

EXCEL: Herramienta Solver

Introducción

Las planillas de cálculo se han convertido en herramientas obligadas de análisis de datos. Sin embargo, no siempre se aprovechan todas sus potencialidades.

La planilla más difundida en el mercado es Excel, que viene incluida en el paquete Office de Microsoft. En este trabajo se procura dar una sencilla explicación de su uso como herramienta de optimización. Incluye las versiones 5.0 y 97.

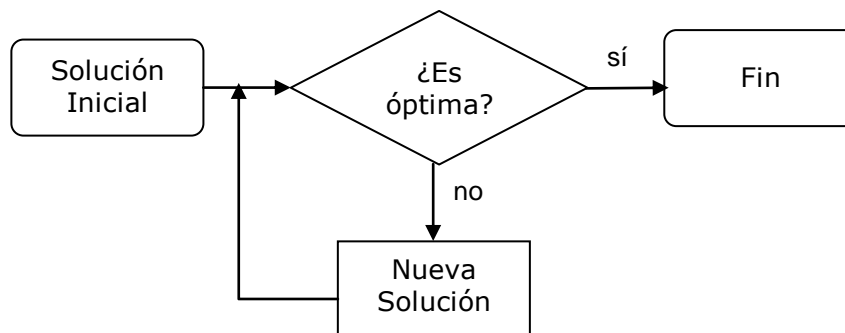
Optimización Restringida

Un problema de optimización consiste en encontrar aquellos valores de ciertas variables que optimizan (es decir, hacen máxima o mínima, según el caso), una función de estas variables. A las variables las llamaremos *variables controlables* o *variables de decisión*.

Matemáticamente, significa encontrar los valores de x_1, x_2, \dots, x_n , tales que hacen máxima (o mínima) a la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

El método más conocido para encontrar el óptimo de una función es a través del análisis de sus derivadas. Este método tiene dos limitaciones: no siempre la función es derivable, y, además, no siempre el óptimo nos da una solución que tenga sentido en la práctica.

Debido a la primera limitación, surgieron los *métodos numéricos*, que parten de una solución inicial, y mediante algún algoritmo iterativo, mejoran sucesivamente la solución.



Debido a la segunda limitación, surgieron los *métodos de optimización restringida*. El nombre se debe a que podemos ponerle restricciones a las variables, de modo que cumplan una o más condiciones.

La restricción más común que se da en la práctica es que las variables deben ser no negativas. No tiene ningún sentido una "solución" que implique producir cantidades negativas, o sembrar un número negativo de hectáreas, o llevar un número negativo de paquetes, por ejemplo. Pero, además, surgen naturalmente otras restricciones en el mundo real, debido a limitaciones de horas de trabajo, capital, tiempo, insumos, o a que quizás deseamos imponer ciertos mínimos o máximos de calidad, riesgo, etc.. Estas restricciones pueden ser funciones de las variables controlables.

Podríamos resumir diciendo que en un problema de optimización restringida buscamos los valores de ciertas variables que optimizan una función objetivo, sujetas a restricciones, dadas también en términos de funciones. Matemáticamente, significa encontrar los valores de x_1, x_2, \dots, x_n , tales que hacen máxima (o mínima) a $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sujeto a restricciones de tipo $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq, = \text{ó} \leq c_j$, donde c_j es una constante.

Los modelos más sencillos de optimización restringida corresponden a modelos de Programación Lineal, donde tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales, las variables deben ser no negativas, y pueden tomar cualquier valor real, no necesariamente entero.

Herramienta Solver

Solver es una herramienta para resolver y optimizar ecuaciones mediante el uso de métodos numéricos.

Con Solver, se puede buscar el valor óptimo para una celda, denominada *celda objetivo*, en donde se escribe la fórmula de la función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Solver cambia los valores de un grupo de celdas, denominadas *celdas cambiantes*, y que estén relacionadas, directa o indirectamente, con la fórmula de la celda objetivo. En estas celdas se encuentran los valores de las variables controlables x_1, x_2, \dots, x_n .

