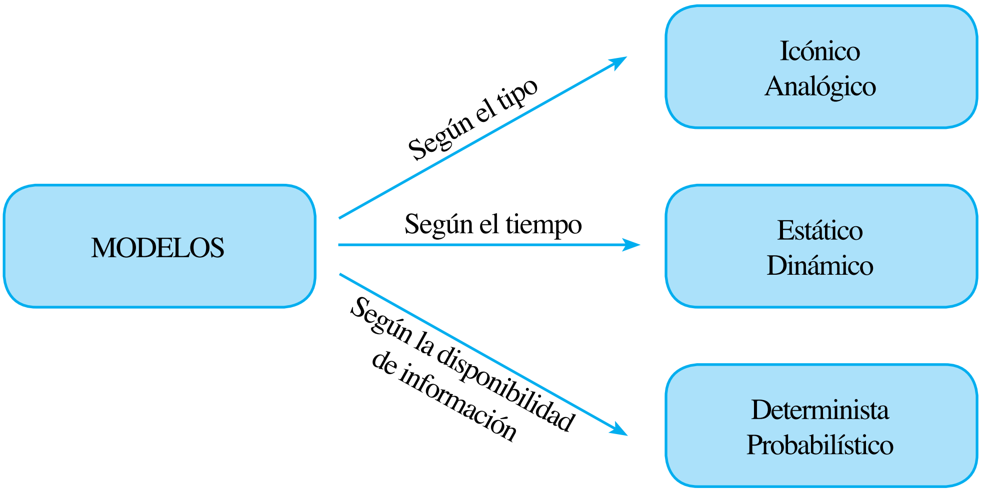
- Modelos Estáticos: se ocupan de una situación que tiene condiciones que no cambian respecto del tiempo, es decir son constantes.

- Modelos Dinámicos: modelos en los cuales se presentan variaciones en las condiciones y el tiempo, este tipo de modelos son los que se presentan con mayor frecuencia en la vida real.

- Modelos de simulación y no simulación: Los modelos de simulación son creados a partir del uso del computador, para reproducir el funcionamiento de un sistema determinado, donde los datos de entrada son reales o generados aleatoriamente. Los modelos que no permiten el uso de datos simulados en forma aleatoria son llamados no simulados, por ejemplo, los modelos hechos a medida o los de optimización.

De manera general, los modelos se pueden clasificarse dependiendo de sus características, tipo, su evolución, según la disponibilidad de información, tal como se muestra en la Fig.1.3.

Fig. 1.3. Clasificación de los modelos según el tipo, tiempo y disponibilidad de información.



Fuente: Carro, 2014.

1.7. RECOMENDACIONES PARA LA FORMULACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Para transformar un problema presentado en la vida real a un modelo matemático, se recomienda (Chediak, 2013):

- Identificar verbalmente las variables de decisión.
- Expresar el objetivo del problema en palabras para después expresar la función objetivo en términos de las variables de decisión.
- Expresar cada restricción en palabras y en función de las variables de decisión, verificando que a los dos lados de la restricción se encuentran las mismas unidades de medida.

- No olvidar colocar la restricción no explícita, considerando que en los problemas de la vida real el valor de las variables de decisión será por naturaleza un número real positivo o cero.

CAPÍTULO II
PROGRAMACIÓN LINEAL

2.1. INTRODUCCIÓN

Jean-Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés (1768-1830), conocido por su trabajo para determinar la conducción del calor a través de la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes, denominado "Series de Fourier", fue el primero en intuir la metodología de eliminación para dar solución a un sistema de desigualdades, conocido actualmente como programación lineal.

El desarrollo que ha tenido la programación lineal desde 1950 ha sido uno de los avances científicos más significativos en lo que respecta a la toma de decisiones. Actualmente, la programación lineal se ha convertido en una herramienta de uso habitual que permite a las empresas de distintos países industrializados del mundo, el ahorro de cantidades significativas de dinero, debido a la versatilidad de los programas diseñados para computadoras.

La aplicación de la programación lineal es muy variada, ya que puede ser utilizada en la asignación de instalaciones de producción a los productos hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de una cartera de inversiones hasta la selección de los patrones de envío; desde la planeación agrícola hasta el diseño de una terapia de radiación (Hillier & Lieberman, 2010).

La programación lineal es una parte de la programación matemática, la cual hace uso de ecuaciones lineales para representar o expresar problemas identificados en la vida real, ecuaciones donde todas las variables que forman parte del sistema son de grado 1, es decir, su exponente es la unidad. En este capítulo se muestra el procedimiento para expresar el problema existente, en una ecuación matemática y cómo dar solución al mismo, para lo cual es necesario dar a conocer algunas definiciones.

2.2. DEFINICIONES.

A continuación, se presentan varias definiciones utilizadas en la metodología, con la finalidad de comprender la terminología usada:

Programación Lineal: La programación lineal proporciona un ejemplo de lo que se conoce de manera más general como modelo de toma de decisiones con restricciones, también llamado modelo de optimización con restricciones (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000).

Función Objetivo: La función objetivo está representada por una variable, generalmente la letra Z, y simboliza aquello que se pretende optimizar, es decir, que el resultado logrado sea el mejor posible; por ejemplo, maximizar la utilidad o los ingresos percibidos o a su vez, minimizar los costos existentes.

Variables del problema: Son variables que se desconocen y que al momento de proceder con la resolución del problema, deben estar definidas en función del objetivo principal: la optimización de la función objetivo. Las variables del problema son también denominadas variables de decisión.

Coeficientes de la función objetivo: los coeficientes, son cantidades constantes que forman parte de la ecuación que representa a la función objetivo y se encuentran multiplicando a las variables del problema.

Restricciones: las restricciones representan aquellas condiciones que se deben cumplir o las limitaciones existentes en cuanto a disponibilidad de recursos, ya sean materiales, humanos (mano de obra), económicos, tiempo, etc. Son también conocidas como restricciones funcionales.

Restricciones no explícitas: son aquellas restricciones que no se evidencian en el problema, pero deben ser consideradas en el planeamiento y en la solución del mismo. Son condiciones o limitaciones que se encuentran de cierta manera ocultas, siendo las restricciones no explícitas más frecuentes, las siguientes:

- Que las variables sean no negativas
- Que las variables sean números enteros.

2.3. METODOLOGÍA PARA EL PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Para el planteamiento de problemas de programación lineal es necesario aplicar los siguientes pasos (Bronson, 1992):

1. **Definir las variables del problema**: Este paso consiste en identificar las variables que están inmersas en el planteamiento del problema y representarlas con letras, definiendo además sus unidades.

2. **Definir la función objetivo:** Consiste en identificar aquella variable que se va a optimizar, la cual estará representada con la letra Z y construir la ecuación matemática en función de las variables del problema y sus coeficientes. En este paso es importante definir si la optimización persigue una maximización o una minimización.

   Un problema de maximización busca determinar la combinación de actividades que permitan obtener el mayor rendimiento de los recursos basado en el criterio de máxima utilidad, en cambio el problema de minimización pretende determinar las cantidades necesarias de los recursos basándose en el criterio del costo mínimo total (González & García, 2015).

3. **Definir las restricciones**: En función de las variables del problema se procede a establecer ecuaciones para las restricciones identificadas, (una ecuación para cada restricción), por lo general, las restricciones son desigualdades del tipo mayor o igual que (≥) y/o del tipo menor o igual que (≤), existiendo en ocasiones también el uso de restricciones con signo de igualdad (=), especialmente en el caso en que se necesite producir una cantidad exacta equivalente a un número dado, por ejemplo, se desea producir un kilo de algodón, preparar dos kilos de alimento, etc.

4. **Definir las restricciones no explicitas:** Este paso consiste en identificar si las variables del problema son números enteros o no, si se trata de varia-

bles no negativas y expresar aquellas restricciones en el planteamiento del problema.

Durante el planteamiento de problemas de programación lineal se debe prestar especial atención al planteamiento de las restricciones, ya que es necesario verificar que tanto en el lado derecho como izquierdo de la restricción consten las mismas unidades de medida, por ejemplo, si el lado derecho está expresado en kilos, el lado izquierdo de la restricción deberá estar expresado también en kilos.

2.4. PROBLEMAS RESUELTOS

Ejercicio 1

Un centro cosmético prepara una crema hidratante, cuyos componentes, precio y características se encuentran descritos en la siguiente tabla:

COMPONENTES	COSTO ($/litro)	ANTOIXODANTES %	AGUA %	ACEITES VEGETALES %
A	10	25	50	25
B	12	62	23	15
C	7	45	20	35

¿Qué cantidad de cada uno de los componentes se deberían utilizar si se desea minimizar el costo al preparar 1 litro de crema hidratante, cuyo contenido de antioxidantes no sea menor al 25%, el contenido de agua no mayor al 35% y el contenido de aceites vegetales no sea menor al 40%?

Planteamiento:

Para proceder con el planteamiento del problema, es necesario seguir los pasos descritos anteriormente.

Paso 1. Definir las variables del problema:

Identificamos cuántas variables intervienen en el planteamiento del problema (aquello que se desea conocer), en este caso son tres: la fracción del litro del compuesto A, la fracción del litro del compuesto B y la fracción del litro del compuesto C, a mezclar para preparar un litro de crema hidratante, a continuación, las representamos las variables con una letra, en este caso la letra X y el subíndice que corresponde a dicha variable, así:

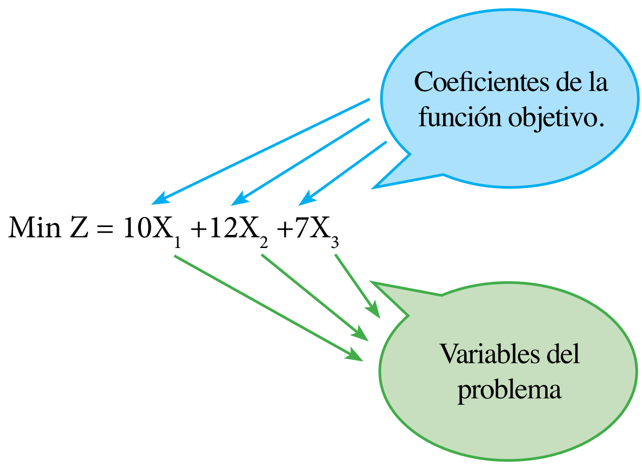
X_1= Fracción del litro del compuesto A

X_2= Fracción del litro del compuesto B

X_3= Fracción del litro del compuesto C

Paso 2. Definir la función objetivo:

Este paso consiste en identificar aquello que se desea optimizar, en este caso, se desea minimizar el costo al preparar 1 litro de crema hidratante y luego plantear la función objetivo, expresando la ecuación matemática en función de las variables del problema y sus coeficientes, de la siguiente manera:



$$\text{Min } Z = 10X_1 + 12X_2 + 7X_3$$

Los coeficientes de la función objetivo serán los costos de los componentes A, B y C, ya que se desea minimizar el costo total al preparar un litro de crema hidratante.

Paso 3. Definir las restricciones:

Se debe analizar cuáles son las limitaciones o condiciones a cumplir en el planteamiento del problema, en este caso existen cuatro:

1. Preparar un litro de crema hidratante.
2. El contenido de antioxidantes no debe ser menor al 25%.
3. El contenido de agua no debe ser mayor al 35%.
4. El contenido de aceites vegetales no debe ser menor al 40%.

Tal como menciona la metodología, se plantea una ecuación para cada restricción, así:

Restricciones:

1. Se debe preparar un litro de crema hidratante:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

La suma de las fracciones de litro de los compuestos A, B y C, debe ser un litro.

2. El contenido de antioxidantes no debe ser menor al 25%:

$$25X_1 + 62X_2 + 45X_3 \geq 25$$

En este caso, el litro de crema hidratante debe tener un contenido de antioxidantes no menor al 25%, por lo tanto, la suma de los porcentajes de antioxidantes de los componentes A, B y C, debe ser mínimo el 25%, por lo que se utiliza el signo mayor o igual que (≥) para expresar dicha condición. De igual manera se plantean las demás restricciones analizando el uso de los signos.

3. El contenido de agua no debe ser mayor al 35%:

$$50X_1 + 23X_2 + 20X_3 \leq 35$$

La suma de los porcentajes de agua que contienen los componentes A, B y C, no debe superar el 35%, por lo que se utiliza el signo menor o igual que (≤) para expresar dicho límite.

4. El contenido de aceites vegetales no debe ser menor al 40%:

$$25X_1 + 15X_2 + 35X_3 \geq 40$$

Al establecer como condición que la suma del contenido de aceites vegetales de los compuestos A, B y C no debe ser menor al 40%, se utiliza el signo mayor o igual que (≥), ya que dicho signo indica que la suma de los porcentajes debe ser efectivamente mayor al porcentaje establecido.

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

En este último paso se debe identificar si son variables enteras y no negativas o a su vez, si se cumple una sola condición. En el ejercicio propuesto las variables X_1, X_2, X_3, representan la fracción de litro de los compuestos A, B y C, para preparar un litro de crema hidratante, por lo tanto, no se trata de cantidades enteras, ya que la suma de las cantidades de los compuestos utilizadas en la preparación deberá sumar 1 (litro). Por lo tanto, se cumple únicamente con la restricción de no negatividad.

X_1, X_2, X_3, son no negativas

Finalmente, el planteamiento del problema quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 12X_2 + 7X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$25X_1 + 62X_2 + 45X_3 \geq 25$$

$$50X_1 + 23X_2 + 20X_3 \leq 35$$

$$25X_1 + 15X_2 + 35X_3 \geq 40$$

Con X_1, X_2, X_3, no negativas

En el caso de presentarse un ejercicio cuyo objetivo sea la maximización de ingresos o utilidades, la única diferencia será la utilización de la expresión Max Z, en la función objetivo.

Ejercicio 2:

Una fábrica de alimentos cuenta con dos tipos de materias primas A y B, para preparar un kilo de un suplemento alimenticio para diabéticos, el cual no debe contener más del 25% de azúcares. La empresa desea conocer qué cantidad de cada materia se debe utilizar para cumplir dicho requerimiento y a la vez maximizar sus ingresos. A continuación, se presentan las características de las materias primas en la siguiente tabla:

Planteamiento:

MATERIA PRIMA	AZÚCARES (%)	UTILIDAD QUE GENERA ($)
A	20	3,25
B	35	2,50

Paso 1. Definir las variables del problema:

Identificamos las variables intervienen en el planteamiento del problema, en este caso son dos: las cantidades de materia prima A y B, para preparar un kilo de suplemento alimenticio para diabéticos. Representamos las variables con la letra X y el subíndice que corresponde a dicha variable, así:

X_1 = cantidad de materia prima A para preparar un kilo de suplemento.

X_2 = cantidad de materia prima B para preparar un kilo de suplemento.

Paso 2. Definir la función objetivo:

En el ejercicio propuesto, se desea optimizar los ingresos, buscando una maximización de estos, a continuación, se plantea la función objetivo, en función de las variables del problema y sus coeficientes, de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 3{,}25X_1 + 2{,}50X_2$$

Los coeficientes de la función objetivo son los ingresos que genera cada tipo de materia prima.

Paso 3. Definir las restricciones:

Analizando los datos propuestos, existen dos condiciones a cumplir:

1. Preparar un kilo de suplemento alimenticio para diabéticos.

2. El contenido de azúcares del suplemento no debe exceder del 25%.

Se plantea una ecuación para cada restricción:

Restricciones:

1. Preparar un kilo de suplemento alimenticio para diabéticos.

$$X_1 + X_2 = 1$$

La suma de las cantidades de materia prima A y B deben dar como resultado un kilo de suplemento alimenticio.

2. El contenido de azúcares del suplemento no debe exceder del 25%.

$$20X_1 + 35X_2 \leq 25$$

Tratándose de porcentajes, la restricción también podría ser planteada de la siguiente manera:

$$0{,}20X_1 + 0{,}35X_2 \leq 0{,}25$$

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

En el ejercicio propuesto las variables X1, X2, representan las cantidades de materia prima A y B que serán utilizadas para preparar un kilo de suplemento alimenticio, por lo que no se trata de cantidades enteras, cumpliéndose únicamente la restricción de no negatividad de las variables.

X_1, X_2, son no negativas

El planteamiento del problema quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 3{,}25X_1 + 2{,}50X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 = 1$$

$$0{,}20X_1 + 0{,}35X_2 \leq 0{,}25$$

Con X_1, X_2, no negativas.

Ejercicio 3:

Una panadería prepara habitualmente 3 tipos de postres: pastel, tres leches y mousse de limón, los cuales requieren principalmente, los siguientes ingredientes en las cantidades detalladas a continuación:

POSTRE	HARINA (g.)	MANTEQUILLA (g.)	PRECIO DE VENTA
Pastel	200	100	\$8,00
Tres leches	150	50	\$10,00
Mousse de limón	100	65	\$12,00

La panadería dispone de 40 kg. de harina y 52 kg. de mantequilla y desea conocer cuál es la cantidad de cada tipo de postre que debe preparar para maximizar sus ingresos.

Planteamiento:

Paso 1. Definir las variables del problema:

X_1 = cantidad de postre tipo 1 a para preparar (pastel).

X_2 = cantidad de postre tipo 2 a para preparar (tres leches).

X_3 = cantidad de postre tipo 3 a para preparar (mousse de limón).

Paso 2. Definir la función objetivo:

El objetivo que persigue el negocio es la maximización de las utilidades provenientes de la venta de cada uno de los postres:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 10X_2 + 12\,X_3$$

Paso 3. Definir las restricciones:

1. Cantidad de harina disponible 40 kg = 40000 g.

$$200X_1 + 150X_2 + 100\,X_3 \leq 40000$$

2. Cantidad de mantequilla disponible 52 kg = 52000 g.

$$100X_1 + 50X_2 + 65\,X_3 \leq 52000$$

Los dos lados de la restricción deben estar expresados en la misma unidad de medida, en este caso gramos.

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

X_1, X_2, X_3 son enteras y no negativas

El planteamiento del problema quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 10X_2 + 12\, X_3$$

Sujeto a:

$$200X_1 + 150X_2 + 100\, X_3 \leq 40000$$

$$100X_1 + 50X_2 + 65\, X_3 \leq 52000$$

Con X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas.

Ejercicio 4:

Una fábrica de ropa dispone de 60 metros de tela impermeable y de 40 horas de tiempo para confeccionar chompas de hombre y de mujer. Para confeccionar el modelo de chompa para hombre, se necesitan 2 metros de tela y 3 horas de tiempo; para confeccionar el modelo de chompa para mujer, se necesitan 1,5 metros de tela y 2,5 horas. El modelo de chompa para hombre se vende en $55,00 y el modelo para mujer en $45,00. ¿Cuántas chompas para hombre y para mujer se deberán confeccionar con la finalidad de maximizar los ingresos de la fábrica?

Planteamiento:

Paso 1. Definir las variables del problema:

X_1 = unidades de chompas para hombre a confeccionar.

X_2 = unidades de chompas para mujer a confeccionar.

Paso 2. Definir la función objetivo:

El objetivo es conocer cuántas chompas de hombre y mujer se deberían confeccionar con la finalidad de obtener la mayor cantidad de ingresos.

$$\text{Max } Z = 55X1 + 45X2$$

Paso 3. Definir las restricciones:

Con la finalidad de simplificar el planteamiento del problema e identificar los coeficientes de las ecuaciones, es recomendable trasladar los datos del problema a una tabla, tal como se muestra a continuación:

VARIABLES DEL PROBLEMA	TELA PARA LA CONFECCIÓN (metros)	TIEMPO PARA LA CONFECCIÓN (horas)	PRECIO DE VENTA ($)
X_1	2	3	55,00
X_2	1,5	2,5	45,00
Disponibilidad	60	40	

De esta manera se identifican fácilmente los coeficientes de las restricciones:

1. Metros de tela impermeable disponible = 60

$$2X_1 + 1{,}5X_2 \leq 60$$

2. Horas de tiempo disponible para la confección = 40

$$3X_1 + 2{,}5X_2 \leq 40$$

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

X_1, X_2, son enteras y no negativas

El planteamiento del problema sería:

$$Max\ Z = 55X_1 + 45X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 1{,}5X_2 \leq 60$$

$$3X_1 + 2{,}5X_2 \leq 40$$

Con X_1, X_2, enteras y no negativas.

Ejercicio 5:

La empresa My Pet desea producir un balanceado para perros a un mínimo costo, utilizando tres materias primas para su producción, las cuales cuentan con las siguientes características:

MATERIA PRIMA	CEREALES (%)	VITAMINAS (%)	PROTEÍNAS (%)	COSTO/kg ($)
A	40	9	20	20,00
B	36	10	25	18,00
C	34	7	28	16,00

¿Cómo deberían mezclarse las materias primas para preparar un kilo del alimento que contenga mínimo el 35% de cereales, un 8 % de vitaminas y un 22 % de proteínas?

Planteamiento:

Paso 1. Definir las variables del problema:

X_1 = cantidad de materia prima A a mezclar.

X_2 = cantidad de materia prima B a mezclar.

X_3 = cantidad de materia prima C a mezclar.

En este caso las variables son las cantidades de las materias primas A, B, C a mezclar para la preparación de 1 kg. de balanceado.

Paso 2. Definir la función objetivo:

El objetivo es producir un balanceado para perros a un mínimo costo, entonces:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 18X_2 + 16X_3$$

Paso 3. Definir las restricciones:

1. Preparar un kilo de alimento.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

La suma de las cantidades de las materias primas utilizadas en la preparación debe ser igual a 1 kilo.

2. Contenido mínimo del 35% de cereales.

$$40X_1 + 36X_2 + 34X_3 \geq 35$$

3. Contenido mínimo del 8% de vitaminas.

$$9X_1 + 10X_2 + 7X_3 \geq 8$$

4. Contenido mínimo del 22 % de proteínas.

$$20X_1 + 25X_2 + 28X_3 \geq 22$$

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

X_1, X_2, X_3 son no negativas

En este caso las restricciones no explicitas son únicamente la no negatividad de las variables.

El problema quedaría planteado de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 18X_2 + 16X_3$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$40X_1 + 36X_2 + 34X_3 \geq 35$$

$$9X_1 + 10X_2 + 7X_3 \geq 8$$

$$20X_1 + 25X_2 + 28X_3 \geq 22$$

Con X_1, X_2, X_3 no negativas.

Ejercicio 6:

Una empresa que presta servicios de distribución posee un container de 29 toneladas de capacidad, desea saber cuál es la forma más rentable de cargar el mismo, si tiene la opción de transportar 5 tipos de productos. En la siguiente tabla se presentan las diferentes cargas con los pesos e ingresos que generarían por su transportación:

PRODUCTOS	PESO (kg.)	INGRESO ($)
P1	8500	1900,00
P2	5600	1650,00
P3	4500	1480,00
P4	7000	1830,00
P5	9000	2250,00

¿Cómo debería cargarse el container para generar un máximo ingreso? Es importante mencionar que no se puede fraccionar ninguna de las cargas de los productos, es decir se deben transportar los productos seleccionados en su totalidad.

Planteamiento:

Paso 1. Definir las variables del problema:

Las variables en este problema representarán la probabilidad de transportar cada producto, considerando la oportunidad de maximizar los ingresos por este concepto.

X_1 = variable de probabilidad de transportar el producto 1.

X_2 = variable de probabilidad de transportar el producto 2.

X_3 = variable de probabilidad de transportar el producto 3.

X_4 = variable de probabilidad de transportar el producto 4.

X_5 = variable de probabilidad de transportar el producto 5.

Paso 2. Definir la función objetivo:

El objetivo es generar un máximo ingreso por el transporte de los productos.

$$\text{Max } Z = 1900X_1 + 1650X_2 + 1480X_3 + 1830X_4 + 2250X_5$$

Paso 3. Definir las restricciones:

1. Capacidad del container 29 toneladas = 29000 kg.

$$8500X_1 + 5600X_2 + 4500X_3 + 7000X_4 + 9000X_5 \leq 29000$$

Se realiza la conversión de toneladas a kilos, para utilizar la misma unidad de medida en los dos lados de la ecuación. Se usa el signo menor o igual que debido a que el container no puede transportar más peso que el de su capacidad.

2. No se puede fraccionar ninguna de las cargas de los productos.

$$X_1 \leq 1$$

$$X_2 \leq 1$$

$$X_3 \leq 1$$

$$X_4 \leq 1$$

$$X_5 \leq 1$$

Con esta restricción se establece que no se pueden fraccionar o llevar parte de cada una de las cargas de producto, dicho de otro modo, se lleva cero o la unidad, siendo las variables enteras y no negativas, se usa el signo menor o igual para expresar dicha condición.

