Unidad:

Simulación

Definición de Simulación

- Es la construcción de modelos que describen la parte esencial del comportamiento de un sistema, para diseñar y realizar experimentos y extraer conclusiones de sus resultados, para apoyar la toma de decisiones.
- Se usa generalmente para analizar sistemas complejos.
- Permite experimentar con sistemas a bajo costo, en poco tiempo y sin riesgo, a veces estos sistemas existen pero es muy caro o peligroso experimentar y en otras casos son teóricos, y son imposibles de experimentar de otra manera.

Diferencias simulación-modelos analíticos

- Los modelos analíticos, se construyen para determinar los valores de las variables que producen los resultados óptimos una determinada función.

- En cambio en la simulación se fijan los valores de las variables controlables y se observa los resultados y comportamientos del sistema.

Algunas definiciones frecuente

- Sistema / alcance.
- Entidad / Objetos.
- Atributos.
- Variables de estado (de una entidad o del sistema.
- Comportamientos.
- Eventos / acciones.

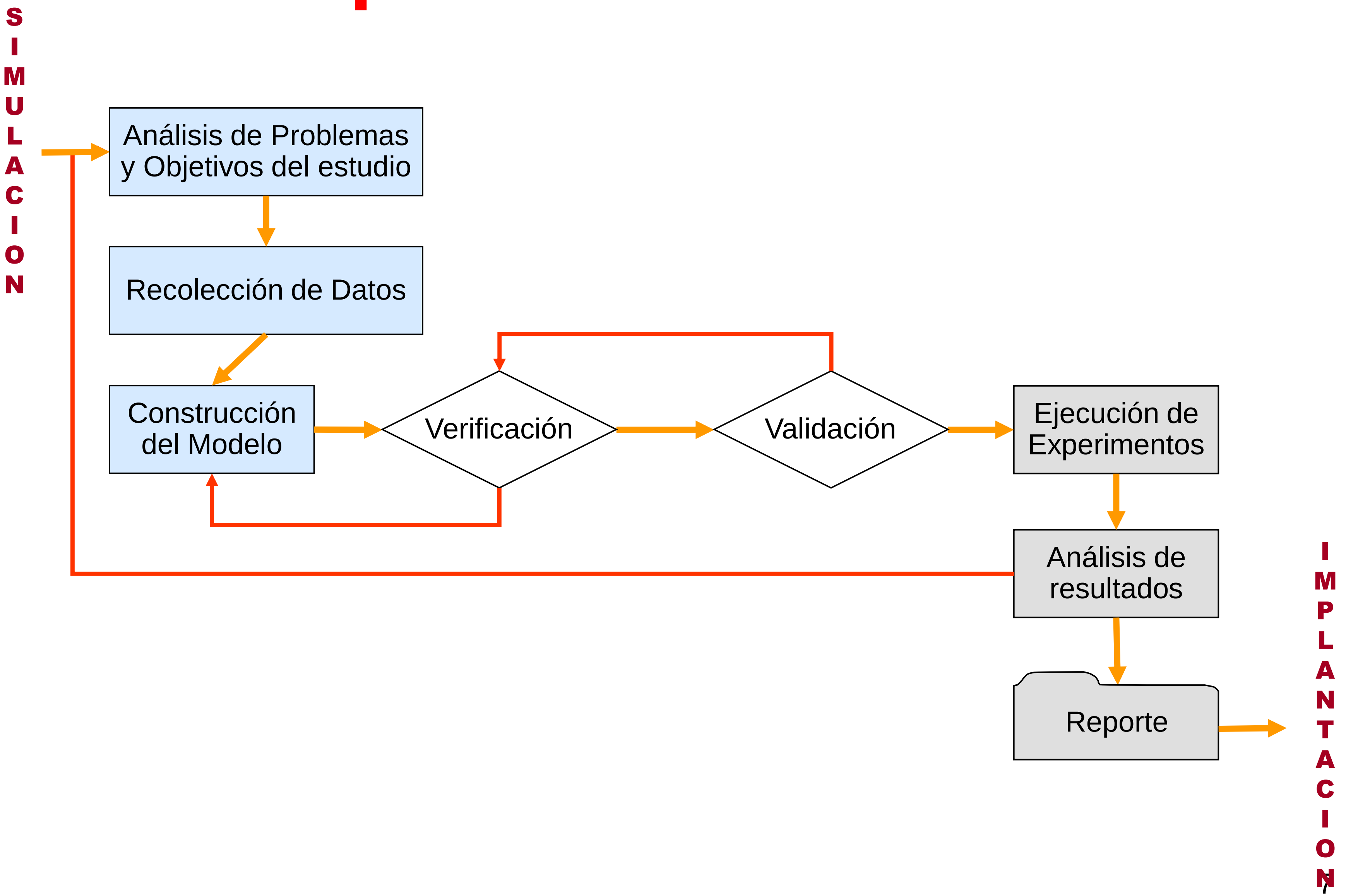
Ventajas de la simulación

- Analizar los efectos que se producen sobre los comportamientos y resultados de un sistema ante cambios/eventos internos y externos.
- Entender el comportamiento → sugerir estrategias.
- Comprender la operación de sistemas complejos.
- Experimentar nuevas situaciones de las cuales hay poca información.
- Anticipar problemas que puedan ocurrir.

Desventajas de la simulación

- La construcción del modelo puede ser costosa, pueden necesitar demasiado tiempo y puede ser muy compleja.
- Es frecuente obtener resultados falsos, por no tener en cuenta relaciones en el sistema o información válida.
- La simulación sólo proporciona estimaciones y tendencias.
- Y a veces es difícil conocer el grado de precisión de los resultados.

Etapas de la simulación



Tipos de simulación

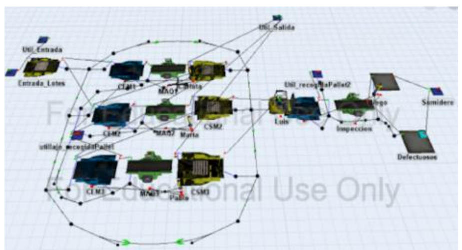
La simulación puede ser de **Estado estable** o de **Terminación**. La primera es la que se ejecuta durante un tiempo largo (tiende a infinito). Si la simulación es de Terminación su ejecución dura un tiempo TE, donde E representa un evento de terminación que puede ser un tiempo fijo o una condición determinada.

Si la simulación es de Terminación, para saber cuanto tiempo se debe simular y cuantas veces debe simular, se debe aplicar algún método para determinar la cantidad de muestras necesarias.

