2020

# Teoría de Señales Trabajo Práctico Nro. 2

Prof. Ing. Olivero Marcelo


Alumnos:
GRANDON ADRIAN
VIETTO SANTIAGO

**Ejercicio 18**

## Propiedades de la Transformada de LaPlace:

1) Linealidad: ambas transformadas uni y bilateral son transformaciones lineales.

PROPIEDADES DE LA PLACE

- DEFINICIÓN: $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$

LINEALIDAD

1)- PRODUCTO POR UNA CONSTANTE

$$\mathcal{L}[a\, f(t)] = a\,\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[a f(t)] = \int_0^\infty a f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= a \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

2)- ADITIVIDAD

$$\mathcal{L}[f(t) \pm g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \pm \mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}[f(t) \pm g(t)] = \int_0^\infty (f(t) \pm g(t))\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \pm \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt$$

- DEMOSTRACIÓN: $\mathcal{L}[a\, f(t) \pm b\, g(t)]$ CON $a, b \in \mathbb{R}$

$$= \int_0^\infty [(a\, f(t)) \pm (b\, g(t))]\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty a f(t) \cdot e^{-st}\, dt \pm \int_0^\infty b\, g(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

$$= a \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt \pm b \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt = a\,\mathcal{L}[f(t)] \pm b\,\mathcal{L}[g(t)]$$

$$a\, F(s) \pm b\, G(s)$$

2) <u>Desplazamiento Temporal:</u> para ambas se demuestra que:

$x(t) \rightarrow X(s)$

$x(t-t_0) \rightarrow e^{-t_0 s} X(s)$

DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO

- SI DESIGNAMOS CON $F(S)$ A LA TRANSFORMADA DE $f(t).u(t)$, ENTONCES, LA TRANSFORMADA DE $f(t-t_0).u(t-t_0)$ ES $\mathcal{L}[f(t-t_0).u(t-t_0)] =$

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-s(x+t_0)}\, dx = e^{-st_0} \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx = e^{-st_0} F(S)$$

- DONDE SE EFECTUÓ EL REEMPLAZO DE $x = t - t_0$. LUEGO:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-t_0).u(t-t_0)] = e^{-st_0}\, \mathcal{L}[f(t).u(t)] = F(S).\, e^{-st_0}}$$

3) <u>Desplazamiento en el dominio de s:</u>

Análogo al corrimiento en frecuencia de la transformada de Fourier

$x(t) \rightarrow X(s)$

$e^{s_0 t}\, x(t) \rightarrow e^{-t_0 s} X(s-s_0)$

DESPLAZAMIENTO EN S

- $\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-(s-a)t}\, dt$. LA SEGUNDA INTEGRAL TIENE LA MISMA FORMA QUE LA PRIMERA PERO CON $S-a$ EN LUGAR DE $S$. POR LO TANTO CONVERGE SI $Re(S) > a$, A $F(S-a)$.

- LUEGO:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)\, e^{at}] = F(S-a)}$$

4) <u>Escalamiento en el tiempo:</u> (cambio de escala)

x(t) → X(s)

x(at) → 1/a X(s/a)

ESCALAMIENTO TEMPORAL (CAMBIO DE ESCALA)

_ SI $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, ENTONCES, PARA CUALQUIER CONSTANTE REAL $a > 0$

ES $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-sx/a}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-(s/a)x}dx = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

DONDE SE EMPLEO EL CAMBIO DE VARIABLE $x = at$. LUEGO:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

5) <u>Diferenciación en el dominio temporal:</u>

x(t) → X(s)

entonces

dx(t)/dt → s X(s) Bilateral

dx(t)/dt → s X(s) – x(0) Unilateral derecha

_ Esta es una de las propiedades operativas más útiles ya que permite obtener las funciones de transferencia de sistemas modelados por ecuaciones diferenciales y aún resolver con cierta facilidad las ecuaciones diferenciales y las no lineales, donde también se usa la transformada con un sentido más de herramienta que conceptual.

## TRANSFORMADA DE LA DERIVADA EN EL TIEMPO

- $\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + sF(s)$.