Paso 4. Definir las restricciones no explicitas:

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \quad \text{enteras y no negativas}$$

El planteamiento del problema quedaría de la siguiente sería:

$$\text{Max } Z = 1900X_1 + 1650X_2 + 1480X_3 + 1830X_4 + 2250X_5$$

Sujeto a:

$$8500X_1 + 5600X_2 + 4500X_3 + 7000X_4 + 9000X_5 \leq 29000$$

$$X_1 \leq 1$$

$$X_2 \leq 1$$

$$X_3 \leq 1$$

$$X_4 \leq 1$$

$$X_5 \leq 1$$

$$\text{Con } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \quad \text{enteras y no negativas.}$$

CAPÍTULO III
MÉTODO SIMPLEX

3.1. INTRODUCCIÓN

El método simplex fue desarrollado por George Dantzig, conocido como el padre de la investigación operativa, en 1947. Es considerado un procedimiento algebraico utilizado para resolver problemas de programación lineal.

El método consiste en una serie de iteraciones que pretenden encontrar la mejor solución factible, denominada también solución óptima.

La idea general del método simplex consiste en partir de una solución básica factible ir a una solución básica factible adyacente con mejor valor de la función objetivo. El proceso continúa hasta que se haya encontrado una solución óptima. Por lo que el algoritmo simplex debe (Maroto, Alcaraz, Ginestar, & Segura , 2012):

1. Encontrar una solución básica factible inicial.

2. Encontrar una solución básica adyacente a la anterior.

3. Asegurar que la nueva solución es factible.

4. Asegurar que la nueva solución es mejor que la anterior.

Si bien el método simplex consiste en un método algebraico, en el presente capitulo se muestra cómo la interpretación de los resultados obtenidos pueden contribuir de manera significativa en el proceso de toma de decisiones empresariales.

3.2. PROCEDIMIENTO PARA EL MÉTODO SIMPLEX

El procedimiento para el método simplex, basado en la eliminación de Gauss-Jordan se aplica generalmente en problemas de maximización, pudiendo también aplicarse a problemas de minimización, ya que todo problema de minimización puede ser convertido en uno de maximización invirtiendo los signos de los coeficientes, de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 7X_2$$

$$\boxed{\text{Max } (-Z) = -2X_1 - 7X_2}$$

El método de eliminación de Gauss comienza con el sistema de ecuaciones original y lo transforma, usando operaciones de fila, en un sistema equivalente en el cual se puede leer la solución directamente (Budnick, 2007).

Para el desarrollo del método simplex se propone el siguiente problema de maximización con una serie de restricciones o limitaciones a cumplir, recordando que el uso de programación lineal enfocado a la administración está principalmente orientado a la maximización de utilidades o minimización de recursos, considerando las limitaciones del sistema, entre las cuales se encuentran la disponibilidad de recursos humanos y materiales, representadas por las variables del problema.

Ejercicio 1.

$$\text{Max } Z = 30\,X_1 + 50\,X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 7$$

$$2\,X_1 + X_2 \leq 12$$

Con X_1, X_2 no negativas

Procedimiento:

Paso 1: Igualar la función objetivo a cero trasladando los términos del lado derecho de la ecuación al lado izquierdo, cambiando de signo los coeficientes.

$$\text{Función Objetivo: Max } Z = 30\ X_1 + 50\ X_2$$

$$Z - 30\ X_1 - 50\ X_2 = 0$$

Paso 2: Convertir las restricciones en igualdades, mediante el uso de variables de holgura y artificiales, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 3.1. Coeficientes de variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción.

TIPO DE RESTRICCIÓN	COEFICIENTE VARIABLE DE HOLGURA	COEFICIENTE VARIABLE ARTIFICIAL
Menor o igual que (≤)	+1	0
Mayor o igual que (≥)	-1	+1
Igual (=)	0	+1
Aproximadamente igual	+1 y -1	0

Fuente: Izar, 2012.

Cuando se tiene las restricciones de tipo menor o igual que, se añade una variable de holgura, aduciendo a dicha variable el valor que le faltaría al lado izquierdo de la ecuación para lograr la igualdad, en cada ecuación se debe añadir una variable de holgura diferente, considerando que el problema planteado tiene tres restricciones del tipo menor o igual que (≤), las ecuaciones quedarían planteadas de la siguiente manera:

$$X_1 \leq 4$$

$$\boxed{X_1 + S_1 = 4}$$

$$X_2 \leq 7$$

$$\boxed{X_2 + S_2 = 7}$$

$$2\,X_1 + X_2 \leq 12$$

$$\boxed{2\,X_1 + X_2 + S_3 = 12}$$

Paso 3: Conformar la tabla simplex con los coeficientes y variables del problema, colocando en las columnas las variables y en cada fila los coeficientes que corresponden a la función objetivo y a las restricciones, se debe añadir una columna para el resultado de las ecuaciones (en este caso representada con la letra R), tal como se muestra a continuación:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	-30	-50	0	0	0	0
F2	0	1	0	1	0	0	4
F3	0	0	1	0	1	0	7
F4	0	2	1	0	0	1	12

Variables de decisión

Variables de holgura

Donde:

F1: Coeficientes de la función objetivo.

F2: Coeficientes ecuación 1

F3: Coeficientes ecuación 2

F4: Coeficientes ecuación 3

$$Z - 30X_1 - 50X_2 = 0$$

$$X_1 + S_1 = 4$$

$$X_2 + S_2 = 7$$

$$2\,X_1 + X2 + S_3 = 12$$

Paso 4: Encontrar el elemento pivote, para lo cual se debe identificar la columna pivote seleccionando el valor más negativo entre los coeficientes de la función objetivo (en este caso se encuentra en X2), luego se procede a dividir el resultado entre cada uno de los coeficientes de la columna (no se divide entre cero ni entre valores negativos) a continuación, se selecciona la fila pivote y será aquella que contenga el cociente menor de la división. El elemento pivote es aquel que se encuentra en la intersección entre de la fila y columna, así:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	-50	0	0	0	0	
F2	0	1	0	1	0	0	4	
F3	0	0	1	0	1	0	7	7÷1=7
F4	0	2	1	0	0	1	12	12÷1=12

Paso 5: Transformar el elemento pivote en uno, esto se logra dividiendo todos los elementos de la fila para el elemento pivote, en este caso el elemento pivote ya es uno, por lo que no es necesario realizar este paso.

A manera demostrativa, se presenta el siguiente ejemplo con un elemento pivote igual a 3, para una mejor comprensión:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	-50	0	0	0	0	
F2	0	1	0	1	0	0	4	
F3	0	0	3	0	1	0	7	F3 ÷3
F4	0	2	1	0	0	1	12	

Al dividir la fila 3 para el elemento pivote, el elemento pivote se ha vuelto uno:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	-30	-50	0	0	0	0
F2	0	1	0	1	0	0	4
F3	0	0	1	0	0,33	0	2,33
F4	0	2	1	0	0	1	12

Paso 6: El siguiente paso es volver cero todos los elementos de la columna pivote, esto se logra mediante eliminación gaussiana y una serie de iteraciones entre la fila pivote y las demás filas donde se encuentran los elementos que desean volverse cero, tal como se muestra a continuación:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	-50	0	0	0	0	50F3 + F1
F2	0	1	0	1	0	0	4	
F3	0	0	1	0	1	0	7	
F4	0	2	1	0	0	1	12	(-1F3 + F4)

En este caso se desea volver cero el elemento -50 de la fila 1 y el elemento 1 de la fila 4, por lo que se multiplica el mismo elemento con signo invertido, por la fila del elemento pivote y se suma la fila donde se encuentra el elemento a volver cero.

De esta manera se obtiene la siguiente tabla:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	-30	0	0	50	0	350
F2	0	1	0	1	0	0	4
F3	0	0	1	0	1	0	7
F4	0	2	1	0	-1	1	5

Paso 7: A partir de este último paso se repite el procedimiento desde el paso 4, hasta encontrar la solución óptima factible para el problema, de la siguiente manera:

Selección del elemento pivote (paso 4):

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	0	0	50	0	350	
F2	0	1	0	1	0	0	4	4÷1=4
F3	0	0	1	0	1	0	7	
F4	0	2	0	0	-1	1	5	5÷2= 2,5

Volver uno el elemento pivote (paso 5):

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	0	0	50	0	350	
F2	0	1	0	1	0	0	4	
F3	0	0	1	0	1	0	7	
F4	0	2	0	0	-1	1	5	F4 ÷ 2

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	-30	0	0	50	0	350
F2	0	1	0	1	0	0	4
F3	0	0	1	0	1	0	7
F4	0	1	0	0	-0,5	0,5	2,5

Volver cero todos los elementos de la columna pivote (paso 6):

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-30	0	0	50	0	350	
F2	0	1	0	1	0	0	4	30F4 + F1
F3	0	0	1	0	1	0	7	(-1F4 + F2)
F4	0	1	0	0	-0,5	0,5	2,5	

Con esta última iteración, ya no existen elementos negativos en las variables de decisión y se han vuelto ceros y unos todos sus elementos, entonces podría decirse que se ha encontrado una solución factible la cual debe ser comprobada. Para encontrar la solución en la tabla simplex, en cada columna se desciende hacia el elemento uno y se dirige hacia el resultado, de la siguiente manera:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	0	0	0	35	15	425
F2	0	0	0	1	0,5	-0,5	1,5
F3	0	0	1	0	1	0	7
F4	0	1	0	0	0,5	-0,5	2,5

Solución:

$Z = 425$

$X_1 = 2{,}5$

$X_2 = 7$

Para comprobar si la solución factible es óptima, se reemplazan los valores de las variables en cada una de las restricciones del problema verificando si éstas se cumplen y se calcula Z, así:

Comprobación:

$$\text{Max } Z = 30\ X_1 + 50\ X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

$$X_2 \leq 7$$

$$2\ X_1 + X_2 \leq 12$$

Con X_1, X_2 no negativas

La primera restricción del problema es $X_1 \leq 4$, se reemplaza el valor solución de X_1 en la restricción y se comprueba si se cumple con la misma, en este caso X_1 es 2,5 y siendo menor o igual a 4, se cumple con la primera restricción:

$$\surd\ X_1 \leq 4$$

$$X_1 = 2{,}5$$

Verificando el cumplimiento de la segunda y tercera restricción se tiene:

$$\surd\ X_2 \leq 7$$

$$X_2 = 7$$

$$\surd\ 2\ X_1 + X_2 \leq 12$$

$$2(2,5) + 7 \leq 12$$

$$12 \leq 12$$

En cuanto a la restricción no explícita, se verifica también el cumplimiento, ya que expresa únicamente la no negatividad de las variables, sin considerar en este caso que sean enteras:

√ Con X_1, X_2 no negativas

$$X_1 = 2,5; X_2 = 7$$

Como los valores encontrados para X_1 y X_2, cumplen con las restricciones establecidas, se procede a realizar la comprobación de la solución Z = 425, en la función objetivo:

$$\text{Max } Z = 30\ X_1 + 50\ X_2$$

$$\text{Max } Z = 30(2,5) + 50(7)$$

$$\text{Max } Z = 75 + 350$$

√ $\text{Max } Z = 425$

Por lo tanto, se puede decir que la solución encontrada es óptima, interpretándola de la siguiente manera:

Se obtiene un beneficio máximo de Z = 425, con $X_1 = 2,5$ y $X_2 = 7$, es decir, la empresa obtendría una utilidad máxima de $ 425,00, utilizando una cantidad de 2,5 (unidades, litros, metros, kilos, etc) del recurso X_1 y una cantidad de 7 (unidades, litros, metros, kilos, etc) del recurso X_2.

Con la finalidad de proponer un ejemplo sobre cuál es la utilidad del método simplex en las ciencias administrativas y la interpretación de la solución obtenida, a continuación, se presenta el siguiente ejercicio resuelto.

Ejercicio 2

Una empresa dedicada a la producción de bienes de consumo tiene a consideración producir dos tipos de productos, basándose en la siguiente información:

DETALLE	PRODUCTO A	PRODUCTO B
Costo de producción unitario	300	250
Precio de venta $	465	375
Utilidad por unidad	165	125
Unidades demandadas	200	150
Materia prima requerida kg/u.	2	3
Mano de obra requerida horas/unidad.	4	2
Horas máquina h/unidad.	1	5

Si la empresa cuenta con 2000 kg de materia prima, 1000 horas de mano de obra y 800 horas máquina. ¿Cuántos productos de cada tipo deberán producirse con la finalidad de incrementar la utilidad?

Planteamiento del problema:

La definición de las variables del problema sería la siguiente:

X_1 = Cantidad de productos A a producir.

X_2 = Cantidad de productos B a producir.

En el problema propuesto se pretende conocer cuántos tipos de cada producto deberán producirse con la finalidad de incrementar la utilidad, por lo tanto, los coeficientes de la función objetivo serán las utilidades por unidad que genera cada producto, como se muestra a continuación:

$\text{Max } Z = 165\, X_1 + 125\, X_2$

En cuanto a la definición de restricciones, se debe considerar que las cantidades de recursos utilizados en la fabricación de los dos tipos de productos no pueden superar las cantidades de recursos disponibles y tampoco se deberá producir un número mayor a las cantidades demandadas de cada producto, como se detalla a continuación:

S.a.

$2X_1 + 3X_2 \leq 2000$ → materia prima disponible

$4X_1 + 2X_2 \leq 1000$ → mano de obra disponible (horas)

$X_1 + 5X_2 \leq 800$ → horas máquina disponibles

$X_1 \leq 200$ → demanda producto A

$X_2 \leq 150$ → demanda producto B

X_1, X_2, enteras y no negativas

Solución método simplex:

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-165	-125	0	0	0	0	
F2	0	2	3	1	0	0	2000	2000÷2=1000
F3	0	4	2	0	1	0	1000	1000÷4=250
F4	0	1	5	0	0	1	800	800÷1=800

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	-165	-125	0	0	0	0	(165F3+F1)
F2	0	2	3	1	0	0	2000	(-2F3+F2)
F3	0	1	0,5	0	0,25	0	250	
F4	0	1	5	0	0	1	800	(-1F3+F4)

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	0	-42,5	0	41,25	0	41250
F2	0	0	2	1	-0,5	0	1500
F3	0	1	0,5	0	0,25	0	250
F4	0	0	4,5	0	-0,25	1	550

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	0	-42,5	0	41,25	0	41250	
F2	0	0	2	1	-0,5	0	1500	1500÷2=750
F3	0	1	0,5	0	0,25	0	250	250÷0,5=500
F4	0	0	4,5	0	-0,25	1	550	550÷4,5=122,22

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R	
F1	1	0	-42,5	0	41,25	0	41250	(42,5F4+F1)
F2	0	0	2	1	-0,5	0	1500	(-2F4+F2)
F3	0	1	0,5	0	0,25	0	250	(-0,5F4+F3)
F4	0	0	1	0	-0,06	0,22	122,22	F4÷4,5

	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R
F1	1	0	0	0	38,89	9,44	46444
F2	0	0	0	1	-0,39	-0,44	1256
F3	0	1	0	0	0,28	-0,11	188,89
F4	0	0	1	0	-0,06	0,22	122,22

Solución:

$Z = 46444$

$X_1 = 188,89$

$X_2 = 122,22$

Comprobación:

Max $Z = 165 X_1 + 125 X_2$	$Z = 165 (188,89) + 125 (122,22)$
S.a.	√ $Z = 46444, 35$
$2X_1 + 3 X_2 \leq 2000$	$2(188,89) + 3(122,22) \leq 2000$
$4 X_1 + 2 X_2 \leq 1000$	√ $744,44 \leq 2000$
$X_1 + 5X_2 \leq 800$	$4(188,89) + 2(122,22) \leq 1000$
$X_1 \leq 200$	√ $1000 \leq 1000$
$X_2 \leq 150$	$188,89 + 5(122,22) \leq 800$
X_1, X_2, enteras y no negativas	√ $799,99 \leq 800$

Considerando que el método simplex proporciona una solución matemática que debe ser interpretada o adaptada a los problemas que se presentan en la vida real, y que la restricción no explícita menciona que las variables X_1 y X_2 deben ser enteras y no negativas, a la empresa corresponde la decisión de aproximar o no el valor de X_1, y producir a su vez 188 o 189 unidades de producto A, y 122 unidades de producto B, considerando aquella opción que le brinde mayores ingresos, de esta manera:

- Con $X_1 = 188$ y $X_2 = 122$, se obtendría $Z = 46270$

  $Z = 165 (188) + 125 (122)$

  $Z = 46270$

- Con $X_1 = 189$ y $X_2 = 122$, se obtendría $Z = 46435$

  $Z = 165 (189) + 125 (122)$

  $Z = 46435$

Analizando los valores de Z, a la empresa le convendría producir 189 unidades de producto A y 122 unidades de producto B, para obtener un ingreso máximo de \$46435 (dólares), considerando que los valores asignados a las variables $X_1 = 189$ y $X_2 = 122$, cumplen con todas las restricciones al realizar la comprobación de las mismas:

$$2(189) + 3(122) \leq 2000$$

$$\surd\ 744 \leq 2000$$

$$4(189) + 2(122) \leq 1000$$

$$\surd\ 1000 \leq 1000$$

$$189 + 5(122) \leq 800$$

$$\surd\ 799 \leq 800$$

Como se puede evidenciar, mediante dicha comprobación, al producir 189 unidades de producto A y 122 unidades de producto B, la empresa no está excediendo su disponibilidad de recursos: 2000 kg de materia prima, 1000 horas de mano de obra y 800 horas máquina, sin exceder además la demanda existente en el mercado de cada producto (200 unidades de producto A, 150 unidades de producto B).

3.3. MÉTODO BIG M

El método de la Big M también conocido como método de penalización, consiste en una derivación del método simplex generalmente utilizado para resolver problemas de programación lineal con restricciones de tipo mayor o igual que (≥) o de igualdad (=), pudiendo ser utilizado tanto en problemas de minimización como de maximización. Sin embargo, cabe mencionar que su uso se precisa cuando intervienen variables artificiales en la solución del problema planteado, siendo M una constante positiva suficientemente grande para representar una penalización adecuada en la función objetivo.

Regla de penalización para variables artificiales:

Dado M, un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente M --> ∞), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una penalización apropiada si (Taha, 2012):

Coeficiente Objetivo de la variable artificial = $\begin{cases} -M, \text{ en problemas de maximización} \\ +M, \text{ en problemas de minimización} \end{cases}$

3.3.1. Big M caso de maximización

Para desarrollar el procedimiento del método Big M, se propone el siguiente ejercicio planteado de maximización:

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 11X_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 19$$

$$X_1 + X_2 = 8$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 18$$

Con X_1, X_2 enteras y no negativas

Paso 1: Convertir las restricciones en igualdades, mediante el uso de variables de holgura y artificiales (Véase Tabla 3.1). Coeficientes de variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción.

La primera restricción es de tipo menor o igual que (≤), por lo que de acuerdo con la tabla coeficientes de variables de holgura y artificiales, se debe añadir una variable de holgura, la cual se representará con la letra *H*, entonces la igualdad quedaría de la siguiente manera:

$$3X_1 + 2X_2 + H_1 = 19$$

Realizando el mismo proceso con la segunda restricción de igualdad, según la tabla de coeficientes se debe añadir una variable artificial, representada con la letra *F*, entonces tenemos:

$$X_1 + X_2 + F_1 = 8$$

En la tercera restricción, de tipo mayor o igual que (≥), se debe restar una variable de holgura y añadir una variable artificial, según lo que indica la tabla de coeficientes de variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción, entonces la restricción quedaría expresada así:

$$X_1 + 3X_2 - H_2 + F_2 = 18$$

Paso 2: Incluir en la función objetivo todas las variables de holgura y artificiales añadidas previamente en las restricciones. Las variables de holgura irán acompañadas del coeficiente cero (0) y las variables artificiales del coeficiente M, el cual, a su vez irá acompañado del signo + o -, según menciona la regla de penalización para variables artificiales, al tratarse de un caso de maximización o de minimización.

En este caso, el objetivo es una maximización, por lo que la variable artificial F tendrá el coeficiente *-M*, como se detalla a continuación:

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 11X_2 + 0H_1 + 0H_2 - MF_1 - MF_2$$

Paso 3: Formar la primera tabla considerando todas las variables y expresando las ecuaciones en función de los coeficientes. Los coeficientes del renglón objetivo se colocan sobre el renglón de variables, de la siguiente manera:

Renglón objetivo

Constantes

	9	11	0	0	*-M*	*-M*
R	X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
19	3	2	1	0	0	0
8	1	1	0	0	1	0
18	1	3	0	-1	0	1

Cuerpo

Parte identidad

Para buscar la primera solución dentro de la tabla, también llamada solución básica, dentro de la parte identidad se deben identificar las variables cuyos coeficientes sean +1, para luego agregar a la zona de solución la variable identificada en la parte identidad junto con el coeficiente del renglón objetivo. Los coeficientes del renglón objetivo conformarán a su vez la columna objetivo, así:

			9	11	0	0	-M	-M
		R	X_1	X_2	H_1	H_2	F_1	F_2
0	H_1	19	3	2	1	0	0	0
-*M*	F_1	8	1	1	0	0	1	0
-*M*	F_2	18	1	3	0	-1	0	1
Columna objetivo	Zona de solución							

Las variables que se encuentran en la zona de solución son denominadas variables básicas. De esta manera la primera solución es la siguiente:

$$H_1 = 19$$

$$F_1 = 8$$

$$F_2 = 18$$

$$Z = 0$$

Siendo Z igual a cero porque no interviene en la zona de solución, al igual que las variables X_1, X_2, H_2, denominadas no básicas.

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 19$	$X_1 = 0$
$F_1 = 8$	$X_2 = 0$
$F_2 = 18$	$H_2 = 0$
	$Z = 0$

Paso 4: el siguiente paso será conformar el reglón de utilidad o renglón índice a través de la fórmula siguiente:

Fig. 3.1. Fórmula para generar el renglón índice para maximización.

Número índice = { Sumatoria de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento de la columna objetivo } - { Elemento correspondiente a la columna en el renglón objetivo }

Fuente: Izar, 2012.

Es importante mencionar que la fórmula expuesta se usa en problemas de maximización, en casos de minimización los signos de la fórmula deberán ser invertidos, más adelante se desarrollará un ejercicio para su demostración.

Renglón Índice:

Al aplicar la fórmula para generar el renglón índice se tiene:

Renglón objetivo

			9	11	0	0	-M	-M
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
0	$\mathbf{H_1}$	19	3	2	1	0	0	0
-M	$\mathbf{F_1}$	8	1	1	0	0	1	0
-M	$\mathbf{F_2}$	18	1	3	0	-1	0	1

Columna objetivo

Para X_1:

Sumatoria de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento de la columna objetivo:

$$3(0) + 1(-M) + 1(-M) = 0 - 2M$$

Menos el elemento correspondiente a la columna en el renglón objetivo:

$$= 0 - 2M - 9$$

$$= - 9 - 2M$$

Para X_2:

Sumatoria de los productos de los elementos de la columna por el respectivo elemento de la columna objetivo:

$$2(0) + 1(-M) + 3(-M) = 0 - 4M$$

Menos el elemento correspondiente a la columna en el renglón objetivo:

$$=0 - 4M - 11$$

$$= - 11 - 4M$$

Para H_1:

Sumatoria de los productos:

$$1(0) + 0(-M) + 0(-M) = 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

Elemento correspondiente en el renglón objetivo:

$$= 0 - 0$$

Para H_2:

Sumatoria de los productos:

$$0(0) + 0(-M) + (-1)(-M) = M$$

Elemento correspondiente en el renglón objetivo:

$$= 0 + M$$

Para F_1:

Sumatoria de los productos:

$$0(0) + 1(-M) + 0(-M) = 0 - M + 0 = 0 - M$$

Elemento correspondiente en el renglón objetivo:

$$= 0 - M - (-M)$$

$$= - M + M$$

$$= 0$$

Para F_2:

Sumatoria de los productos:

$$0(0) + 0(-M) + 1(-M) = -M$$

Elemento correspondiente en el renglón objetivo:

$$= -M - (-M)$$

$$= 0$$

Para R:

Sumatoria de los productos:

$$19(0) + 8(-M) + 18(-M) = -26M$$

Elemento correspondiente en el renglón objetivo:

$$= -26M - 0$$

$$= 0 - 26M$$

Cómo puede observarse, cada número índice generado contiene una parte numérica y una parte M, a continuación, se coloca bajo la tabla simplex en una fila la parte numérica y en otra fila la parte M, del modo siguiente:

			9	11	0	0	-M	-M	
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	
0	$\mathbf{H_1}$	19	3	2	1	0	0	0	
-M	$\mathbf{F_1}$	8	1	1	0	0	1	0	
-M	$\mathbf{F_2}$	18	1	3	0	-1	0	1	
		0	-9	-11	0	0	0	0	Parte numérica
		-26	-2	-4	0	1	0	0	Parte M

Cuerpo

Paso 5: Este paso consiste en ubicar la columna de trabajo o columna clave, debiendo observar en la parte *M* el número índice más negativo que forme parte del cuerpo de la tabla. En el caso de presentarse un empate, se selecciona al azar.

