

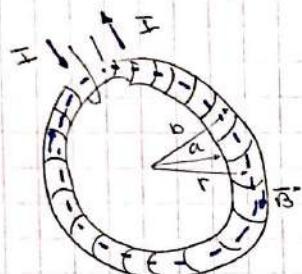
PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LOS MATERIALES

MAGNETISMO EN MEDIOS MATERIALES

Como las líneas de campo son cerradas
(deberemos cuidar que en todo el camino donde haya líneas de campo debe estar inundado del material o cancelar)

$\|\vec{B}\|$ debe ser cte.

⇒ Utilizamos una bobina toroidal (todas las líneas de campo están por dentro, en el núcleo del material)



$$(r_b - r_a) \ll r_m$$

$$\text{Dentro del núcleo } \|\vec{B}_0\| = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$$

B es más intenso ea a q se en lo

=> Toma una anilla delgada para q no
suceda

(Anillo de Rowland)

Para hacer el análisis comparativo entre el vacío y materiales primero hay que circular las bobinas.

Si se introduce algún material al núcleo

$$\vec{B} \neq \vec{B}_0$$

CLASIFICACIÓN DE LOS MATERIALES

Establecidos

$$\frac{\vec{B}}{\vec{B}_0} = k_m$$

⇒ 3 tipos en función del campo que aparece dentro del material

Paramagnéticos

$$\vec{B} > \vec{B}_0 \text{ (apenas)} \quad k_m \approx 1$$

El campo se incrementa respecto al vacío

Magnetismo significante

disminuye los

atrae débilmente

Diamagnéticos

$$\vec{B} < \vec{B}_0$$

$$k_m \approx 1$$

El campo disminuye respecto al vacío.

Magnetismo débil

si imán los repelen débilmente

$$F_R < F_A$$

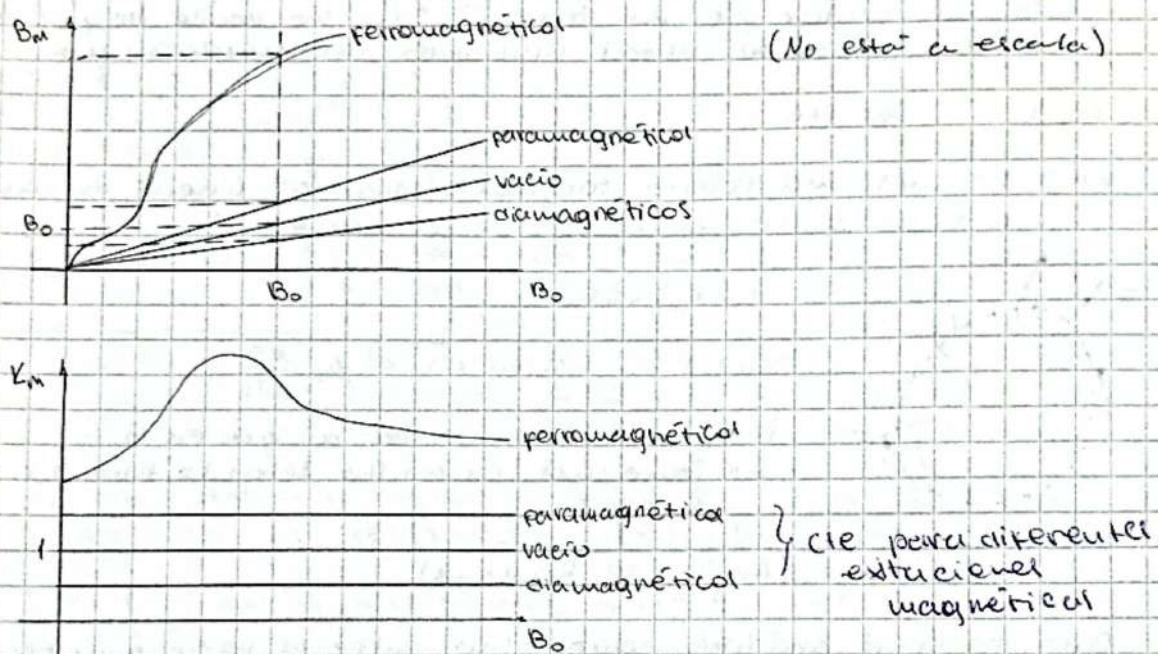
Ferromagnético $B^* \gg B_0$ $K_m \gg 1$

El campo magnético crece fuertemente en relación al vacío.

↳ Magnetismo fuerte

↳ El imán lo atrae fuertemente

¿Qué relación hay entre el campo magnético de los materiales y el del vacío?



K_m es la pendiente de la recta que se construye entre el origen y cada pt. de la curva

→ En los ferromagnéticos fuertemente dependiente de B_0 .

¿Cómo se producen estos fenómenos?

VECTOR MAGNETIZACIÓN O POLARIZACIÓN MAGNÉTICA

Corriente magnetizante o Amperiana (Teoría de Ampere)

Tenemos que ver la constitución de la materia.

Átomos → partículas más pequeñas que podemos citar

Si multiplicamos la e^- por un N° de giros que da el e^- por segundo podemos calcular la corriente equivalente que produce el movimiento del e^- .

Si tenemos I en una espira \Rightarrow tenes $\vec{\mu}$.

=> El movimiento del e^- es sensible a otros momentos.

Podemos asociar a e^- con una espira con su $\vec{\mu}$.

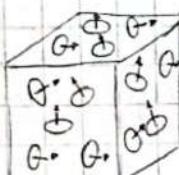
Los e^- tienen un movimiento de rotación
La carga se distribuye

El movimiento de giro sobre sí mismo también se puede
asociar a una pequeña espira de corriente tiene también
un $\vec{\mu}$ asociado

=> En un atomo tenemos la suma de momentos magnéticos
(movimiento de traslación de e^- y de spin)

A cada atomo le podemos asociar un $\vec{\mu}$ (superposición)

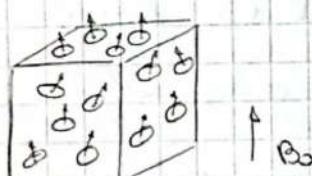
Regla: No se material en donde no existe
campo magnético.



Los momentos están orientados al azar. (se
van neutralizando)

No se detectan fenómenos magnéticos propios.

Si lo sometemos a un campo magnético externo

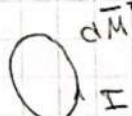


B_0 actúa sobre los momentos aplicando
una fuerza y los orienta hacia arriba

(> tiende a orientar

El momento deja de ser nulo y comienza
a tener un valor hacia arriba.

B_0 cuando es muy intenso fuerza a todos los momentos
magnéticos a orientarse en el mismo sentido y dirección
del campo externo. (Situación límite máxima)



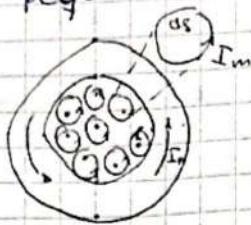
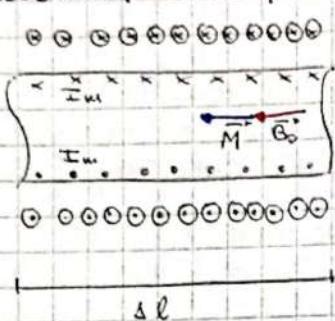
Asociamos el atomo a una espira de corriente
 $F \cdot d\vec{s} = d\vec{M}$
=> momento magnético

$\sum d\vec{M} = 0$ => material desmagnetizado

$\sum d\vec{M} \neq 0$ => " magnetizado"

$$\boxed{\sum \frac{I d\vec{s}}{dV} = \vec{M}} \quad \text{Vector magnetización} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

Tomando una parte muy pequeña del anillo de Rowland



cuando hacemos circular I por la bobina, aparece un vector campo B_0 , que hace aparecer \vec{M} en el mismo sentido.

Se superpone al campo B

En el círculo extremo dentro del núcleo todas las corrientes tienen el mismo sentido unidas en la superficie del núcleo (no se anulan)

Podemos considerar una corriente superficial sobre el material I_m corriente de magnetización

10^3 es recul
Es la que produce M

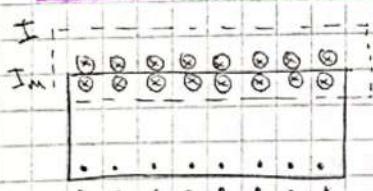
Suponemos que el número de espiras es I_m el igual al de la bobina.

$$\|\vec{M}\| = \frac{I_m n ds \Delta l}{ds \Delta l} = I_m n = I_m \frac{N}{l} \rightarrow \text{longitud media } n = \frac{N}{l}$$

$$|\vec{M}| = \frac{I_m N}{2\pi R} \left[\frac{A}{m} \right] \quad M \underbrace{2\pi R}_{\text{perímetro}} = I_m N \Rightarrow I_m N = \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

\Rightarrow la circulación del vector magnetización al lo largo del eje es igual a N veces la corriente de magnetización

VECTOR EXITACIÓN MAGNÉTICA



Pi: Ley de Ampere:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (N_f + N_f m) \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{Justifica} \\ \text{la aparición} \\ \text{de } M \end{matrix}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI + \mu_0 \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

dividido todo por μ_0
y pasando la integral
al primer miembro

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI$$

$\underbrace{\left[\frac{A}{m} \right]}$

$$\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$$

Definimos un tercer vector que
actúa sobre los materiales

Exitación magnética

Reemplazando \oint_L

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \text{o si } \|\vec{H}\| \text{ no varía}$$

$$\vec{H} \parallel d\vec{l}$$

$$\|\vec{H}\| = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2\pi Rn}$$

No depende del tipo de material
depende de la bobina y de la
corriente que circula por la bobina y
la dimensión constructiva del toroide.

SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA

Reordenando la primera expresión

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad \Rightarrow \text{Relación entre los 3 vectores magnéticos}$$

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 \|\vec{H}\| + \mu_0 \|\vec{M}\| \text{ porque son paralelos entre sí.}$$

$$\text{Saco factor común } \|\vec{B}\| = \mu_0 \|\vec{H}\| \left(1 + \frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} \right)$$

$$\|\vec{B}_0\| = \|\vec{B}_0\| \left(1 + \frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} \right) \quad \text{En el vacío no tenemos excitación magnética.}$$

$$\frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} = \chi_m$$

Susceptibilidad magnética

↳ adimensional

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_0\| (1 + \chi_m)$$

$$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{B}_0\|} = K_m = 1 + \chi_m$$

expresan el mismo fenómeno físico

ferromagnético fu (K_m)

Diamagnético y χ_m
Paramagnético

MODELOS PARA EXPLICAR...

Diamagnetismo

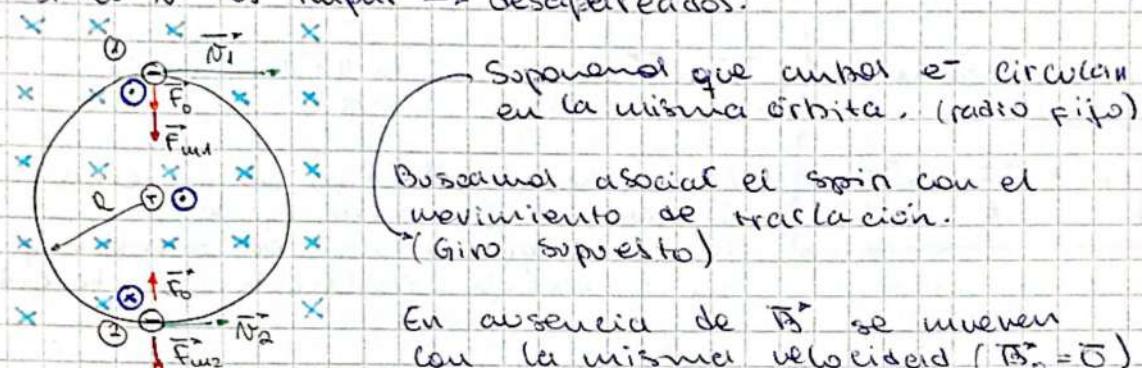
$$\chi_r < 0 \Rightarrow \vec{B}^* < \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{M}^* \text{ es opuesto a } \vec{H}^*$$

Buscamos justificar esto físicamente.

El spin del e^- puede ser $\pm \frac{1}{2}$
Los e^- van aparejados de a 2

$\Rightarrow 2 e^-$ tienen los 3 N^o idénticos iguales menor el spin.

Si el N^o es impar \rightarrow desparejados.



A cada e^- se le asocia una espira de corriente.

Los momentos magnéticos son opuestos entre sí.

Ambos momentos son iguales \rightarrow se neutralizan en ausencia de campo magnético

Cuando aplicamos un campo magnético $B_0 \neq 0$

\hookrightarrow aparece una fuerza de origen magnético

$$\vec{F}_m = e \vec{N}^* \times \vec{B}^* \quad \text{Para (1) tiene el mismo sentido que la } \vec{F} \text{ centrípeta.}$$

Para (2) tiene sentido opuesto

$$\text{(1)} \quad \vec{F}_e + \vec{F}_m = \frac{m N_1^2}{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \text{El momento magnético de (1) aumenta}$$

$$\text{(2)} \quad \vec{F}_e - \vec{F}_m = \frac{m N_2^2}{R} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad \text{y el de (2) disminuye}$$

\Rightarrow El momento es saliente ("gana" (1)), opuesto al campo, por eso disminuye.

El momento en sentido opuesto hace que el vector magnetización sobre el material tenga sentido opuesto a la excitación magnética

Paramagnetismo

- $\chi_r > 0 \Rightarrow \vec{B} > \vec{B}_0 \Rightarrow \vec{m}$ tiene el mismo sentido de \vec{H}
- Producido por e^- que no están apagados (momento dipolar intrínseco, no se anulan)
 - \Rightarrow Cuando tenemos \vec{B}^* externo los momentos comienzan a orientarse en el sentido del campo produciendo un refuerzo apareciendo un vector magnetización del mismo sentido de \vec{H} .
 - I_m tiene el mismo sentido de I pero $I_m \ll I$

Ferromagnetismo

\hookrightarrow El campo se incrementa mucho respecto del vacío

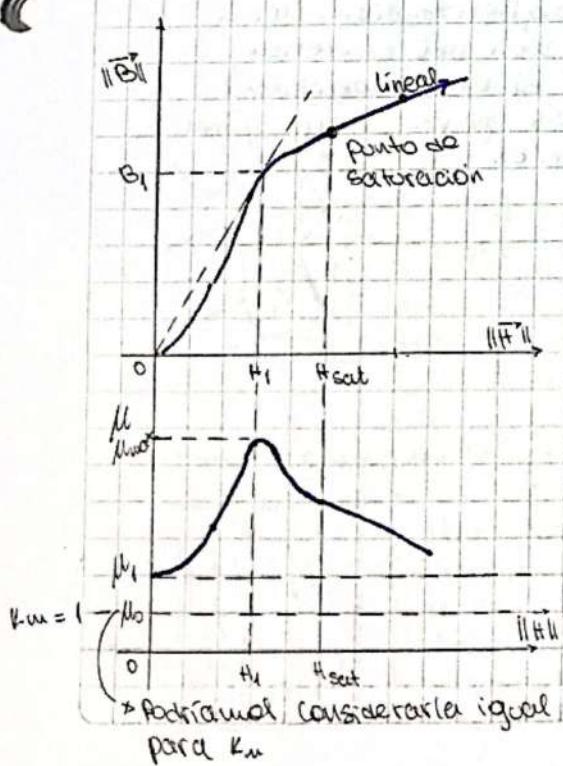
$\chi_r \gg 0 \quad I_m \gg I$ (relación no lineal, k_m no constante)

Fenómeno que se mantiene en un rango de temperatura

\hookrightarrow Si lo calentamos mucho a ciertas temperaturas pasa a comportarse como paramagnético.

\downarrow
Temp. cte. para cada material \rightarrow Temperatura de Curie

Variación del campo magnético

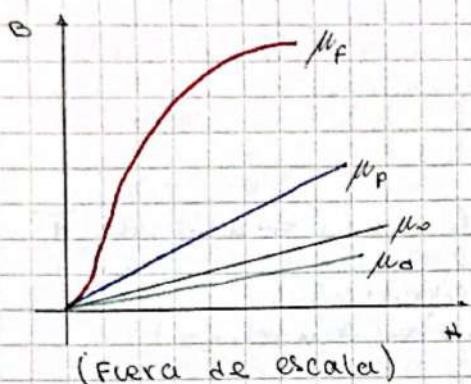


cuando comenzamos a aplicar el campo este parte con un K_m dado por la pendiente inicial de la curva.

A medida que aumenta la H , K_m se va incrementando hasta H_s donde K_m es máximo y a partir de allí empieza a disminuir la pendiente (K_m) hasta que llega a un pto. de saturación donde todos los momentos magnéticos del material se ordenaron en la dirección del campo del vacío
 \Rightarrow ya no puede crecer más M

Todo posterior incremento de B se produce solo por aumento de H . El tramo de la curva va a tener la misma pendiente que el campo en vacío.

* Podríamos considerarla igual para K_m



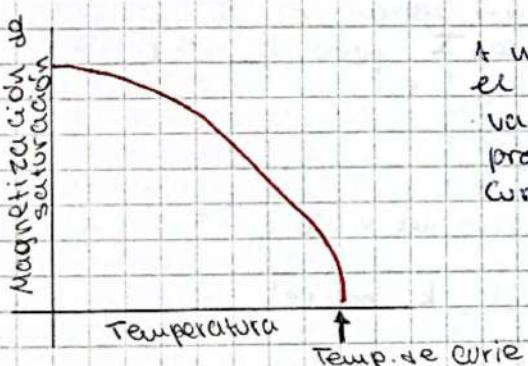
$\mu_0 = \beta$ en el vacío aumenta de forma proporcional a H
cte

μ_m y μ_r son cte. (menor al vacío)

$\mu_p > \mu_0$ cte.

μ_r no es cte. B se aumenta pronunciadamente para pequeñas H .

Para dos valores de H y de B si aumentamos la temp., la cte. máxima de saturación va disminuyendo.

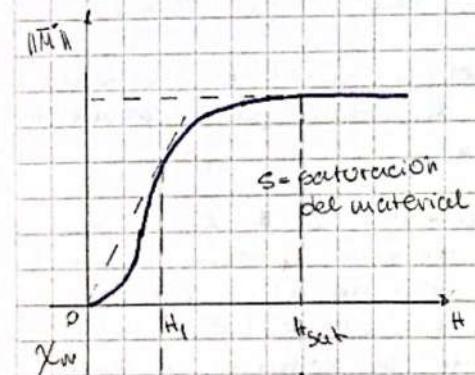


A medida que la temperatura incrementa, el valor de la magnetización máxima va a ir decayendo, hasta hacerse prácticamente 0 para la temp. de Curie.

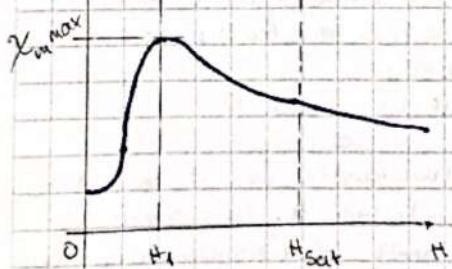
Curvas características

Curva inicial de magnetización ($\|B\|$ vs $\|H\|$)

$K_m = \mu_r$ anteriormente (mejor K_m porque es dimensional)



cuando la magnetización llega a la saturación del material se convierte en una horizontal no crece más para H mayor que la saturación



TEORÍA DE LOS DOMINIOS MAGNÉTICOS

Suponemos que los materiales ferromagnéticos microscópicamente tienen estructura cristalina.

