

Campos Eléctricos inducidos¹

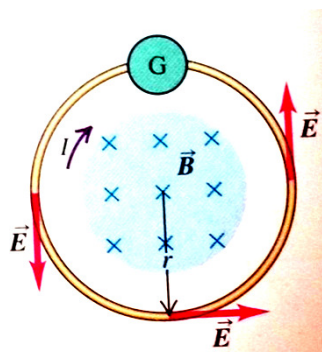


Figura 1

Vamos a considerar que tenemos una espira que concatena el flujo de un campo magnético variable en el tiempo. En este caso el flujo está generado externamente de forma tal que el campo magnético que aparece es uniforme en todo el espacio que rodea a la espira, o sea que en cualquier instante la intensidad del campo es constante en todo dicho espacio. De esta forma:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \|\vec{B}\| \cdot S ; \text{ en notación blanda: } \Phi_B = B \cdot S$$

Como dijimos que este flujo es variable en el tiempo, en la espira se induce una f.e.m. cuyo valor es:

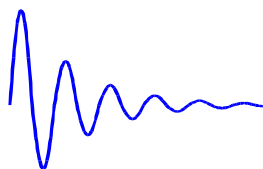
$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Al estar la espira construida con un alambre conductor, la misma tendrá una cierta resistencia eléctrica de valor R . Entonces, la fem inducida en la espira provoca una circulación de corriente eléctrica de valor $I = \varepsilon_i / R$, de acuerdo con la Ley de Ohm (la misma está indicada simbólicamente en el dibujo). Sabemos, por la Teoría cinética de la corriente eléctrica, que si por la espira circula una corriente, existe un movimiento de cargas con una velocidad de arrastre o de deriva, y este movimiento de cargas indica que debe existir dentro de la espira un campo eléctrico que produzca este movimiento, por ejemplo, como el que está indicado en la figura. Este campo eléctrico que aparece dentro de la espira está – por supuesto– relacionado con la fem inducida a través de una integral de línea:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_i$$

Es necesario observar aquí que este campo eléctrico que aparece, no es un campo eléctrico como los estudiados, derivados de la Ley de Coulomb, a los cuales los podemos llamar campos coulombianos o campos electrostáticos; dichos campos se representan por líneas abiertas que nacen en cargas positivas y terminan en cargas negativas. En el caso que estamos discutiendo aquí, no hay cargas eléctricas generadoras de campos eléctricos; este campo eléctrico que aparece, y que está directamente relacionado con la inducción en la espira, aparece precisamente y como consecuencia del flujo magnético que varía en el tiempo; por lo tanto sus líneas de campo son cerradas, a diferencia de los campos electrostáticos estudiados anteriormente. Si analizamos este campo desde el punto de vista de la energía, podemos observar que una carga elemental dq cuando se mueve por la acción de este campo y da una vuelta completa alrededor de la espira, ha efectuado un trabajo $dW = dq \cdot \varepsilon_i$; en el caso de los campos coulombianos la integral en cualquier camino cerrado es igual a cero pues estos campos son conservativos, en el caso de estos campos No coulombianos, al ser el trabajo diferente de cero, decimos que este campo es No conservativo. Quizás podamos preguntarnos: Pero, ¿es entonces un campo eléctrico? La Teoría cinética de la corriente eléctrica nos dice que sí, entonces estamos ante la presencia de un Campo Eléctrico No Coulombiano (su origen no proviene de la Ley de

¹ Este tema corresponde al capítulo de Inducción magnética.



Coulomb). Esta característica particular la vamos a explicitar agregando un subíndice “N” a la expresión del campo. Reemplazando, la expresión de Faraday-Lenz queda de la forma:

$$\oint \vec{E}_N \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Si resolvemos esta integral a través de una curva perfectamente circular como lo es la forma de la espira, podemos considerar que por razones de simetría la Intensidad de campo $\|\vec{E}_N\|$ se mantiene constante a lo largo de todo el camino de integración y si bien, dentro de la espira vamos a tener líneas de campo eléctrico de diferente longitud, podemos simplificar el análisis suponiendo que la espira es lo suficientemente “estrecha” como para considerar que todas las líneas de campo tienen la misma longitud; entonces el cálculo de la integral se resuelve de manera sencilla:

$$\oint \vec{E}_N \cdot d\vec{l} = \|\vec{E}_N\| \cdot (2\pi r)$$

Siendo r el radio de la espira. Reemplazando este resultado en la expresión de Faraday-Lenz anterior, y despejando el valor del campo:

$$\|\vec{E}_N\| = \frac{1}{(2\pi r)} \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

Ahora bien, sabemos que $\Phi_B = B \cdot S$, y por consiguiente $\Phi_B = B \cdot (\pi r^2)$, reemplazando,

$$\|\vec{E}_N\| = \frac{1}{(2\pi r)} \left| -\frac{d\|\vec{B}\| \cdot (\pi r^2)}{dt} \right|$$

Simplificando y ordenando:

$$\|\vec{E}_N\| = \frac{r}{2} \left| -\frac{d\|\vec{B}\|}{dt} \right|$$

Esta situación así planteada, nos permite decir que en una región en donde hay campo magnético variable en el tiempo, va a haber campo eléctrico asociado a la forma de esta variación (piense por ejemplo que si el campo magnético varía en forma senoidal, el campo eléctrico inducido variará en forma cosenoidal). Que la intensidad de este campo eléctrico inducido es proporcional al radio de la línea de campo. Que la variación del campo magnético induce, no sólo las líneas de campo materializadas en la espira, sino que van a inducir líneas de campo eléctrico en toda la región del espacio en donde haya campo magnético variable.

