

# Teoría de Juegos

## JUEGOS DE SUMA CERO

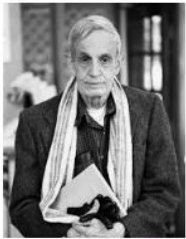
(UNIVESO HOSTIL – JUEGOS COMPETITIVOS)

-RESOLUCIÓN CON PROGRAMACIÓN LINEAL-



# JHON NASH

## (JUEGOS DE NO SUMA CERO)



John Forbes Nash - Wi...  
es.wikipedia.org



Muere el matemático John Nash en un ac...  
lavanguardia.com



John Forbes Nash - Wi...  
es.wikipedia.org



Existe una relación entr...  
circuitoaleph.net



Muere John Nash, una ...  
elpais.com



Muere John Nash, una ...  
activatuneurona.wordpre...



Murió el genio matemático J...  
eldia.com



Quién fue el matemático John Nash?  
okdiario.com



La enfermedad de Nash  
jotdown.es



Adiós a una mente mar...  
lavozdegalicia.es



Muere John Nash - YouTube  
youtube.com



John Nash: la difícil y s...  
elpais.com



John Nash visita Madrid y denuncia el est...  
fundacion-salto.org



La verdadera historia de John Nash, el g...  
lamenteesmaravillosa.com



John Forbes Nash | Ec...  
economipedia.com



## ADRIÁN PAENZA



Grandes temas de la matemática: Capítulo 6: Teoría de los juegos

# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## UNIVERSO HOSTIL VS UNIVERSO ALEATORIO



# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## UNIVERSO HOSTIL VS UNIVERSO ALEATORIO



- Jugadores inteligentes y racionales.
- Ambos conocen las opciones del oponente pero no saben que va a decidir.
- No pueden comunicarse entre ellos.
- La ganancia de uno es la pérdida del otro.
- Cada uno intenta maximizar su utilidad o minimizar su pérdida.



- No hay un oponente “RACIONAL” que está intentando maximizar su utilidades o minimizar sus pérdidas. Sólo hay situaciones aleatorias que SUCEDEN con una probabilidad conocida o estudiada...

# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA PURA

1 En este juego cada jugador tiene tres opciones de decisión. Cada jugador tiene que tomar una decisión sin saber la decisión del otro jugador. En el cuadro se muestran las ganancias del Jugador A y que a su vez que significan las pérdidas del Jugador B. Encuentre la estrategia de equilibrio para ambos jugadores y el valor del juego (V) que resulta como punto de equilibrio.

		Jugador B (Mini-max)			<div>Wald A</div> <div>2</div> <div>-1</div> <div>4</div>	Maxi-min
		B1	B2	B3		
Jugador A (MAXimin)	A1	9	2	3		
	A2	-1	3	9		
	A3	6	4	5		
Wald B		9	4	9		
		Mini-max				

HAY DOMINANCIA

B2 DOMINA B3

- HAY PUNTO DE EQUILIBRIO
- HAY ESTRATEGIA PURA:
- J. A elige el 100% de las veces la estrategia A3.
- J. B elije el 100% de las veces la estrategia B2.
- EL VALOR DEL JUEGO ES: 4  
(A gana 4 y B pierde 4)

# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA PURA

1 En este juego cada jugador tiene tres opciones de decisión. Cada jugador tiene que tomar una decisión sin saber la decisión del otro jugador. En el cuadro se muestran las ganancias del Jugador A y que a su vez que significan las pérdidas del Jugador B. Encuentre la estrategia de equilibrio para ambos jugadores y el valor del juego (V) que resulta como punto de equilibrio.

		Jugador B (Mini-max)				
		B1	B2	B3		
Jugador A (MAXimin)	A1	9	2	3	Wald A	2
	A2	-1	3	9		-1
	A3	6	4	5		4
		Mini-max				
		9	4	9		
		Wald B				

HAY DOMINANCIA  
B2 DOMINA B3

- HAY PUNTO DE EQUILIBRIO
- HAY ESTRATEGIA PURA:
- J. A elige el 100% de las veces la estrategia A3.
- J. B elije el 100% de las veces la estrategia B2.
- EL VALOR DEL JUEGO ES: 4  
(A gana 4 y B pierde 4)



# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA MIXTA

5 El ejército Azul y Rojo están peleando. Existen 2 aeropuertos, valuados en 20 y 8 millones de USD cada uno, los cuales pertenecen al ejército Rojo. El ejército Azul pretende destruirlos, debe atacar uno o ambos aeropuertos y provocar el mayor daño posible (medido en USD). El ejército Rojo debe minimizar el daño. Cada ejército puede asignar el total de sus fuerzas a un aeropuerto o puede asignar la mitad de sus fuerzas a cada aeropuerto. Una instalación experimentará un daño del 25% si se la ataca y defiende con la fuerza total, 10% si se la ataca y defiende con la mitad de las fuerzas, 50% si es atacada con fuerza total y defendida con la mitad, 100% cualquier instalación atacada con la mitad o la totalidad de las fuerzas pero no defendida y 0% una instalación a la que no se la ataque o a la que se ataque con la mitad y sea defendida con el total de las fuerzas. Determine las estrategias óptimas para ambos ejércitos.





# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA MIXTA

		EJÉRCITO ROJO MINI-max				Wald A	Maxi-min	
		R1	R2	R3	R4			
EJÉRCITO AZUL (MAXI-min)		100% 1 0% 2	0% 1 100% 2	50% 1 50% 2	0% 1 0% 2			
	A1	100% 1 0% 2	5	20	10	20	5	P1
	A2	0% 1 100% 2	8	2	4	8	2	P2
	A3	50% 1 50% 2	8	20	2,8	28	2,8	P3
	A4	0% 1 0% 2	0	0	0	0	0	P4
Wald B		8	20	10	28			
		Mini-max						
		Q1	Q2	Q3	Q4			

DOMINANCIA  
R1,R2 y R3  
DOMINAN R4

- NO HAY PUNTO DE EQUILIBRIO
- NO HAY ESTRATEGIA PURA:
- EL VALOR DEL JUEGO NO ESTÁ DETERMINADO

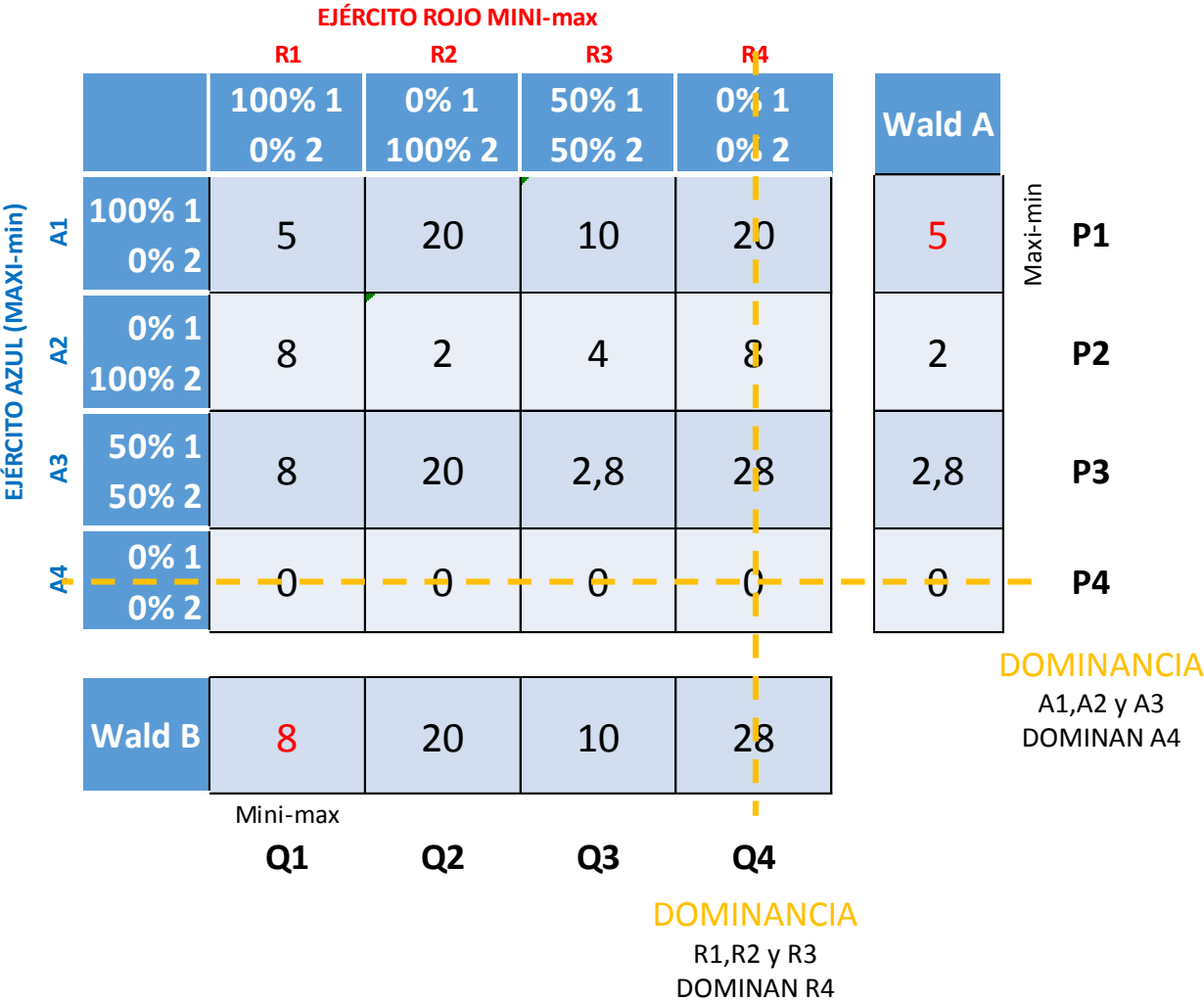
Aeropuerto 1 = 20M USD  
Aeropuerto 2 = 8M USD