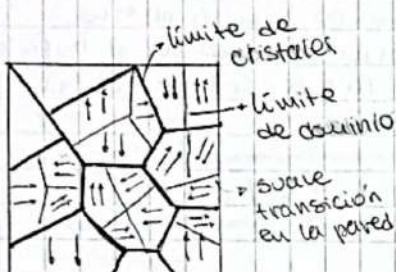
Ocupan granos microscópicos

⇒ Un sólido se puede considerar un conglomerado de estructuras cristalinas

↓

Cuando los átomos se consideran comparten su momento magnético.

⇒ El material queda magnetizado en esa parte



Sin campo externo

Dentro de un cristal puede haber más de un dominio para considerar la polarización magnética espontánea que tiene una parte del cristal diferente a otra.

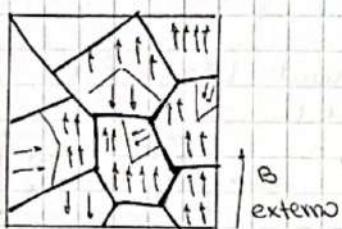
↳ Diferenciamos estas partes como "dominios magnéticos".

Un cristal puede estar constituido por uno o varios.

Los dominios están separados por paredes (límites de dominio) y dentro del mismo todo los momentos magnéticos están orientados en el mismo sentido.

↳ El dominio está magnetizado (malo) obviamente no observamos magnetización!

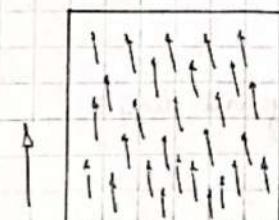
Si le aplicamos un campo magnético externo



los momentos magnéticos se van orientando influyendo a los dominios que se encuentran en el lado en la misma dirección y van creciendo los dominios.

↳ Aparece la componente M del vector magnetización.

(Este crecimiento es paulatino)

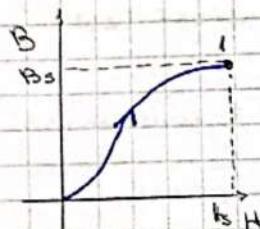


Llega un momento en el que la excitación lleva al material a la saturación del mismo y todos los momentos magnéticos se han orientado en el sentido del campo magnético externo.

Ciclo de HISTERESIS

↳ Se produce cuando un parametro se queda otros del valor representado.

Como que se ha deformado el material y se le impide volver a su posicion inicial.

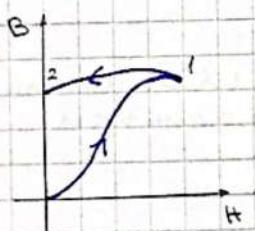


Si tenemos un material inicialmente desmagnetizado (sin H)
⇒ No hay fenómeno magnético
(punto $0,0$)

Si comenzamos a aplicar el material, aumentando H , el campo magnético sigue una trayectoria como la dibujada en azul hasta que llegue al valor de saturación (1).

El valor que relaciona los 3 vectores $\vec{B}_s = \mu_0 \vec{H}_s + \mu_0 \vec{M}_s$

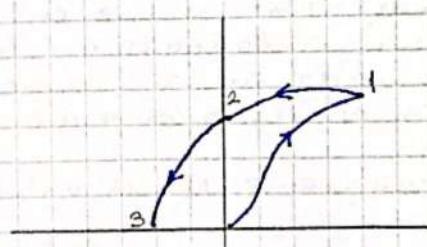
Si comenzamos a disminuir H
⇒ B va a ir disminuyendo PERO no sigue la trayectoria azul, sino que se va quedando otros el B respecto al camino inicial



Cuando H es 0 hay un magnetismo residual (2) → magnetismo remanente B_r

$$\vec{B}_r = \mu_0 \vec{H}^* + \mu_0 \vec{M}_r$$

Si quiero disminuir el B_r , tengo que invertir el sentido de corriente de la bobina para que H^* invierta su sentido en el interior.



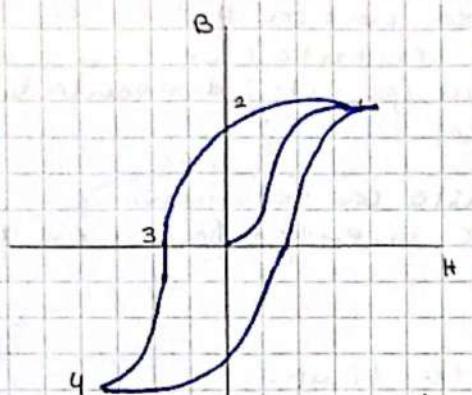
El campo disminuye hasta que el valor se hace 0.

$$0 = \mu_0 \vec{H}_c + \mu_0 \vec{M}_c \Rightarrow \vec{H}_c = -\vec{M}_c$$

Hay \vec{M}_c y \vec{H}_c compensar este valor.

$-\vec{M}_c = \vec{H}_c \rightarrow$ fuerza coercitiva del material

Seguimos aplicando negativamente el material para llegar a la saturación en sentido opuesto. ($-H_s$)



Si comenzamos a desexcitar
el petimol simétricamente
el caso del primer cuadrante
hasta $-B_s$, invertimos el
sentido de la corriente,
H es (+) de nuevo hasta
 $+H_c$ y si seguimos
exitando llegamos al pto.
de saturación

luego que seguimos un ciclo
ciclo de histeresis normalizado

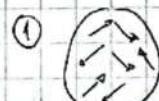
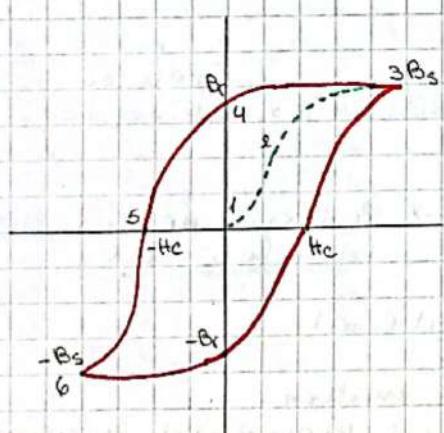
Ciclo simétrico del eje vertical invertido y del eje
vertical invertido

\Rightarrow El camino de ida no es igual al de vuelta.

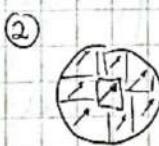
Dado un valor H, B puede tomar diferentes valores.

\Rightarrow B depende de H y de la historia magnética
del material

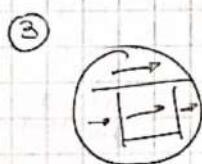
Desarrollo de los dominios



Antes de exitar.
Los dominios están
orientados al azar
No hay efecto magnético
asociado



(2) Comenzamos a exitar
(haciendo circular I)
los dominios se van
orientando en dirección al
campo magnético.
Suponemos que H es horizontal



(3) Llegamos a la saturación

Todos los pts. orientados en el mismo sentido



(4) Cuando bajamos la excitación magnética.
los dominios se van desorientando pero
la mayoría que quedan con su orientación anterior.

⑤



Cambiaremos el sentido H (invirtiendo I)
Seguimos desmagnetizando hasta H_c .
Continuamos aplicando una orientación horizontal y la mayoría ya está desordenado.

⑥

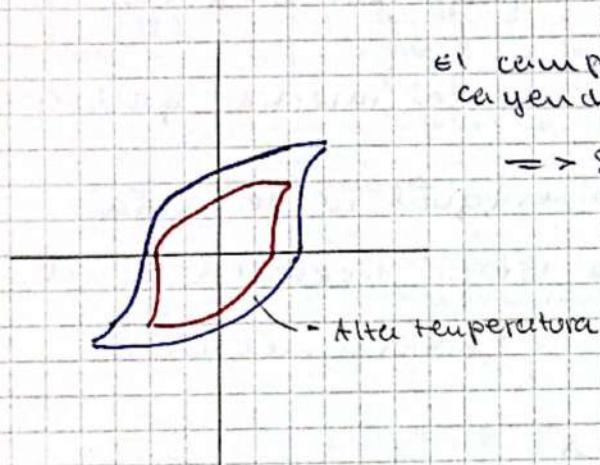


Continuamos excitando hasta la saturación.
Hasta que los dominios se orienten hacia ese lado.

El ciclo NO es cte., varía con la temp.

el campo de saturación va
cayendo cuando sube la temperatura.

\Rightarrow Se achica el ciclo



Área del ciclo

Para un determinado B y H $\|B\| \cdot \|H\| = \text{rectángulo}$

$$M \cdot H \left[\frac{N}{Am} \cdot \frac{A}{m} \right] = \left[\frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{m} \right] = \left[\frac{J}{m^3} \right] \rightarrow \text{energía por unidad de volumen}$$

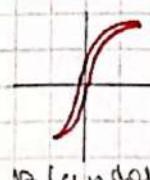
Energía que ha absorbido el material

Efectuando un trabajo sobre el material.

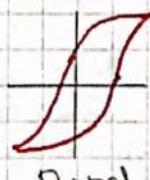
(pensar como si fueran imanes los momentos magnéticos sobre los cuales tuviera que aplicar una fuerza para vencer las de atracción y repulsión)

Se transforma en calor

2 tipos de materiales



Blando

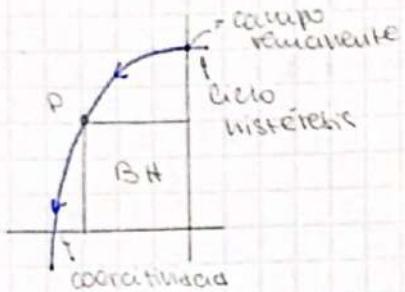


Duro

En los blandos \rightarrow mejor para un motor
(absorbe poco energía).

En los duros (la energía
absorbida es mayor).
 \rightarrow mejor para imanes.

Campos en un imán permanente



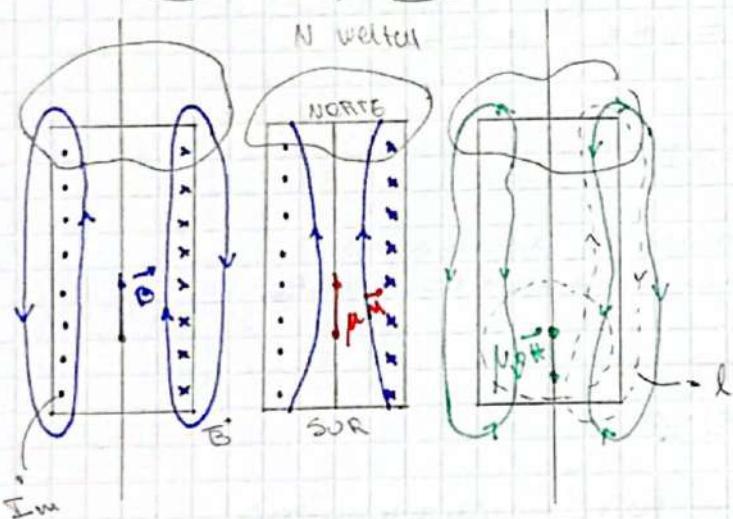
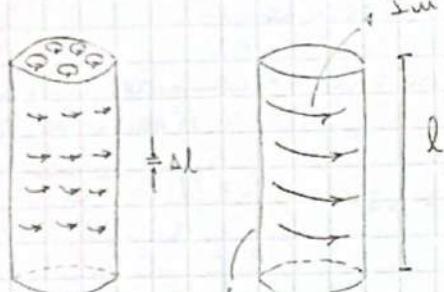
Es importante que un imán tenga un alto valor de campo remanente y alta fuerza coercitiva.

BH lo más alto posible

→ grande trabajo para demagnetizar

¿Cómo operan B, H y M en un imán permanente?

Tomando una varilla de material ferromagnético.



Las líneas de \vec{B} son cerradas
(en el interior parten arriba y en el exterior cierran su camino)



Las líneas de \vec{M} son abiertas porque la varilla tiene principio y fin en los polos.

μ_{M} tiene la misma dirección y sentido que \vec{B} .

\vec{H} tiene sentido opuesto a \vec{B} y a \vec{M}

Las líneas de \vec{H} nacen en el polo Norte y terminan por dentro del polo Sur.

Por fuerza sei imán también nacen en el polo norte y terminan en el Sur.

(Si integraramos por fuerza y pondremos la integral al final)

Si tenemos una superficie cerrada y aplicamos la ley de Gauss.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

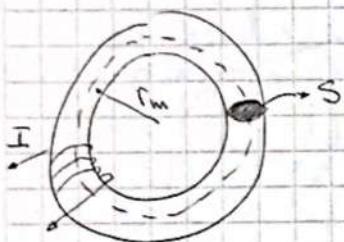
$$\vec{B} - \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{sobre la barra}$$

$\mu_0 \|\vec{M}\| > \|\vec{B}\| \Leftrightarrow \mu_0 \vec{H}$ es contrario a \vec{B} .

Fuerza del material: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

CIRCUITOS MAGNÉTICOS

cuando hacen circular I aparecen líneas de campo en el toroide.



↳ circuito magnético \rightarrow camino cerrado de líneas de campo.

$$\text{para } \vec{H} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad \oint_B \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot S$$

$$\text{como } \vec{B} = \mu \vec{H} = K_m \mu_0 \vec{H} \Rightarrow H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi_B}{\mu S}$$

= cte.

$$\oint \frac{\Phi_B}{\mu S} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{dI}{\mu S} = NI$$

↳ depende de la forma del circuito magnético y de K_m

$$R = \oint \frac{dl}{\mu S}$$

↳ reluctancia magnética

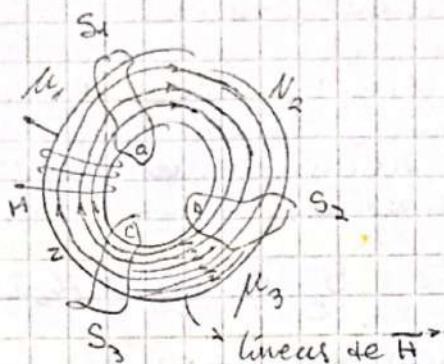
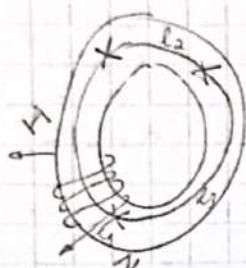
$$\Phi_B = \frac{NI}{R} = \frac{FMM}{R} \quad \text{— Fuerza magnetomotriz}$$

↳ ley de Ohm magnética o de Hopkinson

Para el anillo de Rowland.

$$\Phi_B = \frac{NI}{2\pi r_m} \mu S$$

Círculo magnético serie

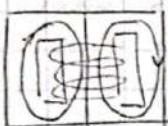


las líneas de campo atraviesan materiales con μ_1, μ_2, μ_3
=> varía H

Usando la suma de resistencias

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Círculo magnético paralelo



las líneas de \vec{B} atraviesan diferentes partes del núcleo.

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots}$$



Campo magnético inducido y corriente de desplazamiento

la existencia de un campo magnético variable en el tiempo induce donde está como función del tiempo y del espacio un campo eléctrico asociado (inducido)

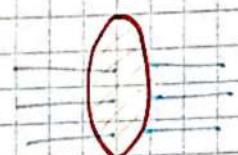
Líneas de campo cerradas (no hacen falta corrientes)

Si habiendo un campo eléctrico que varía en el tiempo aparece un campo magnético?

parte de Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I$

Relación de la circulación del campo con la corriente concatenada por la curva.
⇒ Si no hay I concatenada no hay B .

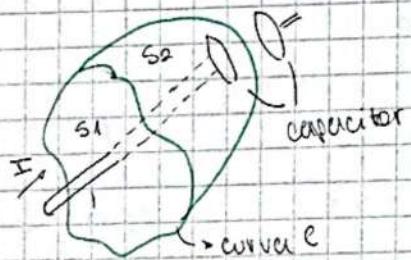
Imaginemos que la curva es la "cintura" de una superficie y el interior de la misma esté atravesado por una corriente eléctrica.



¿Cómo sabremos que la curva concatena a la corriente?

Tomando una superficie plana
Si la corriente atraviesa la superficie
⇒ la curva concatena la superficie.

Maxwell dice que Ampere no describe todas las situaciones físicas posibles.



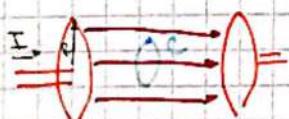
De la placa de la derecha verá salir una corriente que verá seguir su camino en cualquier circuito.

Si aplicamos Ampere sabremos que C concatena I.

Sí, podría no ser plana

S_2 no es atravesada por I (entre ambas capas del capacitor no hay I)

⇒ ¿No se cumple la integral de Ampere o falta algo?



En la placa de la izquierda va a ir acumulándose con el tiempo una cantidad cada vez mayor de carga (+)

los cargas van a atrapar a través de líneas de campo cargas Θ en la opuesta. Entre ambas hay un E que va creciendo en el tiempo (mientras haya I)

Entre las placas no hay I , si hay algún fenómeno

de E inducido tenemos: de faraday-lenz:

$$E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{C}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{C} = - \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Suponemos que se cumple la condición de simetría

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} \propto \frac{d\Phi_E}{dt}$$

lo transformamos en igualdad
(coeficientes que igualan numéricamente
y dimensionalmente)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 E_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Verificamos que existe un \vec{B} entre las placas

\hookrightarrow A través de C existen líneas de \vec{B}

Podemos colocar una bobina toroidal en donde el núcleo del toroide contenga las líneas de campo B y como B varía en el tiempo, va a inducir una E que la podemos detectar.

\Rightarrow Existe campo \vec{B}

Generalizamos la integral de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 I + \mu_0 E_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$E_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I_d [A] \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{corriente de} \\ \text{desplazamiento} \end{matrix}$$

(No existe materialmente)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 (I + I_d)$$

Para un conductor con I :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 I$$

$(I_d = 0)$

Para un espacio con campo variable en el tiempo:

$$I = \emptyset \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

ECUACIONES DE MAXWELL

Tratar de resumir todos los fenómenos eléctricos y magnéticos conocidos hasta el momento (siglo XIX)

↳ Maxwell agrupa 20 ecuaciones diferenciales
Expresa las variables en cuaterniones.

↳ no existían los vectores
Heaviside y Gibbs: concepto de vector y cálculo vectorial
⇒ se resumen en 4 ecuaciones

↳ Hertz demuestra experimentalmente que las ondas eléctricas y magnéticas pueden viajar a través del aire libre y del vacío

¿Cómo agrupa Maxwell las ecuaciones? (No mecanismos
y trabajan con vectores)

↳ Agrupa las que le parecieron fundamentales para la electricidad y magnetismo

Las unifica en 3:

Integral de Gauss

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Integral de Ampere

$$\iint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Ley de Faraday

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi_B}{dt} \quad (\text{inducción de campo } \vec{E} \text{ a partir de } \vec{B})$$

Los leyes de la física son simétricas.