Una interpretación vectorial de la expresión anterior nos permite concluir que las líneas de campo eléctrico inducido van a ser siempre **perpendiculares** a las líneas de campo magnético variable. Esto lo podemos ver de forma sencilla en el siguiente dibujo indicado como Figura 2 en el cual las líneas de campo **B** (dibujadas como cruces de color amarillo) son perpendiculares y entrantes al plano del dibujo, en el instante en que se observa el dibujo tenemos que el campo magnético está variando **positivamente** en el tiempo, o sea está creciendo. La reacción por la Ley de Lenz indica que el campo eléctrico no coulombiano inducido, debe tener sentido **antihorario**, como lo indica la figura.

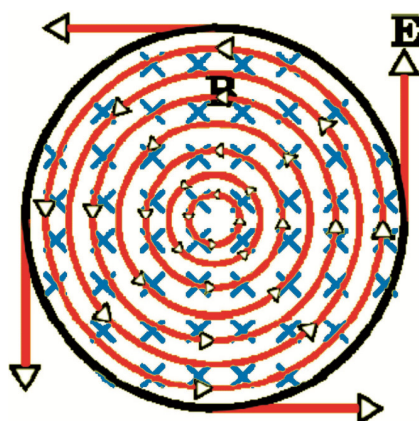
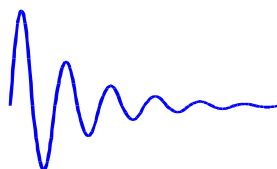


Figura 2

La pregunta que nos podemos hacer ahora podría ser: Si un campo magnético variable induce a un campo eléctrico, ¿podrá ocurrir el fenómeno simétrico, que un campo eléctrico variable induzca a un campo magnético?

Campos magnéticos inducidos y corriente de desplazamiento:

Ya comprendemos cómo un Campo Magnético (B) que varía en el tiempo, induce la existencia de un Campo Eléctrico (E), que este campo eléctrico no es coulombiano ya que sus líneas de campo son cerradas y como consecuencia de esto, el campo eléctrico inducido es no conservativo.

James Clerk Maxwell, publicó en el año 1865 un trabajo (A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, en el que se basan todos los actuales desarrollos de las llamadas Ecuaciones de Maxwell) en el cual utilizaba el concepto de simetría en los fenómenos de la naturaleza, para modificar la Integral de Ampère.

Maxwell se dio cuenta que la Integral de Ampère se cumplía sólo cuando los campos eléctricos eran estacionarios, o sea cuando la corriente eléctrica no varía en el tiempo. Pero cuando la corriente varía en el tiempo, o sea cuando los campos asociados no son estacionarios, esta expresión da resultados erróneos. Analicemos para ello la Figura 3. En la misma se observa que por el conductor de la izquierda circula una corriente I , esta corriente se dirige a una de las placas de un capacitor, por lo que el mismo se está cargando. Analicemos esta situación; la carga se realiza a través de la circulación de una corriente eléctrica denominada I en el dibujo que le llamamos corriente de conducción.

Le aplicamos la Integral de Ampère a la curva C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I$$

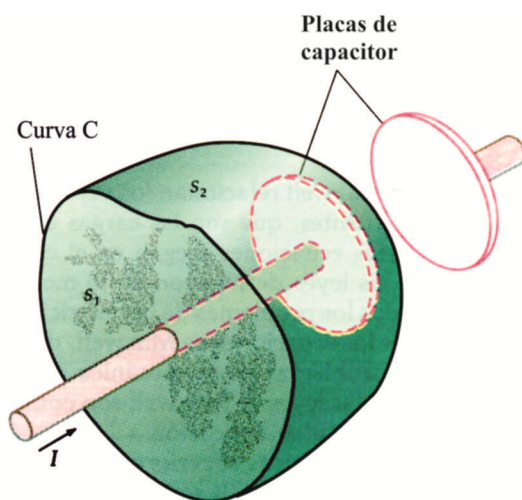


Figura 3

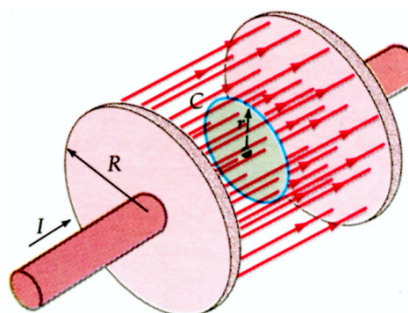


Figura 4

en donde I es la denominada corriente de conducción. Podemos ver a la curva C (que utilizamos como trayectoria de integración) como la curva que delimita una superficie S_1 la cual es atravesada por la corriente de conducción. En este caso la superficie S_1 es plana, pero nada nos impide que la misma tenga una forma distinta, por ejemplo deformando la superficie hasta la derecha superando la primera placa del capacitor como se muestra la superficie S_2 . ¿Cuál va a ser el valor de la corriente que atraviesa S_2 ? Cero, por supuesto ya que entre las placas no hay conductor que transporte corriente. Ante tal situación Maxwell analiza lo que ocurre entre las placas y se da cuenta que durante el proceso de carga (o de descarga) el Campo Eléctrico existente es un campo que varía en el tiempo, es un campo no estacionario. ¿Cómo podemos justificar entonces que la circulación del campo B a través de la curva C no sea igual a cero para S_2 , sino que sea igual al valor hallado para S_1 ? Lo que vamos a hacer es agregar un término al segundo miembro que corrija esta situación. Para ello vamos a representar (de la misma forma que hicimos para Campos Eléctricos Inducidos) a la fem inducida en una espira circular como una integral del Campo Eléctrico:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c}$$

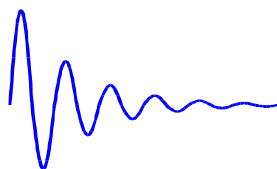
sustituyendo esta integral en la Ley de Faraday-Lenz, tenemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Repasemos lo que nos dice esta expresión, que la circulación del Campo Eléctrico en la curva C es proporcional a la variación del flujo del Campo Magnético en el tiempo. Entonces vamos a suponer que su contraparte simétrica también se cumple, o sea que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} \propto \frac{d\Phi_E}{dt}$$