Ataca 100%-Defiende 100% = daño 25%  
Ataca 100%-Defiende 50% = daño 50%  
Ataca 100%-Defiende 0% = daño 100%  
Ataca 50%-Defiende 100% = daño 0%  
Ataca 50%-Defiende 50% = daño 10%  
Ataca 50%-Defiende 0% = daño 100%  
Ataca 0% = daño 0%



# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA MIXTA



**PL MAX EJERCITO AZUL:**  
MAX V  
Subject to  
 $5p_1 + 8p_2 + 8p_3 \geq V$   
 $20p_1 + 2p_2 + 20p_3 \geq V$   
 $10p_1 + 4p_2 + 2.8p_3 \geq V$   
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$   
 $p_1 \geq 0$   
 $p_2 \geq 0$   
 $p_3 \geq 0$   
END

**PL MAX EJERCITO ROJO:**  
MIN V  
Subject to  
 $5q_1 + 20q_2 + 10q_3 \leq V$   
 $8q_1 + 2q_2 + 4q_3 \leq V$   
 $8q_1 + 20q_2 + 2.8q_3 \leq V$   
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$   
 $q_1 \geq 0$   
 $q_2 \geq 0$   
 $q_3 \geq 0$   
END

**PL MAX EJERCITO AZUL:**  
MAX V  
Subject to  
 $5p_1 + 8p_2 + 8p_3 - V \geq 0$   
 $20p_1 + 2p_2 + 20p_3 - V \geq 0$   
 $10p_1 + 4p_2 + 2.8p_3 - V \geq 0$   
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$   
 $p_1 \geq 0$   
 $p_2 \geq 0$   
 $p_3 \geq 0$   
END

Código para software LINDO

**PL MAX EJERCITO ROJO:**  
MIN V  
St  
 $5q_1 + 20q_2 + 10q_3 - V \leq 0$   
 $8q_1 + 2q_2 + 4q_3 - V \leq 0$   
 $8q_1 + 20q_2 + 2.8q_3 - V \leq 0$   
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$   
 $q_1 \geq 0$   
 $q_2 \geq 0$   
 $q_3 \geq 0$   
END

Código para software LINDO

# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA MIXTA

		EJÉRCITO ROJO MINI-max					
		R1	R2	R3	R4		
		100% 1 0% 2	0% 1 100% 2	50% 1 50% 2	0% 1 0% 2	Wald A	
EJÉRCITO AZUL (MAXI-min)	A1	100% 1 0% 2	5	20	10	20	5
	A2	0% 1 100% 2	8	2	4	8	2
	A3	50% 1 50% 2	8	20	2,8	2,8	2,8
	A4	0% 1 0% 2	0	0	0	0	0
Wald B		8	20	10	28		
		Q1	Q2	Q3	Q4		

DOMINANCIA  
A1, A2 y A3  
DOMINAN A4

DOMINANCIA  
R1, R2 y R3  
DOMINAN R4

### PL Max EJERCITO AZUL:

Maximizar  $Z = V$  Sujeto a

$$5p_1 + 8p_2 + 8p_3 - V \geq 0$$

$$20p_1 + 2p_2 + 20p_3 - V \geq 0$$

$$10p_1 + 4p_2 + 2.8p_3 - V \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 \geq 0$$

$$p_2 \geq 0$$

$$p_3 \geq 0$$

Código para  
software  
Online

### PL Min EJERCITO ROJO:

Minimizar  $Z = V$  Sujeto a

$$5q_1 + 20q_2 + 10q_3 - V \leq 0$$

$$8q_1 + 2q_2 + 4q_3 - V \leq 0$$

$$8q_1 + 20q_2 + 2.8q_3 - V \leq 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_1 \geq 0$$

$$q_2 \geq 0$$

$$q_3 \geq 0$$

Código para  
software  
Online

[zweigmedia.com/simplex/simplex.php?lang=es](https://zweigmedia.com/simplex/simplex.php?lang=es)

Ingresa un problema de programación lineal a continuación. (Pulsa "Ejemplos" para pasar por algunos problemas ya configurados.) Luego presiona "Resolver".