Siempre que la tabla simplex esté compuesta por las dos partes (parte numérica y parte *M*), se dará prioridad a la parte con términos en *M* y luego a la parte numérica.

En este caso el elemento más negativo es -4, localizado en la columna que pertenece a X_2, por lo que la columna que se encuentra encabezando esa variable será la columna clave.

Columna clave

			9	11	0	0	-M	-M
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
0	$\mathbf{H_1}$	19	3	2	1	0	0	0
-M	$\mathbf{F_1}$	8	1	1	0	0	1	0
-M	$\mathbf{F_2}$	18	1	3	0	-1	0	1
		0	-9	-11	0	0	0	0
		-26	-2	-4	0	1	0	0

A continuación, se debe hallar el renglón de trabajo o renglón clave dividiendo la columna de constantes entre el elemento que corresponde a la columna clave, se recuerda que no se debe dividir para números negativos o para cero. Entonces se tiene:

En la primera fila:

$$19 \div 2 = 9{,}5$$

En la segunda fila:

$$8 \div 1 = 8$$

En la tercera fila:

$$18 \div 3 = 6$$

El renglón clave será aquel que contenga el menor cociente de las divisiones realizadas, en este caso se encuentra en la tercera fila, por lo que se procede a señalar dicho renglón.

Renglón clave

			9	11	0	0	-M	-M	
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	
0	$\mathbf{H_1}$	19	3	2	1	0	0	0	
-M	$\mathbf{F_1}$	8	1	1	0	0	1	0	
-M	$\mathbf{F_2}$	18	1	3	0	-1	0	1	$\div 3$
		0	-9	-11	0	0	0	0	
		-26	-2	-4	0	1	0	0	

El elemento que se encuentra en la intersección entre la columna y el renglón clave es el denominado *número clave* o *elemento pivote*, en este ejercicio es el número 3 y el paso siguiente consiste en volver uno el elemento pivote dividiendo todo el renglón para dicho elemento. Una vez vuelto uno el elemento pivote se sustituye la variable y contribución que encabeza el renglón clave por la variable y contribución que encabeza la columna clave, de la siguiente manera:

			9	11	0	0	-M	-M
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**F_1**	**F_2**
0	**H_1**	19	3	2	1	0	0	0
-M	**F_1**	8	1	1	0	0	1	0
11	**F_2**	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333
		0	-9	-11	0	0	0	0
		-26	-2	-4	0	1	0	0

La variable X_2 al ingresar a la zona de solución, es considerada una variable básica, en cuanto a la variable artificial F_2 al salir de la zona de solución deja de ser básica. La metodología simplex indica que es posible eliminar de la tabla simplex las columnas encabezadas por las variables artificiales una vez que dejan de ser básicas.

El siguiente procedimiento será volver cero todos los elementos que se encuentran arriba y abajo del elemento pivote mediante eliminación gaussiana, tal como se explicó en la metodología simplex, tal como se indica a continuación:

				9	11	0	0	-M	-M	
			R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**F_1**	**F_2**	
f1	0	**H_1**	19	3	2	1	0	0	0	(-2f3 + f1)
f2	*-M*	**F_1**	8	1	1	0	0	1	0	(-1f3 + f2)
f3	*11*	**X_2**	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333	
f4			0	-9	-11	0	0	0	0	(11f3 + f4)
f5			-26	-2	-4	0	1	0	0	(4f3 + f5)

Para la primera fila se tiene:

f1	19	3	2	1	0	0	0	(-2f3 + f1)
	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333	
	7	2,333	0	1	0,667	0,000	-0,667	

Para la segunda fila se tiene:

f2	8	1	1	0	0	1	0	(-1f3 + f2)
	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333	
	2	0,667	0	0	0,333	1	-0,333	

Para la cuarta fila se tiene:

f4	0	-9	-11	0	0	0	0	(11f3 + f4)
	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333	
	66	-5,333	0	0	-3,667	0	3,667	

Para la quinta fila se tiene:

f5	-26	-2	-4	0	1	0	0	(4f3 + f5)
	6	0,333	1	0	-0,333	0	0,333	
	-2	-0,667	0	0	-0,333	0	1,333	

Al realizar estas iteraciones se genera la nueva tabla simplex en donde según lo antes mencionado, se ha omitido la columna correspondiente a la variable F_2.

			9	11	0	0	-M
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**F_1**
0	**H_1**	7	2,333	0	1	-0,667	0
-M	**F_1**	2	0,667	0	0	0,333	1
11	**X_2**	6	0,333	1	0	-0,333	0
		66	-5,333	0	0	-3,663	0
		-2	-0,667	0	0	-0,333	0

La tabla simplex presenta una nueva solución, la cual no puede ser considerada óptima debido a que todavía existen números negativos en el renglón índice.

Nueva solución:

Variables básicas	Variables no básicas
$H_1 = 7$	$X_1 = 0$
$F_1 = 2$	$X_2 = 0$
$X_2 = 6$	$F_2 = 0$
$Z = 66$	

Paso 6: Este último paso consiste en repetir el paso 5 hasta encontrar la solución óptima al problema planteado, es decir hasta cuando no existan números negativos en el renglón índice. En el caso de que el procedimiento se vuelva cíclico (se vuelvan nuevamente negativos los números índice) se detiene el procedimiento ya que no existe solución.

Selección de la columna clave:

			9	11	0	0	-M
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$
0	$\mathbf{H_1}$	7	2,333	0	1	-0,667	0
-M	$\mathbf{F_1}$	2	0,667	0	0	0,333	1
11	$\mathbf{X_2}$	6	0,333	1	0	-0,333	0
		66	-5,333	0	0	-3,663	0
		-2	-0,667	0	0	-0,333	0

Selección del renglón clave:

En la primera fila:

$$7 \div 2{,}333 = 3$$

En la segunda fila:

$$2 \div 0{,}667 = 3$$

En la tercera fila:

$$6 \div 0{,}333 = 18$$

Existe un empate entre los cocientes de las divisiones realizadas, por lo que se procede a seleccionar al azar, en este caso se selecciona la fila 2. Selecionado el renglón clave, se vuelve uno el elemento pivote diviendo todo el renglón para dicho elemento.

			9	11	0	0	-M	
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{H_2}$	$\mathbf{F_1}$	
0	$\mathbf{H_1}$	7	2,333	0	1	-0,667	0	
-M	$\mathbf{F_1}$	2	0,667	0	0	0,333	1	$\div$ 0,667
11	$\mathbf{X_2}$	6	0,333	1	0	-0,333	0	
		66	-5,333	0	0	-3,663	0	
		-2	-0,667	0	0	-0,333	0	

La variable de la columna clave y su contribución pasan a encabezar el renglón clave, con este procedimiento, la variable artificial F_1, sale de la tabla simplex. El siguiente paso será volver cero los elementos que se encuentran dentro de la columna clave mediante las operaciones especificadas en cada renglón:

			9	11	0	0	
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	
0	**H_1**	7	2,333	0	1	0,667	(-2,333f2 + f1)
9	**X_1**	3	1	0	0	0,5	
11	**X_2**	6	0,333	1	0	-0,333	(-0,333f2 + f3)
		66	-5,333	0	0	-3,667	(5,333f2 + f4)
		-2	-0,667	0	0	-0,333	(0,667f2 + f5)

Con esto la tabla simplex quedaría de la siguiente manera:

			9	11	0	0
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**
0	**H_1**	0	0	0	1	-0,5
9	**X_1**	3	1	0	0	0,5
11	**X_2**	5	0	1	0	-0,5
		82	0	0	0	-1
		0	0	0	0	0

Al no existir más elementos negativos en el renglón índice, se ha llegado a la solución del problema planteado, siendo esta la siguiente:

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 5$$

$$Z = 82$$

Obtenida la solución, se procede con la comprobación con la finalidad de verificar el cumplimiento de las restricciones:

$\text{Max } Z = 9X_1 + 11X_2$	Comprobación:
Sujeto a:	$Z = 9(3) + 11(5)$
$3X_1 + 2X_2 \leq 19$	$\surd\ Z = 82$
$X_1 + X_2 = 8$	$3(3) + 2(5) \leq 19$
$X_1 + 3X_2 \geq 18$	$\surd\ 19 \leq 19$
X_1, X_2 enteras y no negativas	$\surd\ 3 + 5 = 8$
	$3 + 3(5) \geq 18$
	$\surd\ 18 \geq 18$

En cuanto a la interpretación de la solución obtenida mediante el método Big M, la empresa deberá asignar un valor de 3 al recurso que representa la variable X_1, un valor de 2 al recurso que representa la variable X_2, para obtener una ganancia máxima de $Z = 82$.

3.3.2. Big M caso de minimización

A continuación, se presenta la resolución de un problema de minimización, el cual generalmente es utilizado por las empresas para resolver problemas de producción a un costo mínimo:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 5X_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 28$$

$$X_1 + X_2 = 10$$

X_1, X_2 enteras y no negativas

Paso 1: Convertir las restricciones en igualdades, mediante el uso de variables de holgura y artificiales (Véase Tabla 3.1). Coeficientes de variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción.

En este problema de minimización, la primera restricción es de tipo mayor o igual que (≥), de acuerdo con la tabla coeficientes de variables de holgura y artificiales, se debe restar una variable de holgura y sumar una variable artificial, las cuales se representarán con las letras *H* y *F* respectivamente, de la siguiente manera:

$$3X_1 + 2X_2 - H_1 + F_1 = 28$$

En la segunda restricción de igualdad, según la tabla de coeficientes se debe añadir una variable artificial, entonces tenemos:

$$X_1 + X_2 + F_2 = 10$$

Para nuestra Función objetiva, como es Minimizar tenemos que sumar +MF de las variables artificiales y las holguras sumarian con +0H.

Paso 2: Incluir en la función objetivo todas las variables de holgura y artificiales añadidas previamente en las restricciones. Las variables de holgura se acompañan del coeficiente cero (0) y las variables artificiales del coeficiente M, el cual, a su vez irá acompañado del sino + o -, según menciona la regla de penalización para variables artificiales.

El problema propuesto trata de una minimización por lo que la variable artificial F tendrá el coeficiente +M, como se detalla a continuación:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 5X_2 - 0H_1 + MF_1 + MF_2$$

Paso 3: Formar la primera tabla simplex incluyendo todas las variables y expresando las ecuaciones en función de los coeficientes. Cabe recordar que los coeficientes del renglón objetivo se colocan sobre el renglón de variables, de la siguiente manera:

Constantes

Renglón objetivo

	6	5	0	*M*	*M*
R	X_1	X_2	H_1	F_1	F_2
28	3	2	-1	1	0
10	1	1	0	0	1

Cuerpo

Parte identidad

Parar hallar la primera solución dentro de la tabla se identifican las variables cuyos coeficientes sean +1 en la parte identidad y se agregan a la zona de solución, la variable junto con el coeficiente del renglón objetivo. Los coeficientes del renglón objetivo conforman la columna objetivo:

			6	5	0	M	M
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
M	F_1	28	3	2	-1	1	0
M	F_2	10	1	1	0	0	1
Columna objetivo	Zona de solución						

De esta manera la primera solución es:

$$F_1 = 28$$

$$F_2 = 10$$

$$Z = 0$$

Z es cero debido a que no interviene en la zona de solución, al igual que las variables X_1, X_2, H_1, denominadas no básicas.

Variables básicas	Variables no básicas
$F_1 = 28$	$X_1 = 0$
$F_2 = 10$	$X_2 = 0$
	$H_1 = 0$
	$Z = 0$

Paso 4: Conformar el reglón de utilidad o renglón índice. En caso de minimización la formula presenta la siguiente variación:

Fig. 3.2. Fórmula para generar el renglón índice para minimización.

$$\text{Número índice} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Elemento} \\ \text{correspondiente} \\ \text{a la columna en el} \\ \text{renglón objetivo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Sumatoria de los} \\ \text{productos de los} \\ \text{elementos de la} \\ \text{columna por el} \\ \text{respectivo elemento} \\ \text{de la columna} \\ \text{objetivo} \end{array} \right\}$$

Fuente: Izar, 2012.

Renglón Índice:

Para X_1: 6 - (3(M) + 1(M)) = 6 - 4M

Para X_2: 5 - (2(M) + 1(M)) = 5 - 3M

Para H_1: 0 - (-1(M) + 0(M)) = 0 + M

Para F_1: M - (1(M) + 0(M)) = 0

Para F_2: M - (0(M) + 1(M)) = 0

Para R: 0 - (28(M) + 10(M)) = 0 - 38M

Una vez conformado el renglón índice, se integra a la tabla simplex, separando en dos filas la parte numérica y la parte M, tal como se muestra a continuación:

			6	5	0	M	M	
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**F_1**	**F_2**	
M	**F_1**	28	3	2	-1	1	0	
M	**F_2**	10	1	1	0	0	1	
		0	6	5	0	0	0	Parte numérica
		-38	-4	-3	1	0	0	Parte M

Paso 5: Selección de la columna clave identificando el número índice más negativo dentro del cuerpo de la tabla en la parte M. En este caso es -4, siendo X1 la variable que encabeza la columna clave:

			6	5	0	M	M
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**F_1**	**F_2**
M	**F_1**	28	3	2	-1	1	0
M	**F_2**	10	1	1	0	0	1
		0	6	5	0	0	0
		-38	-4	-3	1	0	0

Selección del renglón clave: será aquel que contenga el menor cociente como resultado de dividir las constantes para los elementos de la columna clave:

Para la fila 1: 28 ÷ 3 = 9,33

Para la fila 2: 10 ÷ 1 = 10

El menor cociente es 9,33 por lo que la fila uno será el renglón clave:

			6	5	0	M	M	
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**F_1**	**F_2**	
M	**F_1**	28	3	2	-1	1	0	÷ 3
M	**F_2**	10	1	1	0	0	1	
		0	6	5	0	0	0	
		-38	-4	-3	1	0	0	

Identificado el renglón clave, volver uno el elemento pivote dividiendo todo el renglón para dicho elemento, realizada la operación, se sustituye la variable y la contribución que encabeza el renglón clave por la variable y contribución que encabeza la columna clave. Al realizar esta sustitución, la variable X_1 ingresa a la zona de solución, su contribución 6 pasa a formar parte de la columna objetivo y se elimina la variable artificial F_1 de la tabla simplex:

				6	5	0	M	
			R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{F_2}$	
f1	*6*	$\mathbf{X_1}$	9,333	1	0,667	-0,333	0	
f2	*M*	$\mathbf{F_2}$	10	1	1	0	1	(-1f1 + f2)
f3			0	6	5	0	0	(-6f1 + f3)
f4			-38	-4	-3	1	0	(4f1 + f4)

A continuación, se vuelven cero todos los elementos que se encuentran dentro de la columna clave, de esta manera:

Para la fila dos:

f2	10	1	1	0	1	(-1f1 + f2)
	9,333	1	0,667	-0,333	0	
	0,667	0	0,333	0,333	1	

Para la fila tres:

f3	0	6	5	0	0	(-6f1 + f3)
	9,333	1	0,667	-0,333	0	
	-56	0	1	2	0	

Para la fila cuatro:

f4	-38	-4	-3	1	0	(4f1 + f4)
	9,333	1	0,667	-0,333	0	
	-0,667	0	-0,333	-0,333	0	

Paso 6: Repetir desde el paso 5 hasta encontrar la solución óptima:

Selección de la Columna Clave:

			6	5	0	M
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{F_2}$
6	$\mathbf{X_1}$	9,333	1	0,667	-0,333	0
M	$\mathbf{F_2}$	0,667	0	0,333	0,333	1
		-56	0	1	2	0
		-0,667	0	-0,333	-0,333	0

Selección del renglón o fila clave:

$$9{,}33 \div 0{,}667 = 13{,}99$$

$$0{,}667 \div 0{,}333 = 2$$

La variable X_2 y su contribución 5, pasan a la zona de solución y a la columna objetivo respectivamente, la variable F_2 y su contribución M, salen de la tabla simplex:

			6	5	0	
		R	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{H_1}$	
6	$\mathbf{X_1}$	9,333	1	0,667	-0,333	
5	$\mathbf{X_2}$	0,667	0	0,333	0,333	÷ 0,333
		-56	0	1	2	
		-0,667	0	-0,333	-0,333	

Volver uno el elemento pivote:

				6	5	0
			R	**X_1**	**X_2**	**H_1**
f1	*6*	**X_1**	9,333	1	0,667	-0,333
f2	*5*	**X_2**	2	0	1	1
f3			-56	0	1	2
f4			-0,667	0	-0,333	-0,333

Volver cero todos los elementos dentro de la columna clave:

				6	5	0	
			R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	
f1	*6*	**X_1**	9,333	1	0,667	-0,333	(-0,667f2 + f1)
f2	*5*	**X_2**	2	0	1	1	
f3			-56	0	1	2	(-1f2 + f3)
f4			-0,667	0	-0,333	-0,333	(0,333f2 + f4)

Para la fila 1:

f1	9,333	1,000	0,667	-0,333	(-0,667f2 + f1)
	2	0	1	1	
	8	1	0	-1	

Para la fila 3:

f3	-56	0	1	2	(-1f2 + f3)
	2	0	1	1	
	-58,00	0	0	1	

Para la fila 4

f4	-0,667	0	-0,333	-0,333	(0,333f2 + f4)
	2	0	1	1	
	0	0	0	0,000	

Solución del problema: $X_1 = 8$, $X_2 = 2$, $Z = 58$

			6	5	0	M
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**F_2**
6	**X_1**	8	1	0	-1	0
5	**X_2**	2	0	1	1	1
		-58	0	0	1	0
		0	0	0	0	0

Comprobación:

Min $Z = 6X_1 + 5X_2$

Sujeto a:

$3X_1 + 2X_2 \geq 28$

$X_1 + X_2 = 10$

X_1, X_2 enteras y no negativas

Comprobación:

$Z = 6(8) + 5(2)$

√ $Z = 58$

$3(8) + 2(2) \geq 28$

√ $28 \geq 28$

$8 + 2 = 10$

√ $10 = 10$

En cuanto a la interpretación de la solución obtenida mediante el método Big M, en caso de minimización, la empresa deberá asignar un valor de 8 al recurso que representa la variable X_1, un valor de 2 al recurso que representa la variable X_2, para lograr un costo mínimo en la producción equivalente a $Z = 58$.

3.3.3. Casos especiales del Método Simplex

La metodología simplex puede presentar algunos casos especiales al momento de resolver problemas de programación lineal, siendo los más frecuentes los descritos a continuación:

Desempates en la columna o renglón clave:

Cuando se genera un empate al momento de seleccionar la columna clave, se puede seleccionar al azar cualquiera de las columnas, únicamente se verá afectado el desarrollo de la metodología en el número de iteraciones a realizarse.

En caso de que el empate se genere al momento de seleccionar el renglón clave, también es recomendable seleccionar al azar, sin embargo, si se escoge el renglón equivocado podría darse que el método vaya del primer vértice al segundo sin producirse cambios en la función objetivo y luego regresar del segundo vértice al primero, transformándose en un ciclo indefinido sin llegar a la solución final. Este proceso es conocido como degeneración del simplex y en caso de presentarse, se soluciona simplemente cambiando el renglón seleccionado.

No existe variable básica de salida:

Cuando en el desarrollo de la metodología simplex, los elementos de la columna clave son menores o iguales a cero no es posible seleccionar el renglón clave, en este caso se denominan problemas de Z no acotada, pudiendo Z ser infinita o negativa. Este tipo de inconvenientes se presentan al existir errores en el planteamiento del problema o al haber cometido errores durante la resolución, para solucionarlo es necesario volver a revisar el planteamiento y los cálculos realizados para lograr identificar dónde reside el error y corregirlo.

Términos negativos en el segundo miembro de las restricciones:

En caso de presentarse valores negativos en el segundo miembro de las restricciones, se debe multiplicar toda la restricción por (-1) y continuar con la resolución del problema de manera habitual, como ejemplo se tiene la siguiente restricción:

$$2X1 + 3X2 \geq -4$$

$$(-1)\ 2X1 + 3X2 \geq -4$$

$$-2X1 - 3X2 \geq 4$$

Precios Sombra:

Un precio sombra es la cantidad que el valor óptimo de la función objetivo cambiaría si el lado derecho de una restricción aumentara en una unidad (Budnick, 2007).

Los precios sombra representan la relación existente entre el aumento que se genera en la función objetivo al aumentar una unidad la constante de una restricción. Los precios sombra se encuentran en los coeficientes de las variables de holgura en el renglón índice, para una mejor comprensión se presenta el siguiente ejemplo tomado de Izar (2012):

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 4X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 8$$

Con X_1, X_2 no negativas

La tabla final del problema resuelto por el método Big M es la siguiente:

			6	4	0	0
		R	X_1	X_2	H_1	H_2
0	H_1	1,333	0	1,333	1	-0,333
6	X_1	2,667	1	0,667	0	0,333
		16	0	0	0	2
		0	0	0	0	0

De esta manera los coeficientes de las variables de holgura en el renglón índice son los siguientes:

$$H_1 = 0; H_2 = 2$$

Lo cual indica que el precio sombra para la primera restricción es cero y para la segunda restricción es dos. Al realizar la interpretación se tiene:

Siendo $H_1 = 0$, la función objetivo no aumentará al aumentar una unidad la constante de la primera restricción ($X_1 + 2X_2 \leq 4$), por ejemplo, si la constante de la restricción en lugar de 4 fuera 5, no existiría ningún cambio en Z = 16.

Al ser $H_2 = 2$, se tiene que la función objetivo aumentará en dos unidades por cada unidad que se aumente en la constante de la segunda restricción ($3X_1 + 2X_2 \leq 8$), por ejemplo, si en lugar de 8 la constante fuera 9, Z sería igual a 18.

3.4. DUALIDAD

Asociado a cualquier problema lineal también denominado problema principal o primal existe un problema que se encuentra estrechamente relacionado llamado problema dual (Valencia, 2018).

Por lo tanto, la dualidad puede ser interpretada de la siguiente manera: para cada problema programación lineal de maximización existirá un problema asociado de minimización y viceversa.

La importancia de la dualidad radica en las siguientes razones (Hillier & Lieberman, 2010):

- El problema dual permite ahorrar un gran número de cálculos, sobre todo cuando el problema primal tiene un número considerable de restricciones y pocas variables.
- Se relaciona de manera importante con el análisis de sensibilidad, útil para analizar cómo cambia la función objetivo ante variaciones de las condiciones del problema de programación lineal.

- Proporciona información importante sobre la manera óptima de aplicar recursos escasos con el fin de obtener beneficios económicos.

3.4.1. Planteamiento del problema dual

Según Davis & McKeown (1986) el planteamiento del problema dual puede realizarse a través de los siguientes pasos:

1. Invertir el sentido de la función objetivo. Si el problema primal es de maximización, el dual será de minimización y viceversa.
2. Invertir el sentido de las desigualdades de las restricciones. Si el signo en el problema primal es del tipo menor o igual que (≤), en el problema dual será mayor o igual que (≥) y viceversa.
3. Los coeficientes de la función objetivo en el problema primal pasan a ser las constantes de las restricciones del problema dual. El problema dual tendrá entonces tantas restricciones como variables tenga el primal.
4. Las constantes de las restricciones del problema primal pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del problema dual, por lo tanto, el problema dual tendrá tantas variables como restricciones tenga el primal.
5. Los coeficientes de las restricciones del problema primal se colocan de manera que las filas del primal serán las columnas del problema dual, a su vez las columnas del primal pasan a ser las filas del dual.
6. Las variables del problema primal son denominadas X, en tanto que las variables del dual son denominadas Y, debiendo ser no negativas.

Para ilustrar los pasos para el planteamiento del problema dual, se presenta el ejercicio de maximización resuelto por el método Big M:

Coeficientes de la función objetivo.

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 11X_2$$

Sujeto a:

Constantes de las restricciones

$$3X_1 + 2X_2 \leq 19$$

$$X_1 + X_2 = 8$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 18$$

Con X_1, X_2 enteras y no negativas

Paso 1. Invertir el sentido de la función objetivo: siendo el problema primal de maximización, el problema dual será de minimización. Para identificar el problema dual se puede agregar como subíndice la letra D, así:

$$\text{Min } Z_D =$$

Paso 2. Invertir el sentido de las desigualdades de las restricciones, las restricciones de igualdad mantienen el signo.