Puede agregar restricciones a Solver, escribiendo una fórmula $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en una celda, y especificando que la celda deberá ser mayor o igual, igual, o menor o igual que otra celda que contiene la constante c_j .

También puede especificar que los valores sean enteros, para evitar dar resultados absurdos de algunos problemas, tales como que se necesitan 3,5 empleados.

Solver ajustará los valores de las celdas cambiantes, para generar el resultado especificado en la fórmula de la celda objetivo.

Instalar Solver

En el menú **Herramientas**, fíjese si aparece el comando **Solver**. Si no aparece, deberá instalar el complemento o macro automática Solver.

- **Opción A**

1. En el menú **Herramientas**, elija **Complementos**.

Si Solver no aparece en la lista del cuadro de diálogo Complementos, haga clic en **Examinar** y localice la unidad, la carpeta y el nombre de archivo Solver.xla que, normalmente, está ubicado en la carpeta Macros/Solver, o ejecute el programa de instalación si no puede localizar el archivo.

2. En el **cuadro de diálogo Complementos**, seleccione la casilla de verificación **Solver**.

- **Opción B**

1. Elija el **Programa de Instalación de Microsoft Excel**.
2. Elija **Agregar / Eliminar componentes**.
3. Seleccione **Macros Automáticas**, y haga clic en el botón **Modificar Opción**.
4. Seleccione la casilla **Solver**, y luego haga clic en **Aceptar**.
5. Haga clic en **Aceptar**.

Algoritmos y Métodos Utilizados por Solver

Microsoft Excel Solver utiliza diversos métodos de solución, según las opciones seleccionadas.

- Para los problemas de Programación Lineal utiliza el método Simplex.
- Para problemas lineales enteros utiliza el método de ramificación y límite, implantado por John Watson y Dan Fylstra de Frontline Systems, Inc.
- Para problemas no lineales utiliza el código de optimización no lineal (GRG2) desarrollado por la Universidad Leon Lasdon de Austin (Texas) y la Universidad Allan Waren (Cleveland).

Para obtener más información acerca del proceso de solución interno que utiliza Solver:

Frontline Systems, Inc., <http://www.frontsys.com>, info@frontsys.com

Solver y Programación Lineal

Veremos ahora la utilización de Solver para resolver casos de Programación Lineal, aplicándolas a un ejemplo muy elemental, tomado del libro de Eppen, Gould y Schmidt, *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa*, 3ra edición, Editorial Prentice Hall. En éste y en otros libros de Investigación Operativa, se encontrarán numerosas aplicaciones de Programación Lineal y no Lineal.

El Modelo de la Protrac Inc.

- La Protrac Inc., fabrica dos tipos de productos químicos, E y F, cuya utilidad neta es de \$5000 y \$4000 por tonelada respectivamente.
- Ambos pasan por operaciones de 2 departamentos de producción, que tienen una disponibilidad limitada.
- El departamento A dispone de 150 horas mensuales; cada tonelada de E utiliza 10 horas de este departamento, y cada tonelada de F, 15 horas.
- El departamento B tiene una disponibilidad de 160 horas mensuales. Cada tonelada de E precisa de 20 horas, y cada tonelada de F precisa de 10 horas para su producción.
- Para la producción global de E y F, se deberán utilizar al menos 135 horas de verificación en el próximo mes; el producto E precisa de 30 horas y F de 10 horas por tonelada de verificación.
- La alta gerencia ha decretado que es necesario producir al menos una tonelada de F por cada 3 de E.
- Un cliente ha solicitado 5 toneladas, cualquiera sea su tipo, de E o F.
- Por otro lado, es evidente que no pueden producirse cantidades negativas de E ni de F.

Se trata de decidir, para el mes próximo, las cantidades a producir de cada uno de los productos para maximizar la utilidad global.