• Tienen 2 integrales de linea y 1 de superficie
(falta 1 de superficie)

• Faltan 2 integrales de \vec{E} y 1 de \vec{B}
(falta 1 de \vec{B})

⇒ No falta una integral de superficie de \vec{B} .

Aplicamos la ley de Gauss para el campo magnético

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{Nos sirve porque nos dice que los líneas son cerradas, que no existen los corrientes magnéticas en las neutrales.}$$

Fuerte contenido físico

Ecaciones de Maxwell $\rightarrow 4$

$$\text{Ley de Gauss para } E: \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Ley de Gauss para } B: \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{Ley de Faraday:} \quad \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{c} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\text{Ley de Ampère:} \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Packe original de Maxwell (no estaban todos los conceptos de las 20 ecaciones).

lo complementa:

$$\text{Fuerza de Lorentz: } \vec{F} = q \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

En realidad las integrales no son leyes porque no explican las propiedades del punto.

\Rightarrow No me alcanza

Transformaremos las ecaciones de su forma integral a la diferencial.

El operador vectorial (nabla)

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\nabla = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{Gradiente } \nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k} \right) \psi$$

\hookrightarrow sobre un escalar

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{k}$$

Divergencia $\nabla \cdot \vec{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})$

↳ Sobre un vector escalar viene

$$\nabla \cdot \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

suma de 3 términos
escalares

Rotor $\nabla \times \vec{U} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (U_x \hat{i} + U_y \hat{j} + U_z \hat{k})$

↳ Sobre un vector vectorialmente

$$\nabla \times \vec{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}$$

(en realidad no es un determinante porque las segundas filas son operadores no vectores).

El operador (que es una derivada) puede operar 2 veces

↳ Derivadas de 2º orden

Laplaciano (divergencia del gradiente) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \varphi) = \nabla^2 \varphi$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \vec{U} = \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \hat{j} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \hat{k}$$

Gradiente de la divergencia $\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{U})$ (campo vectorial)

Divergencia del rotor $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U})$ $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) = 0$

Rotor del gradiente $\nabla \times (\nabla \cdot \varphi)$ $\nabla \times (\nabla \cdot \varphi) = 0$

Rotor del rotor $\nabla \times (\nabla \times \vec{U})$ $\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U}$

FORMA DIFERENCIAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Ley de Gaus

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

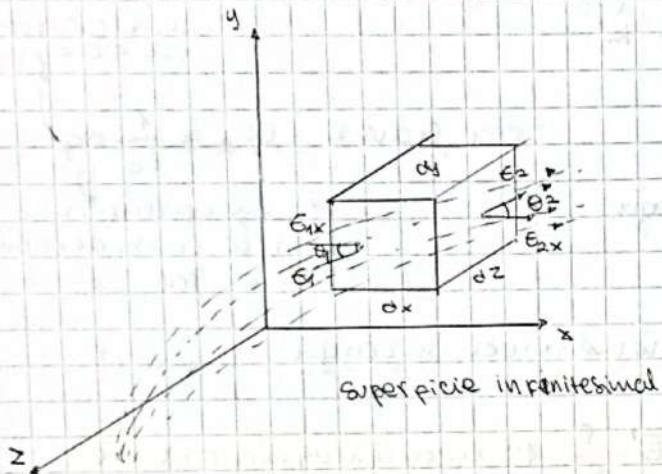
Tengo llevar la integral que me da la propiedad de la superficie del espacio a la propiedad de 1 pto.

↳ Toma una superficie infinitesimal

Podemos darle una forma geométrica la integral.

Es como trabajar con 3 ejes ortogonales y superficies paralelas a los mismos.

\Rightarrow Usamos un paralelepípedo



Al efectuar la integral de Gauss, multiplicando el vector del campo en cada cara en producto punto con un vector dS que represente la cara

\Rightarrow Sumando las 6 caras tengo la solución a la integral

Para el análisis relacionamos las caras paralelas

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} &= \| \vec{E}_2 \| \| d\vec{s} \| \cos \theta_2 = E_{2x} (dy, dz) \\ \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} &= -\| \vec{E}_1 \| \| d\vec{s} \| \cos \theta_1 = -E_{1x} (dy, dz) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{los sum} \\ \text{os} \end{array} \right\}$$

$$d\phi_x = (E_{2x} - E_{1x}) (dy \cdot dz)$$

$$(E_{2x} - E_{1x}) = dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx \quad \text{Reemplazando}$$

$$d\phi_x = dE_x (dy \cdot dz) = \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot (dx \cdot dy \cdot dz)}_{dV}$$

$$d\phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dV \quad \text{luego pera } x \text{ e } y:$$

$$d\phi_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dV$$

$$d\phi_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dV$$

∴ El fulijo total al través del paralelepípedo elemental, es:

$$d\phi_E = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z$$

$$d\phi_E = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dV$$

Sacaremos factor común dV:

$$d\phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{d\phi_E}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Adoptemos el operador vectorial ∇ (hablar):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \nabla \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$$

$$q = \frac{dq}{dV}$$

Propiedad de carga
del espacio

carga distribuida
en el espacio

$$\text{por Gauss } d\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} dq$$

No es continua
pero lo consideramos
como tal

Ley de Gauss del espacio / volumétrica de carga

$$\frac{d\phi_E}{dV} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dq}{dV} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{1ra ecuación diferencial de Maxwell}$$

→ me permite calcular
para cualquier punto del espacio

$$\Rightarrow \text{Es una ley.}$$

Con un desarrollo similar

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{2da ecuación diferencial de Maxwell}$$

Integral de Ampere

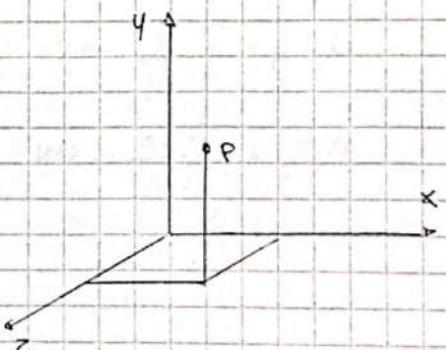
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{C} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

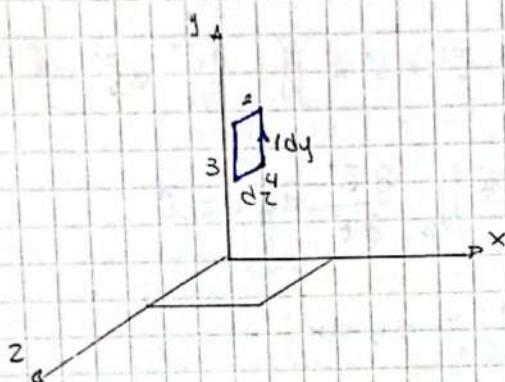
Buscamos una curva que tenga un N° finito de dC.

Al cerrarla lo realizamos
en un punto del espacio, donde
conocemos el valor de \vec{B} .

Tomamos un camino cerrado
(curva) para tomar la curva C:

Dirígetelas a los ejes del sistema.
(Rectángulo).





Saliendo desde P a través de los
 $dy, dz, -dy, -dz$.

La densidad de I es perpendicular
 a la curva, el \vec{J} es también.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

El campo en P es \vec{B}

$$\text{En la intersección entre } 1 \text{ y } 2 \quad \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy$$

$$\text{Tramo 1: } \vec{B} \cdot \hat{y} dy$$

$$\text{Tramo 2: } \left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy \right) \cdot \hat{x} dz$$

$$\text{Tramo 4: } -\vec{B} \cdot \hat{x} dz$$

$$\text{Tramo 3: } -\left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \right) \cdot \hat{y} dy$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \vec{B} \cdot \hat{y} dy + \left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy \right) \hat{x} dz - \left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \right) \cdot \hat{y} dy - \vec{B} \cdot \hat{x} dz$$

$$= \cancel{\vec{B} \cdot \hat{y} dy} + \cancel{\vec{B} \cdot \hat{x} dz} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \hat{x} dy \cdot dz - \cancel{\vec{B} \cdot \hat{y} dy} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \cdot \hat{y} \cdot dz dy - \cancel{\vec{B} \cdot \hat{x} dz}$$

$$= \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \hat{x} dy dz - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \hat{y} dz dy$$

$$= dy dz \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \hat{y} \right) = dy dz \left[\frac{\partial}{\partial y} (\vec{B} \cdot \hat{x}) - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{B} \cdot \hat{y}) \right]$$

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = dy dz \left(\frac{\partial \vec{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{B}_y}{\partial z} \right)}$$

Viendo el 2º miembro: $\mu_0 i \rightarrow$ primer término

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{donde } d\vec{s} = dy \cdot dz \cdot \hat{i} \Rightarrow i = \iint_S J_x dy \cdot dz$$

$$= \iint_S J_x dy dz \Rightarrow \boxed{i = J_x dy dz}$$

$$2^{\text{do}} \text{ término: } \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \quad \phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Donde $d\vec{s} = dy \cdot dz \cdot \hat{n}$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz \quad \boxed{\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz}$$

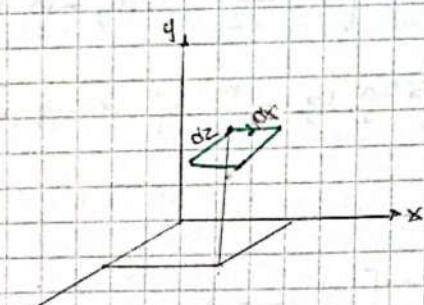
Con las ecuaciones restando reemplazamos:

$$dy dz \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x dy dz + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz$$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \text{Equivaleente solamen} \\ \text{te para una curva} \\ \text{particular} \end{array}$$

(Plano perpendicular al eje x y los paralelos a los ejes y y z)

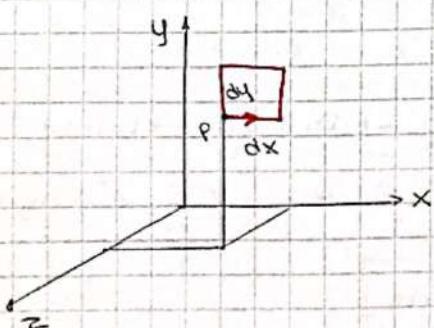
Tomando otra curva (plano perpendicular al eje y y sus lados paralelos al eje x y al eje z).



Con el mismo desarrollo de la primera obtenemos:

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 J_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Por último tomamos un curva perpendicular al eje z y los lados paralelos al eje x y ey.



$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Continuando los resultados de las 3 curvas:

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 J_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 J_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 J_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Como las ecuaciones están hechas perpendiculares entre sí no aparecen otras en las otras.

\Rightarrow Para cualquier curva del espacio, sumemoj mientras a miembro.

Como la suma es vectorial debemos multiplicar por $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k} \rightarrow \text{lo puedo representar como un determinante}$$

$$= \mu_0 (J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}) + \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right)$$

\hookrightarrow Circulación de campo total a través de una curva.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

FOTO

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

4ta Ecación diferencial de Maxwell

Con un desarrollo análogo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad 3^{\text{a}} \text{ Ecación diferencial de Maxwell}$$

FORMA DIFERENCIAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

1^{ra} Divergencia del campo eléctrico

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2^{da} Divergencia del campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3^{ra} Rotor del campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

4^{ta} Rotor del campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

agregamos:

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

la inducción y la forma puede variar.

la forman en función de \vec{E} y \vec{B} prácticas para el vacío algunos materiales.

REFLEXIONES

- Las 4 representan la relación entre los campos eléctricos y magnéticos \rightarrow campo electromagnético
- Las 2 últimas determinan una permanente interdependencia entre campo eléctrico y magnético que varían en el tiempo (una variación de \vec{E} provoca un \vec{B} y una variación de \vec{B} provocar un \vec{E} .)
- Las 2 últimas determinan la perpendicularidad especial entre ambos campos.
- Los sist. que crean campo electromagnético son las cargas y las corrientes eléctricas (Fuente de campo electromagnético) \rightarrow NO generador
- Considerando a estas ecaciones como funciones continuas en el espacio.
(las cargas son granulares).

- Simetría (en el espacio vacío)
- Aplicación difícil en general
- Maxwell predijo que las variaciones de los campos funcionan como perturbaciones que se propagan en el espacio y ∴ explicar las ondas electromagnéticas antes de que se demostraran experimentalmente.
- No aparece C (velocidad de propagación de los ondas electromagnéticas en el vacío)
 \hookrightarrow Relación entre μ_0 y E_0 : $= \frac{1}{c^2}$

MOVIMIENTO ONDULATORIO

Ondas viajeras: perturbaciones independientes, solo se apoyan en el medio en el que se desenvuelve.

No son estáticas (se mueven llevando energía e impulso)

TIPOS DE Onda

\hookrightarrow En función del medio en que se propagan

- Ondas mecánicas (se apoyan en la materia)
- Ondas electromagnéticas (no necesitan un soporte físico, se propagan en espacio vacío, conductores y dieléctricos).
- Ondas gravitacionales (se necesitan instrumentos muy largos para medirlas)

\hookrightarrow En función de su dirección

- Ondas unidimensionales
- Ondas bidimensionales
- Ondas tridimensionales

} Son casi siempre tridimensionales
 \hookrightarrow Buscamos llevarlas a las otras para simplificar el análisis.

↳ En función del movimiento de sus partículas

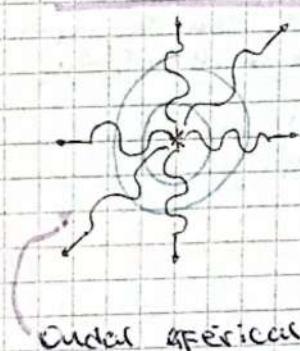
- Ondas longitudinales (el movimiento de las partículas es paralelo al movimiento de la onda)
- Ondas transversales (movimiento perpendicular a la dirección de la trayectoria)

↳ En función de su periodicidad

- Ondas periódicas (formas que se repite permanentemente)
- Ondas no periódicas (su próxima posición es indeterminada)
↳ Transmite información

Ondas Unidimensionales

Tridimensionales:

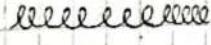
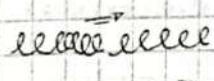
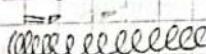


Ondas sfericas

Tenemos un emisor puntiforme que emite con la misma energía en todas las direcciones del espacio.

⇒ La propagación de las partículas de onda son esféricas. (La velocidad es la misma para todas direcciones) / medio uniforme y homogéneo

Longitudinal:

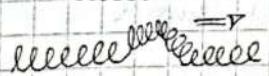
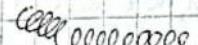


Resorte, la extensión y la tensión es un brusco movimiento horizontal

Se propaga a lo largo del eje del resorte en la única dirección posible

Si aumenta la tensión, aumenta la velocidad de propagación

Transversal:



Se aplican un movimiento vertical

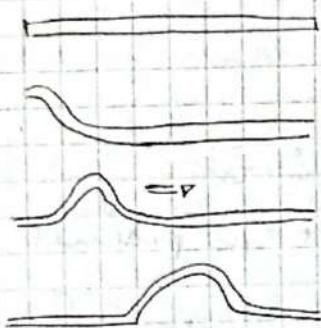
↳ Se transfiere a lo largo del resorte.

Cómo la perturbación depende del tipo de onda?

$$\psi = f(x, t)$$

↳ función del punto del espacio y del tiempo.
2 variables independientes de diferente dimensión

Onda que le impulso a una cuerda.



la representamos $\psi = f(x, t)$

$$\psi_1 = f(x, t_1) = F_1(x)$$

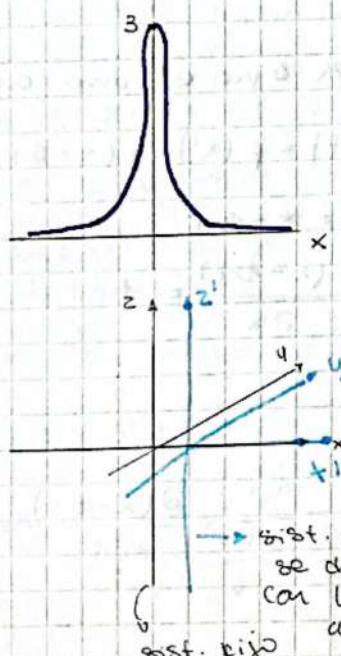
$$\psi_2 = f(x, t_2) = F_2(x)$$

$$\psi_3 = f(x_3, t) = F_3(t)$$

$$\psi_0 = f(x, 0) = F_0(x) \quad F_0(x) = \frac{3}{10x^2 + 1}$$

Mientras sea del mismo material
(homogéneo) la velocidad es constante

\Rightarrow definimos 2 sist. de coordenadas



Trabajamos con una onda
unidimensional (función sólo en x)

Como \vec{v}^* es horizontal

$$\Rightarrow \vec{v}^* = (v_x, v_y, v_z) = (v, 0, 0)$$

Cuando se desplaza la
onda, el valor de
 x va aumentando
linealmente
(estático en el sist. móvil)

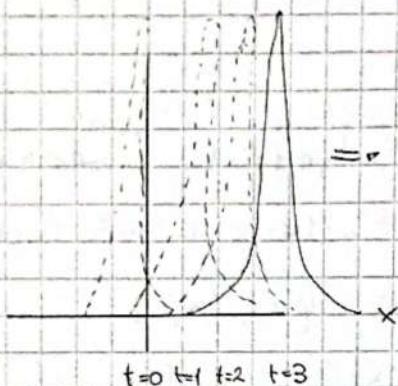
$$x = x' + vt \quad \text{despejamos } x' = x - vt$$

$y' = y$ y no cambia de un
 $z' = z$ sist. a otro

$$\psi = f(x') \quad \psi(x, t) = f(x - vt)$$

Reemplazemos por la función de transformación

$$f_0(x) = \frac{3}{10(x-n\tau)^2 + 1}$$



Al reemplazar en la función

\Rightarrow la transformación es una onda viajera
(para cualquier función)

Si en una función las variables son x y t no podemos decir si es onda.

Fabrica que unifiques en una variable (muy complicado)

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE Onda

• Sirve para decir si una función es o no es una onda.

Tomando una función general: $\Psi(x, t) = f(x) = f(x - n\tau t)$

Derivando respecto de x $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x}$ como $x' = x - n\tau t$
 $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial(x - n\tau t)}{\partial x} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

Derivando respecto de t $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t}$ $\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial(x - n\tau t)}{\partial t} = -n\tau$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -n\tau \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -n \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} \propto \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Derivando de nuevo respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_1$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$$

Derivando nuevamente respecto de t

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \right)$$

como $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial F}{\partial x'}$ Reemplazando

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial x'} \left(-v \frac{\partial F}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = +v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Ecuación diferencial de orden
0 de D'Alembert

La onda viajera cumple con la ecuación

\Rightarrow si quiero saber si la función es una onda viajera

Derivo 2 veces respecto a t y a x y veo si cumple la ecuación.