DONDE SE HA INTEGRADO POR PARTES Y SE HA USADO LA CONDICIÓN DE QUE $f(t)$ ES DE ORDEN EXPONENCIAL PARA JUSTIFICAR LA ANULACIÓN DEL TÉRMINO $f(t)e^{-st}$ EN $t = \infty$. POR LO TANTO, SI CONOCEMOS LA TRANSFORMADA $F(S)$ DE $f(t)$, PODEMOS OBTENER LA DE SU DERIVADA MEDIANTE:

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)}$$

- SEA $f(t)$ UNA FUNCIÓN CONTINUA Y DE ORDEN EXPONENCIAL, CUYA DERIVADA PRIMERA $f'(t)$ SEA CONTINUA A TROZOS Y DE ORDEN EXPONENCIAL $(f'(t) \in \mathcal{E})$.

## DERIVADA n-ÉSIMA

- SEA $f(t)$ UNA FUNCIÓN CONTINUA Y DE ORDEN EXPONENCIAL, CUYAS DERIVADAS HASTA ORDEN $(n-1)$ SEAN TAMBIÉN FUNCIONES CONTINUAS Y EXPONENCIALES, Y LA DERIVADA n-ÉSIMA SEA CONTINUA A TROZOS Y DE ORDEN EXPONENCIAL $(f^{n}(t) \in \mathcal{E})$.
- MEDIANTE UN PROCESO DE RECURRENCIA SE OBTIENE:

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^{n} F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s^{2} f^{(n-3)}(0) - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

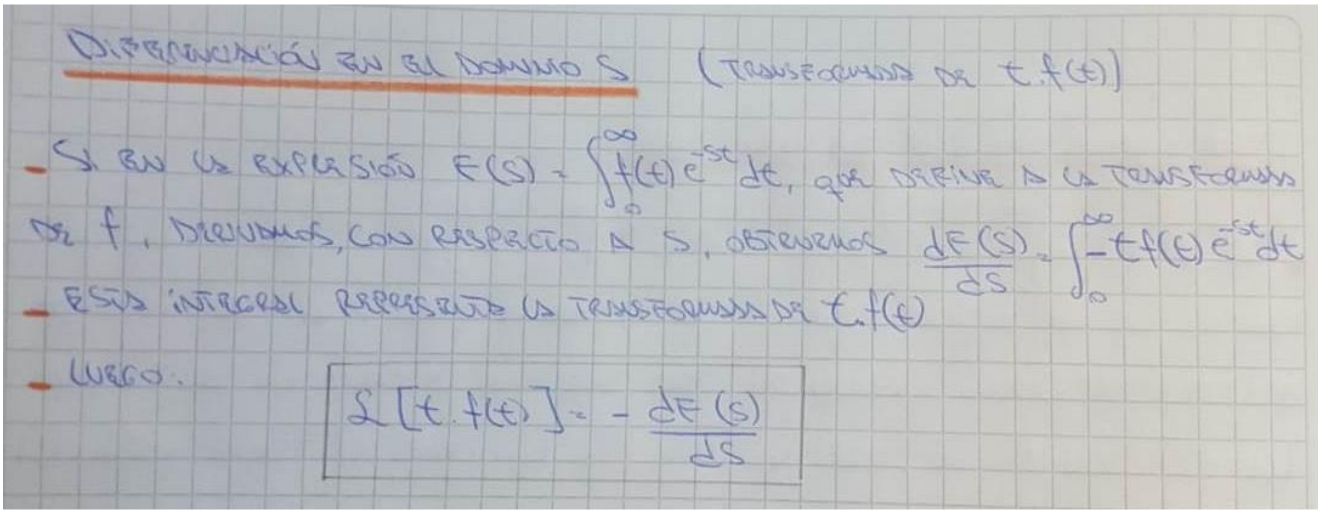
- DONDE LOS VALORES $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, Y $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ SON LOS VALORES DE LA FUNCIÓN Y DE SUS DERIVADAS HASTA ORDEN $(n-1)$ EN EL ORIGEN

6) <u>Diferenciacion en el dominio s:</u>

x(t) → X(s)

entonces

tx(t) → - dx(s)/ds


DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO S (TRANSFORMADA DE $t.f(t)$)