El Modelo

Variables controlables

E : toneladas de tipo E a producir;
F: toneladas de tipo F a producir;

Modelo

Max $5000 E + 4000 F$	{Función objetivo: maximizar la utilidad global}
sujeto a	{escribimos ahora las restricciones o requerimientos}
$10 E + 15 F \leq 150$	{horas del departamento A}
$20 E + 10 F \leq 160$	{horas del departamento B}
$30 E + 10 F \geq 135$	{horas de verificación}
$E - 3 F \leq 0$	{al menos una de F cada 3 E significa $E \leq 3 F$ }
$E + F \geq 5$	{al menos 5 toneladas}
$E \geq 0, F \geq 0$	{no negatividad}

Antes de introducir este modelo en la planilla, conviene preparar una tabla con los coeficientes de las variables:

Productos:	E	F		
Utilidad marginal:	5000	4000		
Restricciones				
Departamento A:	10	15	≤	150
Departamento B:	20	10	≤	160
Verificación:	30	10	≥	135
Al menos un E cada 3F:	1	-3	≤	0
Al menos 5:	1	1	≥	5

Las restricciones de no negatividad no las hemos incluido en la tabla, pero sí las tendremos muy en cuenta al poner restricciones en la planilla. De otro modo, podríamos llegar a obtener soluciones absurdas.

Introducción de Datos

Abra una nueva planilla de cálculo. Antes de introducir los datos en la planilla, conviene aumentar el ancho de la columna A para que aparezcan completos los rótulos de esta columna. Las demás columnas pueden quedar sin alterar.

Comenzaremos suponiendo que no producimos nada de E ni de F, por lo que escribiremos 0 (cero) en las celdas B5 y C5.

Ingrese:
=B4*B5+C4*C5

D7 =SUMAPRODUCTO(\$B\$5:\$C\$5;B7:C7)

	A	B	C	D	E	F
1	Utilidad global					
2		0				
3	Productos	E	F			
4	Utilidad marginal:	5000	4000			
5	Producción:	0	0			
6		Restricciones		Valor		Límite
7	Departamento A:	10	15	≤		150
8	Departamento B:	20	10	≤		160
9	Verificación:	30	10	≥		135
10	Una F cada 3E:	1	-3	≤		0
11	Al menos 5:	1	1	≥		5

Ingrese:
=sumaproducto(B\$5:C\$5,B7:C7)

Copie la fórmula de la celda D7

Una vez introducidos estos datos, podemos probar con distintas cantidades a producir de E y de F, y ver fácilmente si se cumplen las restricciones, y cuál será la utilidad global.

Así, por ejemplo, poniendo 6 en la celda B5 y 2 en la celda C5, se respetan todas las restricciones y se obtiene una utilidad global de \$38000. Pruebe con éstos y otros valores.

Optimización

Observe que en la planilla hemos introducido la función objetivo en la celda A2; el lado izquierdo de las restricciones en el rango D7:D11, y el lado derecho de las restricciones en el rango F7:F11.

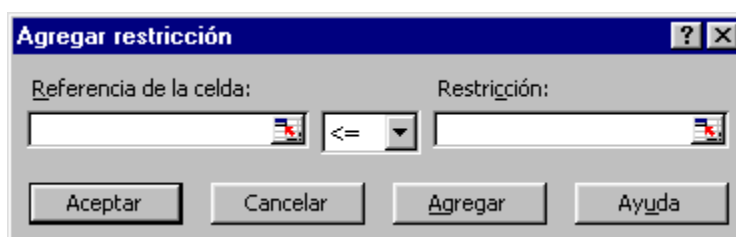
Seleccione del menú **Herramientas / Solver...**

Aparecerá el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**, en la que ingresaremos los datos.

Cuando el dato sea una celda o un bloque de celdas, puede seleccionarlas haciendo clic en la hoja de cálculo y arrastrando el mouse.