(recordemos que el símbolo griego α —alfa— se utiliza como símbolo matemático que indica la proporcionalidad entre ambos miembros), esta expresión indica que la circulación del Campo magnético es proporcional a la variación del flujo del Campo



Eléctrico. Para convertir esta proporción en una igualdad debemos tener cuidado de ecualizar dimensionalmente ambos miembros. En nuestro sistema de unidades (*SIMeLA*, derivado del *SI*) se requiere para ello multiplicar el segundo miembro por dos constantes físicas, la permitividad del vacío y la permeabilidad del vacío. Por lo tanto la expresión anterior queda:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Esta expresión nos dice que tenemos al menos dos formas de establecer un Campo Magnético, por medio de un Campo Eléctrico variable en el tiempo, o por medio de una corriente. Si establecemos ambas posibilidades dentro de la Integral de Ampère, a la misma le tendríamos que agregar el segundo miembro de esta última expresión, con lo que la Integral de Ampère queda generalizada de la siguiente forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

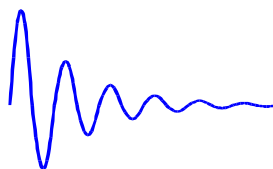
Si prestamos atención al segundo miembro nos damos cuenta que si dividimos ambos términos por μ_0 , lo que queda tiene dimensión de corriente eléctrica [*Coulomb/segundo* \equiv *Ampere*] por lo que podemos considerar a la parte que queda del segundo término como:

$$\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I_d [A]$$

En donde a I_d Maxwell lo denominó Corriente de Desplazamiento. Si bien esta corriente no es una corriente real en el sentido de la definición que nos dice que la corriente eléctrica es un desplazamiento de cargas en el tiempo a través de una superficie S , sí lo es en el fenómeno físico que produce. Si observamos la curva C de la Figura 4 podemos ver que la misma está inmersa en una región en donde el Campo Eléctrico varía en el tiempo; si se cumple el sentido de esta corriente de desplazamiento definida, deberá haber una circulación del campo B a lo largo de esta curva. Esto lo podríamos verificar colocando entre las placas una bobina toroidal cuyo eje de revolución coincida con la curva C , de esta forma la bobina concatena una porción del flujo de las líneas del Campo Magnético B inducido, y este flujo –variable en el tiempo– inducirá una fem en dicha bobina toroidal; verificando la existencia de esta fem inducida comprobaremos la veracidad del análisis desarrollado por Maxwell. Prestemos particular atención que estas líneas del campo B inducido se encuentran contenidas en planos perpendiculares a las líneas del campo E no estacionario, por lo que verificamos que, en forma similar a lo que ocurría en campos eléctricos inducidos, las líneas de E y de B son también **perpendiculares** entre sí. Ahora entonces, podríamos reescribir la Integral de Ampère generalizada de la siguiente forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 (I + I_d)$$

Con esta generalización, la Integral de Ampère se cumple para cualquier tipo de superficie delimitada por la curva C en la Figura 3. Incluso se puede generalizar para el caso de los materiales que tengan comportamiento magnético con el agregado de una tercera corriente que sería la corriente de magnetización o corriente amperiana.



Ecuaciones de Maxwell: Forma Integral

James Clerk Maxwell, en un trabajo publicado en 1865, logró sintetizar en forma magistral a todo el electromagnetismo en un solo paquete de ecuaciones. Si bien este paquete que logró reunir ahora lo representamos con cuatro ecuaciones, originalmente él había agrupado un total de 20 ecuaciones planteadas en forma diferencial (nosotros, para una mejor comprensión, las desarrollaremos en forma integral y luego las convertiremos a forma diferencial). ¿Por qué necesitó desarrollar 20 ecuaciones? Porque originalmente cuando las planteó Maxwell, no usó notación vectorial sino que expresó las variables en cuaterniones (una forma de extensión de los números reales a tres unidades imaginarias i, j, k –no confundir con los versores cartesianos–, concepto desarrollado por Hamilton en 1843). Posteriormente, en el año 1884 Oliver Heaviside (físico, ingeniero y matemático inglés) junto con Willard Gibbs (físico estadounidense), desarrollando el concepto de **vector** y **cálculo vectorial**, reformularon las ecuaciones originales de Maxwell, resumiéndolas en 4 ecuaciones vectoriales, tal como se las conoce ahora. En esta reformulación se pierde el producto vectorial $[\vec{v} \times \vec{B}]$, por lo que actualmente se las complementa con la llamada Fuerza de Lorentz.

Nosotros vamos a suponer que el paquete de ecuaciones integrales con que nos encontramos para resumir la electricidad y el magnetismo son tres:

$$\text{Integral de Gauss:} \quad \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

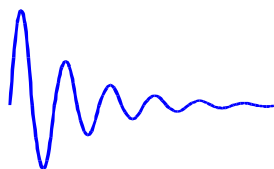
$$\text{Integral de Ampère:} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\text{Ley de Faraday:} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ahora bien, aplicando a estas ecuaciones el concepto de simetría, nos encontramos con que tenemos 2 integrales de Campo Eléctrico y 1 de Campo Magnético; también podemos ver que tenemos 1 integral de superficie y 2 integrales de línea. Entonces nos preguntamos, ¿qué nos falta para que este conjunto de ecuaciones cobre una cierta simetría? Falta una integral de superficie que se refiera al Campo Magnético. Para completar esta ecuación que falta podríamos aplicar la Integral de Gauss al Campo Magnético; sabemos que las líneas de Campo Magnético son cerradas, por lo tanto siempre el flujo del Campo Magnético definido por la Integral de Gauss va a ser nulo ya que siempre el flujo entrante será igual al saliente en cualquier superficie cerrada:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ahora podemos preguntarnos, ¿qué nos dice esta expresión acerca del Campo Magnético?, que como en el Campo Magnético hay ausencia de polos magnéticos individuales (o, “masas” magnéticas, o “cargas” magnéticas) debido a que las líneas de dicho Campo son cerradas, el resultado de esta integral va a ser siempre cero. Entonces, incorporar esta ecuación no es caprichoso sino que está describiendo una propiedad del Campo Magnético.