Ecuación diferencial de orden tridimensional

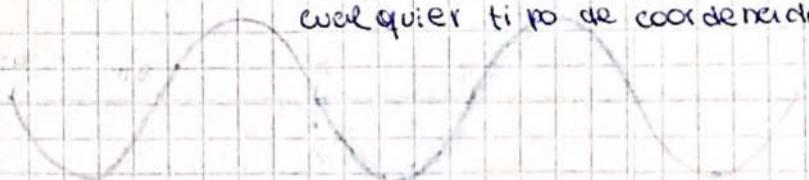
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\text{como } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

forma más general

se puede expresar para cualquier tipo de coordenadas



ONDAS ARMÓNICAS

Las ondas periódicas cuyo perfil es la función sen/cos
(
fórmula más sencilla)

$$\text{para } t=0 \quad \psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \cdot \operatorname{sen} kx = f(x)$$

Para transformarlo en una viajera

$$\boxed{\psi(x, t) = A \cdot \operatorname{sen} k(x - vt)} = f(x - vt)$$

Veremos si cumple con la ecuación. Derivamos 2 veces respecto a x

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A \cos k(x - vt) \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = A \cos k(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [A \cos k(x - vt)] = \boxed{-A \operatorname{sen} k(x - vt)}$$

Derivando 2 veces con respecto a t:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A \cos k(x - vt) \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = A \cos k(x - vt) \cdot (-v)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A v [\operatorname{sen} k(x - vt) \cdot (-v)] = \boxed{-A v^2 \operatorname{sen} k(x - vt)}$$

Reemplazando

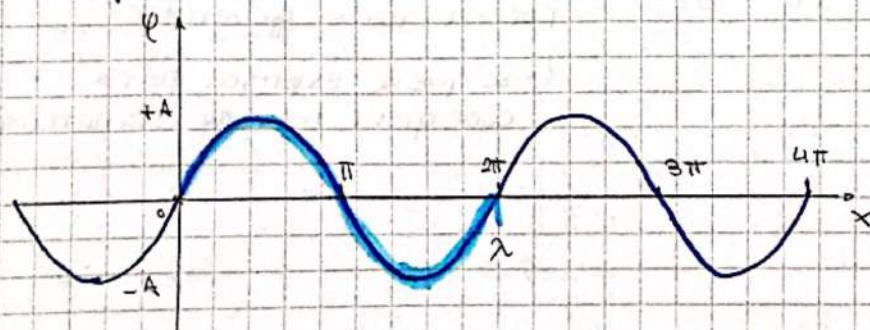
$$[-A \operatorname{sen} k(x - vt)] = \frac{1}{v^2} [-A v^2 \operatorname{sen} k(x - vt)]$$

y ES solución a la ecuación.

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) \quad \text{con } k(x - vt) = 2\pi n \text{ radianes}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

La forma de onda se va repitiendo



El espacio desplazado por la onda = longitud de onda λ

$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t) \rightarrow$ toma el mismo valor cuando el periodo temporal va cambiando una longitud de onda.

$$\Rightarrow \sin k(x - vt) = \sin k[(x \pm \lambda) - vt]$$

$$\sin k[(x \pm \lambda) - vt] = \sin k[(x - vt) \pm 2\pi]$$

deducir que k esté relacionado con la longitud de onda

$$k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

\rightarrow N° de onda

(cant. de veces que se repite una onda en un ciclo de 2π radianes).

Periodo temporal (periodo T)

$$\psi(x,) = \psi(x, t + T)$$

$$\sin k(x - vt) = \sin k[x - v(t + T)] = \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

$$k v T = 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} v T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{v}$$

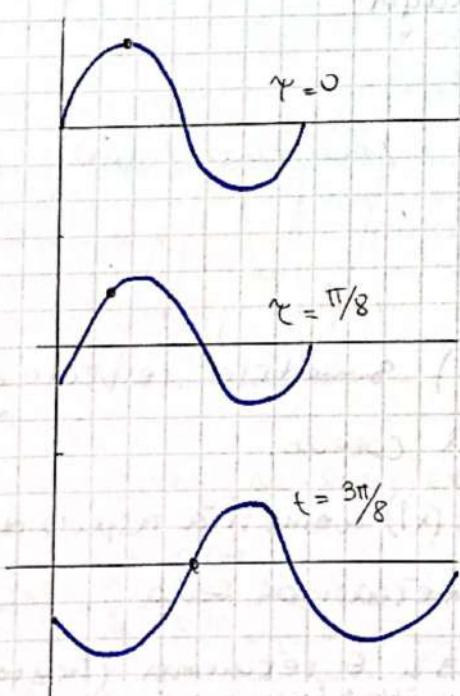
\rightarrow frecuencia

Definición

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = T$$

(\rightarrow N° de veces que se repite la onda (ciclos / seg) (Hz))



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

(\rightarrow tiempo en el que se repite el ciclo)

2 formas de describir una onda armónica

- En función de su velocidad de propagación

$$\psi(x, t) = A \cdot \sin k(x - vt)$$

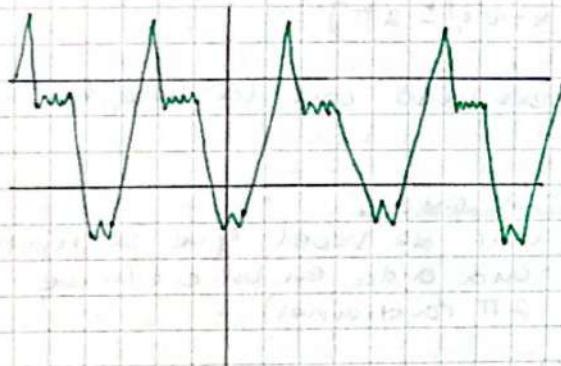
- En función de su velocidad angular

$$\varphi(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

ONDAS PERIÓDICAS

- Ondas Armónicas

- Ondas NO armónicas / tonos míticos



Tiene un perfil que se va repitiendo para cada periodo de tiempo.

Cálculo más complejo.

Teorema de Fourier

$$f(x) \rightarrow f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}(mx)$$

$$A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) dx$$

amplitud mayor

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \cos(mx) dx$$

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda f(x) \operatorname{sen}(mx) dx$$

Simplificaciones:

* si la función es par ($f(-x) = f(x)$) simetría respecto de $x=0$
↳ la serie tendrá solo término coseno.

* si la función es impar ($f(-x) = -f(x)$) asimetría respecto de $x=0$
↳ la serie tendrá solamente término seno.

* En general, con el cálculo de 3 u 5 términos (hasta 11 con computadora) es suficiente.

$$\psi = f(x - vt)$$

$$\psi = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos k(x-vt) + A_2 \cos 2k(x-vt) + \dots + A_m \cos mk(x-vt) \\ + B_1 \sin k(x-vt) + B_2 \sin 2k(x-vt) + \dots + B_m \sin mk(x-vt)$$

$$0 \quad \psi = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos (kx - wt) + A_2 \cos (2kx - 2wt) + \dots + A_m \cos (mkx - mw t) \\ + B_1 \sin (kx - wt) + B_2 \sin (2kx - 2wt) + \dots + B_m \sin (mkx - mw t)$$

A cada término se le denomina armónica

1^a armónica (fundamental)

2^a armónica

3^a armónica

m^a armónica

$$wt = 2\pi f \longrightarrow \text{mayor amplitud}$$

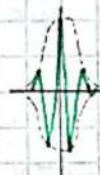
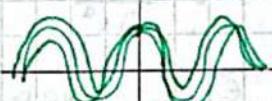
$$2wt = 2\pi 2f$$

$$3wt = 2\pi 3f$$

$$mw t = 2\pi mf$$

ONDAS NO PERIÓDICAS

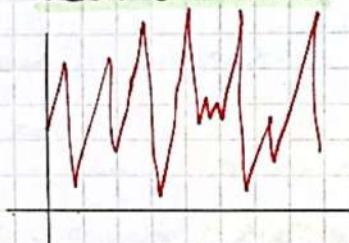
Pulsos / paquetes de onda: duran un tiempo definido.



Ondas que forman el paquete

Paquete resultante

Ondas continuas: tiempo indefinido



Integrable de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} A(k) \cos(kx) dk + \int_0^{\infty} B(k) \sin(kx) dk \right]$$

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \quad B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

↳ Utilizaremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío

Consejo: $f=0$ y $j=0$ (no hay cargas ni corriente)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Mucha simetría

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Explican todo el fenómeno electromagnético.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando la 3^{ra} y efectuando el rotor

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

↳ Obtenemos en la 4^{ta}

Reemplazando

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad \text{en vacío } \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\therefore \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Desarrollo análogo para la 4^{ta} ecuación

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Ambas son ecuaciones diferenciales de onda

Si las trabajaremos en forma vectorial:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

A continuación el sistema de referencia para que el eje y sea paralelo a la variación del campo eléctrico

$$\vec{E} = (0, E_y, 0) \quad \vec{B} = (0, 0, B_z) \Rightarrow \text{paralelo al eje } z$$

Tomando sólo las 2 ecuaciones de los ejes y y z respectivamente

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Por como hemos demostrado el sistema.

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

la propagación se reproduce en la dirección del eje x.

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}}$$

se produce en el eje x

Como deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

$$\text{quedan: } \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}}$$

Los campos eléctricos y magnéticos varían como ondas viajeras.

\Rightarrow Las ondas electromagnéticas se producen por perturbaciones eléctricas y magnéticas que se mueven en el espacio y en el tiempo como ondas viajeras.

Caso particular Ondas armónicas

Consideraremos sólo el campo eléctrico.

Onda eléctrica $E_y = E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

$$\text{Tomando la 3ra} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad y \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = - \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

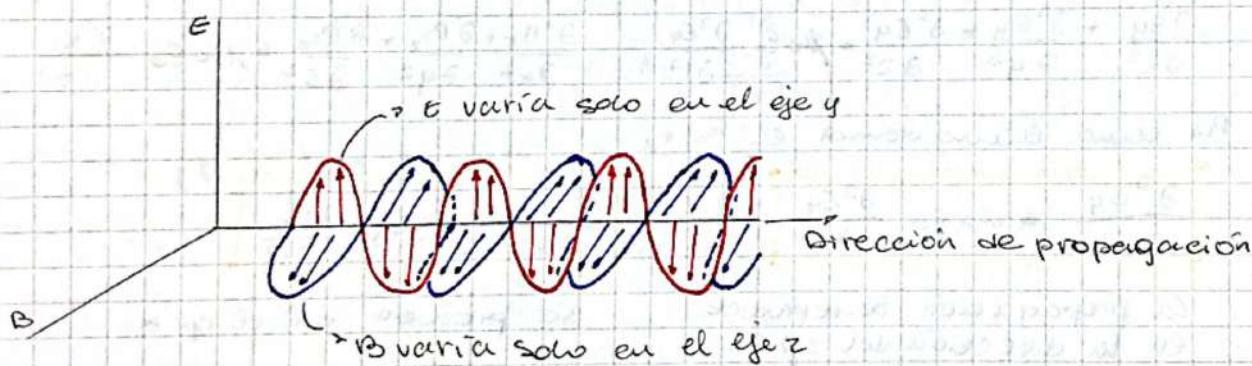
$$\Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -k E_M \operatorname{cos}(kx - \omega t)$$

$$B_z = -k E_M \int \operatorname{cos}(kx - \omega t) dt$$

$$B_z = \frac{k}{\omega} E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad C = \frac{\omega}{k}$$

$$B_z = \frac{E_M}{C} \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad B_M = \frac{E_M v}{C}$$

$$\Rightarrow B_z = B_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$



Ambas ondas se encuentran en fase y pasan simultáneamente por sus valores máximos.

Si a E_y lo reemplazamos en la ecuación de D'Alembert.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad y \quad \frac{\partial E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Reemplazando

$$-k^2 E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) E_M \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega^2}{k^2} = C^2$$

velocidad de propagación

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

depende de los valores de permeabilidad y permitividad

del medio
(en el vacío valor máximo)

$$c \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

En un medio diferente al vacío:

$$n = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$$

$$\mu = \mu_0 k_m \quad \epsilon = \epsilon_0 k_d \quad \text{Reemplazando}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{k_m k_d}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{k_m k_d}} = \boxed{\frac{c}{n}} \quad n = \sqrt{k_m k_d}$$

índice de refracción del medio.

Dentro de los medios materiales las ondas electromagnéticas disminuyen constante.

El vector de Poynting

↳ medida de la energía que transmiten las ondas electromagnéticas
(se transmite a cierta velocidad)

↳ => Hay potencia transmitida ($\frac{E}{t}$)

Partiendo considerando que en cualquier punto del espacio donde hay campo eléctrico hay energía distribuida

$$\text{densidad: } M_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

También en una región donde hay B .

$$M_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow M_T = M_E + M_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad B = \frac{E}{C} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Reemplazando

$$M_T = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2 \mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mu_0 C^2}$$

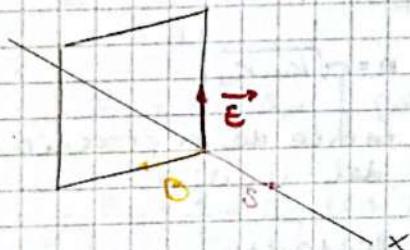
$$\therefore M_T = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Toda la energía que transmiten las ondas electromagnéticas van a estar divididas por partes iguales en energía eléctrica y magnética.

¿Cómo se transfiere la energía?

Podría utilizar una superficie rectangular perpendicular al eje x en el gráfico de la propagación, E y B . (de valor unitario)

Podría calcular la cantidad de energía que atraviesa a la superficie por unidad de tiempo.



$$S = \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \cdot B \rightarrow \text{puedo darle un sentido (dirección y sentido de propagación)}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad \text{Vector de Poynting}$$

↳ Energía transferida por unidad de tiempo por unidad de área
↳ Perpendicular al plano formado por \vec{E} y \vec{B}

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} (E_y \cdot B_z) \hat{i}$$

Para ondas armónicas

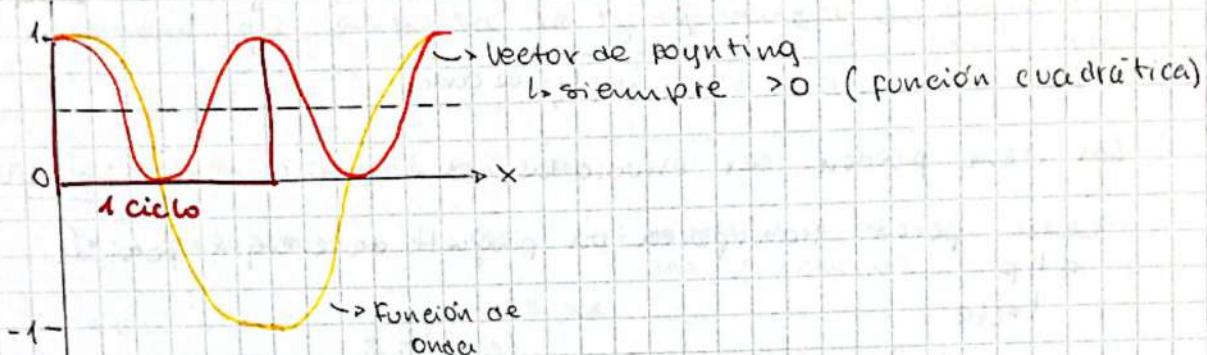
$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} [E_M \sin(\omega t - kx) \cdot B_M \sin(\omega t - kx) \hat{i}]$$

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} E_M \cdot B_M \sin^2(\omega t - kx) \hat{i} \rightarrow \text{Potencia instantánea (varía periódicamente)}$$

También se lo puede expresar $\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} E_M B_M \cos^2(\omega t - kx) \hat{i}$.

$$\vec{s} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx) \hat{i} = E_0 c E_{max}^2 \cos^2(\omega t - kx) \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{s} = [E_0 c E_{\max}^2 \cos^2(kx - wt); 0; 0]$$



Queremos saber la tasa potencia absorbida después de cierto At.

$$S_x = E_0 c E_{\max}^2 \cos^2 \theta \quad (kx - wt + \frac{\pi}{2}) \\ (kx - wt) = \pi$$

Para calcular el promedio del vector no coincide con calcular para un ciclo. (se va a ir repitiendo).

$$S_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_x d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E_0 c E_{\max}^2 \cos^2 \theta d\theta \\ = \frac{1}{\pi} E_0 c E_{\max} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \\ \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} + \frac{1}{2} \int \cos^2 \theta d\theta \right]_0^\pi = \left[\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} + \frac{1}{2} \theta \right]_0^\pi \\ = \frac{\cos \pi \sin \pi}{2} + \frac{1}{2} \pi - \frac{\cos 0 \sin 0}{2} + \frac{1}{2} 0 = \boxed{\frac{1}{2} \pi}$$

Reemplazando y simplificando

$$\Rightarrow S_{\text{med}} = \frac{1}{\pi} E_0 c E_{\max}^2 \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} (E_0 c E_{\max}^2)$$

$$S_{\text{med}} = \|\vec{S}_{\text{med}}\| \rightarrow \text{cte}$$

$$I = S_{\text{med}} = \frac{1}{2} E_0 c E_{\max}^2 \boxed{\left[\frac{W}{m^2} \right]}$$

\rightarrow Intensidad de la onda $\propto E_{\max}^2$

Análisis común para TODAS las ondas electromagnéticas.

ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

- ↳ Estudio de las ondas electromagnéticas cuando su va cambiando
- ↳ En función de su frecuencia o de su longitud de onda
 - ↳ $\frac{c}{\text{longitud de onda}}$

Las OEM pueden ser estudiadas como ondas o como partículas

Cada fotón transporta un paquete de energía fotónica

$$= hf$$

↳ cte

si $f \uparrow \Rightarrow$ Energía ↑

λz visible 400 nm - 750 nm.

► Ultra violeta

► Rayos X

► Rayos Gama

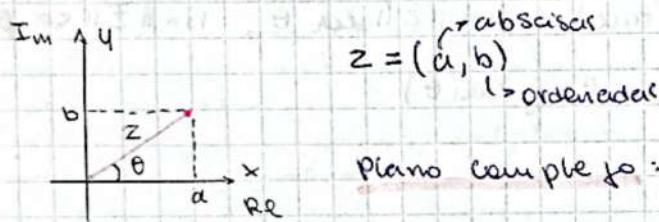
► Presión de radiación

FUNDAMENTOS DE LA CORRIENTE ALTERNA

- Fenómeno que posibilita la transferencia de energía por corriente alterna (principalmente eléctrica)

NÚMEROS COMPLEJOS

• Par ordenado de N° real → representado en sist. de coordenadas cartesianas



Punto complejo : • Ordenadas → Parte imaginaria
• Abscisas → Parte real

No es un vector

(no siguen las reglas de los productos)

Nº Imaginario : N° complejo cuya parte real = 0.