- SI EN LA EXPRESIÓN $F(S) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$, QUE DEFINE A LA TRANSFORMADA DE f, DERIVAMOS, CON RESPECTO A S, OBTENEMOS $\frac{dF(S)}{dS} = \int_0^\infty -t f(t)\, e^{-st}\, dt$
- ESTA INTEGRAL REPRESENTA LA TRANSFORMADA DE $t.f(t)$
- LUEGO:

$$\boxed{\mathcal{L}[t.f(t)] = -\frac{dF(S)}{dS}}$$

_ Esta relación indica que, si conocemos la transformada de una función f, para calcular la de t·f(t) nos basta con derivar a la anterior con respecto a la variable compleja s. Esto resulta en general más simple que transformar ) t · f (t a partir de la definición de la transformada. Más aún, en muchos casos, al aplicar la definición se obtiene una función cuya integración resulta muy complicada o imposible. Tal es el caso de las funciones sen y t tsen .

7) <u>Integración en el dominio temporal:</u>

INTEGRACIÓN EN EL DOMINIO TEMPORAL

- SE QUIERE CALCULAR LA TRANSFORMADA DE $\int_0^t f(x)\,dx$ EN TÉRMINOS DE LA TRANSFORMADA DE $f$. PARA ESTO SE DEFINE $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, QUE DEPENDE DEL LÍMITE SUPERIOR DE INTEGRACIÓN, $t$.

- $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\,G(s) - g(0)$. PERO $g(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0$, POR LO TANTO, $G(s) = \frac{F(s)}{s}$, ES DECIR:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}[f(t)]}$$

La integral da el área debajo de la curva representativa de la función f, tomada entre 0 y un valor t variable. El valor del área depende de la posición del límite superior de integración. La función g así definida es una primitiva de f y, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, se cumple que g'(t) = f (t) . Si designamos con G(s) a la transformada de g(t), y empleamos la relación ya probada entre la transformada de una función de t y la de su derivada, tenemos

8) <u>Convolución:</u> El caso de la bilateral, afirmamos que:

$x(t) \rightarrow X(s)$

$h(t) \rightarrow H(s)$

entonces

$s(t)*h(t) \rightarrow x(s).H(s)$

siendo

$$x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau)\, d\tau$$

CONVOLUCIÓN

- SEAN $f(t)$ Y $g(t)$ PERTENECIENTES A $\mathcal{E}$. LA FUNCIÓN $h(t)$ DEFINIDA POR LA CONVOLUCIÓN DE $f$ Y $g$, ESTO ES:

$$h(t) = (f * g) = \int_0^t f(t-\tau)\, d\tau$$

QUE TAMBIÉN PERTENECE A $\mathcal{E}$, Y SE VERIFICA QUE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $h(t)$ ES EL PRODUCTO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE $f(t)$ Y $g(t)$:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

- ESTA PROPIEDAD ES ESPECIALMENTE ÚTIL CUANDO SE EMPLEA EN SENTIDO INVERSO. ASÍ, SEAN $F(S)$ Y $G(S)$ DOS FUNCIONES EN EL DOMINIO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE, Y $H(S)$ SU PRODUCTO $(H(S) = F(S)G(S))$, SE VERIFICA QUE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA DE $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(S)]$ VIENE DADA POR:

$$\boxed{h(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)]}$$

9) Teorema del valor inicial

10) Teorema del Valor Final

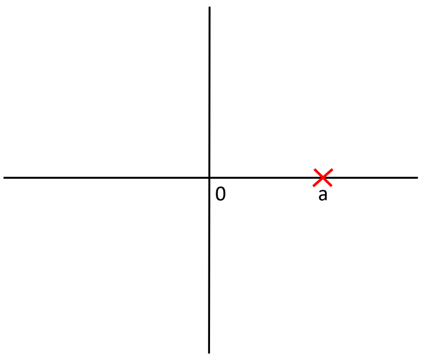
**Ejercicio 19**

_ Determine la transformada de Laplace indicando su ROC y mapeo de polos y ceros para la señal.