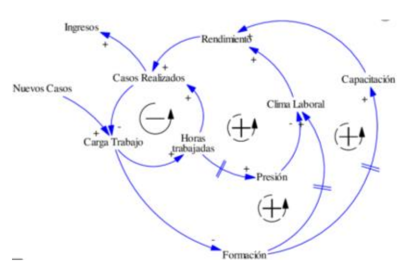
Clasificación de simulación

SIMULACIÓN

- *Simulación Discreta (Modelos probabilísticos)*
  - Modelos de Simulación Estáticos
    - Modelos de Análisis de Riesgo
    - Modelos de Inventario
  - Modelos de Simulación Dinámicos
    - Modelos de Línea de Espera (Cola)



- *Simulación Continua (Modelos determinísticos)*
  - Modelos Basados en Leyes de la Naturaleza
    - Modelos Mecánicos
    - Modelos Electromagnéticos
    - Modelos Químicos
    - Modelos Térmicos
  - Modelos Basados en la Observación
    - Modelos Ecológicos (Presa-predador)
    - Modelos de Población
    - Modelos Macroeconómicos
    - Modelos del Cuerpo Humano



Simulación de Montecarlo

Definición:

Es un método que nos permite reproducir un proceso aleatorio a partir de una distribución de probabilidad conocida.

Cant Pedidos

	Prob	Prob ac.	">=" lim inf	"<" lim sup
90	**15%**	0,150	**0,00**	**0,14**
95	**15%**	0,300	**0,15**	**0,29**
100	**20%**	0,500	**0,30**	**0,49**
105	**30%**	0,800	**0,50**	**0,79**
110	**20%**	1,000	**0,80**	**0,99**

Números aleatorios

Definición:

Se llaman así a los números obtenidos por algún procedimiento que asegure que sus valores no pueden ser inferidos con anterioridad pero que responden a una probabilidad dada.

Números pseudos-aleatorios:

- Método los cuadrados de medios.

$r_{i+1} = (r_i)^2$

- Método de congruencia / multiplicativo:

$r_{i+1} = a*r + c$ (módulo m) → $a = 13$ y $c = 65$

Avance del tiempo

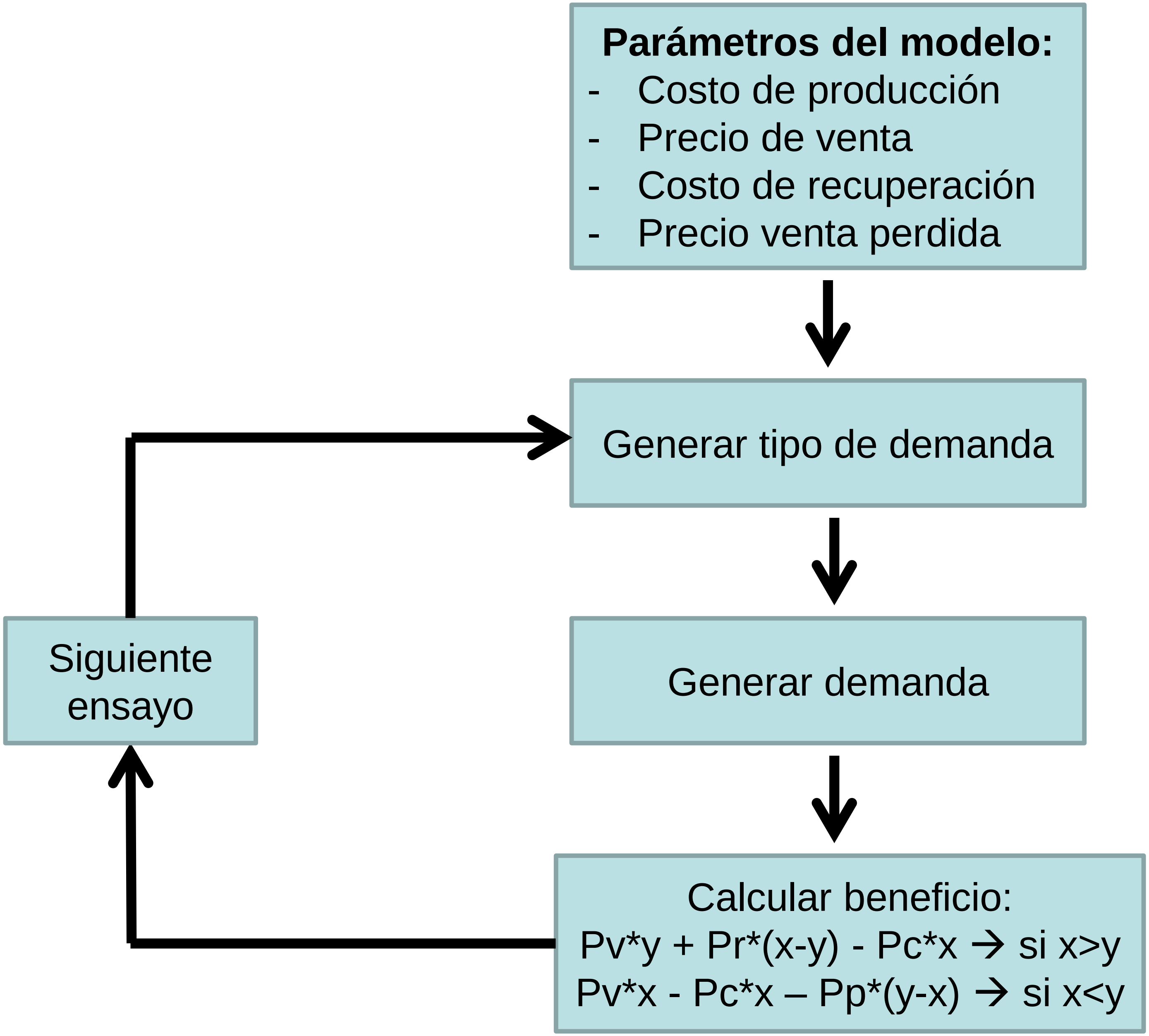
- Avance del tiempo a intervalos regulares:

- Avance por eventos.