Paso 3. Los coeficientes de la función objetivo 9 y 11 del problema primal pasan a ser las constantes de las restricciones del problema dual. Entonces el problema dual tendrá en este caso únicamente dos restricciones.

Paso 4. Las constantes de las restricciones del problema primal 19, 8 y 18 pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del problema dual, el cual tendrá a su vez tres variables: Y_1, Y_2, Y_3:

$$\text{Min } Z_D = 19Y_1 + 8Y_2 + 18Y_3$$

Paso 5. Los coeficientes de las restricciones de las filas del primal serán las columnas del problema dual o a su vez las columnas del primal pasan a ser las filas del dual

Coeficientes del primal	
3	2
1	1
1	3

Coeficientes del dual		
3	1	1
2	1	3

Paso 6. Las variables del problema primal son denominadas *X*, en tanto que las variables del dual son denominadas *Y*.

Finalmente, el problema dual será:

$$\text{Min } Z_D = 19Y_1 + 8Y_2 + 18Y_3$$

Sujeto a:

$$3Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 9$$

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 = 11$$

Con Y_1, Y_2, Y_3 no negativas

3.4.2. Resolución del problema dual

La resolución del problema dual puede hacerse mediante el método simplex tradicional o mediante el método Big M, en este caso al ser un problema de minimización se utilizará el método Big M:

Paso 1: Convertir las restricciones en igualdades, considerando el uso de variables de holgura y artificiales de la Tabla 3.1. Coeficientes de variables de holgura y artificiales según el tipo de restricción.

Para la primera restricción:

$$3Y_1 + Y_2 + Y_3 - H_1 + F_1 = 9$$

Para la segunda restricción:

$$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 + F_2 = 11$$

Paso 2: Incluir en la función objetivo todas las variables de holgura y artificiales añadidas previamente en las restricciones:

$$\text{Min } ZD = 19Y1 + 8Y2 + 18Y3 - 0H1 + MF1 + MF2$$

Paso 3: Formar la primera tabla simplex:

			19	8	18	0	M	M
		R	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**H_1**	**F_1**	**F_2**
M	**F_1**	9	3	1	1	-1	1	0
M	**F_2**	11	2	1	3	0	0	1
Columna objetivo	Zona de solución							

Paso 4: Conformar el reglón de utilidad o renglón índice:

Para Y_1: 19 - (3(M) + 2(M)) = 19 - 5M

Para Y_2: 8 - (1(M) + 1 (M)) = 8 - 2M

Para Y_3: 18 - (1(M) + 3(M)) = 18 - 4M

Para H_1: 0 - (-1(M) + 0(M)) = 0 + M

Para F_1: M - (1(M) + 0(M)) = 0

Para F_2: M - (0(M) + 1(M)) = 0

Para R: 0 - (9(M) + 11(M)) = 0 - 20M

Con esto la tabla simplex sería:

			19	8	18	0	M	M	
		R	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**H_1**	**F_1**	**F_2**	
M	**F_1**	9	3	1	1	-1	1	0	
M	**F_2**	11	2	1	3	0	0	1	
		0	19	8	18	0	0	0	Parte numérica
		-20	-5	-2	-4	1	0	0	Parte M
			Columna clave						

Selección del renglón clave:

			19	8	18	0	M	M	
		R	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**H_1**	**F_1**	**F_2**	
19	**Y_1**	9	3	1	1	-1	1	0	$9 \div 3 = 3$
M	**F_2**	11	2	1	3	0	0	1	$11 \div 2 = 5{,}5$
		0	19	8	18	0	0	0	
		-20	-5	-2	-4	1	0	0	

Volver uno el elemento pivote y cero todos los elementos dentro de la columna clave:

				19	8	18	0	M	M	
			R	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**H_1**	**F_1**	**F_2**	
f1	*19*	**Y_1**	3	1	0,333	0,3333	-0,333	0,333	0	
f2	*M*	**F_2**	11	2	1	3	0	0	1	(-2f1 + f2)
f3			0	19	8	18	0	0	0	(-19f1 + f3)
f4			-20	-5	-2	-4	1	0	0	(5f1 + f4)

Fila dos:

f2	11	2	1	3	0	0	1	(-2f1 + f2)
	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	
	5	0	0,333	2,333	0,667	-0,667	1	

Fila tres:

f3	0	19	8	18	0	0	0	(-19f1 + f3)
	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	
	-57	0	1,667	11,667	6,333	-6,333	0	

Fila cuatro:

f4	-20	-5	-2	-4	1	0	0	(5f1 + f4)
	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	
	-5	0	-0,333	-2,333	-0,667	1,667	0	

Con esto la nueva tabla simplex sería la siguiente, y la columna clave aquella encabezada por la variable Y_3:

			19	8	18	0	M	M	
		R	$\mathbf{Y_1}$	$\mathbf{Y_2}$	$\mathbf{Y_3}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	
19	$\mathbf{Y_1}$	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	$3 \div 0,333 = 9$
M	$\mathbf{F_2}$	5	0	0,333	2,333	0,667	-0,667	1	$5 \div 2,333 = 2,14$
		-57	0	1,667	11,667	6,333	-6,333	0	
		-5	0	-0,333	-2,333	-0,667	1,667	0	

Volver uno el elemento pivote y cero todos los elementos dentro de la columna clave:

				19	8	18	0	M	M	
			R	Y_1	Y_2	Y_3	H_1	F_1	F_2	
f1	*19*	Y_1	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	(-0,333f2 + f1)
f2	*18*	Y_3	2,142	0	0,143	1	0,286	-0,286	0,428	
f3			-57	0	1,667	11,667	6,333	-6,333	0	(-11,667f2 + f3)
f4			-5	0	-0,333	-2,333	-0,667	1,667	0	(2,333f2 + f4)

Fila uno:

f1	3	1	0,333	0,333	-0,333	0,333	0	(-0,333f2 + f1)
	2,142	0	0,143	1	0,286	-0,286	0,428	
	2,286	1	0,286	0,0004	-0,428	0,428	-0,14	

Fila tres:

f3	-57	0	1,667	11,667	6,333	-6,333	0	(-11,667f2 + f3)
	2,142	0	0,143	1	0,286	-0,286	0,428	
	-82	0	0	0	3	-3	-5	

Fila cuatro:

f4	-5,000	0	-0,333	-2,333	-0,667	1,667	0	(2,333f2 + f4)
	2,142	0	0,143	1	0,286	-0,286	0,428	
	0	0	0	0	0	1	1	

Con estas iteraciones, al no existir más elementos negativos en el renglón índice, la tabla simplex final sería la siguiente:

			19	8	18	0	M	M	
		R	$\mathbf{Y_1}$	$\mathbf{Y_2}$	$\mathbf{Y_3}$	$\mathbf{H_1}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	
19	$\mathbf{Y_1}$	2,286	1	0,286	0	-0,428	0,428	-0,143	
18	$\mathbf{Y_3}$	2,142	0	0,143	1	0,286	-0,286	0,428	
		-82	0	0	0	3	-3	-5	Solución del primal
		0	0	0	0	0	1	1	

Solución del problema dual:

$Y_1 = 2{,}29$

$Y_2 = 0$

$Y_3 = 2{,}14$

$Z = 82$

Comprobación:

Min $Z_D = 19Y_1 + 8Y_2 + 18Y_3$

Sujeto a:

$3Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 9$

$2Y_1 + Y_2 + 3Y_3 = 11$

Con Y_1, Y_2, Y_3 no negativas

$Z = 19(2{,}29) + 8(0) + 18(2{,}14)$

√ $Z = 82$

$3(2{,}29) + 0 + 2{,}14 \geq 9$

√ $9 \geq 9$

$2(2{,}29) + 0 + 3(2{,}14) = 11$

√ $11 = 11$

√ X_1, X_2 no negativas

La importancia del problema dual radica en que, al resolverse, proporciona la solución del primal y el mismo valor de Z, como se puede verificar en la resolución del problema primal, cuyo resultado por el método Big M fue el siguiente:

			9	11	0	0
		R	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**
0	**H_1**	0	0	0	1	-1,831
9	**X_1**	3	1	0	0	0,499
11	**X_2**	5	0	1	0	-0,499
		82	0	0	0	-1
		0	0	0	0	0

3.4.3. Interpretación económica del problema dual

La interpretación de la solución del problema dual proporcionada una visión sobre la manera óptima de utilizar los recursos que se dispone (Hillier & Lieberman, 2010).

Por lo tanto, se debe estar dispuesto a pagar un costo mayor por un recurso hasta por el valor de su variable dual correspondiente a la solución (Izar, 2012).

Por ejemplo, en la resolución del dual Y_1 = 2,29, lo cual quiere decir que se podría pagar como máximo $ 2, 29 por cada unidad extra utilizada de dicho recurso.

3.5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓNLINEAL MEDIANTE SOLVER

Solver es una herramienta de complemento de Microsoft Office Excel que permite llevar a cabo análisis matemáticos orientados a la logística o a la producción, determinando el valor máximo o mínimo de la celda objetivo, la cual se encuentra sujeta a las restricciones establecidas en los valores de otras celdas de la hoja de cálculo.

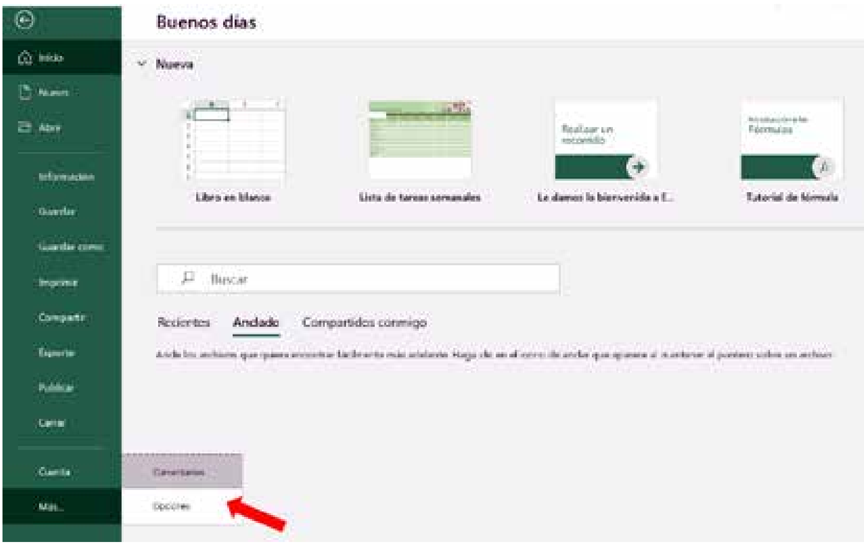
Para resolver problemas de programación lineal mediante Solver, es necesario cargar o activar el complemento en Excel, siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

3.5.1. Activación de Solver en Excel

Para activar la herramienta Solver en Excel 2010 y todas las versiones posteriores del programa se deben seguir los siguientes pasos:

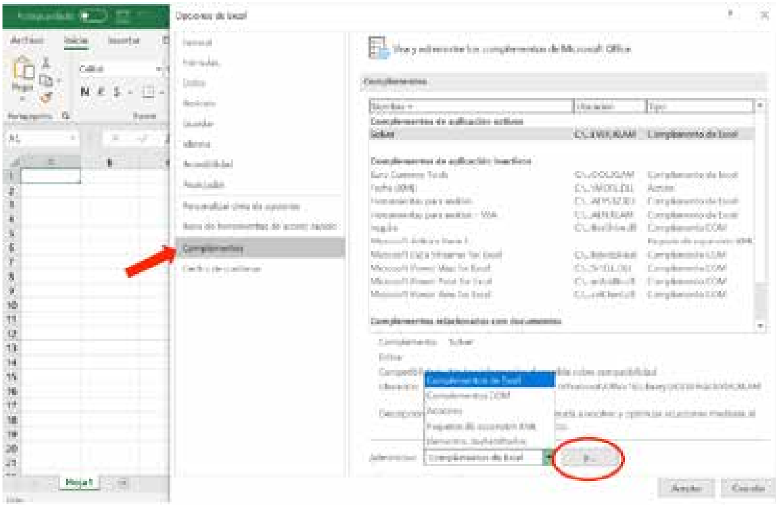
1. En el menú **Archivo** seleccionar **Opciones**.

Fig. 3.3. Selección de Opciones en el menú Archivo.



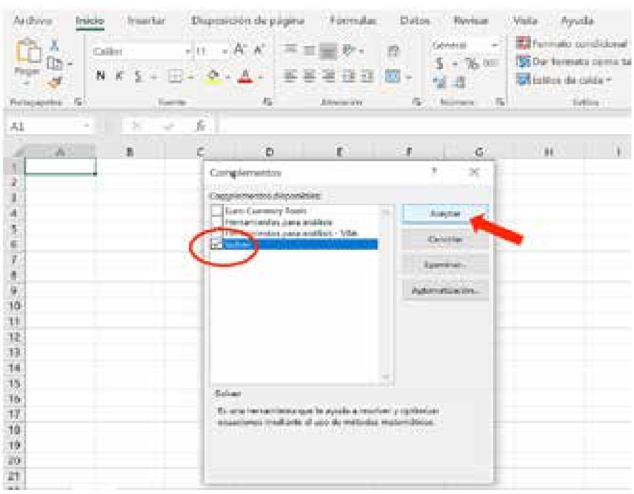
2. Dar clic en **Complementos**, en la opción **Administrar** seleccionar Complementos **de Excel** y dar clic en **Ir**.

Fig. 3.4. Selección de Complementos de Excel.



3. Seleccionar la opción **Solver** y dar clic en **Aceptar**.

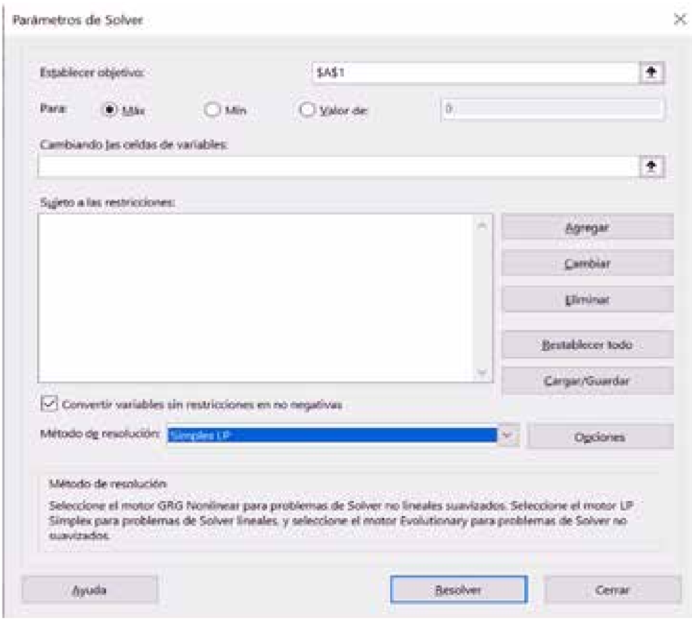
Fig. 3.5. Selección de Complemento Solver.



4. Dar clic en la opción **Datos** del menú y seleccionar **Solver**, (Fig. 3.6) a continuación, se despliega la ventana **Parámetros de Solver** (Fig. 3.7.) para empezar a trabajar.

Fig. 3.6. Selección de la herramienta Solver en el menú Datos.

Fig. 3.7. Ventana Parámetros de Solver.



Dentro de la ventana parámetros de Solver se encuentran varias casillas y opciones, a continuación, se describen las principales:

Establecer objetivo: contendrá la celda con la fórmula de la función objetivo.

Para: se indicará si se trata de una maximización o de una minimización.

Cambiando las celdas variables: contendrá las fórmulas de las celdas con las variables de decisión.

Sujeta a las restricciones: Se ingresarán las celdas con las fórmulas de las restricciones mediante la opción Agregar. Las opciones Cambiar, Eliminar, Restablecer todo, Cargar/Guardar tienen como finalidad la edición de las restricciones.

Método de resolución: contiene varios métodos de solución entre los cuales se escogerá *Simplex LP* (simplex programación lineal).

Resolver: resuelve el problema, una vez ingresados todos los datos.

3.5.2. Pasos para resolver ejercicios de PL mediante Solver

La resolución de ejercicios de programación lineal (PL) mediante Solver es un procedimiento bastante sencillo, para su ilustración, se propone el siguiente ejercicio de maximización:

Resolver mediante Solver el siguiente ejercicio de programación lineal:

$$\text{Max } Z = 51{,}8X_1 + 43{,}70X_2 + 32{,}90X_3$$

Sujeto a:

$$18X_1 + 14X_2 + 10X_3 \leq 5000$$

$$418X_1 + 350X_2 + 310X_3 \leq 120000$$

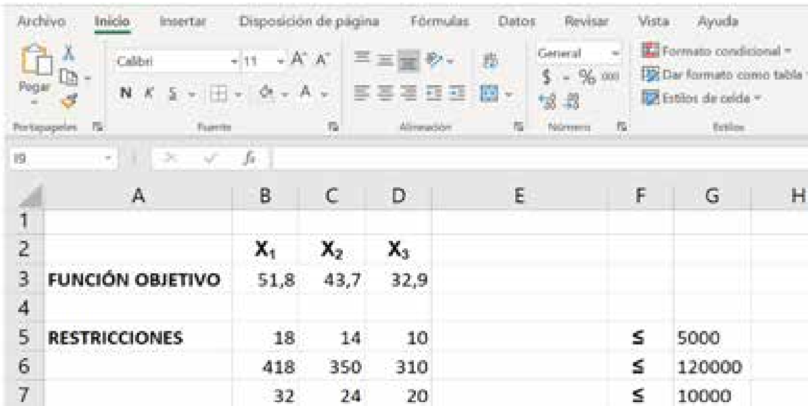
$$32X_1 + 24X_2 + 20X_3 \leq 10000$$

X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas.

El primer paso será crear en Excel las celdas con las fórmulas para la función objetivo, variables de decisión y restricciones, así:

Paso 1: Asignar una columna a cada variable de decisión e ingresar los coeficientes de la función objetivo y los coeficientes de las restricciones, a la derecha se reservará una columna para los cálculos correspondientes, a continuación, se ingresan los signos de las restricciones y el resultado de cada restricción (Fig. 3.8).

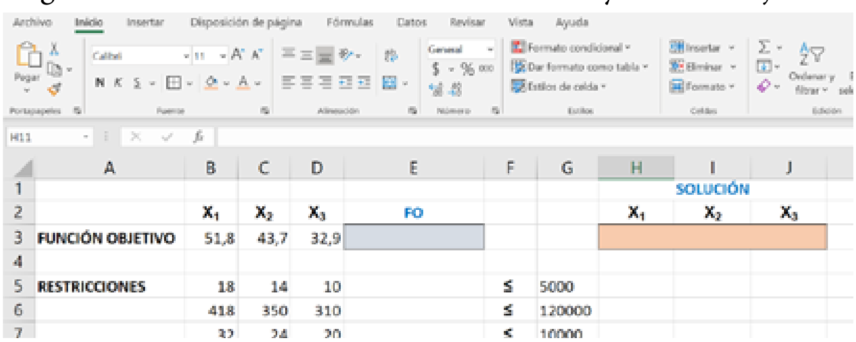
Fig. 3.8. Ingreso de coeficientes y restricciones en Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		X_1	X_2	X_3				
3	FUNCIÓN OBJETIVO	51,8	43,7	32,9				
4								
5	RESTRICCIONES	18	14	10		≤	5000	
6		418	350	310		≤	120000	
7		32	24	20		≤	10000	

Paso 2: Crear y marcar de color las celdas para las variables de decisión en donde se mostrarán los valores calculados por Solver (solución) y la celda dónde se mostrará el valor de Z (FO). Fig. 3.9.

Fig. 3.9. Celdas solución variables de decisión y función objetivo.

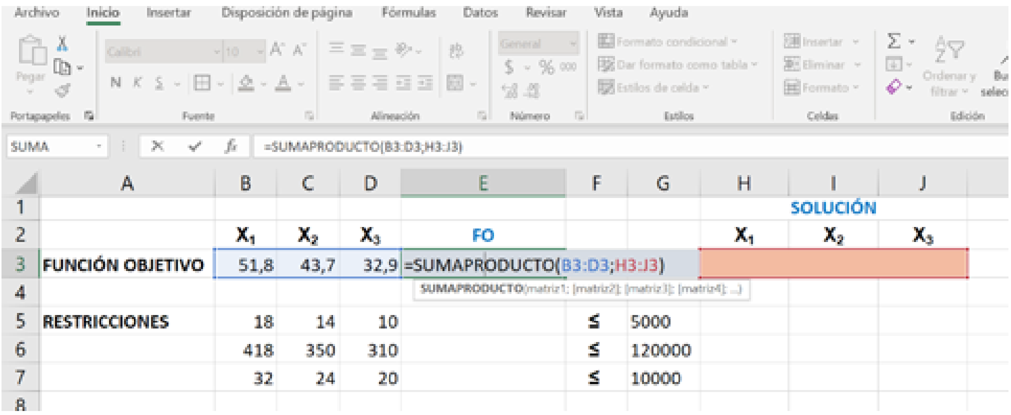


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									SOLUCIÓN	
2		X_1	X_2	X_3	FO			X_1	X_2	X_3
3	FUNCIÓN OBJETIVO	51,8	43,7	32,9						
4										
5	RESTRICCIONES	18	14	10		≤	5000			
6		418	350	310		≤	120000			
7		32	24	20		≤	10000			

Paso 3: Como se puede evidenciar, la función objetivo y las restricciones son la suma del producto de los coeficientes por las variables decisión, por lo cual se utiliza la función SUMAPRODUCTO en las celdas reservadas para el cálculo de Z y de las restricciones.

Para el cálculo de Z, en la celda de la función objetivo (FO), se coloca el signo igual (=), seguido de la función SUMAPRODUCTO, entre paréntesis se seleccionan las celdas donde se encuentran los coeficientes de la función objetivo separados por punto y coma (;) de las celdas seleccionadas donde se encuentran las variables de decisión. Fig. 3.10.

Fig. 3.10. Función SUMAPRODUCTO para el cálculo de Z.



Para el cálculo de las restricciones, se procede de igual manera, colocando junto a cada restricción la función SUMAPRODUCTO, seleccionando las celdas de los coeficientes que corresponden a la restricción y las celdas donde se encuentran las variables de decisión. Ver Fig. 3.11 a Fig. 3.13.

Fig. 3.11. Función SUMAPRODUCTO para la primera restricción.

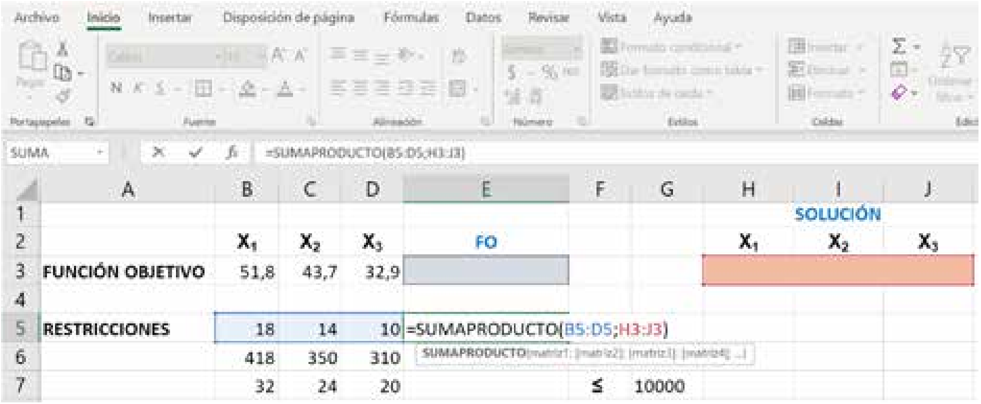


Fig. 3.12. Función SUMAPRODUCTO para la segunda restricción.