En electrotecnia usamos j en lugar de i.

$$\Rightarrow j = (0, 1) \quad jy = (0, y).$$



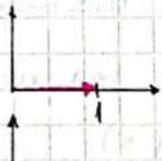
$$\Rightarrow (a, b) = (a, 0) + j(0, b) = a + jb$$

formas binomiales

Ángulo de inclinación θ del complejo → argumento

Argumento principal : entre 0 y 2π (sentido antihorario)

Tomamos $z = (1, 0) = 1 + j0 = 1$

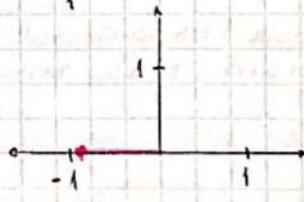


Lo multiplicamos por j → 0 + j1

El vector giro hacia quedar para lo al eje de las ordenadas (giro $\pi/2$)



Si lo multiplico por j de nuevo rota $\pi/2$ de nuevo, deja de ser un N° imaginario y pasa a ser un N° real de valor -1



$$\Rightarrow j^2 = -1 \quad (j = \sqrt{-1})$$

$$j^3 = -j \quad y \quad j^4 = 1$$

Formas de representación

• Forma binomial $\bar{z} = x + jy \quad z = \operatorname{Re}(\bar{z}) + j \operatorname{Im}(\bar{z})$

Su módulo es $\|\bar{z}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Su argumento $\operatorname{Arg} \bar{z} = \theta \quad (\operatorname{arctg} \frac{y}{x})$

• Forma polar (o trigonométrica) $a = \|\bar{z}\| \cos \theta \quad b = \|\bar{z}\| \operatorname{sen} \theta$

$$\bar{z} = x + jy = \|\bar{z}\| (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta)$$

• Forma exponencial

Utilizaremos $e = 2,71828182 \Rightarrow \ln e = 1$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= e^{j\theta} \\ g(\theta) &= \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{valores en } 0 \text{ y verifico que son} \\ \text{iguales} \end{array} \right\}$$

$$f(0) = e^{j0} = 1 \quad g(0) = \cos 0 + j \operatorname{sen} 0 = 1 + j \cdot 0 = 1$$

\Rightarrow tienen el mismo valor en el origen

Derivamos $f'(\theta) = e^{j\theta} \cdot j = j f(\theta)$

$$g'(\theta) = -\operatorname{sen} \theta + j \cos \theta = j^2 \operatorname{sen} \theta + j \cos \theta$$

$$= j(\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) = j \cdot g(\theta)$$

\Rightarrow Tienen la misma ecuación diferencial

\therefore Tienen que ser necesariamente iguales.

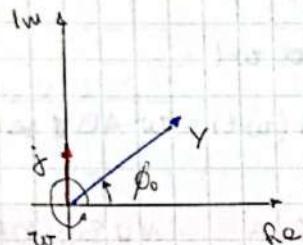
$$f(\theta) = g(\theta) \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$$

$$\bar{z} = x + jy = \|\bar{z}\| (\cos \theta + j \operatorname{sen} \theta) = \|\bar{z}\| e^{j\theta}$$

La forma exponencial sirve para multiplicar y dividir de forma más sencillas.

FASORES

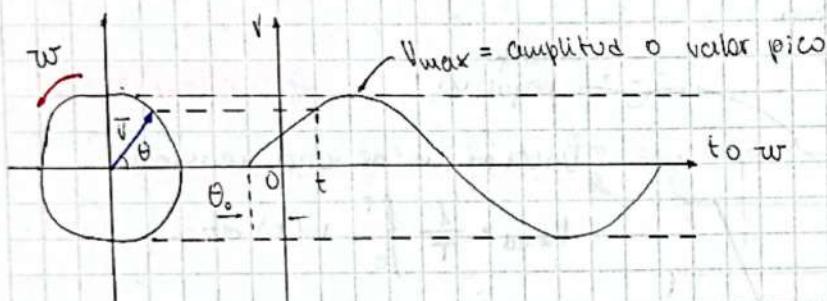
Vector el complejo, permanentemente fijo al origen y su argumento es función lineal del tiempo



y es un vector que está girando permanentemente en el plano complejo describiendo una circunferencia con w cte.

El argumento para cualquier momento sería
 $= wt + \phi_0$

El fasor siempre gira en sentido antihorario



El fasor V está girando $\theta = wt + \phi_0$

Tomando la proyección en el eje de ordenadas V lo llamamos una variable. $V(t) = V \operatorname{sen} \theta$

$$\begin{aligned} & y e^{j(wt + \phi_0)} \\ \bar{Y} = & \begin{cases} V \operatorname{wt} + \phi_0 \\ V [\cos(wt + \phi_0) + j \operatorname{sen}(wt + \phi_0)] \end{cases} \end{aligned}$$

$$y(t) = V_{\max} \operatorname{sen}(wt) + \phi_0$$

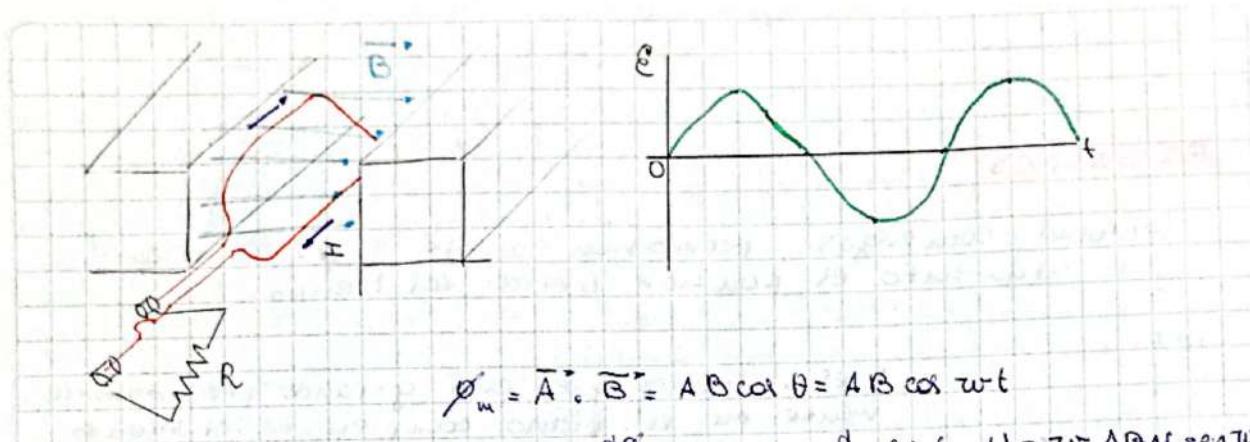
Intensidad de Corriente eléctrica

Representando la CA con funciones sen/cos porque cuando colocando una bobina en una región con B , el giro ne induce una FEM que varía en el tiempo en forma sinusoidal.

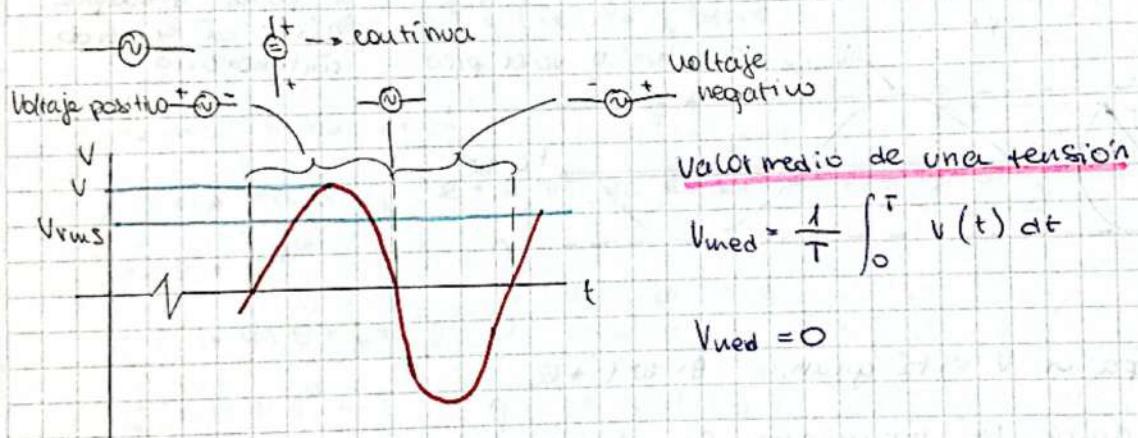
Cuando el valor de la E pasa por cero la corriente que circula por la resistencia es cero.

Cuando pasa por un máximo la corriente es máxima

Cuando invierte su valor la corriente invierte su sentido.



FUENTE DE TENSIÓN ELÉCTRICA SINUSOIDAL



Valor eficaz de una tensión

$$V_{ef} = V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

$$V_{ef} = V_{rms} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

(220V para Arg)

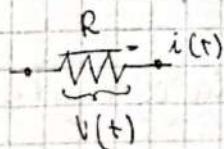
V_{rms} es = al valor de corriente continuo que disipa la misma cantidad de calor en una resistencia.

Trabajamos con 3 elementos

- Resistencia
- Capacidad
- Inductancia

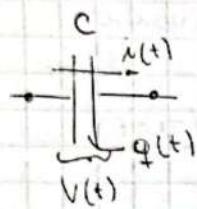
$$Z = R C \quad S = I^2 F$$

$$V(t) = V_{max} \sin(\omega t)$$



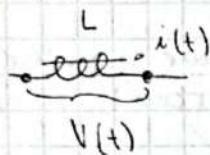
Cuando aplicamos una tensión alterna a los extremos en una resistencia

$$i(t) = \frac{V(t)}{R}$$



Cuando a los extremos del capacitor colocamos $V(t)$ se determina un estado de carga instantánea.

$$q(t) = CV(t) \quad \text{derivo} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

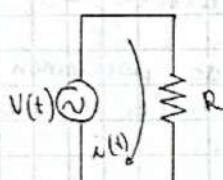


La tensión a los extremos de una inductancia es

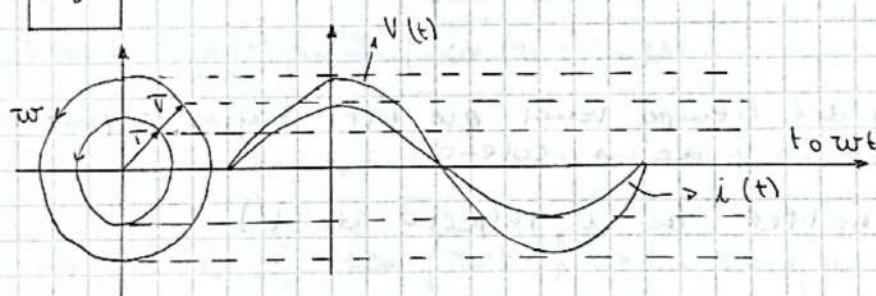
$$V(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{despejamos e integrando}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt + \text{cte.}$$

RESISTOR



$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t)$$



Como \bar{I} y \bar{V} varían con el mismo seno van a ir juntas permanentemente ni entre sí giran en sentido antihorario en el plano complejo.

En el plano del tiempo vemos que están en fase las 2 ondas senoidales.

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R} \quad i(t) = I_m \bar{I} = I_m \frac{\bar{I}}{R} \Rightarrow \bar{I} = \frac{V_m}{R} e^{j\omega t}$$

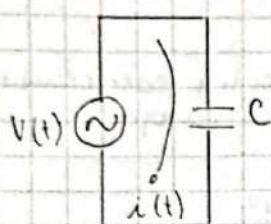
$$\bar{R} = R e^{j0} = R$$

↳ R es paralelo al eje de las abscisas

$\Rightarrow R$ es no real (no afecta la fase)

\Rightarrow complejo sin parte imaginaria

CAPACITOR



$$V(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow q(t) = C \cdot V(t) \quad \text{Aproximando}$$

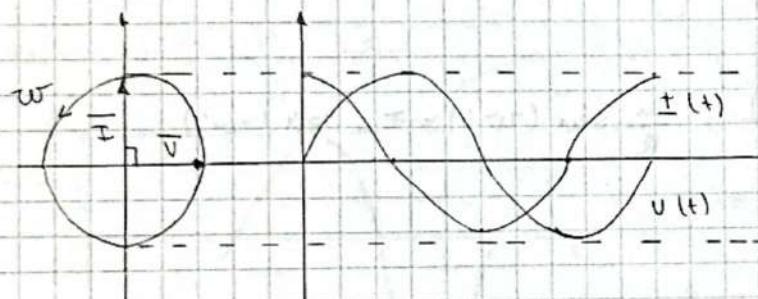
$$i(t) = C \frac{dv}{dt} \quad \text{para } V = V_m \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow i(t) = \omega C V_m \cos(\omega t)$$

Sabemos que $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ (para ver diferencia de fase)

$$\Rightarrow i(t) = \omega C V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

↳ Desfasaje con respecto a la tensión.



I se adelanta 90°.

Van girando permanentemente a la misma velocidad.

En el plano del tiempo vemos que $V(t)$ sigue la función seno y $i(t)$ la función coseno.

(Tratar de hablar de i respecto de V)

Reactancia capacitiva

$$I_m = \omega C V_m = \frac{V_m}{\frac{1}{\omega C}} \quad \text{Y en un capacitor, dividir entre la resistencia}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad [\Omega]$$

↳ limita el valor de la corriente

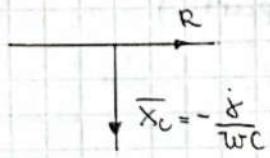
↳ produce el desfasaje entre I y V

↳ No complejo

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{X_C} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}} = V_m C e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

$$i(t) = V_m \omega C \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \bar{I}$$

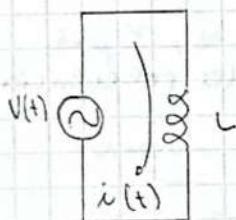
$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \Rightarrow \bar{x}_c = -\frac{j}{wc}$$



$\frac{\pi}{2}$ entre el valor de R y x_c

$$\bar{F} = \frac{\bar{V}}{\bar{x}_c} = \frac{V_m}{\frac{1}{wc}} e^{j(wt + \frac{\pi}{2})} = I_m e^{j(wt + \frac{\pi}{2})}$$

INDUCTANCIA



Por Faraday $V(t) = L \frac{di}{dt}$ despejamos

$$\text{e integrando } i(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt + \text{cte}$$

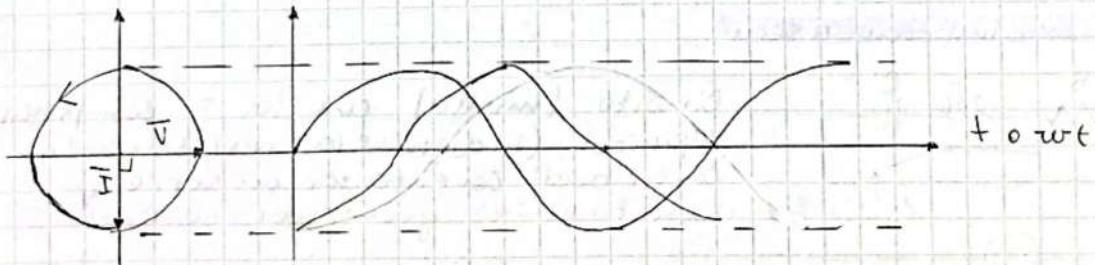
$$\text{con } V(t) = V_m \operatorname{sen}(wt)$$

$$\text{Resulta } i(t) = \frac{V_m}{wl} (-\operatorname{coi}(wt)) + \text{cte.}$$

$$i(t) = \frac{V_m}{wl} [-\operatorname{coi}(wt)] \quad \text{como } -\operatorname{coi}(wt) = \operatorname{sen}\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_m}{wl} \operatorname{sen}\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \operatorname{sen}\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

i a traeer respecto a la tensión

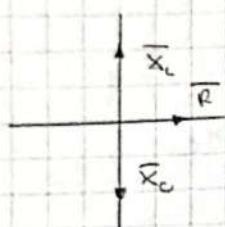


Reactancia inductiva

la corriente está limitada en una inductancia

$$\boxed{\bar{x}_l \approx wl e^{j\frac{\pi}{2}}} \quad [n] \Rightarrow \bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{x}_l} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{wl e^{j\frac{\pi}{2}}} = I_m e^{j(wt - \frac{\pi}{2})}$$

$$i(t) = I_m \bar{I} \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad \text{con} \quad I_m = \frac{V_m}{Z}$$

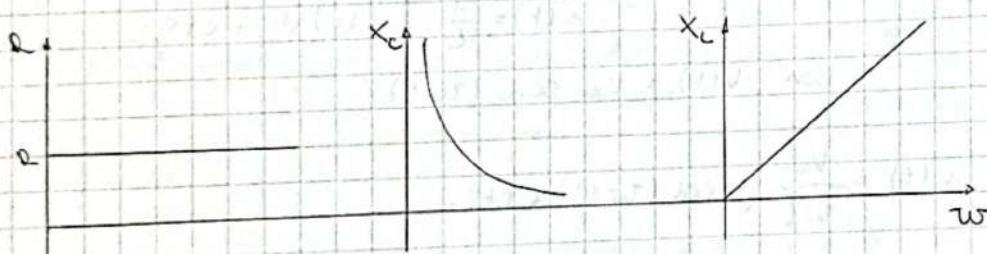


Las 2 reactancias están en el mismo eje.
(se pueden tratar aparte)

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} e^{j(\omega t - \pi/2)} = I_m e^{j(\omega t - \pi/2)}$$

La diferencia más notable entre la resistencia y las reactancias es que la primera no es función de la frecuencia.

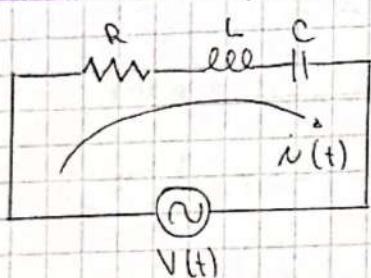
$X_L \propto \omega \quad X_C \propto \frac{1}{\omega} \rightarrow$ son sensibles a la frecuencia



En CA ω puede variar con cierto parámetro.
(por ejemplo las tensiones cte.)

CIRCUITO RLC

en serie, impedancia serie



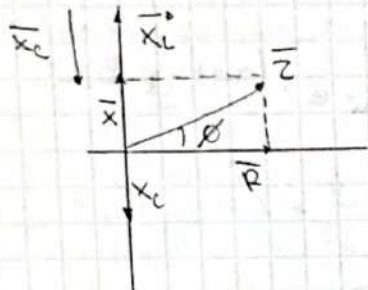
Circuito (malla) con los 3 componentes definidos (inductancia, resistencia y capacidad) conectados en serie y conectado al generador de CA.

El generador entrega un par de tensión, limitada por los 3 elementos. \Rightarrow define un par de E que circula común $i(t)$ produce una caída de tensión en cada elemento.