Ejemplo (Panadería Pierre)

La panadería de Pierre hace y vende pan francés. Cada mañana, la panadería satisface la demanda del día con pan recién horneado. Pierre puede hacer el pan únicamente en lotes de una docena de panes. Cada docena de pan tiene un costo de fabricación de $3,00. Supondremos, por simplicidad, que la demanda diaria total de pan también se presenta en múltiplos de 12. Los datos demuestran que esta demanda varía de 36 a 96 docenas de panes diarios. Una docena de pan se vende a $4,80 y si sobra al final del día se vende a una cocina de beneficencia a un precio de recuperación de $1,50 por docena de pan. Si la demanda es mayor que la oferta, suponemos que hay un costo de ganancia perdida de $1,80 por docena de pan, debido a la pérdida de clientes que van con los competidores, etc. Los registros de la panadería muestran que la demanda diaria se puede clasificar en dos tipos: alta y baja. Estas demandas se presentan con probabilidades de .60 y .40, respectivamente. La distribución de la demanda por categorías aparece en la Tabla. Pierre quisiera determinar el número óptimo de docenas de panes que debe hacer cada día para maximizar la ganancia (ingresos + ingresos de recuperación – costo de fabricación – costo de ingresos perdidos).

Diagrama de flujo del ejemplo



Distribución de probabilidad

Demanda (doc.)	Alta	Baja
36	0,05	0,10
48	0,10	0,20
60	0,25	0,30
72	0,30	0,25
84	0,20	0,10
96	0,10	0,05

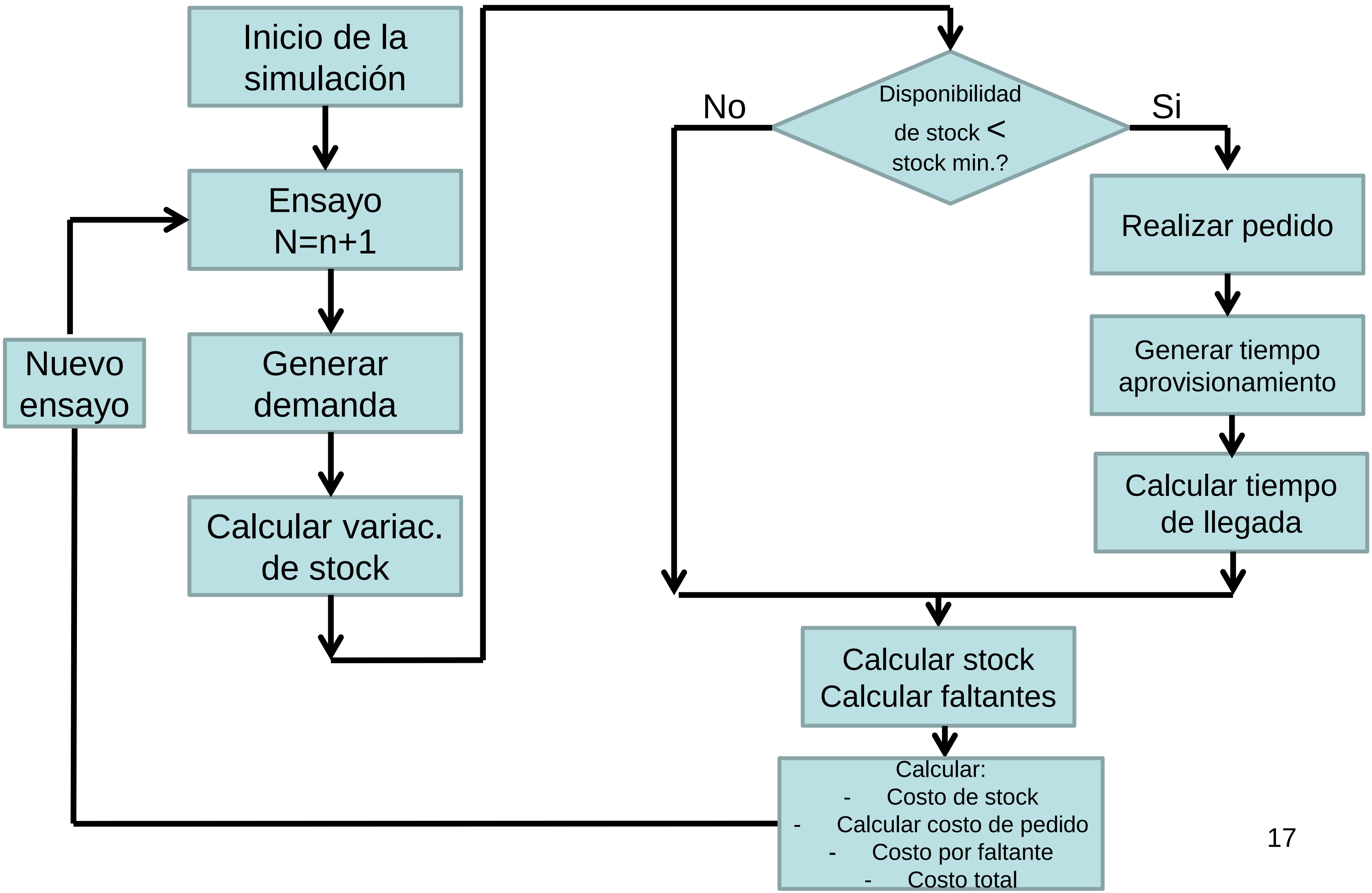
Usar los siguientes números aleatorios:

0,17	**0,41**	**0,43**	**0,5**	**0,75**	**0,62**	**0,17**	**0,59**	**0,06**	**0,21**	**0,73**	**0,55**	**0,92**	**0,22**	**0,77**
0,15	0,04	0,16	0,04	0,26	0,69	0,48	0,12	0,79	0,07	0,45	0,92	0,98	0,37	0,4

Solución

Dia	Nº aleat	Tipo Dem.	Nº aleat	Cant. Dem.	Ing	Costos	Sbrante	Ing Sobr	Cant Falt	Cto Falt	Gan. Neta
1	0,17	Alta	0,15	60	288	180	0	0	0	0	108
2	0,41	Alta	0,04	36	172,8	180	24	36	0	0	28,8
3	0,43	Alta	0,16	60	288	180	0	0	0	0	108
4	0,50	Alta	0,04	36	172,8	180	24	36	0	0	28,8
5	0,75	Baja	0,26	48	230,4	180	12	18	0	0	68,4
6	0,62	Baja	0,69	72	345,6	180	0	0	12	21,6	144
7	0,17	Alta	0,48	72	345,6	180	0	0	12	21,6	144
8	0,59	Alta	0,12	48	230,4	180	12	18	0	0	68,4
9	0,06	Alta	0,79	84	403,2	180	0	0	24	43,2	180
10	0,21	Alta	0,07	48	230,4	180	12	18	0	0	68,4
11	0,73	Baja	0,45	60	288	180	0	0	0	0	108
12	0,55	Alta	0,92	96	460,8	180	0	0	36	64,8	216
13	0,92	Baja	0,98	96	460,8	180	0	0	36	64,8	216
14	0,22	Alta	0,37	60	288	180	0	0	0	0	108
15	0,77	Baja	0,4	60	288	180	0	0	0	0	108
				62,4	299,52						113,52

Ejemplo (diagrama de flujos)



Simulación con variable continua

Método de transformación inversa:

Es un método que nos permite reproducir un proceso aleatorio a partir de una distribución continua de probabilidad (Poisson, Exponencial Negativa, Uniforme y Normal).