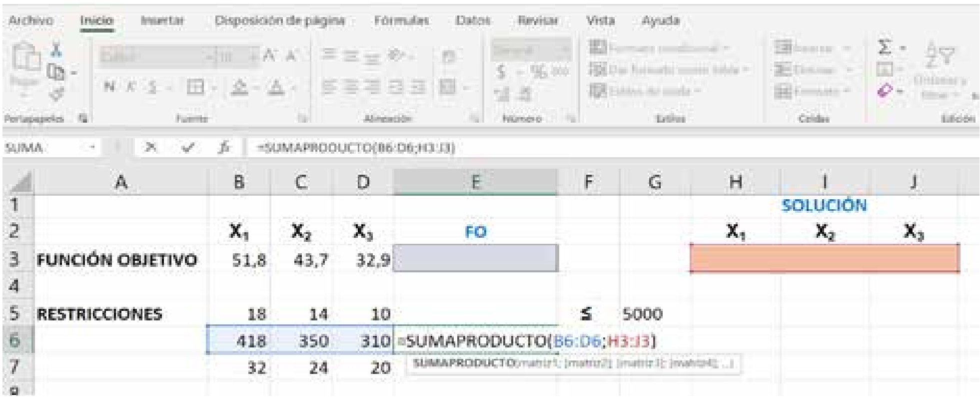
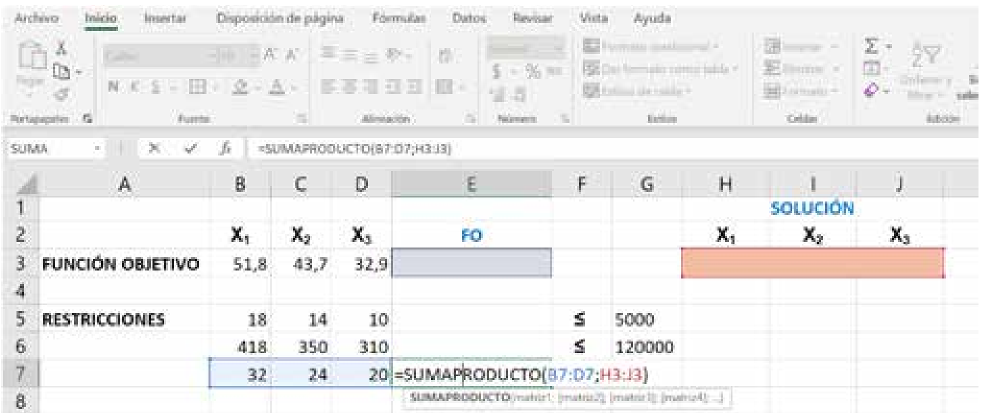


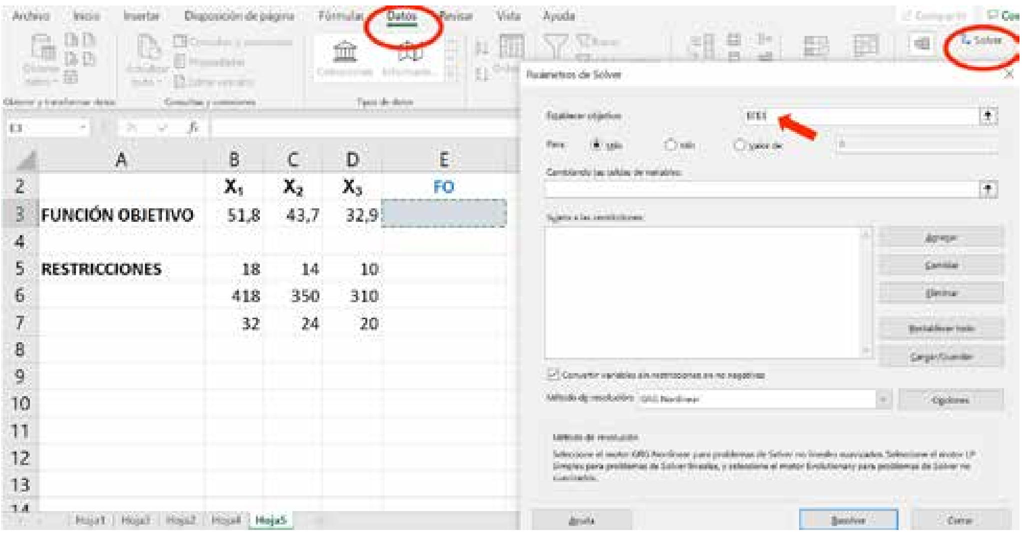
Fig. 3.13. Función SUMAPRODUCTO para la tercera restricción.



Paso 4: Para proceder con la resolución del problema planteado, en la barra de menús se debe dar clic sobre la opción **Datos** y luego seleccionar **Solver**, a continuación, se despliega la ventana **Parámetros de Solver** (Fig. 3.14.), en donde se ingresarán las celdas que contienen las fórmulas y las restricciones del problema, de la siguiente manera:

- En la casilla **Establecer objetivo**, seleccionar aquella celda en donde se encuentra la función SUMAPRODUCTO de la función objetivo, en este caso se trata de la celda E3.
- En la opción **Para**, seleccionar si se trata de un problema de maximización o de minimización, el problema planteado tiene como objetivo la maximización por lo que se seleccionará **Máx**.

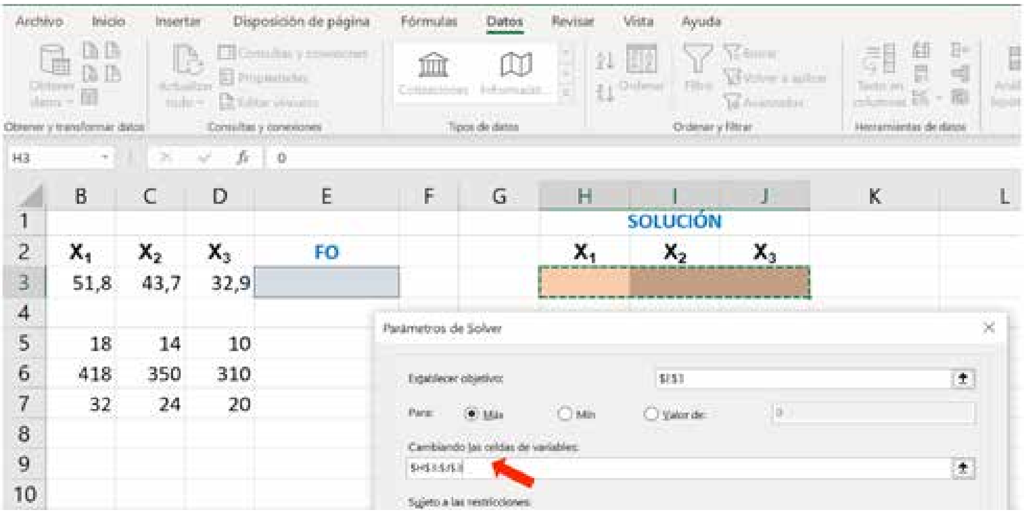
Fig. 3.14. Parámetros de Solver - establecer objetivo.



- **Cambiando las celdas variables**, se procederá a seleccionar las celdas marcadas de color creadas para las variables de decisión (H3, I3, J3). Fig. 3.15.

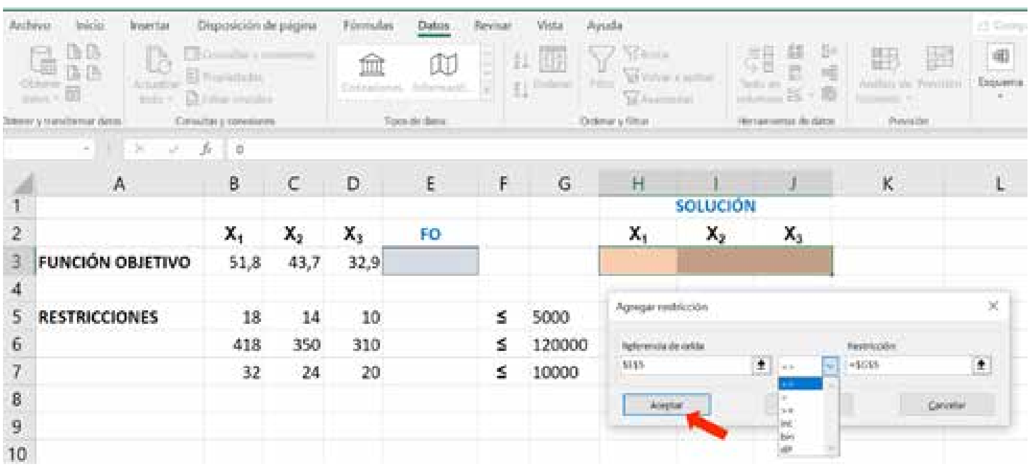
Para el ingreso de las restricciones, se da clic sobre el botón **Agregar**.

Fig. 3.15. Parámetros de Solver – cambiando las celdas variables.



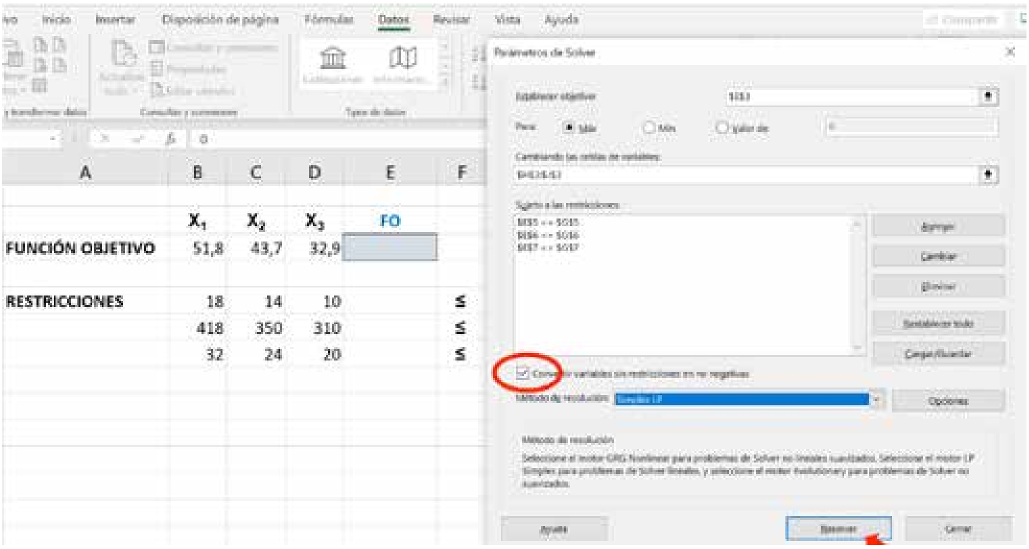
Luego de dar clic en **Agregar** se despliega la ventana **Agregar Restricción**, y se agregan una por una las restricciones. En la casilla **Referencia de celda**, se debe seleccionar aquella celda que contiene la función SUMAPRODUCTO de la primera restricción, en este caso **E5**, luego se selecciona el signo de la restricción y finalmente en la casilla **Restricción** se selecciona la celda que contiene el resultado, el cual se encuentra en la celda G5 y se da clic en **Aceptar**. Fig. 3.16.

Fig. 3.16. Parámetros de Solver – agregar restricción.



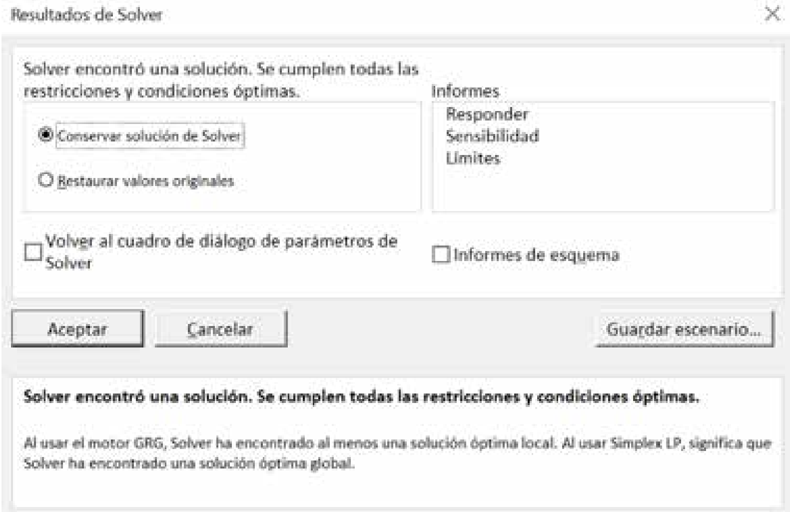
Luego del ingreso de la primera restricción, esta se visualiza ya en la ventana **Sujeto a las restricciones**, en caso de haber cometido algún error es posible editarla dando clic en Cambiar o eliminarla al dar clic en Eliminar. Para el ingreso de las demás restricciones se procede de la misma manera antes explicada, dando clic en **Agregar**. Cuando se encuentran ingresadas todas las restricciones, se debe dar clic en **Convertir restricciones en no negativas** y seleccionar **Simplex LP** en **Método de resolución**, ya que se trata de un problema de programación lineal. Por último, se da clic sobre la opción **Resolver**. Fig. 3.17.

Fig. 3.17. Parámetros de Solver – método de resolución.



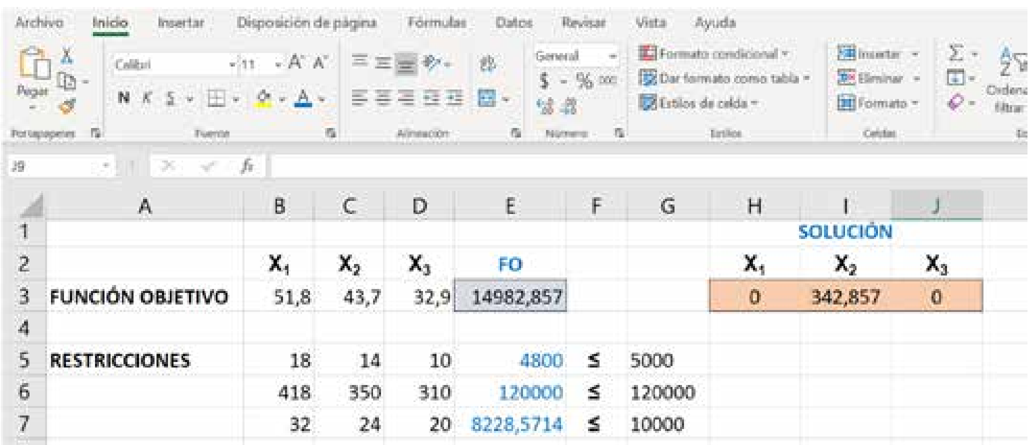
Finalmente se muestra el cuadro **Resultados de Solver** (Fig. 3.18), con el mensaje: “Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas”, y con el recuadro marcado **Conservar solución de Solver**, luego de lo cual se da clic en **Aceptar**.

Fig. 3.18. Resultados Solver.



Los resultados obtenidos por Solver, tanto para la función objetivo (celda E3) como para las variables de decisión (celdas H3:J3) se visualizan en las celdas de la hoja de cálculo destinadas para su efecto. En cuanto a la comprobación de las restricciones, este resultado se encuentra en las celdas que contienen la función SUMAPRODUCTO de cada una de las restricciones, siendo las celdas E5, E6 y E7 respectivamente. Véase Fig. 3.19.

Fig. 3.19. Solución del problema propuesto.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									SOLUCIÓN	
2		X_1	X_2	X_3	FO			X_1	X_2	X_3
3	FUNCIÓN OBJETIVO	51,8	43,7	32,9	14982,857			0	342,857	0
4										
5	RESTRICCIONES	18	14	10	4800	≤	5000			
6		418	350	310	120000	≤	120000			
7		32	24	20	8228,5714	≤	10000			

Siendo la solución para el problema propuesto:

$$Z = 14982{,}857 \text{ con } X_1 = 0; X_2 = 342{,}857; X_3 = 0$$

Y al tener que cumplirse la restricción no explícita: X_1, X_2, X_3 enteras y no negativas, el paso siguiente será la interpretación de la solución proporcionada, recordando que se trata de una solución matemática que debe ser adaptada a los hechos de la vida real.

En casos donde el cuadro Resultados de Solver muestre algún mensaje de error, es recomendable revisar el ingreso de los datos o que las fórmulas ingresadas en las celdas de Excel sean correctas.

Con fines didácticos, a continuación, se procederá a resolver mediante Solver los dos ejercicios resueltos a través del método simplex.

3.5.3. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1

Resolver mediante Solver, el siguiente ejercicio de programación lineal:

$$\text{Max } Z = 30\, X_1 + 50\, X_2$$

Sujeto a:

$$X_1 \leq 4$$

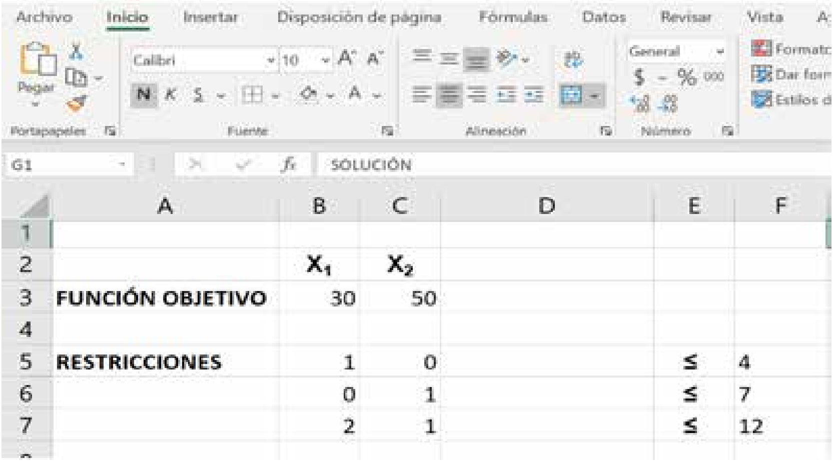
$$X_2 \leq 7$$

$$2\, X_1 + X_2 \leq 12$$

Con X_1, X_2 no negativas

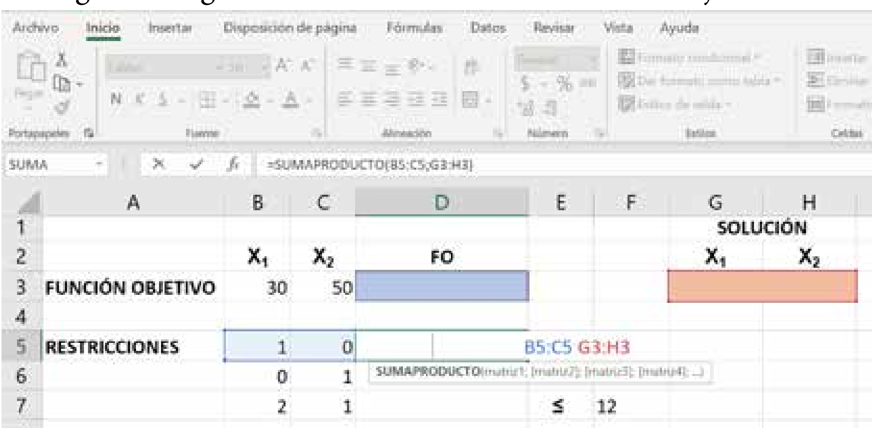
El ingreso de los coeficientes y restricciones se realiza tal como se explicó en el paso 1 para resolver ejercicios de PL mediante Solver. Fig. 3.20.

Fig. 3.20. Ingreso de coeficientes y restricciones ejercicio 1.



A continuación, se realizarán el segundo y tercer paso a la vez, los cuales consisten en la creación de las celdas para la función objetivo, para las variables de decisión y el ingreso de la fórmula SUMAPRODUCTO para los cálculos correspondientes. Fig. 3.21.

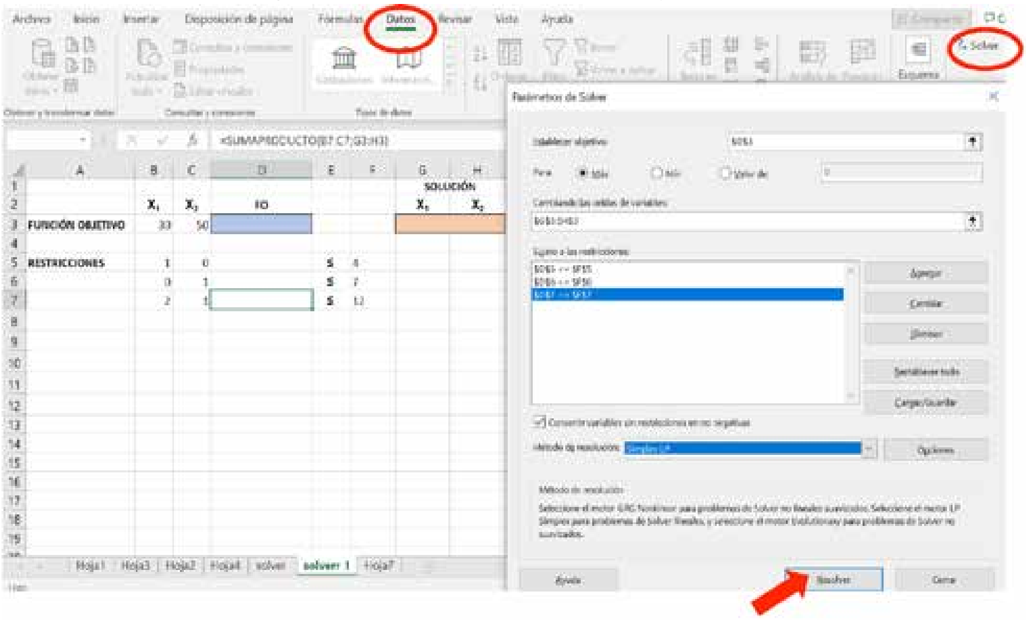
Fig. 3.21. Ingreso de fórmula SUMAPRODUCTO ejercicio 1.



El siguiente paso será dar clic en la opción **Datos** del menú, seleccionar **Solver** e ingresar los datos correspondientes en la ventana **Parámetros de Solver**. En este caso, en la celda D3 se encuentra la fórmula para el cálculo de la función objetivo y las celdas que contienen las variables de solución son G3 y H3.

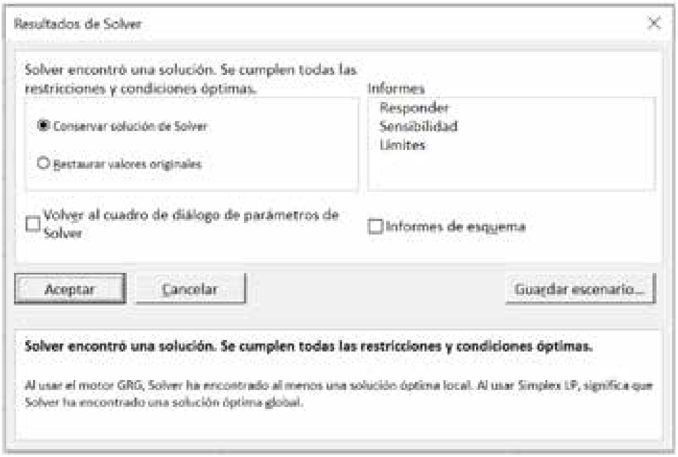
En las celdas D5, D6, D7 se encuentran las fórmulas SUMAPRODUCTO para las restricciones y en las celdas F5, F6 y F7 el resultado de estas, respectivamente. Una vez ingresados todos los datos (tal como menciona el paso 4 para la resolución de problemas mediante Solver), se selecciona el método de resolución *Simplex LP* y se da clic en **Resolver**. Fig.3.22.

Fig. 3.22. Parámetros de Solver ejercicio 1.



A continuación, se muestran los resultados de Solver y se da clic en Aceptar para poder visualizarlos en la hoja de trabajo de Excel (Fig.3.23).

Fig. 3.23. Resultados de Solver ejercicio 1.



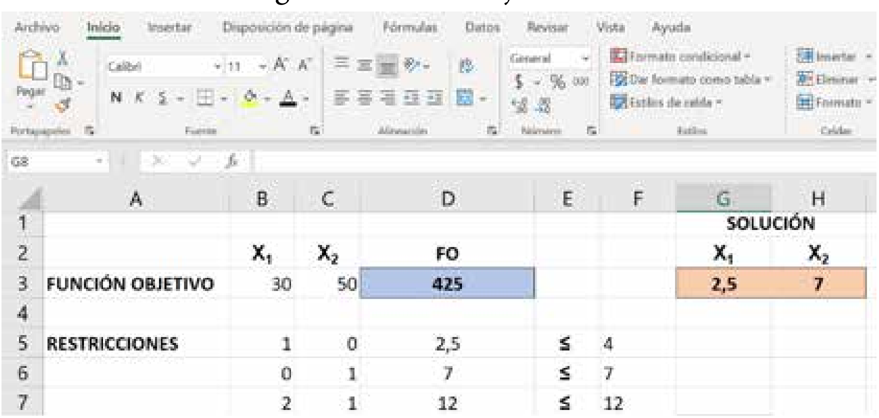
Finalmente se muestra la solución obtenida por Solver para el problema planteado con la respectiva comprobación de las restricciones (Ver Fig. 3.24).