Con esta descripción nos queda el paquete completo de Ecuaciones de Maxwell en su forma integral:

Ley de Gauss para E:	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$
Ley de Gauss para B:	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
Ley de Ampère:	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$
Ley de Faraday:	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

Si a estas ecuaciones le incorporamos la Fuerza de Lorentz, tenemos la descripción completa del electromagnetismo:

Fuerza de Lorentz:	$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
---------------------------	--

Por supuesto, estas ecuaciones tienen un límite en la descripción del electromagnetismo ya que, al ser integrales, describen la propiedad de una región del espacio, y no la de un punto del espacio. Para tener una descripción completa de esta propiedad en el entorno de un punto, deberemos transformarlas en ecuaciones diferenciales, que es lo que haremos a continuación. Previo a ello haremos un breve repaso de los operadores que necesitamos.

El operador vectorial ∇ (nabla)

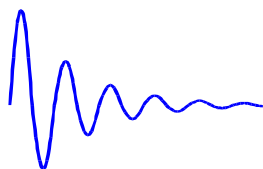
El operador vectorial **nabla** (llamado **del** por algunos autores), representado por una letra griega Δ (delta) invertida, fue presentado cuando se desarrolló el concepto de Gradiente de Potencial:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$$

En esta expresión observamos que las derivadas parciales en los tres términos del segundo miembro se efectúan sobre la misma función que es la función de potencial V , la cual es un campo escalar. Nosotros podríamos “omitir” en dicha expresión a la función de potencial mencionada, y ¿qué nos queda entonces?

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

La expresión que nos queda ya no es una función, ni un vector, ni una ecuación diferencial. Esta expresión cobra un carácter simbólico, y la denominamos operador, en este caso tenemos un operador vectorial, ya veremos por qué. Un operador es un símbolo matemático que nos da instrucciones de lo que tenemos que hacer, así, si escribimos la operación “ 5×4 ”, el operador “por” nos dice que al primer factor lo tenemos que sumar cuatro veces “ $5 + 5 + 5 + 5$ ” y ésta es la instrucción que efectuamos (aunque desde chiquitos hayamos aprendido mnemotécnicamente las tablas de multiplicar). Como operador, solamente tiene



sentido si se lo relaciona con otra magnitud de manera definida. Éste es un operador que, al decir de James Jeans, es un operador “hambriento de algo para derivar”². Este operador está compuesto de operadores diferenciales (que son las derivadas parciales), las cuales, al estar multiplicadas por versores de dirección, convierte al operador nabla en un operador vectorial. También se puede escribir:

$$\nabla = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

El nombre de este símbolo proviene de la palabra griega equivalente a la palabra hebrea “arpa”, y refiere a la forma similar que tiene el símbolo con dicho instrumento musical. Fue usado por primera vez por Hamilton (1805-1865), matemático, físico y astrónomo irlandés. Para su uso se debe conservar siempre el orden correcto, ya que opera siempre lo que tiene a la “derecha” del símbolo. En esta publicación se trabajará solamente en sistemas de referencias en coordenadas cartesianas rectangulares. Existen también expresiones de este operador para coordenadas esféricas y coordenadas cilíndricas, de gran utilidad en cálculos de propagación de ondas electromagnéticas, pero cuyo estudio y aplicaciones quedan para cursos más avanzados de algunas carreras de ingeniería.

A continuación veremos algunas aplicaciones muy útiles del operador nabla.

Gradiente:

En esta aplicación nabla opera sobre una función escalar cualquiera, que llamaremos ψ :

$$\nabla\psi$$

De esta forma:

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \psi$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \hat{k}$$

Al ser ∇ un operador vectorial, transforma la función escalar en un vector llamado **gradiente** y el mismo indica la dirección y sentido hacia dónde más rápido varía la función escalar.

Divergencia:

En esta aplicación ∇ opera sobre un vector, más precisamente sobre un campo vectorial que denominamos \vec{U} . Como el operador se comporta como un vector, en esta aplicación se relacionan ambos vectores a través de un producto escalar:

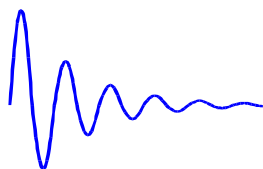
$$\vec{U} = (U_x, U_y, U_z) = U_x \cdot \hat{i} + U_y \cdot \hat{j} + U_z \cdot \hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (U_x \cdot \hat{i} + U_y \cdot \hat{j} + U_z \cdot \hat{k})$$

Multiplicando entre los paréntesis y eliminando los términos que tienen productos escalares de versores normales, tenemos:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

² Este comentario está extraído del excepcional libro de Richard Feynman “*The Feynman Lectures on Physics, volume II*” y se refiere a James Hopwood Jeans (1877-1946), físico, astrónomo y matemático británico.



La **divergencia** es entonces un campo escalar, y con este resultado se puede obtener un significado físico como veremos más adelante.

Rotor:

Tomamos nuevamente un campo vectorial que en este ejemplo hemos denominado \vec{U} , y ahora lo relacionamos con el operador ∇ a través de un producto vectorial:

$$\nabla \times \vec{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})$$

El resultado de esta operación nos dá, como ya sabemos, un vector que por definición es normal a ambos vectores del producto vectorial. Como en este caso hay un solo vector \vec{U} , ya que el otro no es vector sino que es un operador vectorial, el vector resultado es un vector normal a \vec{U} . El nombre de esta operación es **rotor**, o **rotacional** y tiene un importante significado físico ya que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto. Se puede demostrar que la expresión del rotor es:

$$\nabla \times \vec{U} = \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Podemos escribir a este expresión de rotor de una forma más fácil de recordar y razonar, con la ayuda de los determinantes, de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

Hay que tener cuidado ya que, si bien lo escribimos como determinante, tal expresión no lo es ya que los elementos de la segunda fila no son valores, no tienen argumento y éste, sólo puede desarrollarse por la primera fila.