Simulación con variable continua

Etapas del método:

1. Dada una f (x) → Determinar F (x).
2. Generamos un r.
3. Hacemos F (x) = r y despejamos x.

Simulación con variable continua

Ejemplo:

1. Sea $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$

   $F(x) = \int \lambda e^{-\lambda t} \, d(x)$

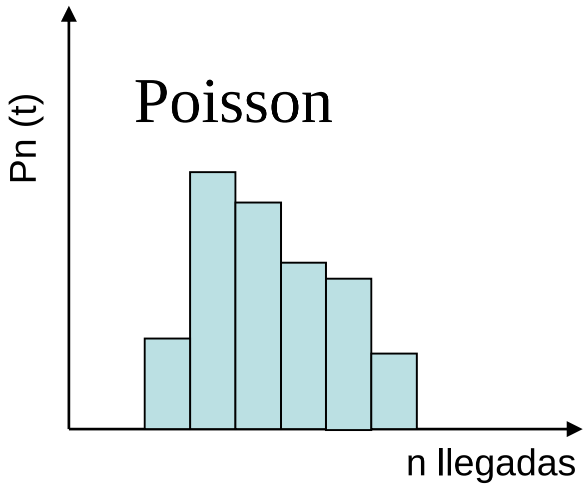
   $F(x) = 1 - e^{-\lambda t}$

2. Generamos un r.

3. $1 - e^{-\lambda t} = r$

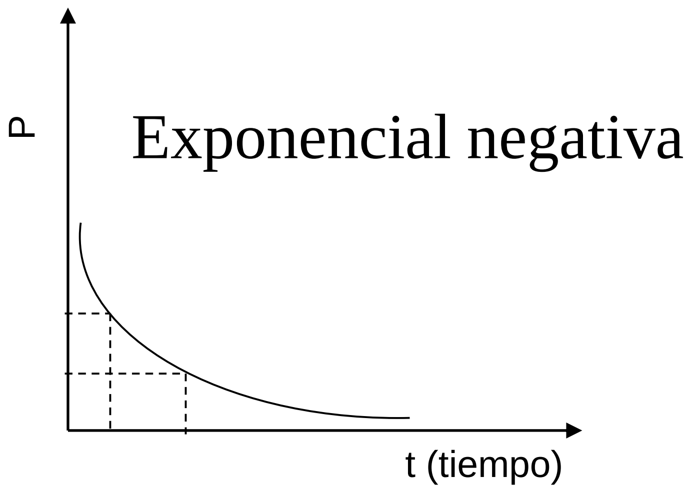
   y despejamos t.

Distribución de Probabilidad



$$\sum_{n=1}^{n=\omega} [e^{-\lambda t} (\lambda\, t)\, n] / n! = 1$$

$$X_a = -\frac{\ln(1 - r_a)}{\lambda}$$



$$P\,(t>=T) = \mu e^{-\mu\, t}$$

$$X_s = -\frac{\ln(1 - r_s)}{\mu}$$

Ejemplo (análisis de riesgo)

Una empresa está interesada en analizar la utilidad que proporcionará un nuevo producto, durante el primer año luego de su entrada al mercado. Los costos de desarrollo y publicidad son de $325.000 y $150.000 respectivamente. El precio de venta está fijado en $150 por unidad. El costo de la mano de obra directa y de los materiales no se conocen con certeza, las mejores estimación para ellos son:

Estimación MO

Costo por Un.	**Probabilidad**
20	0,35
25	0,30
30	0,20
35	0,15

Costo de material:

Puede aproximarse con una distribución uniforme en el intervalo [60, 90]

En lo que respecta a la demanda, la misma sigue una distribución normal con una media de 20.000 unidades y una desviación estándar de 5.000 unidades.

Solución

Ensayo	Nº Alea	Costo MOD	Nº Alea	Costo Material	Nº Alea	Dda 1° año	Utilidad 1° año
1	0,58	25,00	0,75	82,50	0,15	14849	$ 156.082,50
2	0,35	25,00	0,15	64,47	0,88	25951	$ 1.095.743,82
3	0,20	20,00	0,85	85,62	0,46	19486	$ 389.725,84
4	0,12	20,00	0,40	71,94	0,09	13442	$ 305.377,12
5	0,99	35,00	0,79	83,62	0,85	25168	$ 314.678,21
6	0,25	20,00	0,88	86,40	0,01	8933	-$ 85.556,86
7	0,02	20,00	0,09	62,63	0,02	9694	$ 178.063,94
8	0,05	20,00	0,35	70,46	0,16	15043	$ 420.598,82
9	0,28	20,00	0,98	89,29	0,91	26719	$ 612.597,95
10	0,15	20,00	0,08	62,55	0,89	26046	$ 1.281.882,27
11	0,52	25,00	0,51	75,41	0,63	21621	$ 597.208,65
12	0,81	30,00	0,74	82,24	0,06	12184	-$ 14.967,40
13	0,09	20,00	0,92	87,68	0,75	23327	$ 512.228,31
14	0,01	20,00	0,26	67,74	0,42	19047	$ 710.945,54
15	0,50	25,00	0,12	63,57	0,90	26453	$ 1.150.050,02
16	0,06	20,00	0,92	87,67	0,76	23533	$ 521.089,44
17	0,75	30,00	0,10	62,94	0,94	27749	$ 1.108.354,22
18	0,83	30,00	0,05	61,57	0,71	22827	$ 858.706,80
19	0,87	35,00	0,78	83,53	0,15	14852	-$ 7.632,46
20	0,47	25,00	0,23	66,87	0,02	9776	$ 93.258,41
		22,7272727		**75,901**		**18813,8182**	**$ 478.763,84**

Ejemplo (vendedor de gaseosas)

Enrique vende gaseosa en el “Paraíso club” durante los partidos de rugby de los días sábados. Compra cada gaseosa a $8 y la vende a $15. la demanda es aleatoria y depende de las condiciones climáticas , es decir si el día está con sol o nublado. La probabilidad de que haya sol durante los próximos 3 meses es del 0,7.

Si el día está soleado entonces la demanda tiene un comportamiento uniforme en el intervalo [150, 200], pero si esa nublado su comportamiento es uniforme en el intervalo [100, 150]. Para la demanda tome el valor entero más próximo.