1. Con el cuadro de diálogo abierto, haga clic en la celda A2 de la planilla. En la caja debajo de **Celda objetivo** se borra el contenido anterior y se muestra \$A\$2.
2. Haga clic en la opción **Máximo**.
3. Haga clic en la caja debajo de **Cambiando las celdas**. Haga clic en la celda B5, y arrastre el mouse sin soltarlo para seleccionar también la celda C5.
4. Haga clic en el botón **Agregar...**, debajo de **Sujetas a las siguientes restricciones**.

Aparece el cuadro de diálogo **Agregar restricción**.

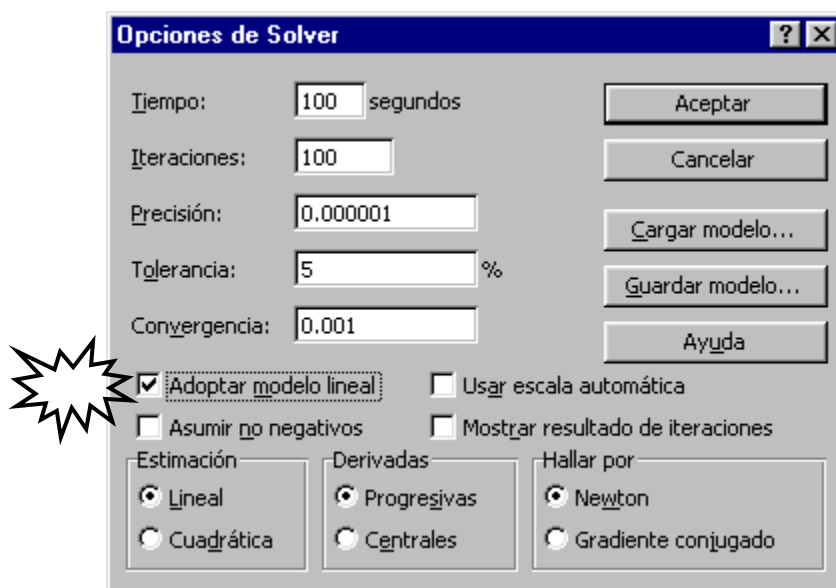


- Use la caja debajo de **Referencia de la celda:** para poner el lado izquierdo de la restricción.
- Use la lista desplegable del centro para elegir un símbolo.
- Use la caja debajo de **Restricción** para agregar el lado derecho de la restricción.

Haga clic en el botón **Agregar** para agregar más restricciones, o en el botón **Aceptar** para finalizar. El cuadro de diálogo **Parámetros de Solver** debe quedar:



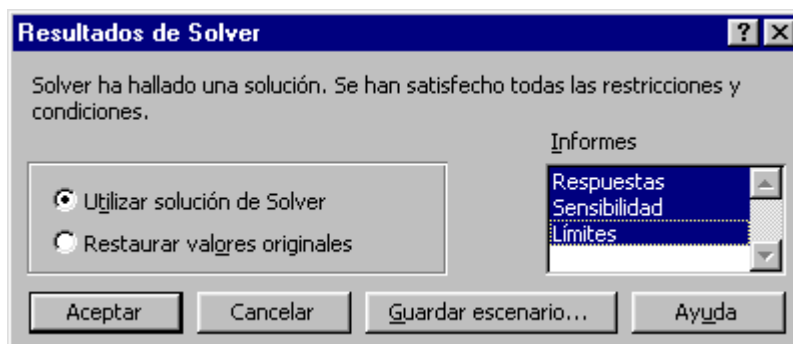
Haga clic en el botón **Opciones**, con lo que aparecerá el cuadro de diálogo **Opciones de Solver**.



Como nuestro modelo es lineal, seleccione la casilla de verificación **Adoptar modelo lineal**, y luego haga clic en el botón **Aceptar**.