\Rightarrow 5 fórmulas (buscanas relacionarlos)

Suponiendo $X_L > X_C$

$$x = |\bar{X}_L - \bar{X}_C| > 0 \quad \bar{z} = \bar{X}_L + \bar{X}_C = j(wL - \frac{1}{wC})$$



Con \bar{R} y \bar{z} formando un N^o complejo \bar{z}
l> N° real \rightarrow N° imaginario

Impedancia

$$\bar{z} = R + j(wL - \frac{1}{wC})$$

$$= r \quad ||\bar{z}|| = \sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}$$

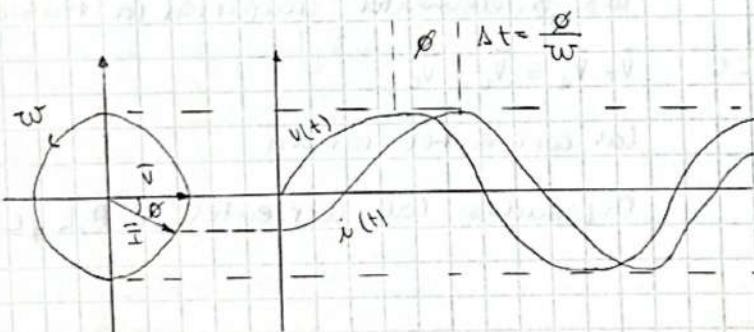
$$\text{Arg } \bar{z} = \phi = \arctan \frac{(wL - \frac{1}{wC})}{R}$$

Formar exponenteial de la impedancia $\bar{z} = ||\bar{z}|| e^{j\phi}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{z}} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{||\bar{z}|| e^{j\phi}} = \frac{V_m}{||\bar{z}||} e^{j(\omega t - \phi)} = I_m e^{j(\omega t - \phi)}$$

l> atraso
respecto de
la tensión

El atraso es de $\phi \rightarrow -\pi/2 < \phi < \pi/2$



El fasor \bar{z} va a estar
siempre retrasado ϕ

$$||\bar{V}|| \neq |I\bar{z}|$$

Diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Tensión en R

$$\bar{V}_R = \bar{I}R = I_m e^{j(\omega t - \phi)} R = V_{RM} e^{j(\omega t - \phi)}$$

el desfase de la corriente es el mismo para todo
los elementos.

Porque en un circuito en serie la corriente es común

Tensión en L \rightarrow Adelantada 90° respecto de V_R

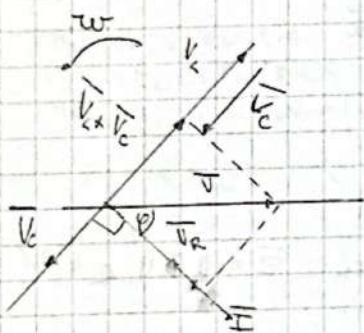
$$\bar{V}_L = \bar{I}x_L = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} w L e^{j\frac{\pi}{2}} = V_{lm} e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$$

luego I atrasa $+ \frac{\pi}{2}$

Tensión en C

$$\bar{V}_C = \bar{I}x_C = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} \frac{1}{wC} e^{-j\frac{\pi}{2}} = V_{cm} e^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}$$

$$\boxed{\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C}$$

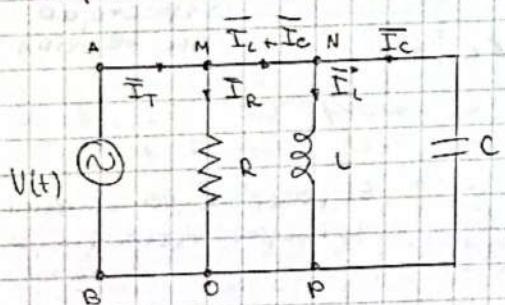


\bar{V}_L está en fase con \bar{I}

Componente $\bar{V}_L + \bar{V}_C$

Este diagrama fasorial va a girar permanentemente con ω .

En paralelo. Admitancia paralela



los 3 elementos comparten la tensión

$$\bar{V} = \bar{V}_R = \bar{V}_L = \bar{V}_C$$

las corrientes varían

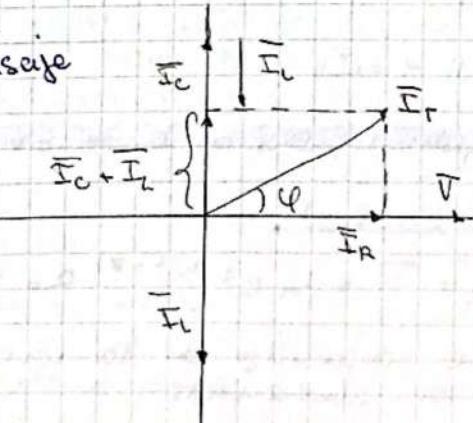
Defasadas las corrientes en R, L y C

$$\boxed{\bar{I}_T = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C}$$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = I_{Rm} e^{j\omega t} \quad \text{sin defasaje}$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{x_L} = I_{Lm} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{x_C} = I_{Cm} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$



Al ser conexión paralelo la corriente que adelanta de respecto de la tensión.

Definimos la admitancia como lo inverso a la impedancia

$$\bar{Y} \doteq \bar{Z}^{-1} \Rightarrow \bar{I} = \bar{V} \bar{Y}$$

$$\bar{I}_r = \frac{\bar{V}}{R} + \frac{\bar{V}}{X_L} + \frac{\bar{V}}{X_C} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-\frac{j}{\omega C}}$$

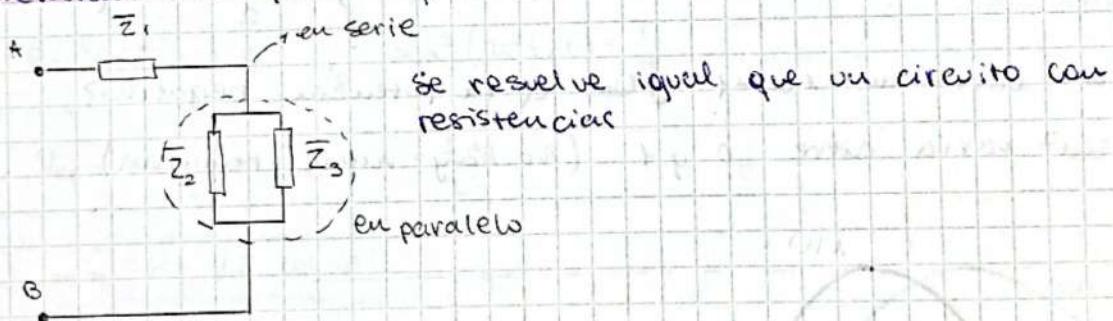
Multiplico y divido por j .

(N) $\bar{Y} = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) [A^{-1}]$

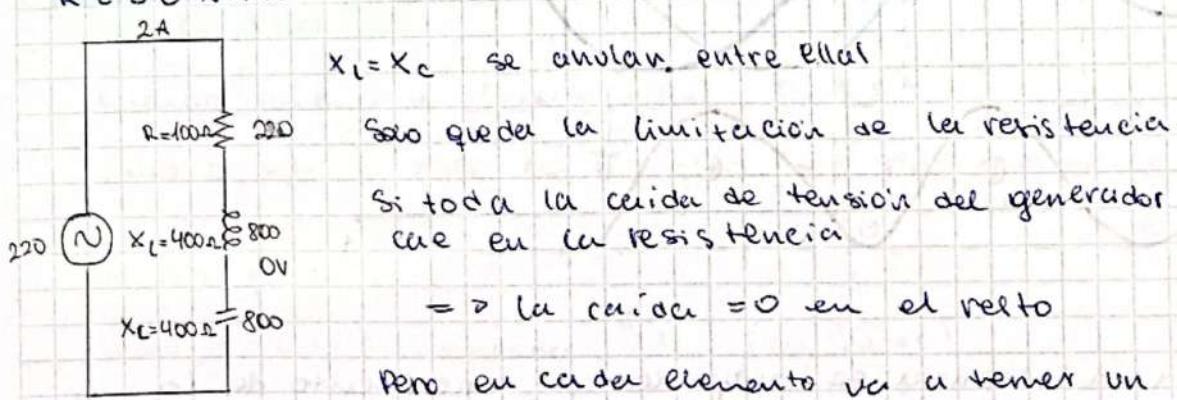
Si $\|\bar{X}_L\| = \|\bar{X}_C\| \Rightarrow$ las I son iguales y de sentido opuesto.

Resonancia

Generalización para cualquier circuito



RESONANCIA



Los valores de las resistencias en los reactancias suben mucho pero se anulan entre sí.

POTENCIA EN CA

4 tipos de potencia:

- Potencia instantánea
- Potencia media o "activa"
- Potencia reactiva
- Potencia "aparente"

Potencia instantánea \rightarrow función del tiempo.

$$p(t) = v(t) i(t) = V_m I_m \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{desfasada}} \sin(\omega t - \varphi)$$

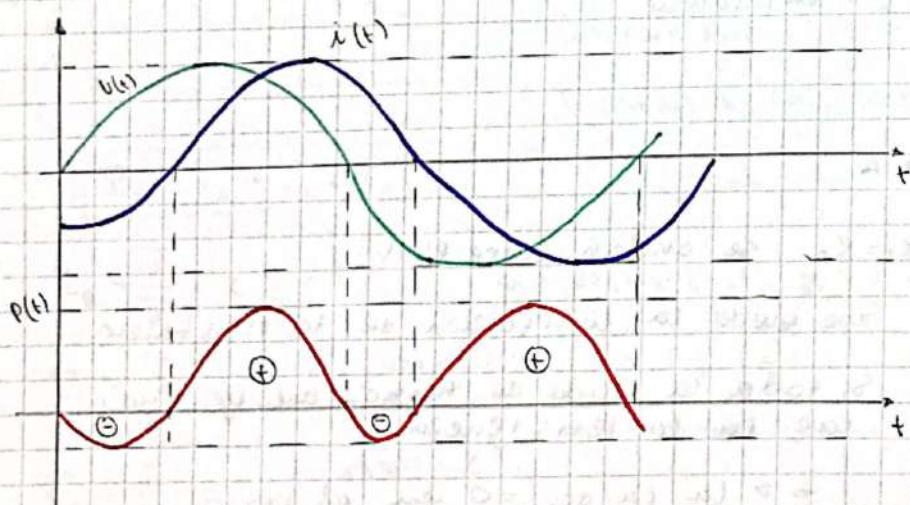
$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t) \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\omega t) \quad \text{por trigonometría}$$

Desarrollamiento

$$p(t) = V_m I_m \cos \varphi \sin^2(\omega t) - \frac{V_m I_m}{2} \sin \varphi \sin(2\omega t)$$

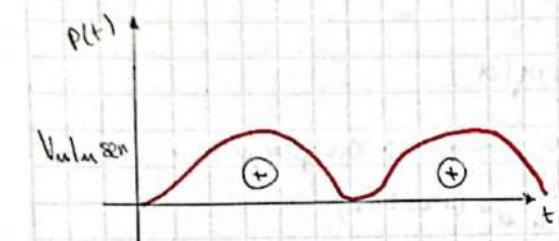
sen varía de 1 a -1 ¿Qué es la potencia negativa?

sen² varía entre 0 y 1 (No hay valores negativos)



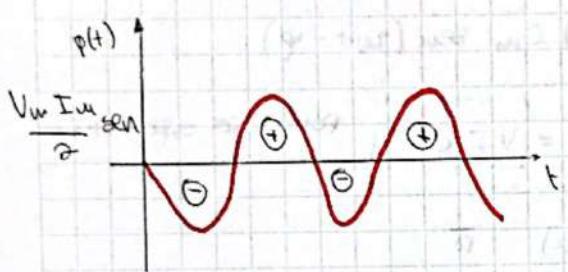
La inductancia se carga con un incremento de la corriente y se descarga cuando disminuye.

El capacitor se carga cuando la tensión a los extremos aumenta y se descarga cuando disminuye.



\oplus y \ominus Energía.

Cuando se carga absorbe energía del generador al almacenarla, cuando se descarga lo devuelve.



En la resistencia la energía se va a consumir (en calor).

La energía \ominus va y viene entre el generador y la carga y no se aprovecha.

\Rightarrow se pierde (el nula)

Válor medio de la potencia instantánea

$$P_m = P \doteq \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} P(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m I_m \cos \varphi \sin^2(\omega t) dt - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{\frac{V_m I_m}{2} \sin \varphi \sin(2\omega t)}_{\text{sen } \varphi \sin(2\omega t) dt} dt$$

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos \varphi \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(\omega t) dt = \frac{T}{4}$$

$$V_{ef} = V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad I_{ef} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P = VI \cos \varphi$$

CASOS PARTICULARES

Resistor puro

$$\text{Potencia consumida (efecto Joule)} \quad P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Como I está en fase con V $\varphi=0 \Rightarrow$ Potencia efectiva total

Capacitor puro

Como I está adelantada $\pi/2$ ($\cos \pi/2 = 0$)

No hay potencia consumida \rightarrow potencia que va y viene.

Inductor puro

\bar{I} está atrasada $\pi/2$ (col $\pi/2 = 0$)

\Rightarrow No hay disipación de energía.

Potencia aparente compleja / potencia reactiva compleja

$$\bar{V}\bar{I} = V_m e^{j\omega t} I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = V_m I_m e^{j(2\omega t - \varphi)}$$

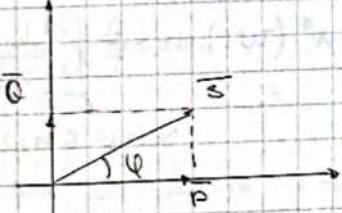
$$P(t) = \text{Re } \bar{V} \cdot \text{Im } \bar{I} = V_m \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j(\omega t - \varphi)} = \boxed{VI e^{j\varphi}} \quad \text{potencia aparente}$$

$$\Rightarrow \text{Re } \bar{S} = VI \cos \varphi \quad (\text{p. activa}) \quad \boxed{P}$$

$$\text{Im } \bar{S} = VI \sin \varphi \quad (\text{p. reactiva}) \quad \boxed{Q}$$

$\varphi > 0$ Triángulo de potencias



Para los circuitos de CA a la potencia activa (\bar{P})
la medida en [W]

$$\bar{S} = [\text{V.A}] \quad \bar{Q} = [\text{V.A.R}] \quad \rightarrow \text{reactivos}$$

Hay que tratar que $\cos \varphi \rightarrow 1$ ($\varphi \rightarrow 0$)

para circuito RLC

$$P = I^2 R \quad Q = I^2 X = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad S = I^2 Z$$

$$\therefore \bar{S} = I^2 \bar{Z} = I^2 \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

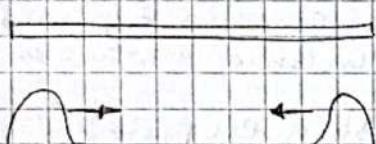
OPTICA ONDULATORIA

- Interferencia
- Difracción
- Polarización

INTERFERENCIA

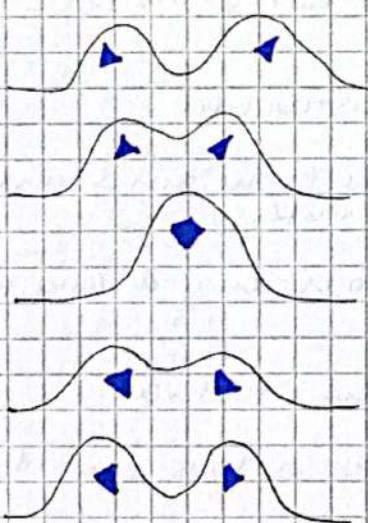
Fenómeno de superposición de ondas

Supongamos que tenemos una larga cuerda y de ambos extremos le aplicamos un movimiento brusco hacia arriba y hacia abajo.



Se van a desplazar hacia el lado libre de la cuerda a una velocidad constante porque la tensión es la misma

¿Qué ocurre cuando se encuentran en algún punto?



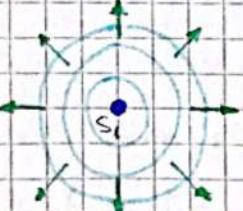
Lo va a aparecer el principio de Superposición.

Interferencia

La amplitud de la perturbación aumenta al doble de lo que tenía cada cuerda.

Luego siguen propagando sin ningún freno.

Interferencia en 2 ó 3 dimensiones



La fuente S_1 irradia ondas con la misma intensidad en todas las direcciones del espacio

Si lo interceptan con un planos

Se desplazan con la misma velocidad porque el medio es homogéneo.

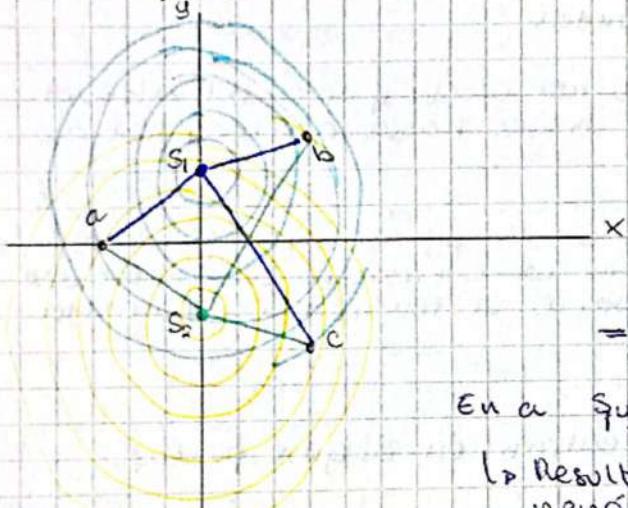
los frentes se van expandiendo circularmente alrededor de s_1 , porque la velocidad es la misma.

Sucesión continua de perturbaciones que se producen con el mismo desarrollo del tiempo.

↳ los picos de las perturbaciones están todos a la misma distancia → coincide con λ de la perturbación.

λ = longitud de onda → relacionado con $\frac{\text{frecuencia}}{\text{velocidad de propagación}}$

Caso para 2 perturbaciones complementarias



las circunferencias son concéntricas (del mismo s)

s_1 y s_2 se van a dar al mismo tiempo.

los picos se van separando a la misma distancia

⇒ s_1 y s_2 están en fase.

En a s_1 y s_2 pasan por un pico.

↳ Resulta de la suma de amplitud fenómeno

⇒ **Interferencia constructiva**

(a se encuentra a la misma distancia de ambas fuentes).

En b (+ cerca de s_1), distancia proporcional a longitud de onda.

↳ También aparece Interferencia constructiva

En c s_1 pasa por un pico pero s_2 por un valle. (mitad de distancia entre los 2 picos)

⇒ No hay nada en el punto.

Interferencia destructiva

Constructiva

$$\alpha_1 = \pi/2$$

$$\alpha_2 = 0\pi$$

$$r_2 - r_1 = 2\lambda \quad \text{condición} \quad r_2 - r_1 = m\lambda$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

NOTA

Restruktiva

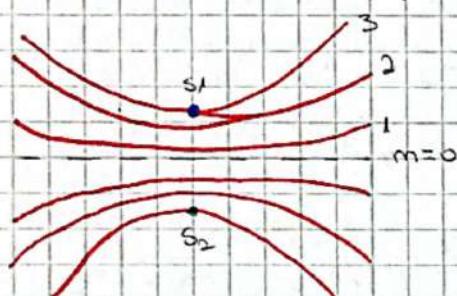
$$r_1 - r_2 = -250\lambda$$

condición

$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

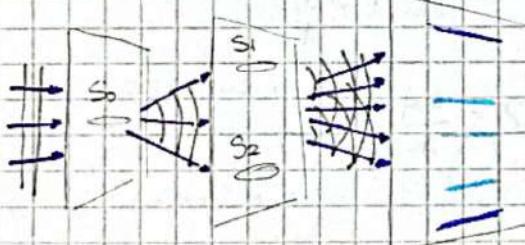
$$(m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Podemos hacer las curvas donde S_1 y S_2 interfieren constructivamente para diferentes valores de m



Curvas antinodosas:

toda los puntos donde las ondas interfieren constructivamente

Experimento de Young

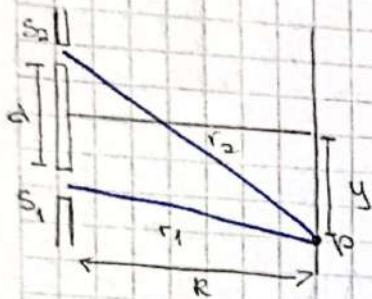
Hacemos pasar por una ranura muy angosta una luz monocromática, se propagan las ondas como secundarias en sincronismo (necesitamos que la fuente de luz oscile todo en una misma fase) hasta llegar a una placa opaca con 2 ranuras muy angostas separadas.