Enrique tiene la política de llevar 180 gaseosa y no considera el costo por sobrantes ni faltantes.

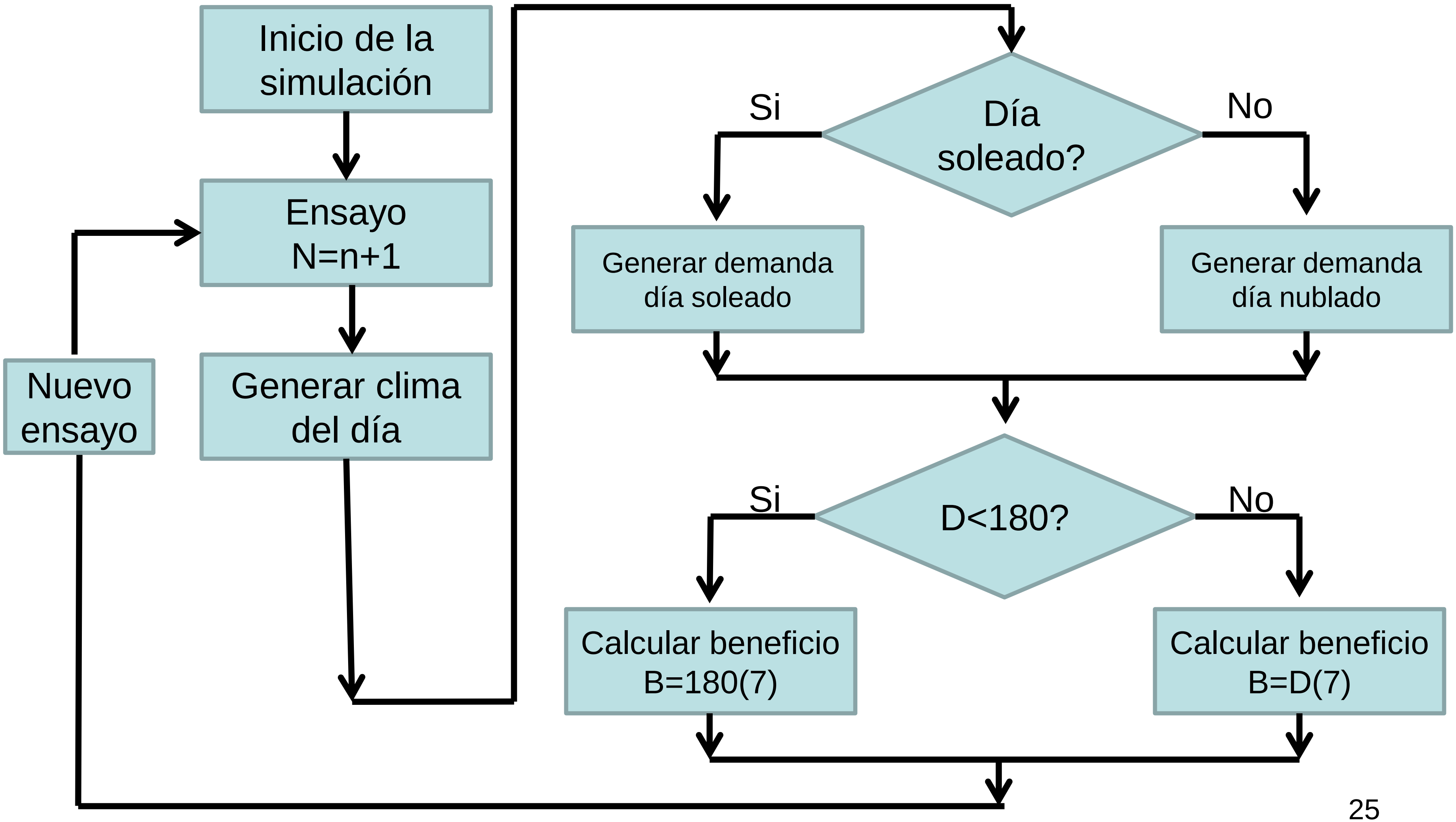
Se pide:

a)Construir un diagrama de flujo.

b)Simular para 15 días utilizando los números aleatorios que se muestran a continuación.

Tipo de clima	87	20	77	82	00	93	72	71	78	02	35	49	83	12	01
Demanda	88	52	91	32	44	44	36	81	88	34	41	07	95	11	14

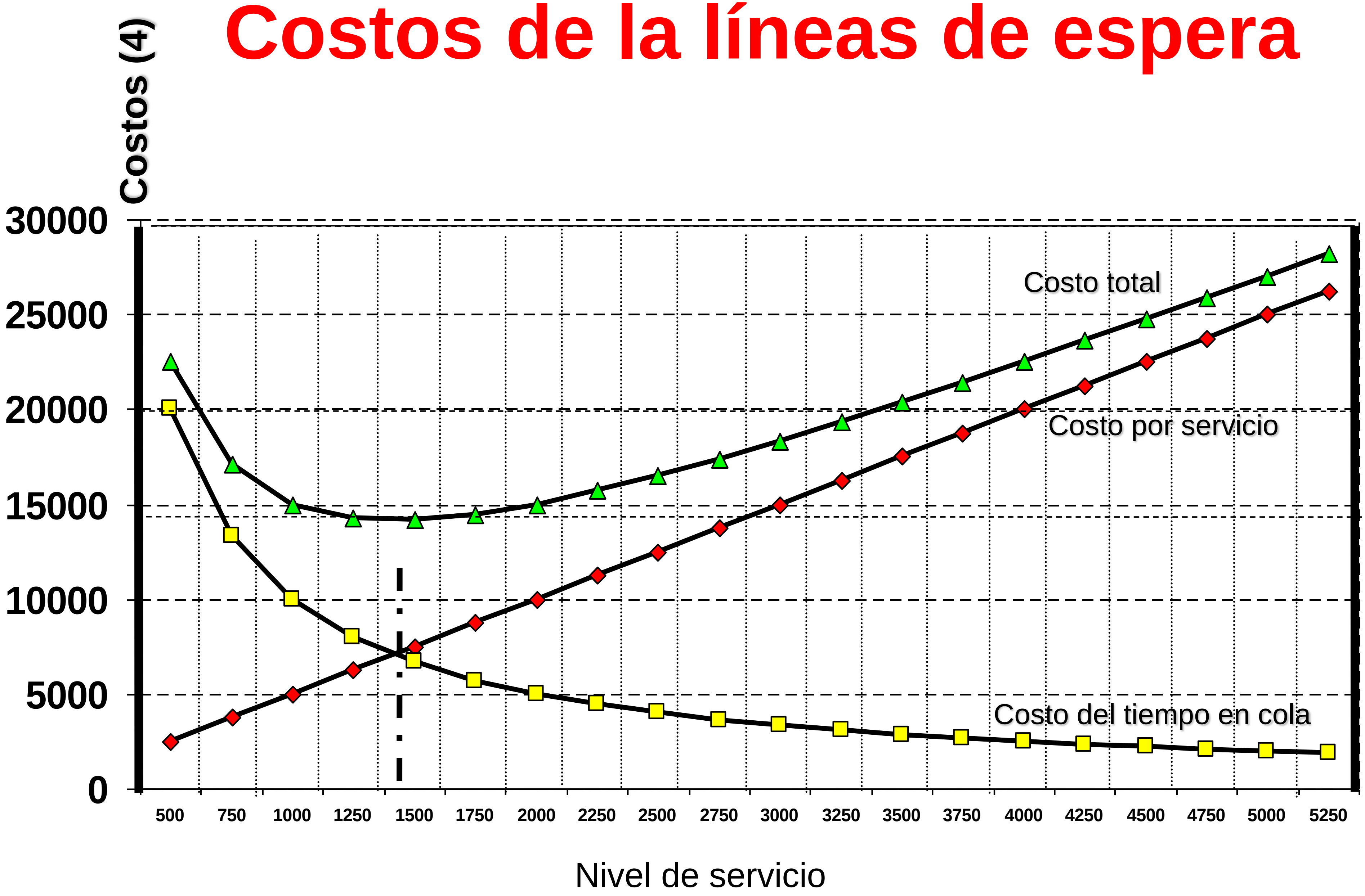
Ejemplo (vendedor de gaseosas)