Solución:

Z = 425, con X_1 = 2,5 y X_2 = 7

Con X_1, X_2 = no negativas

Fig. 3.24. Solución ejercicio 1.



Ejercicio 2

Resolver mediante Solver, el siguiente ejercicio:

$$\text{Max } Z = 165\, X_1 + 125\, X_2$$

S.a.

$$2X_1 + 3X_2 \leq 2000$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 1000$$

$$X_1 + 5X_2 \leq 800$$

$$X_1 \leq 5000$$

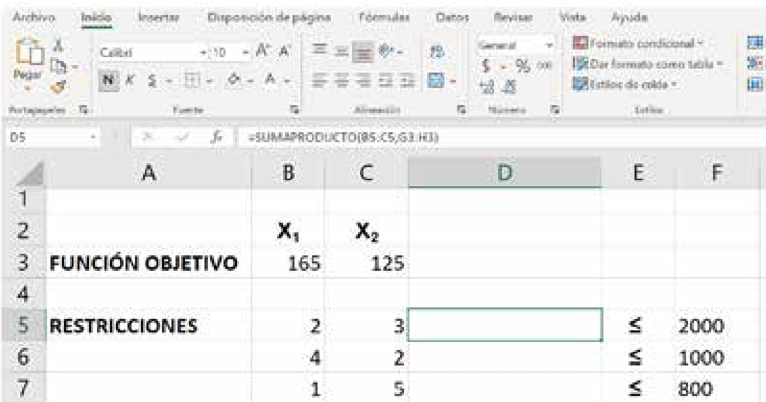
$$X_2 \leq 8000$$

X_1, X_2, enteras y no negativas

Solución mediante Solver:

Ingreso de coeficientes y restricciones del problema (Fig. 3.25).

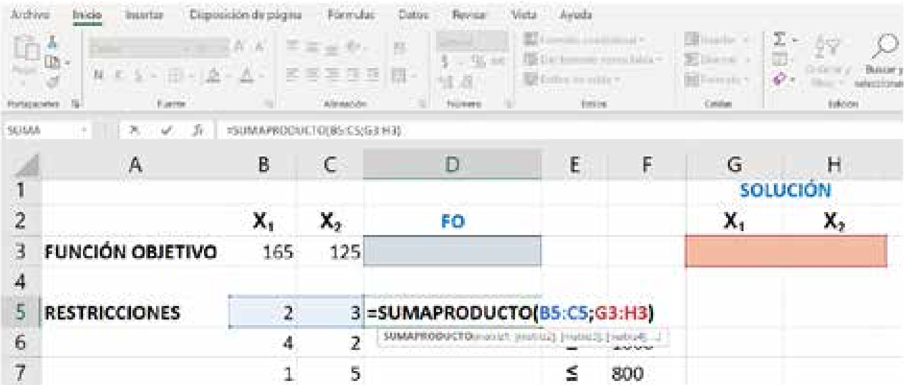
Fig. 3.25. Ingreso de coeficientes y restricciones ejercicio 2.



	A	B	C	D	E	F
1						
2		X_1	X_2			
3	FUNCIÓN OBJETIVO	165	125			
4						
5	RESTRICCIONES	2	3		≤	2000
6		4	2		≤	1000
7		1	5		≤	800

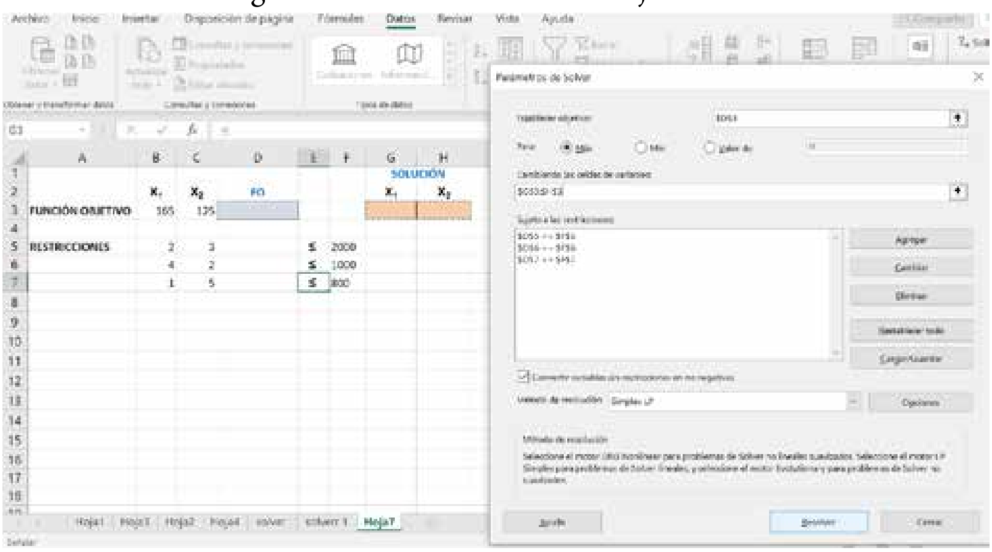
Creación de celdas para el cálculo de la función objetivo y variables de decisión e ingreso de fórmula SUMAPRODUCTO para el cálculo de la función objetivo y de restricciones (Fig. 3.26).

Fig. 3.26. Ingreso de fórmula SUMAPRODUCTO ejercicio 2.



Ingreso de datos en **Parámetros de Solver** (Fig. 3.27).

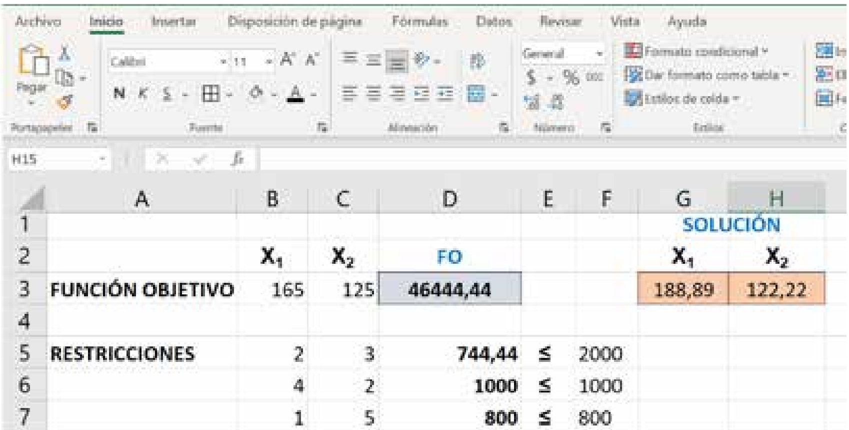
Fig. 3.27. Parámetros de Solver ejercicio 2.



Solución encontrada por Solver para el ejercicio 2 (Fig. 3.28).

$Z = 46444{,}44$ con $X_1 = 188{,}89$ y $X_2 = 122{,}22$

Fig. 3.28. Solución ejercicio 2.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1							SOLUCIÓN	
2		X_1	X_2	FO			X_1	X_2
3	FUNCIÓN OBJETIVO	165	125	46444,44			188,89	122,22
4								
5	RESTRICCIONES	2	3	744,44	≤	2000		
6		4	2	1000	≤	1000		
7		1	5	800	≤	800		

Al ser la restricción no explícita X_1, X_2, enteras y no negativas, se deberá realizar la interpretación, tal como se explicó en la comprobación del ejercicio 2 del método simplex.

CAPÍTULO IV
MÉTODO GRÁFICO

3.1. INTRODUCCIÓN

El método de resolución gráfica es una forma sencilla de resolver modelos de programación lineal con dos variables de decisión (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000). Es un procedimiento simple de resolución, mediante la gráfica de las ecuaciones de las restricciones en el plano cartesiano, representado cada variable en cada uno de los ejes para luego encontrar el punto factible de solución.

En este libro se presentan casos de resolución con dos variables, siendo los problemas que con más frecuencia se resuelven con el método gráfico, al ser más sencillos y representar de forma más didáctica el procedimiento de solución (Davis & McKeown, 1986).

4.2. PROCEDIMIENTO PARA EL MÉTODO GRÁFICO

Para resolver problemas de programación lineal mediante el método gráfico, se pueden seguir lo siguientes pasos (Thierauf & Grosse, 1990):

Paso 1: Plantear el problema: Convertir los datos del problema en un sistema de ecuaciones.

Paso 2: Representar cada variable del problema en cada uno de los ejes del plano cartesiano, para luego proceder a graficar las ecuaciones de las restricciones. Delimitar la zona de solución factible, de acuerdo con el tipo de restricción planteada (mayor o igual que, menor o igual que, igualdad) en el problema.

Paso 3: Graficar la ecuación de la función objetivo dando diferentes valores a Z, para encontrar aquel punto que toca la zona factible de solución. Este paso puede ser omitido, al desarrollar directamente el paso 4.

Paso 4: Hallar la solución del problema, aquella que permita optimizar la función objetivo. En el caso de que una recta sea paralela a la función objetivo, pueden existir varias soluciones óptimas, caso contrario existirá una sola solución.

Este último paso puede también desarrollarse encontrando el valor de Z en cada uno de los vértices que forman la zona factible de solución, considerando que la solución se encontrará siempre en uno de los vértices de la zona factible, dependiendo si se trata de un caso de maximización o de minimización.

En la actualidad existen varios softwares que facilitan la resolución de problemas de programación lineal como TORA y GeoGebra y varias herramientas en línea como PHPSimplex, Atozmath, Simplex Method Calculator, entre otras.

A continuación, se presentan ejercicios resueltos para ilustrar el procedimiento.

4.3. MÉTODO GRÁFICO CASO DE MAXIMIZACIÓN

Resolver mediante el método gráfico el siguiente problema de maximización:

$$\text{Max } Z = 0{,}5X_1 + 0{,}4X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 \leq 16$$

Con X_1, X_2 no negativas

Solución:

El primer paso será convertir las restricciones del problema en un sistema de ecuaciones. Llámase ecuación lineal de n incógnitas (o variables), la ecuación de la forma (Skorniakov, 1998):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots.\ anxn = b$$

Donde a_1, a_2, … a_n, b son los números reales dados. Los números a_1, a_2, … a_n, son los coeficientes de la ecuación, mientras que el número b su término independiente.

En el problema dado se tiene un sistema de ecuaciones conformado por las dos restricciones existentes, tal como se muestra a continuación:

1 $2X_1 + X_2 = 20$

2 $X_1 + X_2 = 16$

El paso siguiente será representar cada variable del problema en cada uno de los ejes del plano cartesiano y graficar las ecuaciones de las restricciones, con la finalidad de encontrar o delimitar la zona factible de solución. En este caso, se representará a la variable X_1 en el eje de las abscisas x y la variable X_2 en el eje de las ordenadas y.

Para graficar la recta de la ecuación, la manera más sencilla es asignar el valor de cero a cada variable con la finalidad de encontrar los puntos a señalar en el plano cartesiano, tal como se ilustra a continuación:

Cuando X_1 toma el valor de cero, $X_2 = 20$, obteniendo el primer punto de la recta.

$2X_1 + X_2 = 20$

$0 + X_2 = 20 \longrightarrow (0; 20)$

Cuando X_2 toma el valor de cero, $X_1 = 20$, obteniendo el segundo punto para la recta.

$2X_1 + X_2 = 20$

$2X_1 + 0 = 20$

$X_1 = 20/2$

$X_1 = 10 \longrightarrow (10; 0)$

Al unir los puntos (0; 20) y (10; 0), se obtiene la recta de la primera ecuación, como muestra la Fig. 4.1.

Fig. 4.1. Recta de la ecuación $2X_1 + X_2 = 20$.

Al tratarse de una restricción de tipo menor o igual que (≤), la zona que se encuentra bajo la recta es aquella que cumple la restricción.

Para graficar la recta de la segunda ecuación se realiza el mismo procedimiento:

Cuando X_1 toma el valor de cero, $X_2 = 16$, obteniendo el primer punto de la recta.

$X_1 + X_2 = 16$

$0 + X_2 = 16 \longrightarrow (0; 16)$

Cuando X_2 toma el valor de cero, $X_1 = 16$, obteniendo así, el segundo punto para la recta.

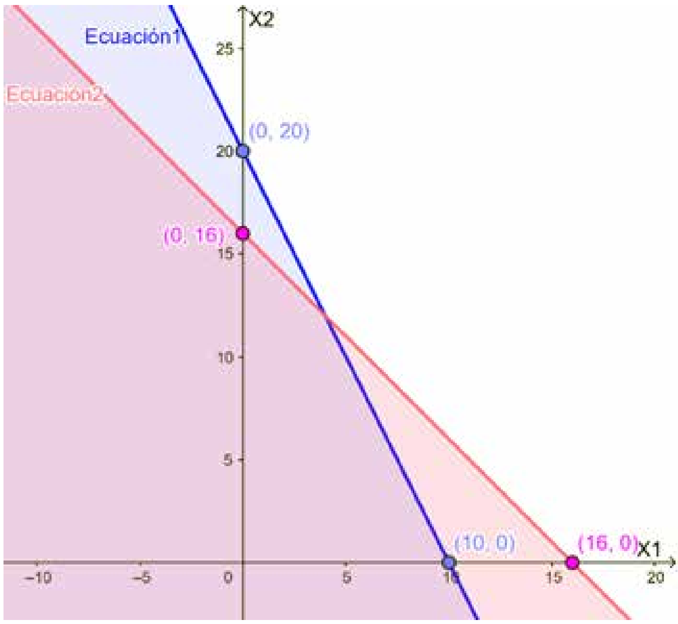
$X_1 + X_2 = 16$

$X_1 + 0 = 16$

$X_1 = 16 \longrightarrow (16; 0)$

La segunda recta se obtiene al unir los puntos (0; 16) y (16; 0), como muestra la Fig. 4.2.

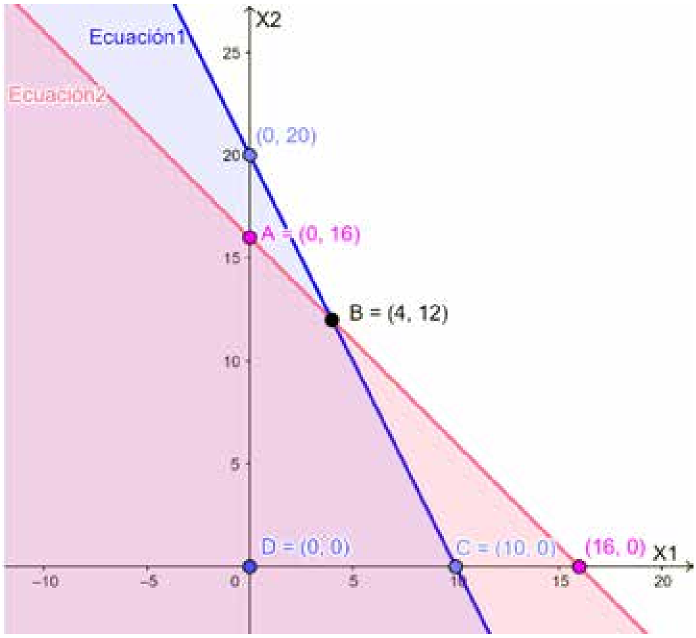
Fig. 4.2. Recta de la ecuación $X_1 + X_2 = 16$.



De igual manera, la zona que se encuentra bajo la recta de la ecuación 2, es aquella que cumple con la segunda restricción, siendo esta de tipo menor o igual que (≤).

Como se puede visualizar en la Fig.4.3., la intersección de las dos rectas forma un polígono cuyos vértices A, B, C y D, delimitan la zona factible de solución que cumple con las dos restricciones. El paso siguiente será encontrar en cuál de los vértices de la zona factible se obtiene la solución óptima para el problema.

Fig. 4.3. Zona factible de solución.



Para determinar los valores de X_1, X_2 en el vértice B se aplica uno de los métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, en este caso se utilizará el método de sustitución.

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una ecuación y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, resultando una ecuación de una incógnita que se resuelve por el método de solución de ecuaciones lineales. Una vez encontrado el valor de una de las incógnitas por sustitución se encuentra el valor de la otra (Riquenes, 2012).

En el sistema de ecuaciones dado tenemos dos incógnitas (las variables X_1 y X_2), para despejar una de las incógnitas de la ecuación, se escogerá aquella ecuación menos compleja o más fácil de despejar, en este caso se procederá a despejar la variable X_1 en la segunda ecuación:

$$2 \quad X_1 + X_2 = 16$$

$$X_1 = 16 - X_2$$

A continuación, se sustituye el valor de X_1 en la primera ecuación para obtener el valor de X_2:

1 $2X_1 + X_2 = 20$

$$2(16 - X_2) + X_2 = 20$$

$$32 - 2X_2 + X_2 = 20$$

$$32 - X_2 = 20$$

$$-X_2 = 20 - 32$$

$$-X_2 = -12$$

$$X_2 = 12$$

Finalmente, para conocer el valor de X1 se sustituye el valor de X2 en cualquiera de las ecuaciones del sistema, en este caso se reemplazará en la segunda ecuación:

2 $X_1 + X_2 = 16$

$$X_1 + 12 = 16$$

$$X_1 = 16 - 12$$

$$X_1 = 4$$

De esta manera se obtiene los valores del vértice B= (4, 12).

El tercer paso consiste en graficar la recta de la función objetivo asignando diferentes valores a Z, encontrando el vértice que proporcione una mejor solución. Tal como indica el procedimiento para el método gráfico, el paso 3 puede ser omitido y pasar directamente al paso 4 que consiste en encontrar el valor de Z en cada uno de los vértices que forman la zona factible de solución (Thierauf & Grosse, 1990).

La zona factible de solución en este problema de maximización se encuentra delimitada por los vértices A, B, C, D, (Fig. 4.3.), a continuación, se procederá a desarrollar directamente el paso 4, determinando el valor de Z en cada uno de los vértices.

Para determinar el valor de Z en el vértice A= (0,16), se reemplazan los valores de X_1 y X_2 en la función objetivo, de la siguiente manera:

$Z = 0{,}5X_1 + 0{,}4X_2$

$Z = 0{,}5(0) + 0{,}4(16)$

$Z = 6{,}4$

Obteniendo como resultado Z= 6,4 en el vértice A, donde $X_1 = 0$ y $X_2 = 16$, siendo este el primer punto para la gráfica de la función objetivo. El otro punto para graficar la recta será $X_2 = 0$, tal como se muestra a continuación:

$Z = 6{,}4 = 0{,}5X_1 + 0{,}4X_2$

$6{,}4 = 0{,}5X_1 + 0{,}4(0)$

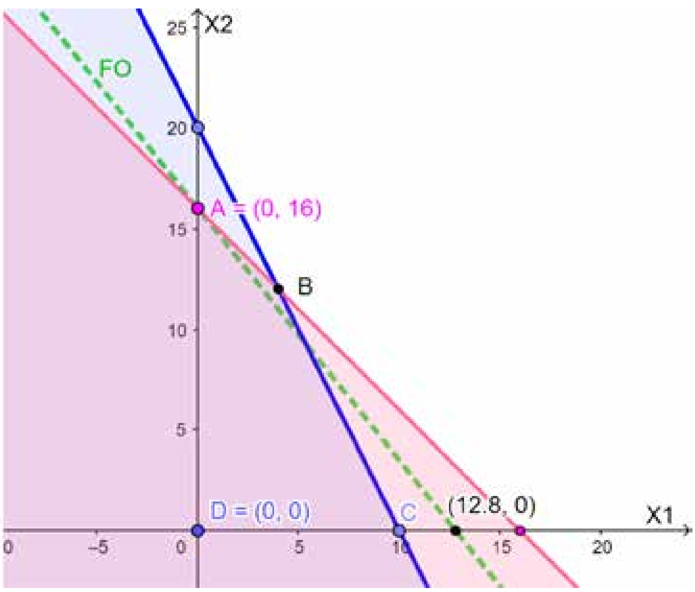
$6{,}4 = 0{,}5X_1$

$X_1 = 6{,}4 \div 0{,}5$

$X_1 = 12{,}8$

Entonces se obtiene el segundo punto para la gráfica de la recta de la función objetivo ($X_1 = 12{,}8$ y $X_2 = 0$). Fig.4.4.

Fig. 4.4. Gráfica de la función objetivo en el vértice A.



Para obtener el valor de Z en el punto B, se desplaza la recta de la función objetivo hacia el vértice y se reemplazan los valores de X_1 y X_2 en la función objetivo, así:

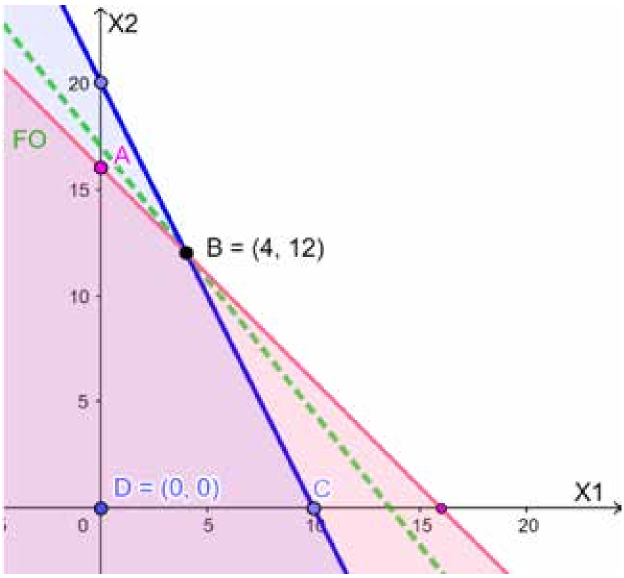
$Z = 0{,}5X_1 + 0{,}4X_2$

$Z = 0{,}5(4) + 0{,}4(12)$

$Z = 6{,}8$

Obteniendo como resultado Z = 6,8 en el vértice B = (4,12) (Fig.4.5).

Fig. 4.5. Gráfica de la función objetivo en el vértice B.



Finalmente se desea conocer el valor de Z en el vértice C= (10,0), en donde al reemplazar los valores del vértice en la función objetivo se obtiene lo siguiente:

$Z = 0{,}5X_1 + 0{,}4X_2$

$Z = 0{,}5(10) + 0{,}4(0)$

$Z = 5$

Siendo el primer punto para la gráfica de la función objetivo X1=10, X2=0, es necesario determinar un segundo punto, el cual será cuando X1=0, entonces:

$Z = 5 = 0{,}5(0) + 0{,}4X_2$

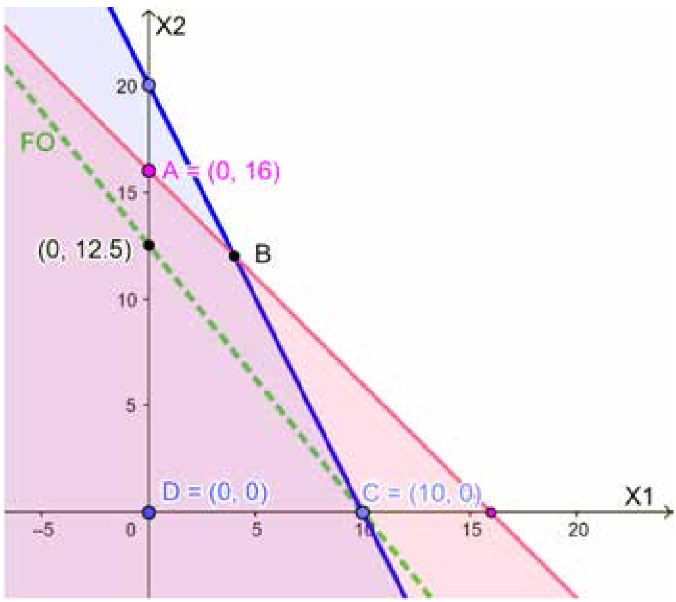
$5 = 0 + 0{,}4X_2$

$X_2 = 5 \div 0{,}4$

$X_2 = 12{,}5$

Obteniendo de esta manera el segundo punto para la gráfica de la función objetivo $X_1 = 0$, $X_2 = 12{,}5$ tal como se ilustra en la Fig. 4.6.

Fig. 4.6. Gráfica de la función objetivo en el vértice C.



Luego de calcular los valores de Z en los vértices de la zona factible de solución: A, B y C, se determinó que:

En el vértice A= (0,16), Z= 6,4

En el vértice B= (4,12), Z= 6,8

En el vértice C= (10, 0), Z= 5

Cabe señalar que no es pertinente calcular el valor de Z en el vértice D= (0,0), ya que, en este punto Z= 0.