Las emisiones de S_1 y S_2 están en fase.

Se propagan independientemente una de otras y en algún punto se intersectan.

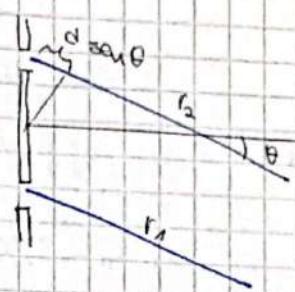
Cuando llegan a una pantalla lejana donde observamos el fenómeno de interferencia donde hay interferencia constructiva aparecen líneas (luminosidad, relámpagos) con los mismos de la placa opaca. (oscuro donde el destructivo)

Analicizamos para obtener la longitud de onda.



r_2 y r_1 casi paralelos

Definimos un solo θ



No preguntarnos que tipo de interferencia hay en P.

$d \operatorname{sen} \theta$ es la única diferencia entre los 2 caminos

Si es 0 \Rightarrow constructiva

$$\text{Si es } d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \Rightarrow \text{constructiva}$$

Si es $d \operatorname{sen} \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ \Rightarrow destructiva

constructiva

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$$

destructiva

$$d \operatorname{sen} \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

No pijamos en y (distancia del centro a P)

$$y_m = R \operatorname{tg} \theta_m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$y_m = R \operatorname{sen} \theta_m \quad (\operatorname{tg} \theta \approx \operatorname{sen} \theta) \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{R}$$

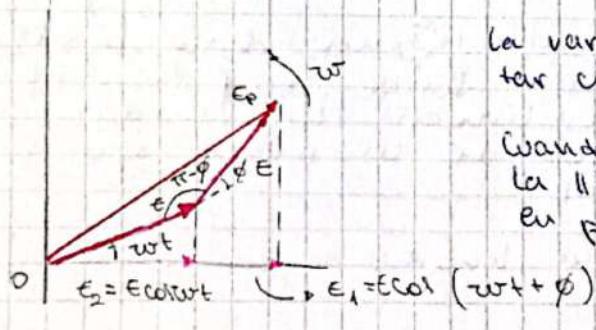
$$y_m = R \frac{m\lambda}{d} \quad \text{del pejamento} \quad \lambda = \frac{d y_m}{R m}$$

Intensidad de los patrones de interferencia

La E_x son ondas electromagnéticas \Rightarrow tienen \vec{B} y \vec{E}

Asociadas q se
varían permanentemente

Considerando solo \vec{E} (varía en forma sinusoidal)



La variación de \vec{E} la podemos representar con un fasor.

Cuando la interferencia es constructiva, las $||\vec{E}||$ de las 2 fuentes, están en fase ($\phi = 0$)

\Rightarrow intensidad máxima

Plano complejo

NOTA

Cuando están desfasados 180° , como los 2 vectores son iguales, la suma va a dar 0.

\Rightarrow Interferencia destructiva

En un punto intermedio (desfase ϕ)

El fasor E_p va a ser el valor de campo eléctrico que hay en P.

$$E_p = 2E \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \text{ como } E_1 = E \cos(\omega t + \phi) \text{ y } E_2 = E \cos \omega t$$

y por el teorema del coseno

$$\begin{aligned} E_p^2 &= E^2 + E^2 - 2E^2 \cos(\pi - \phi) = E^2 + E^2 + 2E^2 \cos \phi \\ &= E^2 (2 + 2 \cos \phi) = 2E^2 \underbrace{(1 + \cos \phi)}_{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

$$E_p^2 = 4E^2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \Rightarrow E_p = 2E \left| \cos \frac{\phi}{2} \right| \quad 1$$

\Rightarrow (máximo para $\phi=0$)

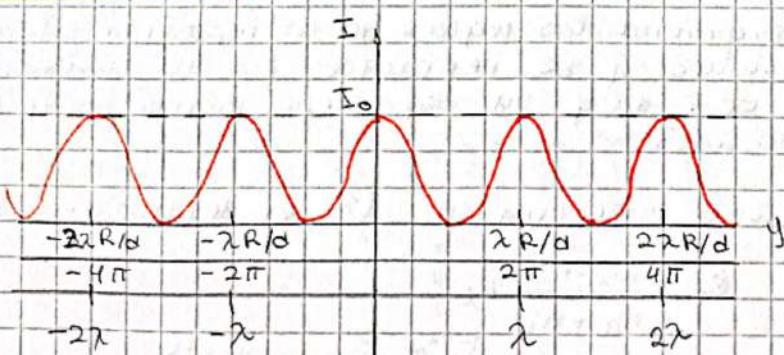
I = Intensidad de haz luminoso.

$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_p^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E_p^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 \quad (I \propto E_p^2)$$

Reemplazando con ①

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_p^2 = 2 \epsilon_0 c E^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad \phi=0 \quad \Rightarrow \text{intensidad máxima} \quad I_0 = 2 \epsilon_0 c E^2 \quad \text{prueba}$$

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad 2$$



Me da las franjas iluminadas y la distancia entre ellas

Los picos coinciden con las franjas iluminadas y los valles con las oscuras.

Diferencia de fase y diferencia de trayectoria

$\phi \rightarrow$ desfase entre los 2 pasos de E.

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Resolviendo la fase $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$

\rightarrow N° de onda

3

Diferencia de fase relacionada con la diferencia de trayectoria

Si el espacio NO es vacío $\Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ y $k = n k_0$

Si P está lejos $r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$ por ③ $\phi = k(r_2 - r_1)$

$$\phi = k d \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad \text{Reemplazando en ②}$$

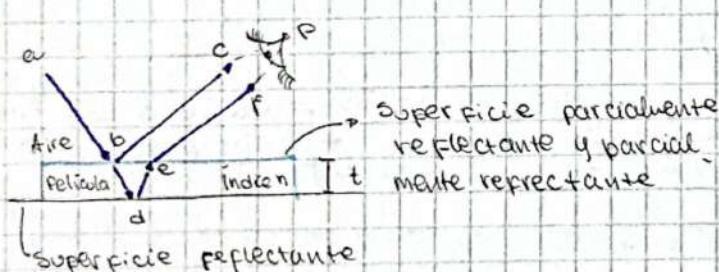
$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{1}{2} k d \operatorname{sen} \theta \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \right)$$

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{k d y}{2 R} \right) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d y}{\lambda R} \right)$$

Todas las franjas se encuentran a la misma distancia unas de otras.

Intensidad de la franja luminosa ubicada a una distancia y del eje del aparato del experimento de Young

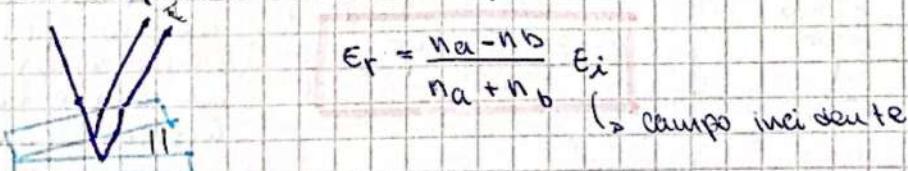
Interferencia de películas delgadas



Parte de la WZ a se va a reflejar siguiendo las leyes de la reflexión y otra parte se va a refractar hacia el interior de la película, va a reflejarse en el fondo

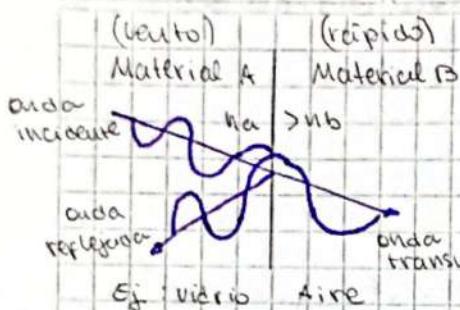
y va a salir siguiendo las reglas de la reflexión. Wejo cambia de medio y se refracta en la misma dirección que b. Hay un desfase entre b y e2 porque e2 recorrió más.

\Rightarrow Se produce una interferencia (si es destructiva se anula)



Mientras mayor sea la diferencia entre los índices, mayor es la intensidad de campo reflejado

NOTA

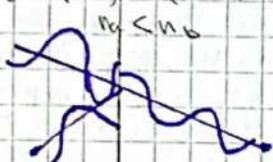


Cuando se transmite hay una pérdida de amplitud porque parte se refleja.

Aumenta la longitud de onda porque aumenta la velocidad y sigue en fase.

Si $n_a = n_b$ no cambia

(rápido) (lento)



La onda transmitida hacia el rápido está que da alternada (no pasa toda la onda, parte el reflejada) pero el transmitida en fase.

La onda reflejada cambia de fase respecto a la onda incidente.

t = espesor de la película

Si no hay desplazamiento de fase en la reflexión: (1er caso)

i. constructiva $2t = m\lambda \quad (m=1,2,3,\dots)$

v. destructiva $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m=0,1,2,\dots)$

Si hay desplazamiento de fase de medio ciclo en la reflexión:

i. constructiva $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m=0,1,2,\dots)$

v. destructiva $2t = m\lambda \quad (m=1,2,3,\dots)$

Estos fenómenos se producen sólo para películas delgadas (las ondas de ω_2 son rígidas).

Si la película es gruesa ya no se produce el fenómeno de interferencia.

Anillo de Newton



Se aprovecha este fenómeno para ver la periodicidad de la leche

Se observa que el espiral porque los planetas son aproximadamente circulares

NOTA

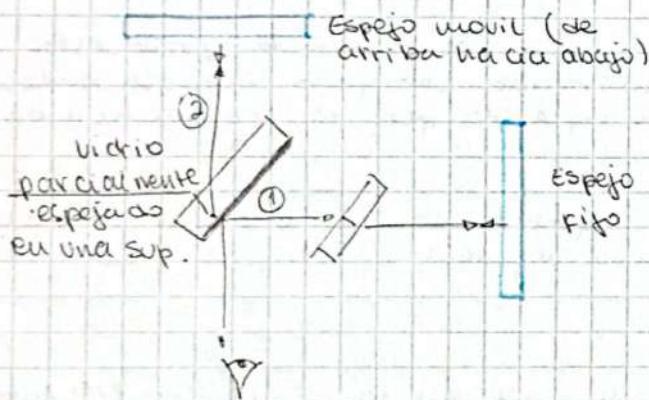


Se ve donde hay muchas irregularidades del pezón pulix.

Capas reflectantes y no reflectantes

Las películas no reflectantes se construyen cerca de $t = \frac{1}{4} \lambda$ con un n medio entre vidrio y aire.

Interferómetro de Michelson



La luz que llega a la sup. parcialmente espejada va a reflejarse aprox. 50% y transmitirse 50%.

Cuando iluminais desde A con una luz monocromática es refractada por el vidrio y reflejada en O no por el espejo.

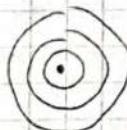
Desde el espejo va a salir un haz de luz que lo atraviesa y un haz de luz que se vuelve y se refracta hasta el espejo móvil, donde choca y vuelve.

Otra parte se va a reflejar hacia donde vios el haz original (A) y otro que puede ver el observador.

El rayo 1 va a seguir su camino hasta el espejo fijo rebota reflejándose nuevamente en el punto P, se une con la luz que viene desde el espejo móvil, van a interferir los 2 rayos entre si y el ojo va a observar la interferencia (constructiva o destructiva) según λ de 1 y 2.

se coloca otra placa de vidrio para que tenga 1 lo mismo de 2

El observador ve:

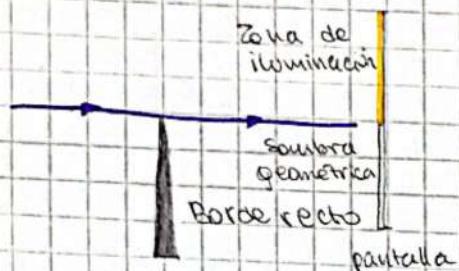


Si es constructiva.

Sirve para medir longitudo de onda de rayos luminosos

DIFRACCIÓN

¿Qué sombrear un borde recto?



Siguiendo una trayectoria rectilínea no ocurre que queda iluminado hasta un punto si y hasta otro no.

En el intermedio aparece una red de franjas como en una hoja de Gillette

No hay una transición directa de la sombra a la iluminación, hay una serie de franjas, en donde no se puede apreciar el límite exacto.

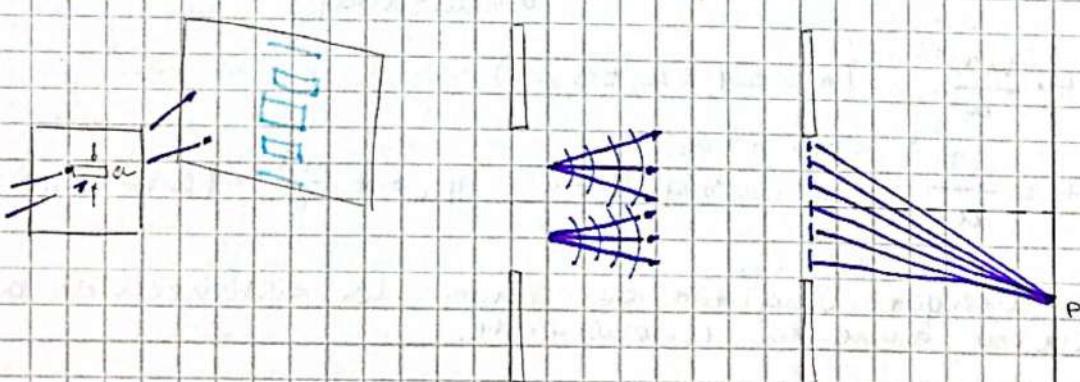


Bandas de difracción

Difracción de campo cercano o difracción de Fresnel
de campo lejano o difracción de Fraunhofer

Interferencia: pequeño n.º de fuentes

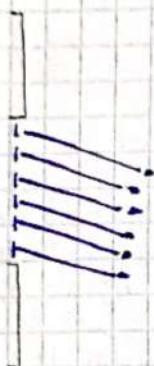
Difracción: distribución continua de fuentes



Por la ranura salen una gran cantidad de hazos de ondas (distribución continua).

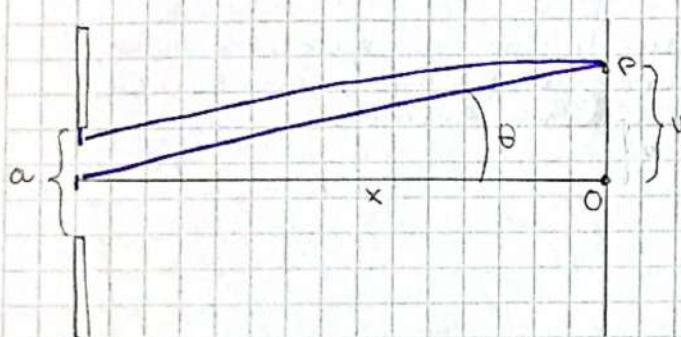
Cada rayo va a tener un ángulo respecto del eje, diferente levemente entre cada uno (si P está cerca) cada rayo de Wz tiene una perturbación.

Si la pantalla está lejos consideramos a los rayos paralelos:



Si coloco una lente convergente transformo la difracción de Fresnel en una de Fraunhofer

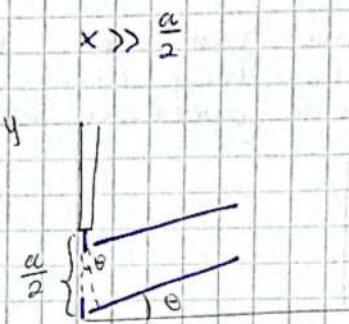
Posición de los franjas oscuras



la condición para la banda oscura

$$y_m = x \frac{m\lambda}{a}$$

$$\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\lambda}{a}$$



$$\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta \rightarrow \text{diferencia de trayectoria}$$
$$\left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta \right) \quad \operatorname{sen} \theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

para $\theta \ll 1$ rad)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{m\lambda}{a} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

$$\theta = \frac{m\lambda}{a} \quad \text{por consiguiente} \quad y_m = x \frac{m\lambda}{a} \quad (\text{para } y_m \ll x)$$

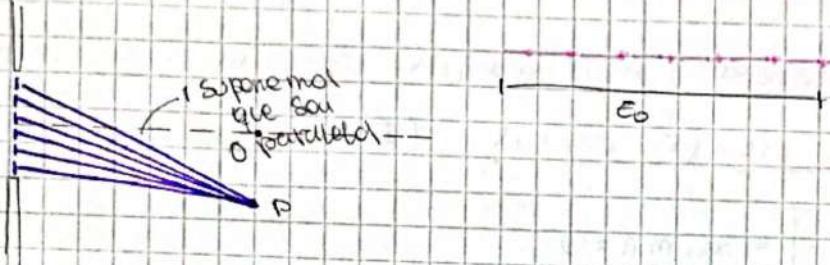
Generalizando para diferentes valores de m (Nº de franja anulada)

\Rightarrow a mayor longitud de onda la distancia de bandas oscuras aumenta linealmente.

Es función de la distancia.

Depende del ancho de la ventana.

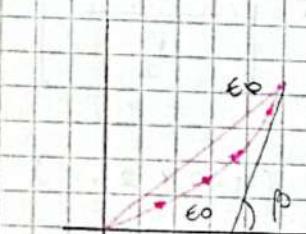
Intensidad en el patrón de una sola ranura



Cuando calculamos que pasa en el punto central, tenemos todos los brillos van a llegar a la misma distancia del mismo. En O se produce un punto brillante, si consideramos los fases del campo eléctrico de los puntos brillantes, todos están en fase. \Rightarrow El campo se superponen y se suman.

Todos los fases son paralelos entre sí y dan un valor máximo para el punto O.

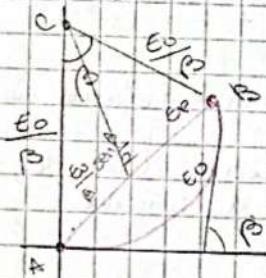
Si nos acercamos al punto P, la distancia varía, las fases varían.



$E_p < E_0$ Si en P hay interferencia constructiva el punto tendrá un brillo menor que en el centro

En P es la suma de todos los desfases (diferencia entre el primero y el último)

Para cálculo de líneas E_0 es una curva.



Conociendo la longitud de E_0 y de β podemos trazar el origen del trazo curvo E_p (punto C).

$$\text{radio} = \frac{E_0}{\beta} \quad E_p = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}}$$

Conociendo E_p podemos calcular la intensidad.

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) = k (r_2 - r_1)$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

NOTA

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \left[\frac{\pi a (\operatorname{sen} \theta)}{\lambda} \right]}{\frac{\pi a (\operatorname{sen} \theta)}{\lambda}} \right]^2$$

Intensidad de la franja en el punto considerado.