Simulación fenómenos de espera

- Estudiadas por primera vez por A. K. Erlang en 1913.
  - Análisis de los servicios telefónicos.
- Área de conocimiento denominada teoría de colas.
- Problema de decisión:
  - Equilibrio entre el costo de suministrar un buen servicio y el costo de tiempo de espera de los clientes.

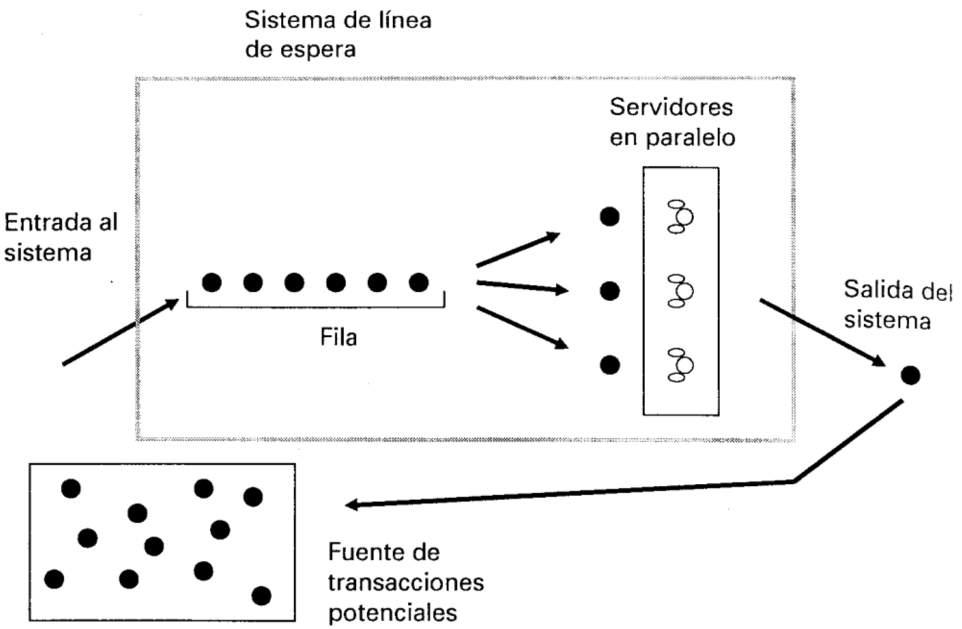
Costos de la líneas de espera



Ejemplo de líneas de espera

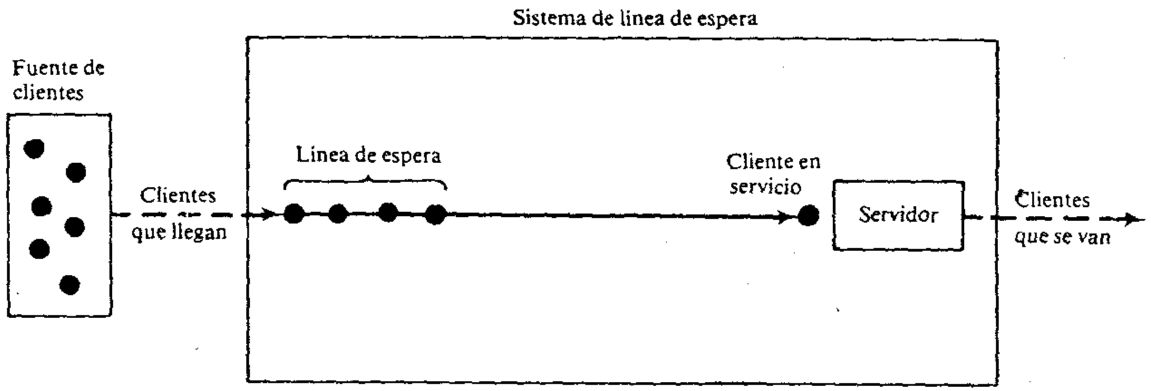
Situación	Llegadas	Servidores	Proceso de servicio
Banco	Clientes	Cajero	Deposito, etc.
Atención médica	Pacientes	Doctor	Tratamiento
Tráfico vehicular	Autos	Semáforo	Paso controlado
Cadena montaje	Piezas	trabajadores	Armado
Aeropuerto	Aviones	Pistas	Aterrizaje
La corte	Casos	Jueces	Proceso judicial

Tipos de sistemas de colas



Las colas también pueden describirse según su número de canales y de fases.
Canales: número de servidores.
Fase: número de filas.