Resolución

Una vez introducidos estos datos, seleccione **Resolver**, y Solver, si todo anduvo bien, mostrará un mensaje con:



Utilizar solución de Solver	{cambia los valores de las variables en la planilla}
Restaurar valores originales	{deja los valores iniciales de las variables}
Guardar escenario	{guarda los valores de las variables como escenario}
Informes	{hasta 3 tipos de informes, en hojas separadas}

Seleccione:

Utilizar solución de Solver y elija **los 3 informes**. Para esto, seleccione el primero y mantenga apretada la tecla del mouse, hasta seleccionar los 3, o ubíquese en el primero y mantenga apretada la tecla Alt.

Después de unos segundos, Solver habrá agregado 3 hojas de cálculo en su libro, una por cada informe. Éstos son: El Informe de Respuestas, el Informe de Sensibilidad y el Informe de Límites.

Los Datos de la Planilla

Si no ha cometido errores, Solver ha encontrado los valores óptimos de las variables controlables, y, por tanto, en las celdas B5 y C5 se muestra la solución óptima: Producir 4.5 toneladas de E y 7 de F. La utilidad máxima del mes próximo será \$50500.

El Informe de Respuestas

Los informes de Solver son tan claros que apenas merecen aclaración. La razón principal de su claridad se debe a que bajo cada columna **Nombre**, pone la intersección de fila y columna de rótulos. Así, por ejemplo, observe que en **Celdas Cambiantes**, debajo de **Nombre**, el informe puso: **Producción: E**; "Producción" es el rótulo de la fila y "E" el de la columna de la planilla. Es importante notar esto, ya que puede tener en cuenta esta característica en sus futuros problemas.

Microsoft Excel 9.0 Informe de respuestas

Hoja de cálculo: [Primer ejemplo según doc.xls]Ejemplo

Informe creado: 01/10/06 10:28:47 a.m.

Celda objetivo (M x)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$A\$2	Utilidad global	0	50500

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$5	Producción: E	0	4.5
\$C\$5	Producción: F	0	7

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$D\$7	Departamento A: Valor	150	\$D\$7<=\$F\$7	Obligatorio	0
\$D\$8	Departamento B: Valor	160	\$D\$8<=\$F\$8	Obligatorio	0
\$D\$9	Verificación: Valor	205	\$D\$9>=\$F\$9	Opcional	70
\$D\$10	Una F cada 3E: Valor	-16.5	\$D\$10<=\$F\$10	Opcional	16.5
\$D\$11	Al menos 5: Valor	11.5	\$D\$11>=\$F\$11	Opcional	6.5
\$B\$5	Producción: E	4.5	\$B\$5>=0	Opcional	4.5
\$C\$5	Producción: F	7	\$C\$5>=0	Opcional	7

En **Celda Objetivo** aparece la celda de la función objetivo, el Nombre, el valor inicial antes de optimizar y el valor óptimo (valor final).

En **Celdas Cambiantes** aparecen las celdas de las variables controlables, el nombre, la solución inicial o valores iniciales de las variables y la solución óptima (valor final).

En **Restricciones** se tiene:

Valor de la celda: es el valor que toma el lado izquierdo de cada restricción en la solución óptima. Así, por ejemplo, en la primera restricción, de horas del departamento A, se tiene, al remplazar: $10 \cdot E + 15 \cdot F = 10 \cdot 4.5 + 15 \cdot 7 = 150$ horas utilizadas en el departamento A.

Fórmula: nos recuerda las restricciones que hemos introducido, incluyendo si es de \leq , $=$ o \geq .

Estado: Nos indica si la restricción se cumple exactamente, con una igualdad, y no hay un margen. En otras palabras, nos indica si la restricción es activa.

Divergencia: es el margen que tiene cada restricción. Si la desigualdad es \leq , entonces es el lado derecho de la restricción (la constante) menos el lado izquierdo. Si la desigualdad es \geq , es el lado izquierdo menos el lado derecho (la constante). Si la restricción es activa, desde luego el margen será cero.