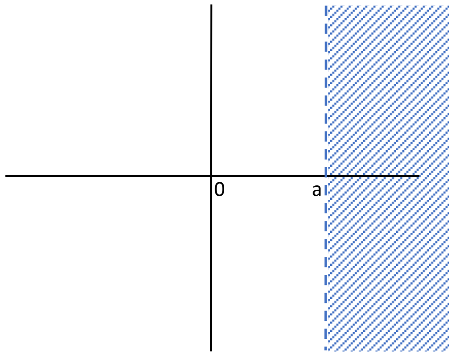
$$x(t) = e^{at}u(t) \qquad para\ a > 0$$

$$x(t) = e^{at}u(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \ X(s) = \frac{1}{s-a}$$

Para que la señal converja es necesario que: $\mathcal{R}e\{s-a\} > 0$, es decir $\mathcal{R}e\{s\} > a$




Mapeo de polos ceros




ROC. Región de convergencia

**Ejercicio 20**

**Ejercicio 21**

_ Considere un sistema LIT con entrada $x(t) = e^{at}u(t)$ y respuesta al impulso $y(t) = e^{-2t}u(t)$

$$x(t) = e^{at}u(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \ X(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$y(t) = e^{-2t}u(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} \ Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s-a}} \rightarrow H(s) = \frac{s-a}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{s}{s+2} - \frac{a}{s+2} \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad h(s) = \delta(t) - 2e^{-2t} - ae^{-2t}$$

Por el teorema de convolución sabemos que $\quad y(s) = H(s) \cdot X(s)$

$$y(s) = \frac{s-a}{s+2} \cdot \frac{1}{s-a} \;\rightarrow\; y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) * h(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad X(s)\,Y(s)$$

Entonces si $\quad H(s) \cdot X(s) = y(s) \quad$ y $\quad x(t) * h(t) = y(t) \quad$ reemplazamos y nos queda:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Entonces

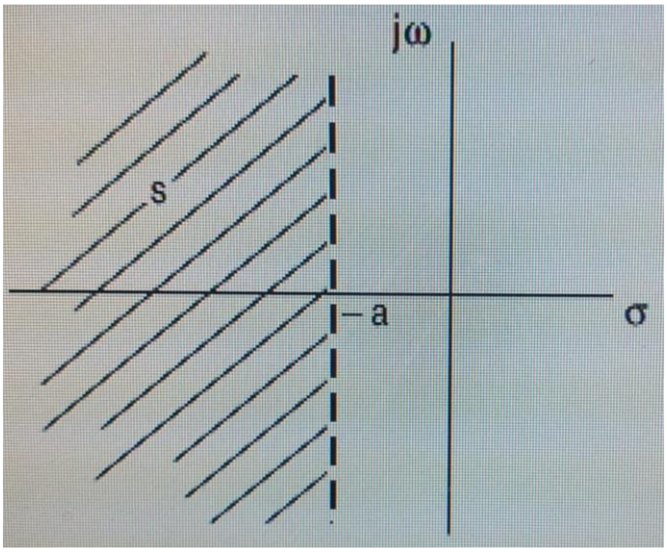
$$y(t) = e^{-2t}\,u(t)$$

Donde $s > -2$

**Ejercicio 22**

## Región de Convergencia

_ El rango de valores de $s$ en el cual la integral de la transformada converge se denomina region de convergencia (abreviada RDC) de la transformada de Laplace. Esta se dibuja en el plano complejo, referido generalmente como plano s, sombreando la zona comprendida.



_ La Transformada de Laplace no solo requiere la expresión *x (s)* sino que ademas requiere la region de convergencia. Dos señales pueden tener la misma *x (s)* pero difiererir en sus regiones de convergencia.
Estas propiedades permiten especificar implícitamente o reconstruír la RDC a partir del conocimiento de la expresión algebraica para *x (s)* y de ciertas características generales de *x (t)* en el dominio del tiempo:

**Propiedades:**

Propiedad 1: la RDC de *x (s)* consiste en bandas paralelas al eje $j\,\omega$ en el plano *s*. La validez de esta propiedad esta en el hecho que la RDC de *x (s)* consiste en aquellos valores de $s = \sigma + j\,\omega$ para los cuales la Transformada de Fourier de $x(t)\,e^{-\sigma t}$ converge, y así la región de convergencia depende sólo de la parte real de *s.*