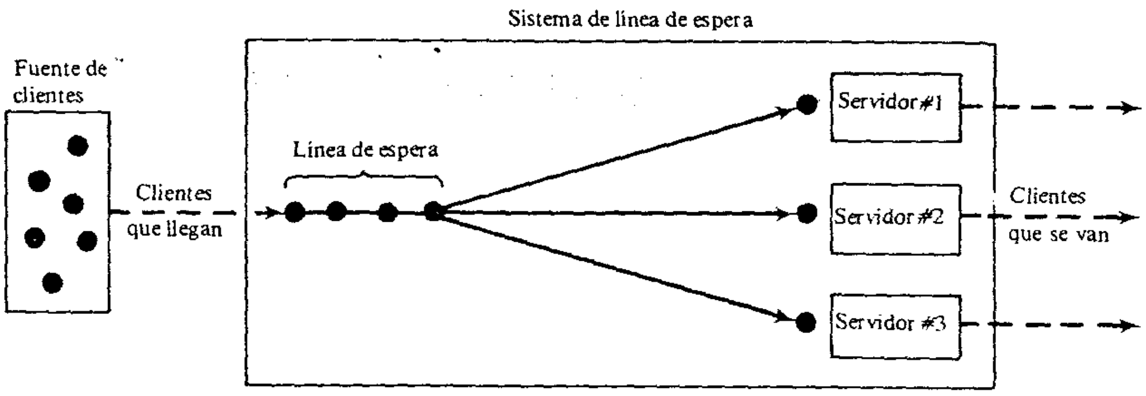
Tipos de sistemas de colas



(a) Una línea, un servidor

SIMPLE FASE SIMPLE CANAL
Boletería de cine.
Lavadero de auto.
Camiones arribando para descarga.

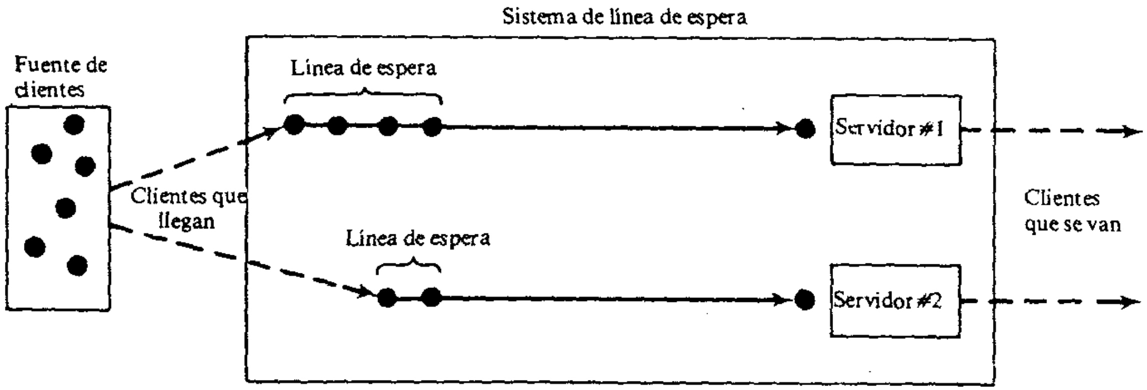
Tipos de sistemas de colas



(b) Una sola línea, varios servidores en paralelo

SIMPLE FASE MULTICANAL
Cajeros de Banco.
Operadores telefónicos.
Jueces en un sistema judicial atendiendo casos.

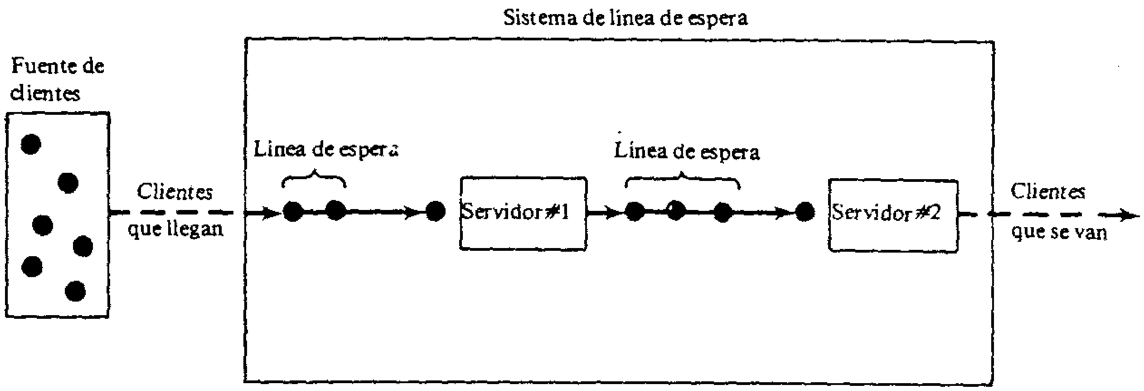
Tipos de sistemas de colas



(c) Varias líneas, varios servidores en paralelo

MULTIFASE MULTICANAL
Semáforos de calles.
Una gran clínica.
Órdenes que están siendo recibidas, llenadas y facturadas.

Tipos de sistemas de colas



(*d*) Una sola línea, varios servidores en serie

MULTIFASE SIMPLE CANAL
Ruta de ómnibus.
Clientes en cafetería.
Estaciones de inspección en sistemas de producción.

Ejemplo 1 (línea de espera)