En las aplicaciones anteriores el operador nabla se aplica una vez, dando ecuaciones diferenciales de primer orden. Pero se producen aplicaciones de interesante utilidad en física cuando opera dos veces, o sea produciendo derivadas de segundo orden. Veamos las siguientes combinaciones, que son todas las posibles:

Divergencia del gradiente: $\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi$

Gradiente de la divergencia: $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) = \nabla^2 \vec{U}$

Divergencia del rotor: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U})$

Rotor del gradiente: $\nabla \times (\nabla \psi)$

Rotor del rotor: $\nabla \times (\nabla \times \vec{U})$

Laplaciano:

La **divergencia del gradiente**, operación a la que se le ha dado un nombre especial, **laplaciano**, llamado así en homenaje al físico y matemático Pierre Simón de Laplace, es una aplicación doble del operador nabla que expresa derivadas de segundo orden:

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi$$



$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \psi\right] \\ \nabla^2\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}\right)\end{aligned}$$

Multiplicando entre los paréntesis y eliminando los términos que tienen productos escalares de versores normales, tenemos:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Podemos entonces expresar al operador laplaciano como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Este operador, a diferencia del operador nabla, es un operador escalar; si opera sobre una función escalar, da un **escalar**. Pero también puede operar sobre un vector, comportándose como un escalar, o sea multiplicando a cada componente del vector dando, por supuesto, un **vector**:

$$\nabla^2\vec{U} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}\hat{j} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\hat{k}$$

La utilidad del laplaciano en esta parte de la física se manifiesta en la propagación de ondas electromagnéticas y en las ecuaciones de Poisson y de Laplace.

Gradiente de la divergencia:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) = \left(\frac{\partial \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \left[\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right]}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right)\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\right)\hat{k}$$

Tenemos entonces que el gradiente de la divergencia da un **campo vectorial**.

Divergencia del rotor:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U})$$



$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} \\&= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right] \\&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \\&= \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} \right) \\&= \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z} = 0\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) = 0$$

La divergencia del rotor es igual a **cero**.

Rotor del gradiente:

$$\nabla \times (\nabla \cdot \psi)$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \psi) = \nabla \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \psi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \psi) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \hat{k}$$

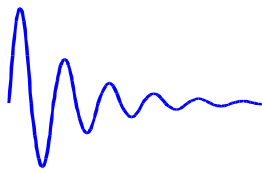
Como se puede ver, el resultado de cada factor en paréntesis es igual a cero. Por tanto, el rotor del gradiente es igual a **cero**.

Rotor del rotor:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U})$$

Si aplicamos la identidad vectorial llamada *regla de la expulsión*:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$$



Se demuestra fácilmente que el rotor del rotor de un campo vectorial es otro campo vectorial de la forma:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U}$$

Forma diferencial de las Ecuaciones de Maxwell³:

Para obtener las Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, partimos de su forma integral:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 \quad (2)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dc} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (3)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dc} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4)$$

A menudo, para efectuar estas transformaciones, la Bibliografía existente aprovecha las relaciones entre integrales que ofrecen dos teoremas, el Teorema de Gauss que define el concepto de Divergencia, y el Teorema de Stokes que define el concepto de Rotor. Entendemos que la mera aplicación de estos teoremas, si bien resuelve la transformación de las ecuaciones, no brindan suficiente claridad del fenómeno físico-matemático que estas transformaciones conllevan por lo que preferimos efectuar “paso a paso” las transformaciones, quedando implícito en el procedimiento ambos teoremas.

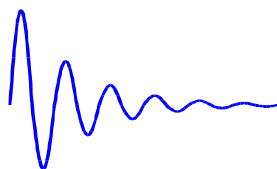
Teorema de Gauss:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} \cdot dv$$

Teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dc} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{ds}$$

³ El desarrollo de este tema está inspirado en el libro Halliday, D. – Resnick, R. (1970) *Física – parte II* – Nueva edición actualizada, México D.F.: Compañía editorial continental.



a) Transformación de las dos primeras ecuaciones (Integrales de Gauss)

Cuando analizamos la Integral de Gauss, considerábamos que esta expresión nos relacionaba el Flujo del Campo a través de una superficie cerrada de forma cualquiera, con la carga neta encerrada por dicha superficie:

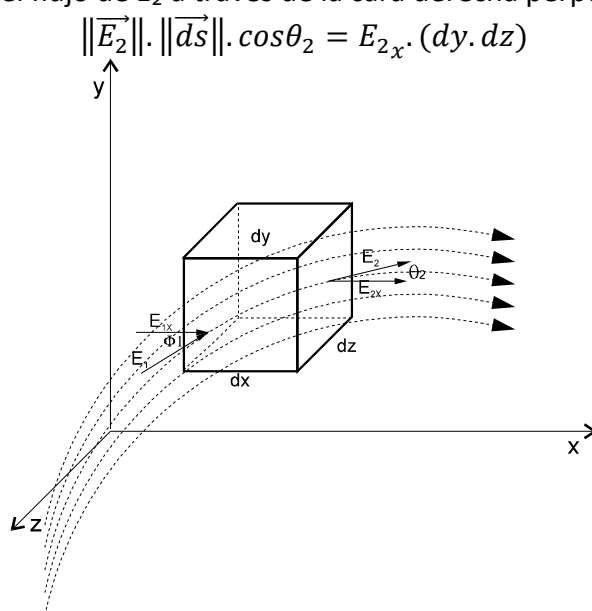
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Para efectuar esta consideración, nosotros adoptábamos una superficie S finita, para poder efectuar sobre ella la correspondiente integral.