En este caso particular la solución óptima para el problema es el vértice B, en donde $X_1 = 4$ *y* $X_2 = 12$, ya que se trata de un problema de maximización, entonces:

Solución:

$Z = 6,8$

$X_1 = 4$

$X_2 = 12$

Comprobación:

Max $Z = 0,5X_1 + 0,4X_2$

Sujeto a:

$2X_1 + X_2 \leq 20$

$X_1 + X_2 \leq 16$

Con X_1, X_2 no negativas

$Z = 0,5(4) + 0,4(12)$

√ $Z = 6,8$

$2(4) + 12 \leq 20$

√ $20 \leq 20$

$4 + 12 \leq 16$

√ $16 \leq 16$

√ X_1, X_2 no negativas

Realizada la comprobación, el paso siguiente es interpretar la solución obtenida mediante el método gráfico y adaptarla al problema presentado en la vida real.

4.4. MÉTODO GRÁFICO CASO DE MINIMIZACIÓN

Resolver mediante el método gráfico el siguiente problema de minimización:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 8X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \geq 18$$

$$X_1 \geq 6$$

$$X_2 \geq 5$$

Con X_1, X_2 no negativas

Solución:

El primer paso es convertir las restricciones del problema en un sistema de ecuaciones, entonces:

1 $2X_1 + X_2 = 18$

2 $X_1 = 16$

3 $X_2 = 5$

El siguiente paso es representar las variables del problema en cada uno de los ejes del plano cartesiano, graficar las ecuaciones de las restricciones y encontrar la zona factible de solución, X_1 se ubicará en el eje x y la variable X_2 en el eje y.

La manera más sencilla de graficar la recta de una ecuación es asignar el valor de 0 a cada variable con la finalidad de determinar los dos puntos a señalar en el plano cartesiano, de la siguiente manera:

Cuando X_1 toma el valor de cero, X_2 = 18, obteniendo el primer punto para la recta de la primera ecuación:

$2X_1 + X_2 = 18$

$0 + X_2 = 18 \longrightarrow (0; 18)$

Cuando X2 toma el valor de cero, X1 = 9, obteniendo el segundo punto para la recta.

$2X_1 + X_2 = 18$

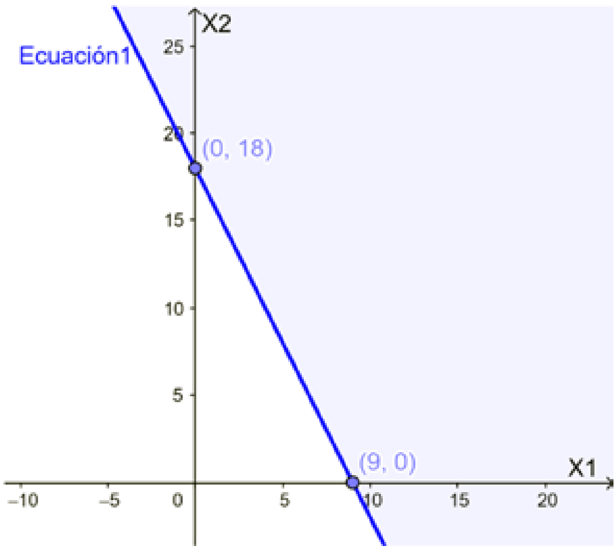
$2X_1 + 0 = 18$

$X_1 = 18/2$

$X_1 = 9 \longrightarrow (9; 0)$

Al unir los puntos (0; 18) y (9; 0), se obtiene la recta de la primera ecuación. Fig. 4.7.

Fig. 4.7. Recta de la ecuación $2X_1 + X_2 = 18$.



Siendo una restricción de tipo mayor o igual que (≥), la zona que cumple con la condición es aquella que se encuentra sobre la recta.

Graficar las rectas de la segunda ecuación (X_1 = 16) y de la tercera ecuación (X_2 = 5), es un procedimiento muy sencillo ya que al ser ecuaciones con una sola incógnita (variable), las rectas serán paralelas a cada uno de los ejes. Fig.4.8 y Fig. 4.9.

Fig. 4.8. Recta de la ecuación X_1 = 16.

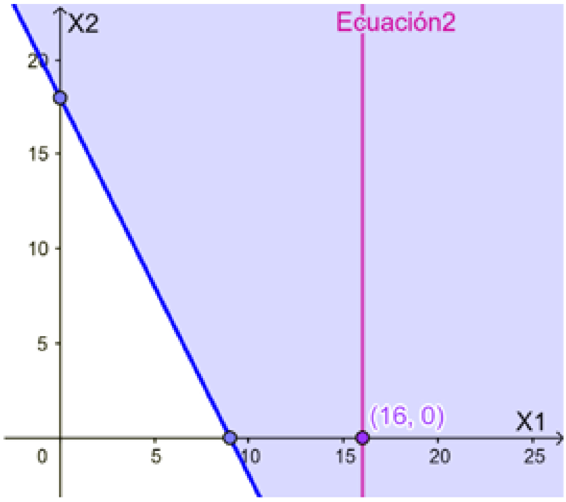
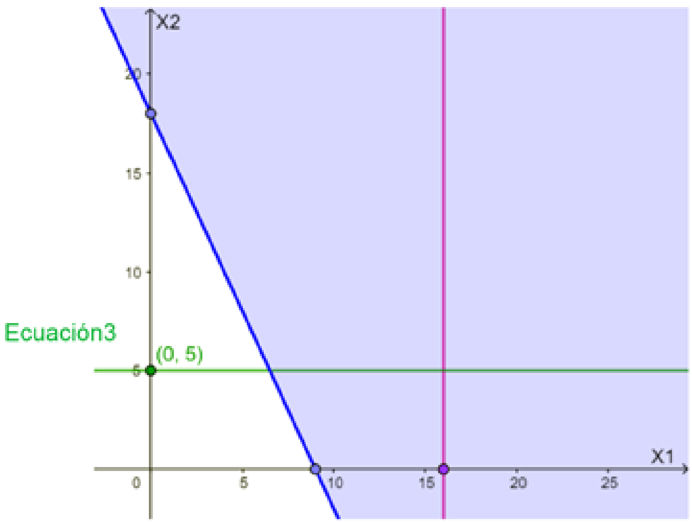


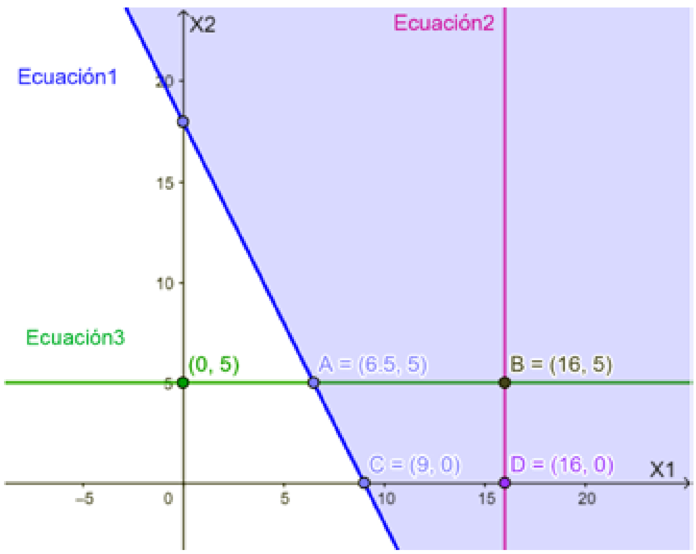
Fig. 4.9. Recta de la ecuación X_2 = 5.



En las restricciones de igualdad, la solución puede localizarse en cualquier punto de la recta. En el ejercicio propuesto existe una restricción de tipo menor o igual que (≤) y dos restricciones de igualdad (=), por lo que se debe ubicar aquel punto dentro de la zona factible que cumpla con las tres restricciones y con el objetivo de minimización, considerando en este caso, que la zona factible es aquella que se encuentra sobre la recta y que no existe ningún polígono que la delimite.

La Fig. 4.10., muestra la zona factible de solución del problema, identificando los vértices A, B, C y D con la finalidad de analizar en cuál de éstos se encuentra la solución óptima del problema.

Fig. 4.10. Zona factible de solución.



Para determinar los valores de los vértices que se encuentran dentro de la zona factible de solución, se resuelve mediante sistema de ecuaciones, en este caso particular, se tiene los vértices A, B= (16, 5), C= (9, 0),) y D= (16, 0). Los vértices C y D quedarían excluidos de la solución al no cumplir con la restricción $X_2 \geq 5$.

A continuación, se aplica el método de sustitución entre las ecuaciones 1 y 3 para conocer los valores del vértice A. La ecuación 3, al ser de una sola incógnita (variable), proporciona directamente el valor de la variable $X_2 = 5$, por lo que se sustituye el valor de X_2 en la primera ecuación, así:

1 $2X_1 + X_2 = 18$	$2X_1 + X_2 = 18$
2 $X_2 = 5$	$2X_1 + 5 = 18$
	$2X_1 = 18 - 5$
	$X_1 = 6{,}5$

Como solución se tiene A = (6,5; 5).

El vértice B= (16, 5), al ser la intersección de las rectas de las ecuaciones 2 y 3, se conocen los valores para X_1 y X_2, por lo que no es necesario resolver mediante sistema de ecuaciones.

Tal como indica el procedimiento para la resolución del método gráfico, en este caso se omitirá el tercer paso (gráfica de la función objetivo) y se procederá con el cuarto paso, encontrando el valor de Z los vértices A y B que se encuentran dentro de la zona factible de solución, como se muestra a continuación:

En el vértice A= (6,5; 5):

Min Z = 6X1 + 8X2

Min Z = 6(6,5) + 8(5)

Min Z = 79

Obteniendo como resultado en este punto Z = 79, con $X_1 = 6{,}5$ y $X_2 = 5$.

En el vértice B= (16, 5):

Min $Z = 6X_1 + 8X_2$

Min Z = 6(16) + 8(5)

Min Z = 136

Obteniendo como resultado en este punto Z = 136, con $X_1 = 16$ y $X_2 = 5$.

Según los valores de Z obtenidos en los vértices A y B, se determina que la solución óptima para el problema de minimización la proporciona el vértice A= (6,5; 5), ya arroja como resultado un valor de Z menor que aquel que proporcional el vértice B, entonces:

Solución:

$Z = 79$, con $X_1 = 6,5$ y $X_2 = 5$.

Como último paso, se realiza la comprobación de la solución:

Comprobación:

Min $Z = 6X_1 + 8X_2$

Sujeto a:

$2X_1 + X_2 \geq 18$

$X_1 \geq 6$

$X_2 \geq 5$

Con X_1, X_2 no negativas

$Z = 6(6,5) + 8(5)$

√ $Z = 79$

$2(6,5) + 5 \geq 18$

√ $18 \geq 18$

$X_1 \geq 6$

√ $6,5 \geq 6$

$X_2 \geq 5$

√ $5 \geq 5$

√ X_1, X_2 no negativas

CAPÍTULO V
MÉTODO DE TRANSPORTE

3.1. INTRODUCCIÓN

El modelo de transporte clásico se define como una técnica que determina la logística del envío de productos o mercancías desde unas fuentes hasta unos destinos, al menor costo posible (Chediak, 2013).

El método de transporte, también llamado método de asignación, de distribución o de transbordo, es un caso particular de la programación lineal cuya metodología es menos compleja que el método simplex.

La metodología consiste en distribuir cantidades de objetos desde los orígenes, también llamados centros de suministro u oferta hacia los destinos, centros de consumo o demanda, haciéndolo al costo mínimo o buscando una utilidad máxima.

Los modelos de transporte son usados en definición de políticas de transporte, y para su planificación, e ingeniería: calcular la capacidad de una infraestructura, por ejemplo, ¿cuántos carriles debería tener un puente?; estimar la viabilidad financiera y social de un proyecto, análisis costo-beneficio, análisis de impacto social y calcular impactos ambientales, por ejemplo, contaminación atmosférica y acústica (Valencia, 2018).

5.2. PASOS PARA EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

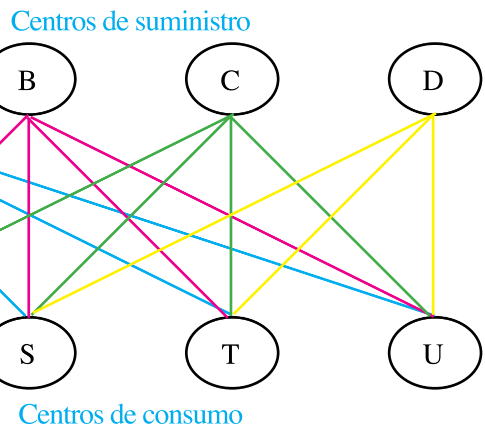
Para ilustrar los pasos para el planteamiento del problema se propone el siguiente ejercicio que consistirá en distribuir productos desde cuatro centros de suministro hacia cuatro centros de consumo (Tabla 5.1.):

Tabla 5.1. Oferta y demanda de los centros de suministro y consumo.

Centros de suministro	Oferta	Centros de Consumo	Demanda
A	p_A	R	d_R
B	p_B	S	d_S
C	p_C	T	d_T
D	p_D	U	d_U
Total	**P**	**Total**	**D**

En este caso se considerará condiciones de mercado perfecto donde la oferta es igual a la demanda P=D. De acuerdo con la figura 5.1 existen 16 opciones diferentes para transportar los productos hacia los centros de consumo:

Fig. 5.1. Diagrama de los centros de suministro y centros de consumo



El costo de enviar un producto desde un centro de suministro a un centro de consumo será denominado C_{ij}, donde el subíndice i representará el centro de suministro y j el centro de consumo, así C_{AR} representará el costo de enviar productos desde el centro de suministro A hacia el centro de consumo R.

Cada centro de suministro, considerando su capacidad de producción, debe satisfacer todos los requerimientos que han sido establecidos por los centros de consumo al costo mínimo, de esta manera al plantear el problema de transporte como un problema de programación lineal, se tiene:

Función Objetivo:

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} C_{ij}\, X_{ij}$$

La cual estará sujeta a las siguientes restricciones:

Para cada *i*:

$$\sum_{j=1}^{j=n} X_{ij} = p_i$$

Para cada *j*:

$$\sum_{i=1}^{i=m} X_{ij} = d_j$$

Donde:

C*ij*: Costo de enviar una unidad de producto del centro de suministro *i* al centro de consumo *j*.

X*ij*: Número de productos a enviar del centro de suministro *i* al centro de consumo *j*.

m: Número de centros de suministro.

n: Número de centros de consumo.

p_i: Oferta del centro de suministro *i*.

d_j: Demanda del centro de consumo *j*.

Para que el problema tenga una solución factible, debe cumplirse la igualdad entre la oferta y la demanda *P*=*D*, dicho de otra manera, la sumatoria de la oferta debe ser igual a la sumatoria de la demanda.

Las variables X_{ij} serán mayores o iguales que cero y tendrán como coeficiente la unidad. En el problema de transporte existirá un total de $m + n$ restricciones y $m \times n$ variables, es decir, en el problema planteado existirán 8 restricciones y 16 variables, el cual al ser resuelto por el método simplex, demandaría numerosos cálculos.

A continuación, se detalla el paso inicial para plantear el problema de transporte mediante la tabla de distribución, en la cual se colocarán en filas los centros de suministro y en columnas los centros de consumo, totalizando tanto las filas como las columnas, como se muestra en la siguiente matriz:

Tabla 5.2. Matriz de transporte para cuatro de centros de suministro y cuatro centros de consumo.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	C_{AR}	C_{AS}	C_{AT}	C_{AU}	P_A
B	C_{BR}	C_{BS}	C_{BT}	C_{BU}	P_B
C	C_{CR}	C_{CS}	C_{CT}	C_{CU}	P_C
D	C_{DR}	C_{DS}	C_{DT}	C_{DU}	P_D
Demanda	d_W	d_S	d_T	d_U	D \ P

En el recuadro de la esquina superior derecha se han colocado los costos de transportar una unidad de producto desde el centro de suministro *i* al centro de consumo *j*. El problema consistirá en llenar la matriz de distribución de forma que se satisfagan las ofertas y demandas de cada fila y columna a un costo mínimo, es decir, la suma de las asignaciones de cada fila deberá ser igual a la oferta para dicha fila y la suma de las asignaciones de cada columna deberá ser la demanda de dicha columna, no pudiendo existir ninguna asignación negativa (Izar, 2012):

$$X_{ij} \geq 0$$

$$\text{para } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

5.3. MÉTODOS DE INICIALIZACIÓN

Los métodos de inicialización tienen como objetivo dar a la matriz una asignación o distribución inicial del problema de transporte. Existen diferentes métodos de inicialización para el método de transporte, como son:

- Esquina noroeste
- Costo mínimo
- Mutuamente preferido
- Vogel
- Russell

A continuación, se resolverá el ejercicio propuesto con cuatro centros de suministro y cuatro centros de consumo por cada uno de los métodos antes mencionados.

5.3.1. Método de la esquina noroeste

Es considerado el método más rápido y sencillo para realizar la distribución inicial y a la vez el menos recomendado ya que proporciona un costo muy elevado. Los pasos para su desarrollo son los siguientes (Thierauf & Grosse, 1990):

Paso 1. Iniciar la distribución por la casilla ubicada en la esquina noroeste de la tabla, asignándole el máximo posible, considerando tanto la oferta como la demanda que corresponda a la casilla. Con este paso quedará satisfecho al menos uno de los conceptos anteriores.

Fig. 5.2. Esquina noroeste de la tabla de transporte

	Destinos			
Orígenes	Esquina noroeste			

Paso 2. Localizar la nueva casilla noroeste y repetir el paso 1.

Paso 3. Repetir el paso 1 hasta finalizar todas las asignaciones en la tabla de transporte.

Ejercicio:

Dada la siguiente tabla de transporte, realice la asignación por el método de la esquina noroeste:

Tabla 5.3. Costos de las casillas de la matriz de transporte.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20	21	19	18	500
B	15	25	16	20	300
C	18	23	21	21	450
D	19	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Solución:

El primer paso será identificar la esquina noroeste en la tabla y asignar el máximo posible, considerando las cantidades fijadas en oferta y demanda. En la tabla la esquina noroeste es la casilla *AR*, siendo 450 la demanda del centro de consumo *R* y 500 la oferta del centro de suministro *A*, se asigna la mayor cantidad posible, considerando no sobrepasar la oferta y satisfacer la mayor cantidad demandada posible, es decir 450. Para indicar que se ha satisfecho la demanda del centro de consumo *R*, se anulan las demás casillas colocando una *X*, como se indica en la tabla 5.4.

Tabla 5.4. Paso 1: primera asignación de la tabla de transporte método esquina noroeste.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 450	21	19	18	500
B	15 X	25	16	20	300
C	18 X	23	21	21	450
D	19 X	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El paso dos será localizar la nueva casilla noroeste y repetir el primer paso. La nueva casilla noroeste es *AS*, la demanda del centro de consumo *S* es 600 y en la oferta del centro de suministro *A* solo resta 50, por lo que se asigna dicha cantidad y se anulan las demás casillas del centro de suministro. Como no se ha satisfecho aún la demanda del centro de consumo S, se ubica la siguiente casilla noroeste *BS* y repite el procedimiento hasta satisfacer la demanda. La oferta del centro de suministro B es 300, se asigna la totalidad y se anulan las casillas de dicho centro. La siguiente casilla noroeste es *CS* y queda por satisfacer una demanda de 250 en el centro de consumo *S*, cantidad que será tomada del centro de suministro *C*. Satisfecha la demanda con esta última asignación, se anula la casilla restante del centro de consumo *S*. Ver tabla 5.5.

Tabla 5.5. Paso dos: selección de la nueva esquina noroeste en tabla de transporte.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 450	21 50	19 X	18 X	500
B	15 X	25 300	16 X	20 X	300
C	18 X	23 250	21	21	450
D	19 X	22 X	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El tercer y último paso consiste en repetir el paso uno hasta finalizar la asignación de la matriz. La nueva esquina noroeste es la casilla *CT* con una demanda del centro de consumo *T* de 350 y una oferta restante de 200 del centro de suministro *C*, por lo que se procede a asignar la totalidad disponible. Con una demanda pendiente de 150 por satisfacer, se ubica la siguiente casilla noroeste *DT* y se asigna dicho valor tomándolo del centro de suministro *D*. Tabla 5.6.

Tabla 5.6. Paso tres: repetición del paso uno en tabla de transporte.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 450	21 50	19 X	18 X	500
B	15 X	25 300	16 X	20 X	300
C	18 X	23 250	21 200	21 X	450
D	19 X	22 X	23 150	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

La nueva esquina noroeste es la casilla *DU*, con una demanda del centro de consumo *U* de 400 y una oferta restante del centro de suministro *D* igual a 400, se realiza la asignación habiendo finalizado la tabla con este último procedimiento. Ver tabla 5.7.

Tabla 5.7. Tabla final de asignación por el método de transporte.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 450	21 50	19 X	18 X	500
B	15 X	25 300	16 X	20 X	300
C	18 X	23 250	21 200	21 X	450
D	19 X	22 X	23 150	22 400	550
Demanda	450	600	350	400	1800

En la tabla final de transporte (tabla 5.7.) se puede evidenciar que las sumatorias de las asignaciones tanto en los centros de suministro como en los centros de consumo coinciden con la oferta y demanda respectivamente, finalmente se debe calcular el costo total de transporte mediante la suma producto de las cantidades asignadas en cada casilla por el costo correspondiente, así:

$$\text{Costo total} = X_{AR}C_{AR} + X_{AS}C_{AS} + X_{BS}C_{BS} + X_{CS}C_{CS} + X_{CT}C_{CT} + X_{DT}C_{DT} + X_{DU}C_{DU}$$

$$\text{Costo total} = 450(20) + 50(21) + 300(25) + 250(23) + 200(21) + 150(23) + 400(22)$$

$$\text{Costo total} = \$39.750$$

5.3.2. Método del costo mínimo

Este método es mejor que el anterior ya que irá asignando a las casillas con menor costo de la tabla de transporte, pudiendo realizarse el procedimiento identificando el costo menor por filas o por columnas (Izar, 2012).

Los pasos para el método del costo mínimo por filas son los siguientes:

Paso 1. Seleccionar en la fila la casilla con el menor costo y asignar la máxima cantidad posible, considerando la demanda y oferta existente. En caso de no haber satisfecho la oferta de la respectiva fila, se repite el procedimiento hasta finalizar la asignación. Las casillas de la fila que no fueron asignadas deben ser anuladas.

Paso 2. Continuar con la segunda fila repitiendo el paso uno hasta satisfacer la oferta de la fila.

Paso 3. Repetir el procedimiento en las demás filas hasta finalizar la asignación de toda la tabla.

Para desarrollar el método del costo mínimo por columna, se siguen los pasos antes mencionados, seleccionando esta vez el costo menor de las casillas por columnas.

Ejercicio:

Realizar la asignación de la tabla 5.3. por el método del costo mínimo por fila y por columna.

Solución costo mínimo por fila:

Seleccionar en la fila la casilla con el menor costo y asignar la máxima cantidad posible, considerando la demanda y oferta existente. En este caso, en la primera fila (centro de suministro *A*), cuya oferta es 500, la casilla *AU* es la de menor costo, por lo que se procede a asignar 400 para satisfacer la demanda respectiva y se anulan las demás casillas del centro de consumo *U*. Como no se ha satisfecho la oferta de la fila, se busca la siguiente casilla del menor costo, siendo esta *AT* y se asigna la cantidad faltante (100) que se tomará de la demanda del centro de consumo *T*. Una vez satisfecha la oferta del centro de suministro A, se anulan las demás casillas de la fila (Tabla 5.8).

Tabla 5.8. Asignación de la primera fila por el método del costo mínimo por fila.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 X	19 100	18 400	500
B	15	25	16	20 X	300
C	18	23	21	21 X	450
D	19	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El siguiente paso es continuar con la segunda fila repitiendo el paso uno hasta satisfacer la oferta de la fila, siendo BR la casilla del menor costo se asigna 300 para satisfacer su oferta y se anulan las demás casillas de la fila (Tabla 5.9).

Tabla 5.9. Asignación de la segunda fila por el método del costo mínimo por fila.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 X	19 100	18 400	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18	23	21	21 X	450
D	19	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El último paso consiste en repetir el procedimiento en las demás filas hasta finalizar la asignación de toda la tabla, de la siguiente manera:

En la tercera fila la casilla de menor costo es *CR*, a la cual se asignará los 150 faltantes para satisfacer la demanda de su centro de consumo y se anularán las demás casillas de este. La siguiente casilla de menor costo es *CT* por lo que se asignará 250 para satisfacer la demanda del centro de consumo *T* y se anulará la casilla restante del mismo. La siguiente casilla de menor costo de la fila es *CS* a la misma que se asignará 50, con esta última asignación se satisface la oferta del centro de suministro *C* (Tabla 5.10).