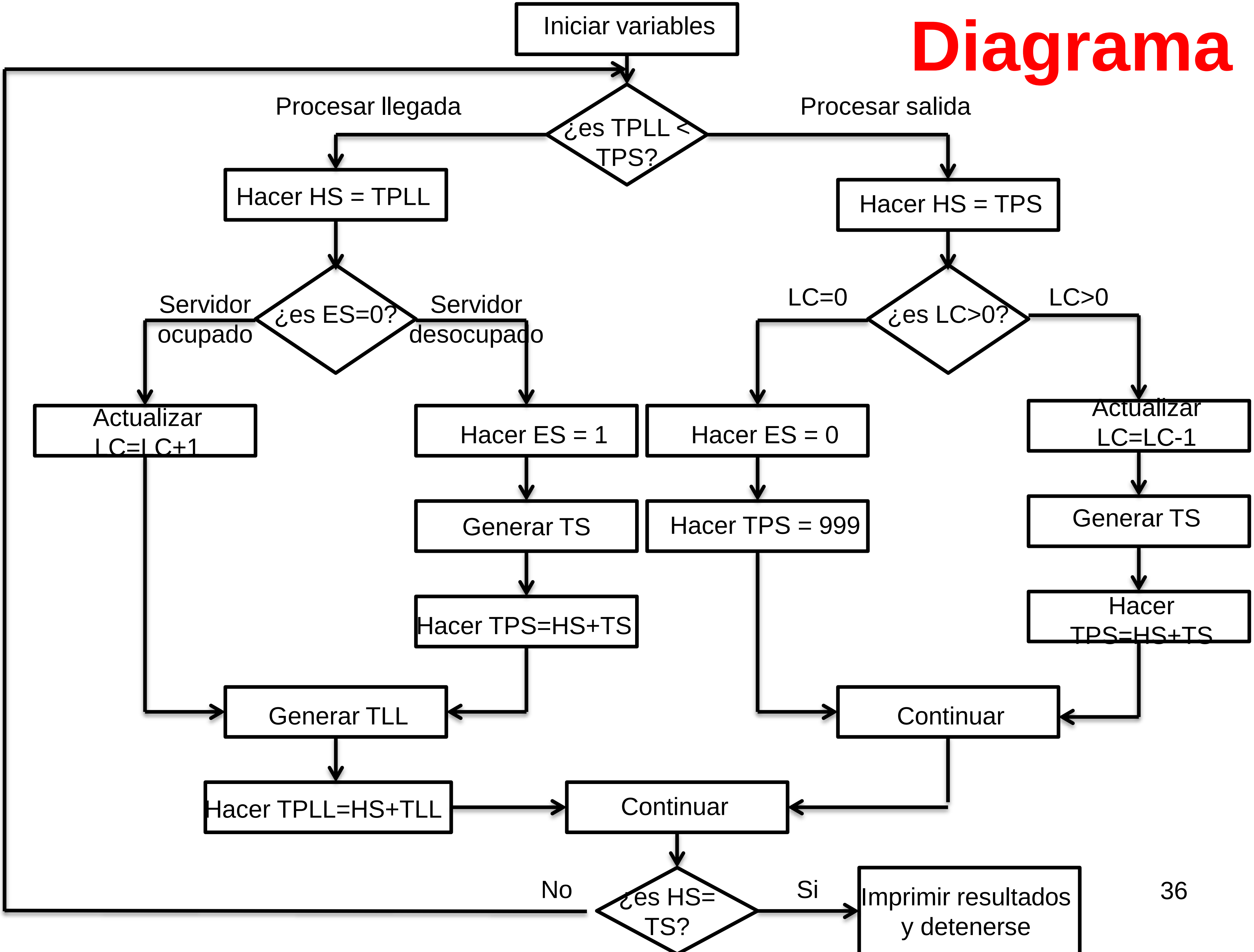
Un muelle cuenta con una grúa para descargar barcos. El tiempo de descarga es de 2 días/barco con distribución exponencial, y la tasa de llegadas sigue una distribución de Poisson con una media de 3 barcos cada 7 días. Si un barco llega y el muelle está ocupado se une a una línea de espera para ser atendido en orden FCFS (El primero que llega el primero que se sirve). Determine el tiempo promedio que transcurre desde que un barco llega al sistema hasta que termina su descarga, la probabilidad de que el sistema esté vacío y la longitud promedio de la fila (Tiempo de simulación 30 días).

N° p/ llegada	0,94	0,74	0,62	0,11	0,17	0,66	0,54	0,3	0,69	0,08
N° p/ atención	0,54	0,88	0,08	0,81	0,4	0,74	0,49	0,55	0,03	0,58

Deficición de algunas variables

- Hora de simulación = HS
- Tiempo programado para la siguiente llegada = TPLL.
- Tiempo programado para la siguiente salida = TPS.
- Estado del servidor = ES.
- Longitud de la cola = LC.
- Tiempo de una corrida de simulación = TS.

Diagrama



Iniciar variables
Procesar llegada
¿es TPLL < TPS?
Procesar salida
Hacer HS = TPLL
Hacer HS = TPS
Servidor ocupado
¿es ES=0?
Servidor desocupado
LC=0
¿es LC>0?
LC>0
Actualizar LC=LC+1
Hacer ES = 1
Hacer ES = 0
Actualizar LC=LC-1
Generar TS
Hacer TPS = 999
Generar TS
Hacer TPS=HS+TS
Hacer TPS=HS+TS
Generar TLL
Continuar
Hacer TPLL=HS+TLL
Continuar
No
¿es HS= TS?
Si
Imprimir resultados y detenerse

Ejemplo 1, solución

Cliente	N° Al	TLL	TPLL	LC	Inicio At	N° Al	TS	TPS	Tpo perm cliente
1	0,94	6,56	6,56	0	6,56	0,54	1,55	8,12	1,55
2	0,74	3,14	9,71	0	9,71	0,88	4,24	13,95	4,24
3	0,62	2,26	11,97	1	13,95	0,08	0,17	14,12	2,15
4	0,11	0,27	12,24	2	14,12	0,81	3,32	17,44	5,20
5	0,17	0,43	12,67	3	17,44	0,4	1,02	18,46	5,79
6	0,66	2,52	15,19	3	18,46	0,74	2,69	21,15	5,96
7	0,54	1,81	17,00	4	21,15	0,49	1,35	22,50	5,50
8	0,3	0,83	17,83	4	22,50	0,55	1,60	24,10	6,26
9	0,69	2,73	20,57	4	24,10	0,03	0,06	24,16	3,59
10	0,08	0,19	20,76	5	24,16	0,58	1,74	25,89	5,13

¿Cuántas simulaciones hacer?

Esto se define en función del margen de error y la variabilidad del sistema:

$$n = \frac{z^2 \times \sigma^2}{e^2}$$

Donde:

n = tamaño de la muestra

z = variable normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, para un nivel de confianza deseado

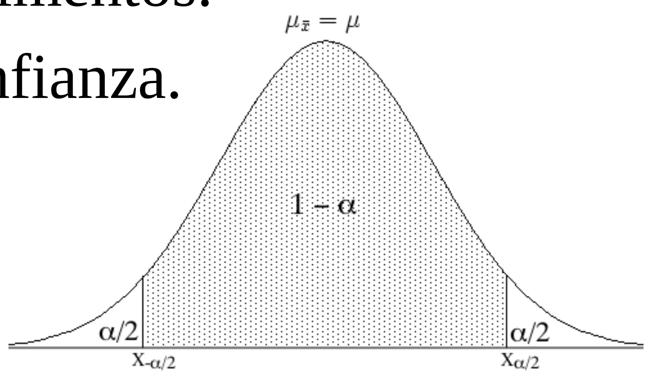
σ = la desviación estándar estimada de la variable simulada.

e = error absoluto aceptado

Intervalos de confianza

- Los datos de la simulación siempre presentan variabilidad aleatoria.
- Siempre debemos hacer varios experimentos.
- Se deben establecer intervalos de confianza.

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$



- La longitud del intervalo de confianza, dependerá cantidad y variabilidad de las muestras. Si este intervalos de confianza es inaceptable, podemos reducir su longitud, ya sea aumentando el número de simulaciones de Terminación, o bien, aumentando la longitud de la simulación.