Propiedad 2: Para la transformada racional de Laplace la RDC no contiene polos. Ya que como *x (s)* es infinita en un polo, la integral no converge en un polo y la RDC no puede contener estos valores de *s.*

Propiedad 3: Si *x (t)* es de duración finita y si al menos hay un valor de *s* para el cual la transformada de Laplace converge, entonces la RDC es el plano *s* completo. Una señal de duración finita es cero fuera de un intervalo de duración finita

Propiedad 4: Si *x (t)* está definida hacia la derecha y si la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la RDC, entonces todos los valores de *s* para los cuales $Re\{s\} > \sigma_0$ también están en la RDC. Una señal *x (t)* está definida hacia la derecha si *x (t)* = 0 a priori de algún valor finito $T_1$.

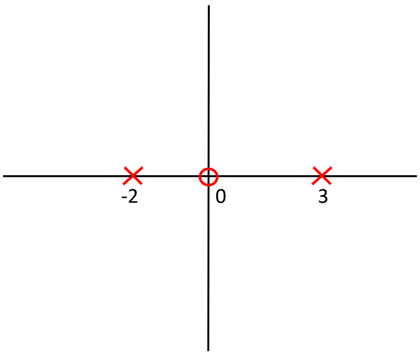
Propiedad 5: Si *x (t)* está definida hacia la izquierda y si la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la RDC, entonces todos los valores de s para los cuales $Re\{s\} < \sigma_0$ también están en la RDC. Una señal *x (t)* está definida hacia la izquierda si *x (t)* = 0 a partir de algún valor finito $T_1$.

Propiedad 6: Si x (t) está definida a ambos lados y si la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la RDC, entonces la RDC consistirá en una tira que incluya la línea $Re\{s\} = \sigma_0$. Una señal definida a ambos lados, es aquella que es de extensión infinita para $t > 0$ y $t < 0$.

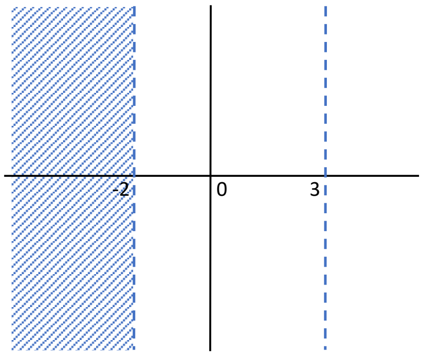
**Ejercicio 23**

_ Considere un sistema LIT cuya función de transferencia es:

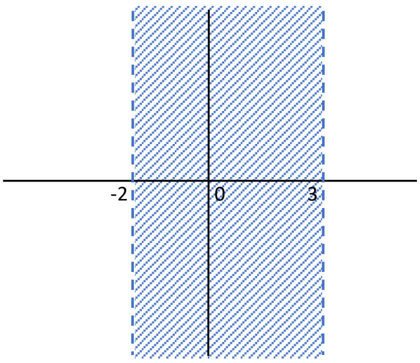
$$H(s) = \frac{s}{(s+2)(s-3)}$$



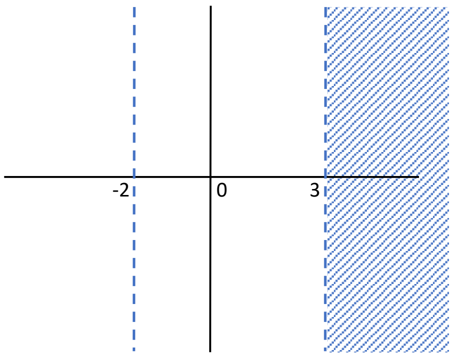

Patrón de polos y ceros




ROC correspondiente a una secuencia izquierda




ROC correspondiente a una secuencia bilateral




ROC correspondiente a una secuencia derecha

**Ejercicio 24**

## Teorema del valor inicial

_ El teorema del valor inicial permite determinar las condiciones iniciales de un circuito, es decir el comportamiento de f(t) en t=0, a partir del conocimiento de su transformada de Laplace F(s). El valor inicial de una función f(t) es un valor en t=0, siempre que f(t) sea continua en t=0. Si f(t) es discontinua en t=0, el valor inicial es el límite cuando → + t 0 , donde t tiende a t=0 desde valores positivos del tiempo.