Tabla 5.10. Asignación de la tercera fila por el método del costo mínimo por fila.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	X (20)	X (21)	100 (19)	400 (18)	500
B	300 (15)	X (25)	X (16)	X (20)	300
C	150 (18)	50 (23)	250 (21)	X (21)	450
D	X (19)	(22)	X (23)	X (22)	550
Demanda	450	600	350	400	1800

En la cuarta fila resta solo la casilla DS y se asigna 550 para satisfacer tanto la demanda como la oferta de la casilla (Ver tabla 5.11).

Tabla 5.11. Asignación de la cuarta fila por el método del costo mínimo por fila.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	X (20)	X (21)	100 (19)	400 (18)	500
B	300 (15)	X (25)	X (16)	X (20)	300
C	150 (18)	50 (23)	250 (21)	X (21)	450
D	X (19)	550 (22)	X (23)	X (22)	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El costo de transporte por el método el costo mínimo por fila es el siguiente:

Costo total = 100(19) + 400(18) + 300(15) +150(18) +50(23) +250(21) + 550(22)

Costo total = $ 34.800

Como se puede evidenciar, este método proporciona un costo menor al obtenido con el método de la esquina noroeste.

Solución costo mínimo por columna:

Seleccionar en la columna la casilla con el menor costo y asignar la máxima cantidad posible, considerando la demanda y oferta existente. En la primera columna (centro de consumo *R*), cuya demanda es 450, la casilla *BR* es la de menor costo, por lo que se procede a asignar 300 para satisfacer su oferta y se anulan las demás casillas del centro de suministro *B*. Como no se ha satisfecho aún la demanda de la columna, se busca la siguiente casilla del menor costo, siendo esta *CR* y se asigna la cantidad faltante 150. Una vez satisfecha la demanda correspondiente a la columna se anulan las demás casillas (Tabla 5.12).

Tabla 5.12. Asignación de la primera columna por el método del costo mínimo por columna.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19	18	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23	21	21	450
D	19 X	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El siguiente paso es continuar con la segunda columna repitiendo el paso uno hasta satisfacer su demanda, siendo *AS* la casilla del menor costo se asigna 500, la mayor cantidad posible para satisfacer su oferta, la siguiente casilla de menor costo es *DS* y se asigna 100 (cantidad faltante para satisfacer su demanda) y anulan las demás casillas de la columna (Tabla 5.13).

Tabla 5.13. Asignación de la segunda columna por el método del costo mínimo por columna.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	X [20]	500 [21]	X [19]	X [18]	500
B	300 [15]	X [25]	X [16]	X [20]	300
C	150 [18]	X [23]	[21]	[21]	450
D	X [19]	100 [22]	[23]	[22]	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Se repite el procedimiento en las demás columnas hasta finalizar la asignación de toda la tabla, de la siguiente manera:

En la tercera columna la casilla de menor costo es *CT*, a la cual se asignará 300 para satisfacer la oferta de su centro de suministro y se anulará la casilla restante. La siguiente casilla de menor costo es *DT* y se asignará 50 para satisfacer la demanda del centro de consumo *T* (Tabla 5.14).

Tabla 5.14. Asignación de la tercera columna por el método del costo mínimo por columna.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 500	19 X	18 X	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23 X	21 300	21 X	450
D	19 X	22 100	23 50	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

En la cuarta fila resta solo la casilla DU a la cual se asignará 400 para satisfacer tanto la demanda como la oferta de la casilla (Ver tabla 5.15).

Tabla 5.15. Asignación de la cuarta columna por el método del costo mínimo por columna.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 500	19 X	18 X	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23 X	21 300	21 X	450
D	19 X	22 100	23 50	22 400	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El costo de transporte por el método el costo mínimo por columna es:

Costo total = 500(21) + 300(15) + 150(18) + 300(21) + 100(22) + 50(23) + 400(22)

Costo total = $ 36.150

5.3.3. Mutuamente preferido

Este método identifica en las filas y columnas de la tabla de transporte los costos más bajos, luego compara las coincidencias y realiza la asignación, por lo que es considerado como un método mejor que los expuestos anteriormente.

Los pasos para su desarrollo son los siguientes (Thierauf & Grosse, 1990):

Paso 1. Identificar las casillas con el mínimo tanto en filas como en columnas.

Paso 2. Asignar en las casillas de menor costo la máxima cantidad posible con la finalidad de satisfacer la oferta o la demanda.

Paso 3. Repetir los pasos 1 y 2 hasta finalizar las asignaciones en toda la tabla.

Ejercicio:

Realizar la asignación de la tabla 5.3. por el método mutuamente preferido.

Solución:

Para proceder con el paso 1, se recomienda elaborar una matriz para identificar las casillas de menor costo de la tabla de transporte, como se muestra a continuación:

Filas	Casilla	Columnas	Casilla
A	*AU*	R	*BR*
B	*BR*	S	*AS*
C	*CR*	T	*BT*
D	*DR*	U	*AU*

Las casillas con menor costo que coinciden en filas y columnas de la tabla de transporte son *AU* y *BR*, por lo que se asigna la mayor cantidad posible a las mismas. En la Casilla *AU* se asigna 400 parar satisfacer su demanda y se anulan las demás casillas de la columna, en la casilla *BR* se asigna 300, con esto se satisface su oferta y se anulan el resto de casillas de la fila (Tabla 5.16).

Tabla 5.16. Primera asignación en la tabla de transporte por el método mutuamente preferido.

D O	R	S	T	U	Oferta
A	20	21	19	18 400	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18	23	21	21 X	450
D	19	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

De acuerdo con el paso tres, no se han finalizado las asignaciones en la tabla por lo que se repite el procedimiento. Las nuevas casillas de menor costo son las siguientes:

Filas	Casilla	Columnas	Casilla
A	*AT*	R	*CR*
B		S	*AS*
C	*CR*	T	*AT*
D	*DR*	U	

De las cuales coinciden *AT* y *CR*, en la casilla *AT* se asigna 100 para satisfacer la oferta del centro de suministro A, en la casilla *CR* se asigna 150 con lo cual se satisface la demanda del centro de consumo *C* (Tabla 5.17).

Tabla 5.17. Segunda asignación en la tabla de transporte por el método mutuamente preferido.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 X	19 100	18 400	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23	21	21 X	450
D	19 X	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Las siguientes casillas de menor costo en la tabla de transporte son:

Filas	Casilla	Columnas	Casilla
C	*CT*	S	*DS*
D	*DS*	T	*CT*

Se puede observar que se debe realizar la asignación en las casillas *CT* y *DS*. En la casilla *CT* se asigna 250 para satisfacer la demanda del centro de consumo T y se anula la casilla restante. En la casilla *DS* se asigna 550, con esta asignación se satisface la oferta del centro de suministro *D* (Tabla 5.18).

Tabla 5.18. Tercera asignación en la tabla de transporte
por el método mutuamente preferido.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 X	19 100	18 400	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23	21 250	21 X	450
D	19 X	22 550	23 X	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

En la tabla de transporte resta solo la casilla *CS*, en la cual se asigna 50, satisfaciendo tanto la oferta como la demanda de dicha casilla (Tabla 5.19).

Tabla 5.19. Tabla final de transporte por el método mutuamente preferido.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 X	19 100	18 400	500
B	15 300	25 X	16 X	20 X	300
C	18 150	23 50	21 250	21 X	450
D	19 X	22 550	23 X	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El costo total de la tabla de transporte por el método mutuamente preferido es:

Costo total = 100(19) + 400(18) + 300(15) + 150(18) + 50(23) + 250(21) + 550(22)

Costo total = $ 34.800

5.3.4. Método de Vogel

El método de Vogel es una versión mejorada del método del costo mínimo que generalmente proporciona soluciones iniciales mejores.

En cada fila y columna, el mínimo costo a partir de los dos menores costos se calcula por diferencia; de esta manera, se tienen m + n diferencias. Entonces, debe buscar la fila o columna cuya diferencia sea mayor y asignar a la base la X_{ij} correspondiente a la celda de costo más bajo (i, j). Cuando los requerimientos estén satisfechos, se debe eliminar dicha fila o columna y continuar con el proceso hasta terminar la tabla. En caso de empates, se rompen arbitrariamente (Martínez & Vértiz, 2015).

Los pasos para el método de Vogel son los siguientes (Taha, 2012):

Paso 1. Para cada fila (columna) determine una medida de penalización restando el elemento de costo unitario mínimo en la fila (columna) del siguiente elemento de costo mínimo en la misma fila (columna).

Paso 2. Identifique la fila o columna con la penalización máxima, que rompa los empates arbitrariamente. Asigne lo más posible a la variable con el costo unitario mínimo en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila o columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de las dos, y a la fila restante (columna) se le asigna una oferta (demanda) cero.

Paso 3.
(a) Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.

(b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) positiva permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) mediante el método del costo mínimo. Deténgase.

(c) Si todas las filas y columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas cero por el método del costo mínimo. Deténgase.

(d) De lo contrario, vaya al paso 1.

Ejercicio:

Realizar la asignación de la tabla 5.3. por el método de Vogel .

Solución:

De acuerdo con el paso 1, se determina una medida de penalización al restar los dos costos más bajos en cada fila y columna, así:

Tabla 5.20. Cálculo de la primera penalización.

Filas	Diferencia	Columnas	Diferencia
A	19 - 18 = 1	R	18 - 15 = 3
B	16 - 15 = 1	S	22 - 21 = 1
C	21 - 18 = 3	T	19 - 16 = 3
D	22 - 19 = 3	U	20 - 18 = 2

El siguiente paso es identificar la penalización máxima, en este caso existe un empate entre las filas *C*, *D* y las columnas *R*, *T*, (ver tabla 5.20) por lo que arbitrariamente se selecciona la fila *C* y se asigna a la casilla de menor costo *CR* la cantidad de 450, con lo cual se satisface la oferta y la demanda y se anulan las demás casillas. Tabla 5.21.

Tabla 5.21. Asignación en la tabla de transporte según la primera penalización.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19	18	500
B	15 X	25	16	20	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El último paso consiste en repetir todo el procedimiento hasta finalizar la asignación de toda la tabla. En el cálculo de las nuevas penalizaciones (Tabla 5.22), la fila *B* posee la mayor diferencia:

Tabla 5.22. Cálculo de la segunda penalización

Filas	Diferencia	Columnas	Diferencia
A	19 - 18 = 1	S	22 - 21 = 1
B	20 - 16 = 4	T	19 - 16 = 3
D	23 - 22 = 1	U	20 - 18 = 2

En la fila *B*, la casilla de menor costo es *BT*, se asigna 300 para satisfacer su oferta y se anulan las demás casillas (Tabla 5.23).

Tabla 5.23. Asignación en la tabla de transporte según la segunda penalización.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19	18	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El nuevo cálculo de penalizaciones es el siguiente (Tabla 5.24).

Tabla 5.24. Cálculo de la tercera penalización

Filas	Diferencia	Columnas	Diferencia
A	19 - 18 = 1	S	22 - 21 = 1
D	23 - 22 = 1	T	23 - 19 = 4
		U	22 - 18 = 4

En el cual existe un empate entre las columnas *T* y *U*, se selecciona al azar la columna *T*, se asigna a la casilla de menor costo *AT* la cantidad de 50 y se anula la última casilla ya que se ha satisfecho la demanda de 350 (Tabla 5.25).

Tabla 5.25. Asignación en la tabla de transporte según la tercera penalización.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19 50	18	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23 X	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Las nuevas penalizaciones son:

Tabla 5.26. Cálculo de la cuarta penalización

Filas	Diferencia	Columnas	Diferencia
A	21 - 18 = 3	S	22 - 21 = 1
D	22 - 22 = 0	U	22 - 18 = 4

La columna *U* posee la mayor penalización por lo que en la casilla de menor costo *AU*, se asigna 400 para satisfacer la demanda y se anula la casilla restante de la columna (Tabla 5.27).

Tabla 5.27. Asignación en la tabla de transporte según la cuarta penalización.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19 50	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23 X	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

La columna S es la única con dos casillas sin asignar: AS y DS (ver tabla 5.27), por lo que en este punto no es necesario calcular la penalización y se procede con la asignación de estas empezando por la casilla de menor costo. En la casilla AS se asigna 50 para satisfacer la oferta de la fila y en la casilla DS se asigna 550 con lo cual queda también satisfecha la oferta de la respectiva fila (Tabla 5.28).

Tabla 5.28. Asignación final de la tabla de transporte por el método de Vogel.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 50	19 50	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22 550	23 X	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El costo total de la tabla de transporte por el método de Vogel es el siguiente:

Costo Total = 50(21) + 50(19) + 400(18) + 300(16) + 450(18) + 550(22)

Costo Total = $ 34.200

5.3.5. Método de Russel

Metodología comparable con la de Vogel en cuanto a la aproximación respecto de la solución óptima que ambos generan, sin embargo, es menos común que el anterior debido a que requiere mayor trabajo (Izar, 2012).

El procedimiento consiste en calcular la cantidad Δij para cada casilla libre disponible, según la siguiente ecuación (Hillier & Lieberman, 2010):

$$\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - C_{ij}$$

Donde:

Δ_{ij} = Coeficiente de la casilla del renglón i, columna j.

α_i = Costo mayor de las casillas del renglón i.

β_j = Costo mayor de las casillas de la columna j.

C_{ij} = Costo de la casilla del renglón i, columna j.

Las asignaciones se realizarán a las casillas con el valor Δij más elevado.

Procedimiento:

Paso 1. Calcular el valor Δ_{ij} para todas las casillas vacías de la tabla.

Paso 2. Asignar la mayor cantidad posible a la casilla con el Δ_{ij} más elevado, considerando la oferta y la demanda de la casilla. Si existen empates se rompen al azar.

Paso 3. Repetir el procedimiento desde el paso 1 hasta finalizar las asignaciones de la tabla de transporte.

Ejercicio

Realizar la asignación de la tabla 5.3. por el método de Russell.

Solución:

El primer paso consiste en calcular los Δ_{ij} para las 16 casillas de la tabla de transporte, como se muestra a continuación:

$$\Delta_{AR} = 21 + 20 - 20 = 21 \qquad \Delta_{CR} = 23 + 20 - 18 = 25$$
$$\Delta_{AS} = 21 + 25 - 21 = 25 \qquad \Delta_{CS} = 23 + 25 - 23 = 25$$
$$\Delta_{AT} = 21 + 23 - 19 = 25 \qquad \Delta_{CT} = 23 + 23 - 21 = 25$$
$$\Delta_{AU} = 21 + 22 - 18 = 25 \qquad \Delta_{CU} = 23 + 22 - 21 = 24$$

$$\Delta_{BR} = 25 + 20 - 15 = 30 \qquad \Delta_{DR} = 23 + 20 - 19 = 24$$
$$\Delta_{BS} = 25 + 25 - 25 = 25 \qquad \Delta_{DS} = 23 + 25 - 22 = 26$$
$$\Delta_{BT} = 25 + 23 - 16 = 32 \qquad \Delta_{DT} = 23 + 23 - 23 = 23$$
$$\Delta_{BU} = 25 + 22 - 20 = 27 \qquad \Delta_{DU} = 23 + 22 - 22 = 23$$

El segundo paso es asignar la mayor cantidad posible a la casilla con el Δ_{ij} más elevado, en este caso el Δ_{ij} más alto es 32 y se encuentra en la casilla *BT*, a la cual se asigna 300 para satisfacer la oferta de la fila, anulando las demás casillas (Ver tabla 5.29).

Tabla 5.29. Primera asignación de la tabla de transporte por el método de Russell.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20	21	19	18	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18	23	21	21	450
D	19	22	23	22	550
Demanda	450	600	350	400	1800

De acuerdo con el paso 3, se repite el procedimiento desde el paso 1 hasta finalizar las asignaciones de la tabla de transporte:

$\Delta_{AR} = 21 + 20 - 20 = 21$ $\Delta_{DR} = 23 + 20 - 19 = 24$

$\Delta_{AS} = 21 + 23 - 21 = 23$ $\Delta_{DS} = 23 + 23 - 22 = 24$

$\Delta_{AT} = 21 + 23 - 19 = 25$ $\Delta_{DT} = 23 + 23 - 23 = 23$

$\Delta_{AU} = 21 + 22 - 18 = 25$ $\Delta_{DU} = 23 + 22 - 22 = 23$

$\Delta_{CR} = 23 + 20 - 18 = 25$

$\Delta_{CS} = 23 + 23 - 23 = 23$

$\Delta_{CT} = 23 + 23 - 21 = 25$

$\Delta_{CU} = 23 + 22 - 21 = 24$

En el cálculo de los Δij para las casillas vacías existen varios empates del valor más elevado (25), por lo que se selecciona al azar la casilla AU y se asigna 400. Con esta asignación se satisface la demanda de la columna y se anulan las demás casillas (Tabla 5.30).

Tabla 5.30. Segunda asignación de la tabla de transporte por el método de Russell.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20	21	19	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18	23	21	21 X	450
D	19	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Cálculo de Δ_{ij} para las casillas vacías:

$$\Delta_{AR} = 21 + 20 - 20 = 21$$
$$\Delta_{AS} = 21 + 23 - 21 = 23$$
$$\Delta_{AT} = 21 + 23 - 19 = 25$$

$$\Delta_{CR} = 23 + 20 - 18 = 25$$
$$\Delta_{CS} = 23 + 23 - 23 = 23$$
$$\Delta_{CT} = 23 + 23 - 21 = 25$$

$$\Delta_{DR} = 23 + 20 - 19 = 24$$
$$\Delta_{DS} = 23 + 23 - 22 = 24$$
$$\Delta_{DT} = 23 + 23 - 23 = 23$$

Existe nuevamente un empate del Δ_{ij} más elevado (25), se selecciona al azar la casilla *CR* y se asigna 450, con lo cual se satisface tanto la oferta como la demanda de la casilla (Tabla 5.31).

Tabla 5.31. Tercera asignación de la tabla de transporte por el método de Russell.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El nuevo cálculo de Δ_{ij} para las casillas vacías es el siguiente:

$$\Delta_{AS} = 21 + 22 - 21 = 22$$
$$\Delta_{AT} = 21 + 23 - 19 = 25$$

$$\Delta_{DS} = 23 + 22 - 22 = 23$$
$$\Delta_{DT} = 23 + 22 - 23 = 22$$

El Δ_{ij} más elevado se encuentra en la casilla AT, se asigna 50 para satisfacer su demanda y se anula casilla restante en la columna (Tabla 5.32).

Tabla 5.32. Tercera asignación de la tabla de transporte por el método de Russell.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21	19 50	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

El último cálculo de los Δ_{ij} para las casillas vacías de la tabla es:

$$\Delta_{AS} = 21 + 22 - 21 = 22$$

$$\Delta_{DS} = 22 + 22 - 22 = 22$$

En este caso existe un empate en el cálculo y se asigna en primer lugar a la casilla *AS* 50, con lo cual se satisface su oferta y en la casilla *DS* se asigna 550 con lo cual queda satisfecha se demanda (Tabla 5.33).

Tabla 5.33. Asignación final de la tabla de transporte
por el método de Russell.

O \ D	R	S	T	U	Oferta
A	20 X	21 50	19 50	18 400	500
B	15 X	25 X	16 300	20 X	300
C	18 450	23 X	21 X	21 X	450
D	19 X	22 550	23	22 X	550
Demanda	450	600	350	400	1800

Finalmente se calcula el costo de la table de transporte:

Costo total = 50(21) + 50(19) + 400(18) + 300(16) + 450(18) + 550(22)

Costo total = $ 34.200

5.4. PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DE LOS MÉTODOS DE TRANSPORTE DE INICIALIZACIÓN

A manera de resumen, en la figura 5.3 se presentan las principales características de cada uno de los métodos de transporte expuestos, la cual servirá de guía al momento de decidir cuál es el método de transporte utilizar.

Fig. 5.3. Principales características de los métodos de transporte.

MÉTODO DE TRANSPORTE	CARACTERÍSTICAS
Método de la esquina noroeste	• Es el método más más rápido y sencillo para realizar la distribución inicial. • No tan recomendable ya que proporciona un costo muy elevado.
Método del costo mínimo	• Brinda una solución mejor que el método de la esquina noroeste. • La asignación se realiza a las casillas con menor costo de la tabla de transporte. • El procedimiento puede realizarse identificando el costo menor por filas o por columnas
Mutuamente preferido	• Brinda un costo menor de transporte que los dos métodos anteriores. • Identifica en las filas y columnas de la tabla de transporte los costos más bajos, compara las coincidencias y realiza la asignación. • Más demorado que los anteriores, ya que requiere más cálculos.
Método de Vogel	• Es una versión mejorada del método del costo mínimo que generalmente proporciona soluciones iniciales mejores. • identifica la mayor diferencia entre los dos costos menores en cada fila y columna y realiza la asignación a la celda de costo más bajo.
Método de Russel	• Similar al método de Vogel en cuanto a la aproximación de la solución óptima que ambos generan. • Menos común que el anterior debido a que requiere mayor trabajo. • Requiere el cálculo de la siguiente fórmula para cada casilla libre disponible en la tabla de transporte: $\Delta ij = \alpha_i + \beta_j - C_{ij}$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bronson, R. (1992). *Investigación de Operaciones*. McGraw Hill.

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales* (4.ª ed.). Mc Graw Hill.

Carro, R. (2014). *Investigación de Operaciones en Administración*. PINCU.

Chediak, F. (2013). *Investigación de Operaciones* (3.ª ed., Vol. I). Universidad de Ibagué.

Davis, K., & McKeown, P. (1986). *Modelos cuantitativos para administración*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Eppen, G., Gould, F., Schmidt, C., Moore, J., & Weatherford, L. (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa* (5.ª ed.). Pearson.

González, Á., & García, G. (2015). *Manual prático de Investigación de Operaciones I* (4.ª ed.). Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones* (9.ª ed.). Mc Graw Hill Educación.

Izar, J. M. (2012). *Investigación de Operaciones* (2.ª ed.). México: Trillas.

Maroto, C., Alcaraz, J., Ginestar, C., & Segura , M. (2012). *Investigación operativa en administración y dirección de empresas*. Editorial Universitat Politècnica de València.

Martínez, I., & Vértiz, G. (2015). *Investigaciones de operaciones*. Grupo Editorial Patria.

Riquenes, M. (2012). *Sistema de ecuaciones lineales: en problemas de matemáticas para el ingreso a la educación superior*. Editorial Universitaria.

Skorniakov, L. A. (1998). *Sistema de ecuaciones lineales*. Instituto Politécnico Nacional.

Taha, H. (2012). *Investigación de Operaciones* (9.ª ed.). Pearson Educación.

Thierauf, R., & Grosse, R. (1990). *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*. Limusa.

Valencia, E. (2018). *Investigación Operativa. Progragración lineal, problemas resueltos con soluciones detalladas* (1.ª ed.). MEGAGRAF.

La investigación de operaciones adopta un punto de vista organizacional al tratar de resolver todos los conflictos de interés entre los componentes de la organización, de tal forma que el resultado propuesto sea el más conveniente para la organización completa. La investigación de operaciones pretende en- contrar la mejor solución (denominada solución óptima), para el problema en estudio, el objetivo consiste en no solo mejorar el estado de las cosas, sino en identificar el mejor curso de acción posible. Desde sus orígenes, hasta la actualidad, la investigación de operaciones ha sido considerada como una herramienta de gran utilidad en la optimización de los recursos humanos, económicos o materiales con los que dispone la organización, haciendo uso del método científico para investigar el problema en cuestión, partiendo por la observación cuidadosa, la formulación del problema identificado, la recolección de datos pertinentes, considerando que la solución proporcionada es el resultado de operaciones matemáticas que deben ser interpretadas y adaptadas a la vida real. Este libro detalla como la aplicación de los modelos de investigación de operaciones, pueden contribuir de forma eficiente en el proceso de toma de decisiones empresariales, a través de la interpretación correcta de los resultados obtenidos.

Ximena Granizo Espinoza. Máster de Segundo Nivel en Business Administration (MBA) en la Universidad de la Calabria, Cosenza- Italia, ingeniera en Administración de Empresas Turísticas y Hoteleras. Capacitaciones en: PMI Basics, Metodología de la Investigación, Modelización lineal, Pedagogía y Didáctica para la Educación Superior, Finanzas, Matemática Avanzada para Ingeniería, Técnicas Estadísticas Avanzadas para investigación con *software* R, Contabilidad, entre otros. Experiencia como investigador senior en proyectos de Investigación-Vinculación de la ESPOCH. Docente del área administrativa en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo desde el 2014.

ISBN: 978-9942-40-665-1