Vamos a analizar ahora, el caso de tomar una superficie cerrada elemental, que encierra un volumen, también elemental, sumergido en un espacio en el cual existe un Campo Eléctrico que representaremos mediante líneas de campo. Vamos a referir esta región a un Sistema de Coordenadas Cartesianas, y vamos a adoptar la superficie de un paralelepípedo elemental, cuyas caras sean paralelas a los planos definidos por los ejes ortogonales:

Analizaremos la variación del flujo a través del paralelepípedo en los tres ejes por separado, y análogamente al análisis efectuado en la Ley de Gauss, vamos a considerar el flujo saliente como positivo.

Tenemos entonces la superficie de un paralelepípedo que, al ser elemental, sus dimensiones van a ser dx , dy , dz . Veamos como varía el flujo en el eje x ; para ello consideremos primero el flujo de E_x a través de la cara derecha perpendicular al eje x :

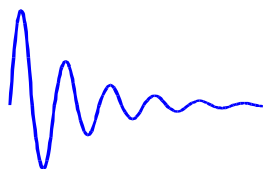


$$\|\vec{E}_2\| \cdot \|\vec{ds}\| \cdot \cos\theta_2 = E_{2x} \cdot (dy \cdot dz)$$

y el flujo a través de la cara izquierda perpendicular al eje X :

$$-\|\vec{E}_1\| \cdot \|\vec{ds}\| \cdot \cos\theta_1 = -E_{1x} \cdot (dy \cdot dz)$$

el signo menos de la expresión indica que dicho flujo es negativo ya que es entrante a la superficie. Si sumamos ambas expresiones vamos a tener el flujo resultante del campo, a través de las dos superficies perpendiculares al eje X :



$$d\Phi_x = (E_{2x} - E_{1x}) \cdot (dy \cdot dz)$$

Como la distancia entre las dos superficies es infinitesimal (dx) podemos perfectamente suponer que, en caso que las componentes del campo según el eje x no sean iguales, su variación a lo largo de dx va a ser lineal ya que las diferenciales de orden superior son nulas.

Entonces podemos expresar la diferencia de las componentes del campo según el eje x en función de su derivada parcial:

$$(E_{2x} - E_{1x}) = dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx$$

y la variación de flujo según x :

$$d\Phi_x = dE_x \cdot (dy \cdot dz)$$

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)$$

$$d\Phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dv$$

siendo: $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ el volumen elemental del paralelepípedo considerado.

Si analizamos la variación de flujo elemental en las otras caras del paralelepípedo según los ejes y y z , vamos a obtener resultados similares:

$$d\Phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dv$$

$$d\Phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dv$$

Entonces, el flujo total a través del paralelepípedo elemental, es:

$$d\Phi_E = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z$$

$$d\Phi_E = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dv + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dv + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dv$$

$$d\Phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot dv$$

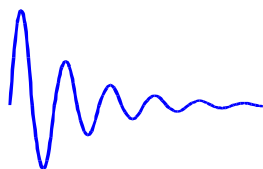
Llamamos **DIVERGENCIA** del Campo en un punto dado del espacio de flujo considerado, a la relación del flujo resultante a través de la superficie elemental considerada, y el volumen que ésta encierra⁴:

$$\text{div. } \vec{E} = \frac{d\Phi_E}{dv} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Adoptamos el operador vectorial ∇ (nabla) el cual estará expresado de la siguiente forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

⁴Convencionalmente se adoptó el término DIVERGENCIA, ya que cuando el flujo saliente es mayor que el entrante, dicho flujo es positivo y diverge de la superficie considerada. Si el flujo resultante fuera negativo, éste sería convergente.



Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \cdot \vec{E}$$

Si en el volumen encerrado por la superficie del paralelepípedo elemental no hay cargas eléctricas, entonces al aplicar la Ley de Gauss, el flujo resultante va a ser cero; por lo tanto la variación de flujo y la Divergencia del Campo van a ser nulas:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

pero si en el espacio considerado existe una distribución extendida de cargas, habrá cargas eléctricas encerradas por la superficie del paralelepípedo elemental. Esto hace que el flujo resultante sea distinto de cero. Si la carga encerrada por la superficie es dq , aplicando Gauss:

$$d\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot dq$$

entonces:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{d\Phi_E}{dv} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{dv}$$

a la relación dq/dv la vamos a llamar **densidad espacial de carga** y la expresamos simbólicamente con la letra griega ρ :

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

siendo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Esta expresión es entonces la forma diferencial de la Ley de Gauss para el campo eléctrico, o sea que es la primera ecuación de Maxwell escrita en forma diferencial, **1ra. Ecuación diferencial de Maxwell**:

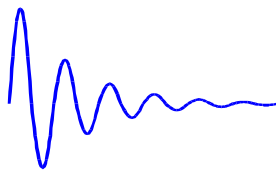
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La divergencia es una ecuación diferencial que proviene de una generalización de la Ley de Gauss referida a un punto del espacio.

Entonces, repasando, podemos decir que la Divergencia es la cantidad de flujo por unidad de volumen que "brota" de un volumen elemental, y muestra una forma de la variación del campo en un punto.

Tomamos entonces ahora la segunda ecuación de Maxwell en forma integral:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$



y efectuamos el mismo procedimiento que para la primera ecuación, y obtenemos la **2da. Ecuación diferencial de Maxwell:**

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

b) Transformación de las dos últimas ecuaciones (Integral de Ampère y Ley de Faraday)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (3)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (4)$$

Comenzamos transformando la ecuación (3). Para ello vamos a tomar una región del espacio como lo indica la figura 5, referenciada en coordenadas cartesianas rectangulares. Es conveniente imaginarnos que esta región del espacio se encuentran presente simultáneamente campos magnéticos, campos eléctricos y, en caso que esta región del espacio esté ocupada por materiales conductores, densidad de corriente eléctrica, todos ellos como función del espacio y el tiempo. En esta región situamos un punto **P** de coordenadas arbitrarias (x, y, z), y vamos a aplicar cada uno de los miembros y los términos de la (3) al entorno de este punto. Algunos autores sitúan el punto en el centro de las curvas consideradas, otros preferimos que el punto forme parte de las curvas a analizar; se supone que como las distancias son infinitesimales, esta consideración no afecta en absoluto el análisis.