El Informe de Sensibilidad

Microsoft Excel 9.0 Informe de sensibilidad

Hoja de cálculo: [Primer ejemplo según doc.xls]Ejemplo

Informe creado: 01/10/06 10:28:47 a.m.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coefficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$5	Producción: E	4.5	0	5000	3000	2333.333333
\$C\$5	Producción: F	7	0	4000	3500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
\$D\$7	Departamento A: Valor	150	150	150	90	47.14285714
\$D\$8	Departamento B: Valor	160	175	160	73.33333333	40
\$D\$9	Verificación: Valor	205	0	135	70	1E+30
\$D\$10	Una F cada 3E: Valor	-16.5	0	0	1E+30	16.5
\$D\$11	Al menos 5: Valor	11.5	0	5	6.5	1E+30

Celdas Cambiantes

Valor: nos recuerda los valores óptimos de las variables controlables.

Costo reducido: indica cuánto deberá cambiar el coeficiente de la función objetivo para que la variable tome un valor positivo. En este caso, las dos variables controlables son positivas (conviene producir ambos productos), por lo que su costo reducido es cero.

Coefficiente objetivo: son los coeficientes de la función objetivo.

Aumento permisible: incremento admisible en los coeficientes de la función objetivo sin que cambien los valores óptimos de las variables controlables.

Disminución permisible: disminución admisible en los coeficientes de la función objetivo sin que cambien los valores óptimos de las variables controlables.

Restricciones

Valor final: es el valor que toma el lado izquierdo de cada restricción en la solución óptima. Así, por ejemplo, en la primera restricción, de horas del departamento A, se tiene, al reemplazar: $10 \cdot E + 15 \cdot F = 10 \cdot 4.5 + 15 \cdot 7 = 150$ horas utilizadas en el departamento A.

Sombra precio: son los precios duales, o precios sombra de los recursos (o requerimientos) indicados en las restricciones. Indican la mejora en el valor de la función objetivo si se "relaja" una desigualdad, o el empeoramiento si se la restringe. Por ejemplo, si dispusiéramos de más tiempo en el Departamento B, podríamos mejorar la utilidad global incrementándose en \$175 por cada hora extra.

Restricción lado derecho: indican los lados derechos de las desigualdades.

Aumento permisible: representa en cuánto puede incrementarse el lado derecho (Constante) sin que se altere el precio Dual. Por ejemplo, se puede incrementar el número de horas extras del Departamento B, mejorando en \$175 por cada hora extra. Sin embargo, este análisis es válido sólo para un incremento de hasta 73.3333 horas. Si disponemos de más de 160+73.3333 horas, el precio dual será otro, seguramente menor.

Disminución admisible: indica en cuánto puede disminuir el lado derecho de la restricción sin que cambie el precio dual de un recurso (o requerimiento).

El Informe de Límites

Microsoft Excel 9.0 Informe de límites

Hoja de cálculo: [Primer ejemplo según doc.xls]Ejemplo

Informe creado: 01/10/06 10:28:47 a.m.

Celda objetivo		
Celda	Nombre	Valor
\$A\$2	Utilidad global	50500

Celdas cambiantes			Límite inferior	Resultado objetivo	Límite superior	Resultado objetivo
Celda	Nombre	Valor				
\$B\$5	Producción: E	4.5	2.166666667	38833.33333	4.5	50500
\$C\$5	Producción: F	7	1.5	28500	7	50500

Celdas Cambiantes

Valor: nos recuerda los valores óptimos de las variables controlables.

Límite inferior: es el menor valor que puede tomar la variable (suponiendo que las demás mantienen el valor óptimo encontrado), y satisfacer todas las restricciones.

Resultado objetivo: valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite inferior y las demás mantienen el valor óptimo encontrado.

Límite superior: es el mayor valor que puede tomar la variable (suponiendo que las demás mantienen el valor óptimo encontrado) sin violar las restricciones.