Maximizar  $Z = V$   
 $5p_1 + 8p_2 + 8p_3 - V \geq 0$   
 $20p_1 + 2p_2 + 20p_3 - V \geq 0$   
 $10p_1 + 4p_2 + 2.8p_3 - V \geq 0$   
 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$   
 $p_1 \geq 0$   
 $p_2 \geq 0$   
 $p_3 \geq 0$

Solution:

Solución óptima:  $z = 6.67$ ;  $p_1 = 0.444$ ,  $p_2 = 0.556$ ,  $p_3 = 0$ ,  $v = 6.67$

Resolver

Ejemplos

Borrar todo

☒ Ocultar tablas (más rápido).

☐ Mostrar tablas.

☐ Mostrar tablas y soluciones intermedias.

Redondeando: 3 cifras significativas

☒ decimal

☐ fracción

☐ integral

Ingresa un problema de programación lineal a continuación. (Pulsa "Ejemplos" para pasar por algunos problemas ya configurados.) Luego presiona "Resolver".

Minimizar  $Z = V$  Sujeto a  
 $5q_1 + 20q_2 + 10q_3 - V \leq 0$   
 $8q_1 + 2q_2 + 4q_3 - V \leq 0$   
 $8q_1 + 20q_2 + 2.8q_3 - V \leq 0$   
 $q_1 + q_2 + q_3 = 1$   
 $q_1 \geq 0$   
 $q_2 \geq 0$   
 $q_3 \geq 0$

Solution:

Solución óptima:  $z = 6.66667$ ;  $q_1 = 0.666667$ ,  $q_2 = 0$ ,  $q_3 = 0.333333$ ,  $v = 6.66667$

Resolver

Ejemplos

Borrar todo

☒ Ocultar tablas (más rápido).

☐ Mostrar tablas.

☐ Mostrar tablas y soluciones intermedias.

Redondeando: 6 cifras significativas

☒ decimal

☐ fracción

☐ integral

# TEORÍA DE JUEGOS | JUEGOS DE SUMA CERO

## JUEGOS CON ESTRATEGIA MIXTA

		EJÉRCITO ROJO MINI-max					
		R1	R2	R3	R4		
		100% 1 0% 2	0% 1 100% 2	50% 1 50% 2	0% 1 0% 2	Wald A	
EJÉRCITO AZUL (MAXI-min)	A1	100% 1 0% 2	5	20	10	20	5
	A2	0% 1 100% 2	8	2	4	8	2
	A3	50% 1 50% 2	8	20	2,8	2,8	2,8
	A4	0% 1 0% 2	0	0	0	0	0
Wald B		8	20	10	2,8		
		Q1	Q2	Q3	Q4		

DOMINANCIA  
A1, A2 y A3  
DOMINAN A4

DOMINANCIA  
R1, R2 y R3  
DOMINAN R4

### CONCLUSIONES Ejército AZUL:

- HAY PUNTO DE EQUILIBRIO
- HAY ESTRATEGIA MIXTA:
- E. AZUL elige:
  - A1 44,4% de las veces,
  - A2 55,6% de las veces y
  - A3 0% de las veces.
- EL VALOR DEL JUEGO ES: 6,67 M  
(A logra 6,67 M y R pierde 6,67 M)

### CONCLUSIONES Ejército ROJO:

- HAY PUNTO DE EQUILIBRIO
- HAY ESTRATEGIA MIXTA:
- E. ROJO elige:
  - R1 66,66% de las veces,
  - R2 0% de las veces y
  - R3 33,3% de las veces.
- EL VALOR DEL JUEGO ES: 6,67 M  
(A logra 6,67 M y R pierde 6,67 M)

### PL Max EJERCITO AZUL:

Maximizar  $Z = V$  Sujeto a

$$5p_1 + 8p_2 + 8p_3 - V \geq 0$$

$$20p_1 + 2p_2 + 20p_3 - V \geq 0$$

$$10p_1 + 4p_2 + 2.8p_3 - V \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 \geq 0$$

$$p_2 \geq 0$$

$$p_3 \geq 0$$

Código para  
software  
Online

Solución óptima:

$z = 6.67$ ;  
 $p_1 = 0.444$ ,  
 $p_2 = 0.556$ ,  
 $p_3 = 0$ ,  
 $v = 6.67$

### PL Min EJERCITO ROJO:

Minimizar  $Z = V$  Sujeto a

$$5q_1 + 20q_2 + 10q_3 - V \leq 0$$

$$8q_1 + 2q_2 + 4q_3 - V \leq 0$$

$$8q_1 + 20q_2 + 2.8q_3 - V \leq 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_1 \geq 0$$

$$q_2 \geq 0$$

$$q_3 \geq 0$$

Código para  
software  
Online

Solución óptima:

$z = 6.67$ ;  
 $q_1 = 0.667$ ,  
 $q_2 = 0$ ,  
 $q_3 = 0.333$ ,  
 $v = 6.67$