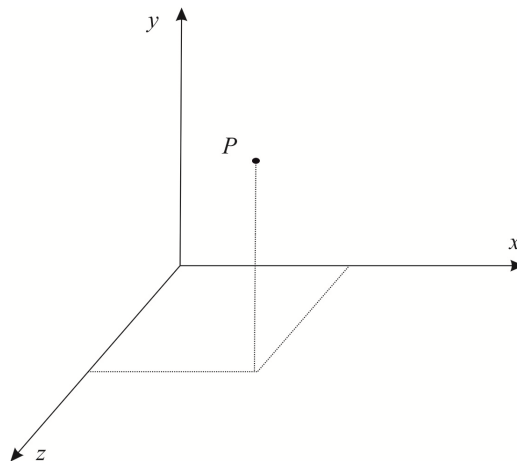


Figura 5

Tomamos entonces una curva elemental en el entorno del punto P. Para ello, y a fin de que podamos generalizar el análisis que efectuemos, vamos a tomar como curva cerrada a un rectángulo que tenga sus lados paralelos a los ejes del sistema de referencia, la curva contenida en un plano perpendicular a uno de los ejes de referencia. Comenzamos tomando un rectángulo perpendicular al eje x , por lo tanto sus lados serán dy y dz , como lo indica la Figura 6.

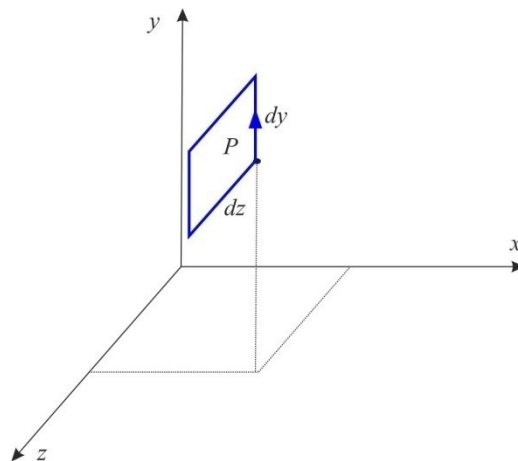


Figura 6

Comenzamos aplicando el primer miembro de la (3), la integral que calcula la circulación del campo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c}$$

sabemos que una integral representa una sumatoria de infinitos términos infinitesimales, pero en este caso en que la superficie rectangular es infinitesimal, la integral queda reducida a una sumatoria de cuatro términos, uno por cada lado del rectángulo. Entonces, considerando que el campo magnético tiene un valor \vec{B} en el punto P , que al efectuar un desplazamiento infinitesimal $d\vec{y}$ en el sentido positivo del eje y el valor del campo será $\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy$, y que al efectuar un desplazamiento infinitesimal $d\vec{z}$ en el sentido positivo del eje z el valor del campo será $\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz$, la circulación del campo siguiendo la flecha, será:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \vec{B} \cdot dy \cdot \hat{j} + \left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy \right) dz \cdot \hat{k} - \left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \right) dy \cdot \hat{j} - \vec{B} \cdot dz \cdot \hat{k}$$

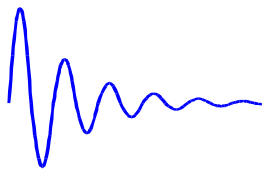
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \vec{B} \cdot dy \cdot \hat{j} + \vec{B} dz \cdot \hat{k} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy dz \cdot \hat{k} - \vec{B} dy \cdot \hat{j} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz dy \cdot \hat{j} - \vec{B} \cdot dz \cdot \hat{k}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy dz \cdot \hat{k} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz dy \cdot \hat{j}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \hat{k} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \hat{j} \right)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left[\frac{\partial}{\partial y} (\vec{B} \cdot \hat{k}) - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{B} \cdot \hat{j}) \right]$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)$$



Continuamos ahora aplicando el primer término del segundo miembro de la (3):

$$\mu_0 i$$

La corriente eléctrica a la que se refiere este término es la fracción de corriente que pueda concatenar la curva trazada, como encierra a una superficie infinitesimal ($dydz$) debemos acudir al concepto de densidad de corriente.

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

En donde: $\vec{ds} = dy \cdot dz \cdot \hat{i}$; el vector \vec{ds} es paralelo al eje x .

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{i} \cdot dy \cdot dz$$

$$\vec{j} \cdot \hat{i} = (J_x, J_y, J_z) \cdot (1, 0, 0) = J_x$$

$$i = \iint_S J_x \cdot dydz$$

Ésta es una integral en donde el área sobre la cual se integra es ds , o sea es de un valor infinitesimal. Tiene la particularidad que el resultado de la integral es el integrando mismo ya que la sumatoria de términos se reduce solo a uno

$$i = J_x \cdot dydz$$

Aplicamos ahora al segundo término del segundo miembro de la (3):

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

El flujo eléctrico de la expresión es sólo la porción de flujo que concatena la curva trazada, entonces a dicho flujo lo expresamos como:

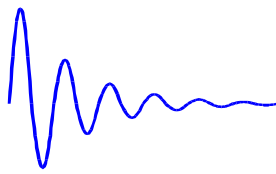
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Por consiguiente,

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Cuando ahora procedemos a introducir la función derivada dentro de la función integral, debemos tener en cuenta que el campo eléctrico es función del espacio y del tiempo, por lo que esta derivada pasa a ser una derivada parcial:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{ds}$$



$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dydz \cdot \hat{i}$$

$$\vec{E} \cdot \hat{i} = (E_x, E_y, E_z) \cdot (1, 0, 0) = E_x$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial E_x}{\partial t} dydz$$

Lo mismo acontece en esta integral que en el caso de la densidad de corriente, la integral representa una sumatoria de un solo término