Resultado objetivo: valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite superior y las demás mantienen el valor óptimo encontrado.

Conclusiones

El informe de respuestas de Excel no sólo brinda la solución óptima de un Programa Lineal, sino también los Precios Duales correspondientes a cada restricción y el Análisis de Sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo y de las constantes del lado derecho de cada restricción. Esta información ha demostrado ser muy útil en el análisis de diversos problemas.

Opciones de Solver

Pueden controlarse las características avanzadas del proceso de solución, cargarse o guardarse definiciones de problemas y definirse parámetros para los problemas lineales y no lineales. Cada opción tiene una configuración predeterminada adecuada a la mayoría de los problemas.

Tiempo máximo

Limita el tiempo que tarda el proceso de solución. Puede introducirse un valor de hasta 32.367, pero el valor predeterminado 100 (segundos) es adecuado para la mayor parte de los problemas.

Iteraciones

Limita el tiempo que tarda el proceso de solución, limitando el número de cálculos provisionales. Aunque puede introducirse un valor de hasta 32.767, el valor predeterminado 100 es adecuado para la mayor parte de los problemas pequeños.

Precisión

Controla la precisión de las soluciones utilizando el número que se introduce para averiguar si el valor de una restricción cumple un objetivo o satisface un límite inferior o superior. Debe indicarse la precisión mediante una fracción entre 0 (cero) y 1. Cuantos más decimales tenga el número que se introduzca, mayor será la precisión; por ejemplo, 0,0001 indica una precisión mayor que 0,01. Cuanto mayor sea la precisión, más tiempo se tardará en encontrar una solución.

Tolerancia

El porcentaje mediante el cual la celda objetivo de una solución satisface las restricciones externas puede diferir del valor óptimo verdadero y todavía considerarse aceptable. Esta opción sólo se aplica a los problemas que tengan restricciones enteras. Una tolerancia mayor tiende a acelerar el proceso de solución.

Convergencia

Si el valor del cambio relativo en la celda objetivo es menor que el número introducido en el cuadro Convergencia para las últimas cinco iteraciones, Solver se detendrá. La convergencia se aplica únicamente a los problemas no lineales y debe indicarse mediante una fracción entre 0 (cero) y 1. Cuantos más decimales tenga el número que se introduzca, menor será la convergencia; por ejemplo, 0,0001 indica un cambio relativo menor que 0,01. Cuanto menor sea el valor de convergencia, más tiempo se tardará en encontrar una solución.

Adoptar modelo lineal

Selecciónelo cuando todas las relaciones en el modelo sean lineales y desee resolver un problema de optimización o una aproximación lineal a un problema no lineal.

Mostrar resultado de iteraciones

Selecciónelo para que Solver muestre temporalmente los resultados de cada iteración. Esta opción es válida sólo en modelos no lineales.

Usar escala automática

Selecciónelo para utilizar la escala automática cuando haya grandes diferencias de magnitud entre las entradas y los resultados; por ejemplo, cuando se maximiza el porcentaje de beneficios basándose en una inversión de medio millón de dólares.

Adoptar no-negativo

Hace que Solver suponga un límite de 0 (cero) para todas las celdas ajustables en las que no se haya definido un límite inferior en el cuadro Restricción del cuadro de diálogo Agregar restricción.

Cargar modelo

Muestra el cuadro de diálogo Cargar modelo, donde puede especificarse la referencia del modelo que desee cargar.

Guardar modelo

Muestra el cuadro de diálogo Guardar modelo, donde puede especificar la ubicación en que desee guardar el modelo. Úselo únicamente cuando desee guardar más de un modelo con una hoja de cálculo; el primer modelo se guardará de forma automática.

Bibliografía

- Chapra, Steven y Canale, Raymond - *Métodos Numéricos para Ingenieros* - Mac Graw Hill - 1988.
- Eppen, Gould y Schmidt - *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa* - 3ra edición, Editorial Prentice Hall - 1996.