_ El teorema dice:

$$\boxed{f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

_ Para demostrarlo se comienza con la transformada de la 1ª derivada:

$$\ell\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0) = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

_ Tomando límites conforme s → ∞ :

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0)\right] = \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

_ Como el segundo miembro es nulo:

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s) - f(0)\right] = 0$$

_ Como f(0) es el valor que toma la función cuando t → 0 se puede escribir:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

**Ejercicio 25**

## Teorema del Valor final

El teorema del valor final nos permite conocer el valor de una señal cuando $t \to \infty$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = f(\infty)$$

estas son formas de denotar al límite y el valor se denomina régimen o estático o final.

Partimos de la expresión de la integral

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

si tomamos límite cuando $s \to 0$

$$\lim_{s \to 0}\left[\int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt\right] = \lim_{s \to 0}[sF(s) - f(0)]$$

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \to 0}[sF(s) - f(0)]$$

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Todo esto si existe el valor final, o sea que los polos de $sF(s)$ tengan parte real negativa. Significa que se trata de sistemas que deben ser “estables” o sea el $\lim_{t \to \infty} f(t)$ debe existir.

**Ejercicio 26**

## Determinacion ecuacion de Sintesis y Analisis

_ Primero que nada determinamos que x[n] es equivalente a x[t], representado por $Z^n$ donde este es una exponencial compleja.

_ Similar a la serie de tiempo continuo, tenemos que la serie es igual a la convolucion, y esta se puede representar como el producto de h por Z.

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{-\infty}^{*\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{-\infty}^{*\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{-\infty}^{*\infty} h[k]z^{-k}$$

_ Entonces $y[n] = H(n)\ z^n$

_ La señal de salida del cajon podia ser representada por una serie, donde los coeficientes de esa serie multiplican a la funcion y la exponencial compleja.

$$y[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k H(z_k) z_k^n$$

_ Aca no tomo infiniteos valores de k como en tiempo continuo, sino tomo un set de coeficientes (N), y voy a obtener un coeficiente equivalente a cada uno de los valores de N que tenga.

_ Dada la expresion de la suma de los coeficientes y la expresion de la integracion en el periodo podemos decir que estas son equivalentes:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots\dots \\ 0 & \text{para todo otro valor de } K \end{cases}$$

_ Si yo sumo en el periodo y encuentro algo, entonces voy a tener coeficientes. Si yo integro y no obtengo nada no hay coeficientes.

_ k = cantidad de coeficientes que quiero tomar de la serie.

n = clock equivalente a t en continuo (pulso).

N = equivalente al $T_0$ (intervalo de integracion)

_ El alojamiento de los coeficientes de la serie van a estar creciendo en frecuencia, pero que se repite. Est se debe a que los coeficientes, que pueden ser muchos, pero no son infinitos.

$$\int_0^T e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}\,dt = \begin{cases} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

_ Si yo integro en el periodo y encuentro algo, entonces voy a tener coeficientes. Si yo integro y no obtengo nada no hay coeficientes.

_ Teniendo en cuenta todo esto, realizando las mismas propiedades matematicas de integracion que se aplicaron en la serie de tiempo continuo logro obtener:

<u>Ecuacion de analisis</u>

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

_ Donde: 1/N es el equivalente a $1/T_0$ de la sumatoria en N de x[n] que seria la integral en $T_0$ de x(t), por la exponencial compleja.

<u>Ecuacion de sintesis</u>

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

_ Con diferencia de la de tiempo continuo en que los coeficientes iban desde k a –infinito a + infinito, y en discreto tomo un set de coeficientes limitados a N (ya que para cualquier otro valor fuera de N me da cero). Entonces tengo la sumatoria de los coeficientes $a_k$ por la exponencial compleja.

_ Estas expresiones son exactamente iguales a las de serie en tiempo continuo, con la diferencia de que en tiempo continuo puedo obtener infinitos coeficientes y en discreto no.