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} dydz$$

Habiendo obtenido ya los resultados de todos los términos en ambos miembros de la ecuación (3), procedemos a reemplazar y obtenemos:

$$dydz \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x \cdot dydz + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} dydz$$

O sea:

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

Éste es entonces, como dijimos, el resultado de aplicar la (3) a la curva del dibujo. Éste es un resultado que no podemos generalizar, está obtenido para el caso particular en el cual la curva es paralela al plano yz . Para obtener un resultado generalizado, debemos efectuar el mismo desarrollo para una curva paralela al plano xz (perpendicular a y), según la Figura 7:

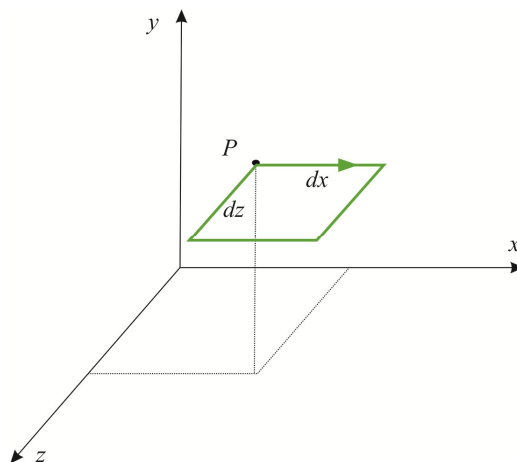
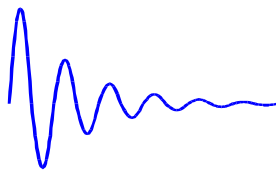


Figura 7

Que nos da:



$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 J_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Y ahora efectuamos nuevamente el desarrollo para una curva paralela al plano xy (perpendicular a z), según la Figura 8:

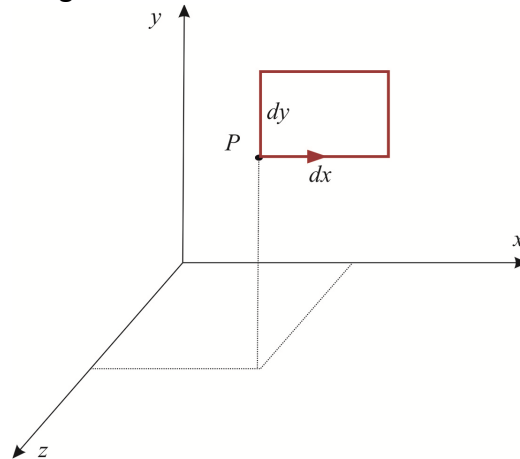


Figura 8

Que nos da:

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Hemos obtenido entonces, tres resultados independientes, cada uno paralelo a uno de los ejes del sistema de referencia. Podemos observar las curvas analizadas en un solo dibujo (Figura 9) para entender mejor la situación:

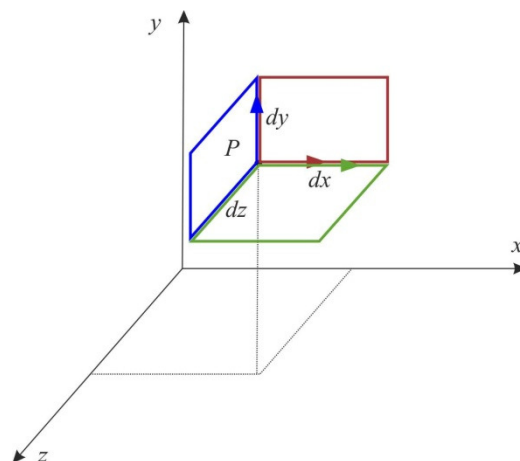
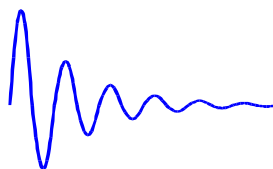


Figura 9

Nos damos cuenta entonces que para cualquier posición que tome una curva cerrada infinitesimal, tanto la circulación del campo \mathbf{B} como la densidad de corriente y el flujo eléctrico, van a tener componentes en las tres direcciones (x , y , z) de referencia.



Consideramos entonces que si componemos los resultados en las tres direcciones, vamos a obtener una expresión general que indique las propiedades en cualquier dirección del espacio.

Vamos entonces a sumar miembro a miembro los tres resultados obtenidos, posicionados en la dirección de cada uno de ellos, a través de los versores correspondientes.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= \mu_0 (J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}) + \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right) \end{aligned}$$

ordenando matricialmente el primer miembro, y reemplazando en el segundo las componentes por los mismos vectores:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sabemos que el determinante obtenido es la expresión del rotor del campo:

$$\text{rot} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \textbf{3ª Ecuación diferencial de Maxwell}$$

Tomamos entonces ahora la cuarta ecuación de Maxwell en forma integral:

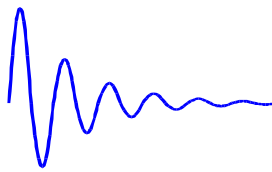
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

y efectuamos el mismo procedimiento que para la tercera ecuación, y obtenemos la **4ª. Ecuación diferencial de Maxwell**:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Análogamente:

$$\text{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \textbf{4ª Ecuación diferencial de Maxwell}$$



c) Las ecuaciones en forma diferencial

Entonces, agrupando las transformaciones obtenidas, tenemos:

1ra. Divergencia del campo eléctrico: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

2da. Divergencia del campo magnético: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

3ra. Rotor del campo magnético: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

4a. Rotor del campo eléctrico: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Agregando el concepto de Fuerza de Lorentz:

Fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Aclaración importante: la numeración establecida para las ecuaciones no son de un criterio generalizado. En distintos autores el orden es diferente.

En esta expresión de las Ecuaciones de Maxwell se las presenta en función de los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} . El estudiante podrá encontrar en la bibliografía del tema otras expresiones en donde además de estos campos se incluyen el vector desplazamiento \vec{D} y el vector excitación magnética \vec{H} .