Mínimo de intensidad (utilizando las ecuaciones de interferencia y difracción)

Posición de las franjas oscuras ($I = 0$)

$$\sin \left[\frac{a \pi (\operatorname{sen} \theta)}{\lambda} \right] = \sin m \pi = 0$$

$$\frac{a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} = m \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{m \lambda}{a} \quad \text{para } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

→ Mientras mayor sea la ventana, menor va a ser θ , mientras más pequeña sea la ranura, más se van a apretujar las franjas entre sí.

Maximal de intensidad → Numerador = 1

Posición de franjas iluminadas

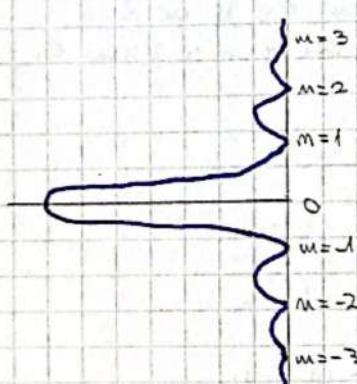
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen} \theta$$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

$$\beta = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \dots \quad \beta \approx (2m+1)\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

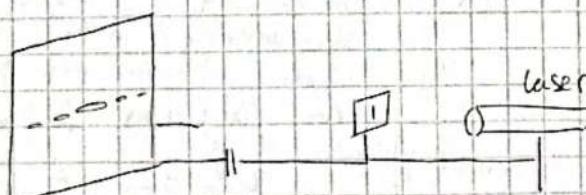
$$I_{\max} \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$

A medida que aumenta β (θ) la amplitud va a ir decreciendo

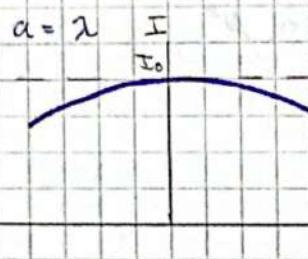


Para el centro tiene una intensidad máxima

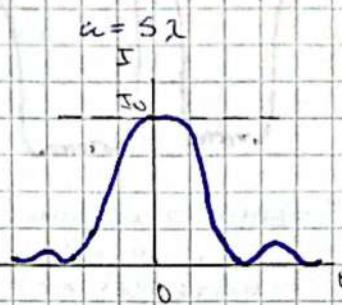
Banda central fuertemente iluminada, el resto cada vez más débilmente.



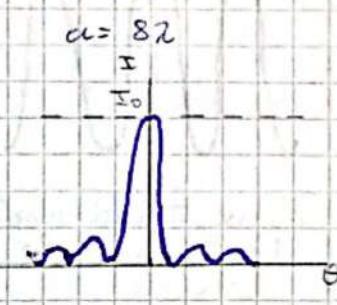
NOTA

Ancho de la ventana

No se observa el fenómeno



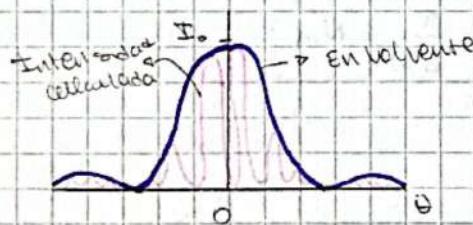
Se van concentrando cada vez más las franjas iluminadas

Ranuras múltiples

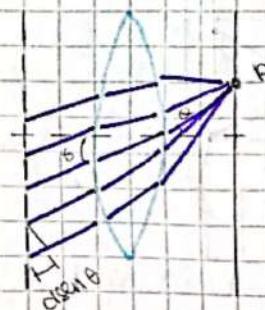
Tendremos otra combinación de las curvas de difracción y la de interferencia de varias ranuras.

$$\left. \begin{aligned} I &= I_0 \left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 \\ I &= I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \right\} I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \quad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

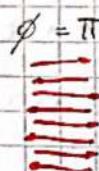


la WRMU de iluminación final que va perdiendo su iluminación hasta llegar a un mínimo y aparecen en el lado contrario

Varias ranurasDiagrama de fases:

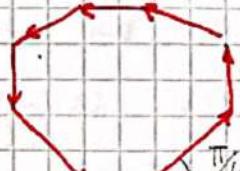
se van a presentar los máximos de intensidad para cuando la diferencia de fase $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$ entre 0 y 2π :

Máximo $\phi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2$



$$\phi = \pi$$

$$\phi = \pi/4$$

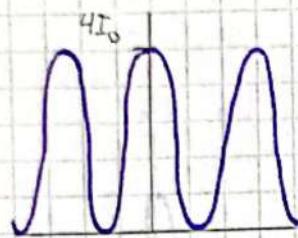


$$\phi = \pi/2$$



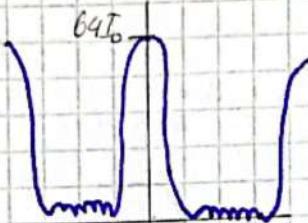
NOTA

$N = 2$ ranuras



Entre 2 máximos
1 solo mínimo

$N = 8$ ranuras

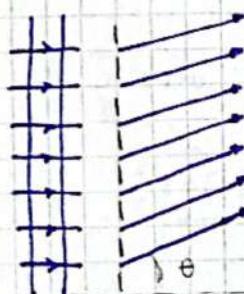


Se incrementa la intensidad máxima respecto a $N=2$.

$$\propto N^2$$

Rejilla de difracción

→ Gran cantidad de ranuras se parecen a la misma distancia.



$$d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$$

Se suelen utilizar para medir espectros

Espectrógrafo de rejilla: Resolución

en estructuras cristalinas

Analizar estrellas de galaxias muy distantes

$$\phi = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = Nm$$

$$d\phi = \frac{2\pi d(\sin \theta) d\theta}{\lambda}$$

$$d\sin \theta = m \lambda$$

$$d\cos \theta d\theta = m d\lambda$$

$$\frac{\lambda}{N} = m d\lambda$$

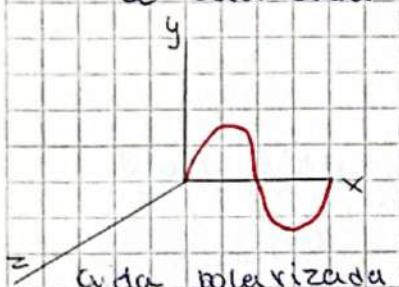
$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = m N$$

se les hace pasar por un elpejo concavo para que salgan paralelas.
Al final se observa el espectro de difracción en un detector electrónico

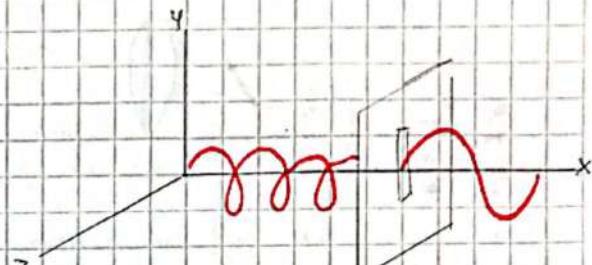
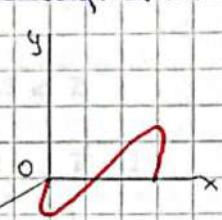
NOTA

POLARIZACIÓN

→ Relación con la dirección en la que vibran/varian los percutímetros de una onda electromagnética



Onda polarizada en la dirección y
(integramente en el plano x-y)



Onda que tiene diferentes direcciones en x-y-z

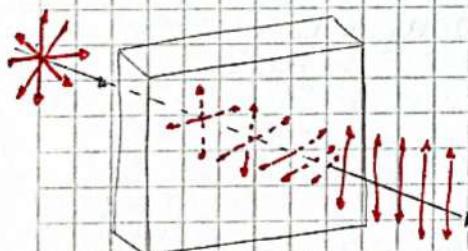
Cuando la hacen pasar por una ranura, pasa solamente la vibración en el sentido de la ranura.

$$\vec{E}^{\circ}(x, t) = \hat{j} E_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

$$\vec{B}^{\circ}(x, t) = \hat{k} B_{\max} \cos(kx - \omega t)$$

Onda polarizada verticalmente
(se suele trabajar con \vec{E}°)

Filtros polarizadores



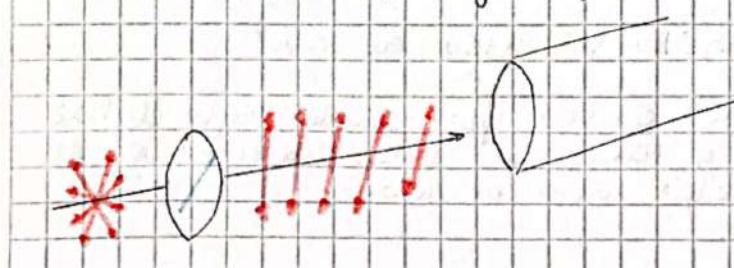
Material especial

Cuando la luz llega al filtro y lo atraviesa el filtro absorbe el movimiento horizontal (la vibración horizontal de \vec{E}°)

→ Los transforma en otro tipo de energía (muy pequeña, calor)

Queda solo la orientación vertical (si está inclinado solo pasa el componente vertical)

Debe tener cierto espesor porque lo absorbe perpendicularly.
No son perfectos, algo logran pasar.

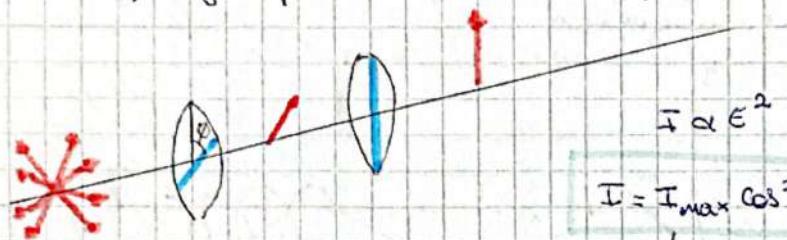


El eje de polarización está ubicado en un soporte giratorio que al girarlo podemos medir el ángulo del eje. Lo que causa en diferentes ángulos medios la variación de intensidad.

NOTA

Observad si se mantiene unívoca o si hay en cíngulo donde hay un pico (la luz parcialmente polarizada).

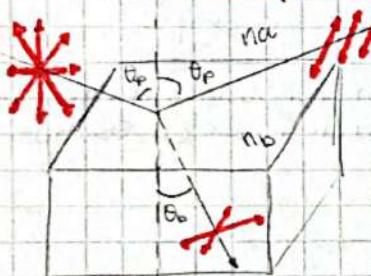
Si hacemos incidir la luz por un primer filtro polarizador debriado un cíngulo ϕ , si la hacemos incidir con otro filtro con eje vertical, dejando pasar solo la componente vertical



$$I = I_{\max} \cos^2 \phi \quad \text{ley de Malus}$$

$$\rightarrow (\phi = 0)$$

Polarización por reflexión



Una superficie reflectante tiene una reflexión parcial y una refracción parcial.

La luz no polarizada cuando incide en la superficie la orientación del \vec{E} que viene paralela la sufr. es reflejada totalmente, lo que no es refractada.

Ángulo reflexión = cíngulo incidente

para la polarización total

$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a} \quad n_a \sin \theta_p = n_b \sin \theta_b \quad \theta_b = 90^\circ - \theta_p$$

$$\text{ejemplo planar } n_a \sin \theta_p = n_b \sin (90^\circ - \theta_p) = n_b \cos \theta_p$$

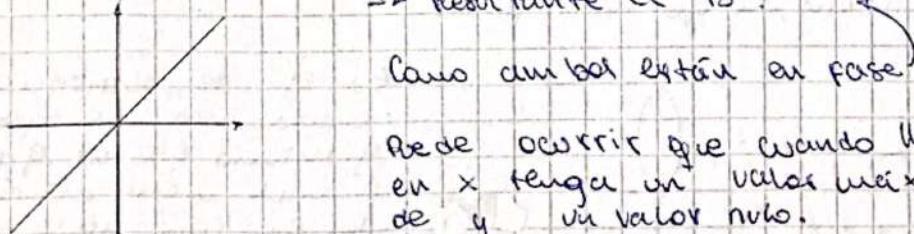
$$\tan \theta_p = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{ley de Brewster}$$

Polarización lineal

Polarización circular y elíptica

Tengo 2 rayos de luz polarizados perpendicularmente

\Rightarrow Resultante de 45° .



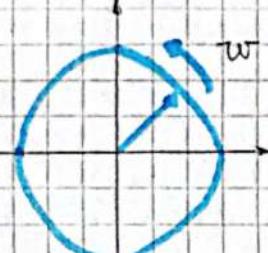
Puede ocurrir que cuando llegue el haz en x tenga un valor máximo y el de y un valor nulo.

NOTA

si dejamos que el faso se mueva 90°

\Rightarrow Máximo vertical, nulo horizontal Polarización circular

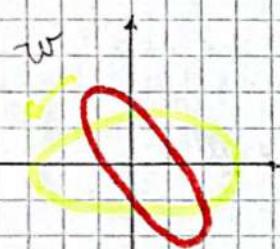
↳ sigue una trayectoria circular



El vector resultante de la polarización va a girar con w en sentido antihorario.

Instante a instante va rotando el eje de polarización.

¿Qué pasa entre 0° y 90° de desfase?



Sigue otra trayectoria, circular con w pero el módulo del faso varía permanentemente (tiene un máximo y un mínimo).

Polarización eliptica

ONDAS SONORAS

Onda: perturbación que se propaga en el tiempo y en el espacio.
Autónoma y transporta energía y movimiento (impulso).
Siempre está extendida en una región del espacio.

- Ondas transversales \rightarrow perpendicular a la trayectoria
- ondas longitudinales \rightarrow movimiento en la misma dirección de la onda

SONIDO \rightarrow se va produciendo por sucesivas compresiones y descompresiones de aire que se va propagando en el mismo sentido de propagación

Ondas sonoras

Ondas elásticas \rightarrow se transmiten por deformación elástica de la materia.

- ↳ en materia líquida, sólida o gaseosa.
- ↳ vibraciones lentas o rápidas

de 20 Hz a 20000 Hz: sonido - intervalo audible

Velocidad de propagación de las ondas sonoras

- ↳ depende del medio

$$V = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \begin{matrix} \text{→ módulo de compresibilidad} \\ \text{→ densidad del medio} \end{matrix}$$

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V} \quad \rightarrow \text{el negativo}$$

$$V = V_0 \sqrt{\frac{T}{273}} \quad \begin{matrix} \text{→ temp. absoluta} \\ \text{↳ } 10^\circ C \end{matrix}$$

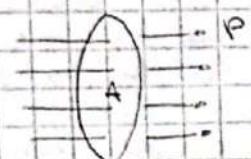
Especie de las ondas sonoras

- < 20 Hz ondas infrasonicas o infrasonidos
- 20 Hz $<$ ν $<$ 20000 Hz sonido/intervalo audible
- > 20000 Hz ondas ultrasonicas o ultrasonidos

Propiedades sensoriales

- ↳ intensidad acústica / volumen
- ↳ tono \rightarrow relación entre con la frecuencia
- ↳ timbre \rightarrow contenido de armónico

Energía transportada por los oídos



$$I = \frac{P}{A} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Medimos a través de la superficie la potencia sonora que se transmite y la dividimos por el área

$$I = \frac{P}{2\pi c}$$

→ velocidad de propagación
→ densidad

El procesamiento del sonido que llega a nuestro timpano entre que llega y va la señal al cerebro no es lineal, es logarítmico.

⇒ No captamos linealmente la intensidad

→ Nuestro oído puede captar un gran rango de intensidad sonora.

Nivel de intensidad: decibel

$$B = \log \frac{I_1}{I_0} \rightarrow \text{Nº grande} \quad L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{decibel dB}$$

→ Intensidad de referencia Nivel de intensidad → Adimensional

Si tengo 2 fuentes emisoras de 60 dB

El nivel total $60 \text{ dB} + 60 \text{ dB} = 63 \text{ dB}$

Duplicando la intensidad ($L_I = 10 \log \frac{2I}{I_0}$)

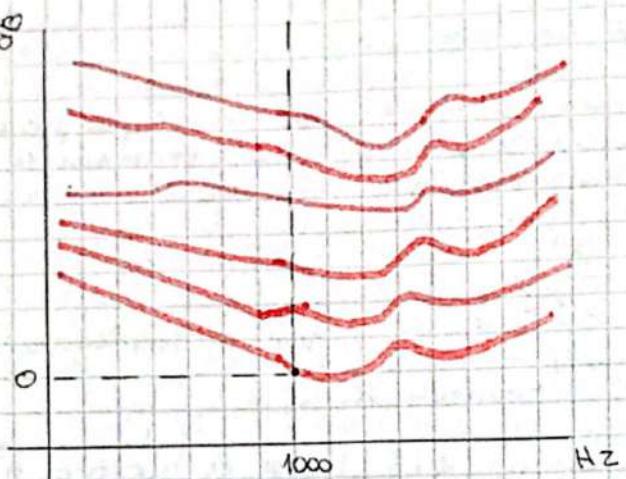
I_0 → lo usamos como el umbral de audición

Campo de audición

Umbral auditivo → valor más pequeño que podemos captar.

El oído tiene distintas sensibilidades para distintas frecuencias -

• lunes de igual nivel de sonoridad



Para 0 dB está el punto más bajo de la curva (umbral de audición)
 Para 1000 Hz \rightarrow 0 dB
 Para 100 Hz \rightarrow 35 dB

El oído es 35 veces más duro para los 100 Hz que para 1000 Hz.

\Rightarrow A medida que la frecuencia baja la sensibilidad del oído disminuye

Para frecuencias altas a bajo nivel aumenta un poquito la sensibilidad pero después para frecuencias más altas se hace más duro el oído y más difícil de captar.

A medida que la intensidad en dB aumenta la curva se va aplanchando.

A altas frecuencias sigue variando

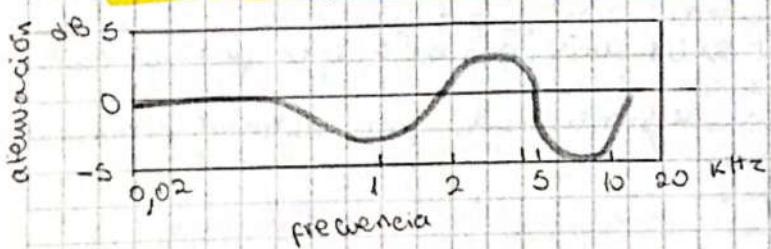
Por tanto varía la sensibilidad real definiendo una unidad diferente relacionada con la decibel de una frecuencia de referencia de 1000 Hz.

\hookrightarrow se denominan fono

Un fono es una unidad que sigue la escala logarítmica del decibel pero está adaptada subjetivamente a la sensibilidad del oído.

\hookrightarrow NO se pueden sumar entre sí.

Corrección para campo sonoro difuso.



Cómo varía según el tamaño de la habitación y la dureza de las paredes

NOTA

Caso no se pueden sumar -- se crea otra unidad sonel

$$N = 2^{0,1} (L_N - 40)$$

$$\log N = 0,03 (L_N - 40)$$

Curvas con distribución similar

Fatiga, daño, adaptación

Límites de la intensidad del sonido a la que el expuesto

En nuestro tímpano las vibraciones se traducen a través de rápidas combinaciones químicas en señales eléctricas que el nervio llevan al cerebro.

Cuando se agota el material para las combinaciones químicas (límite) \rightarrow fatiga "naufragante sordo"

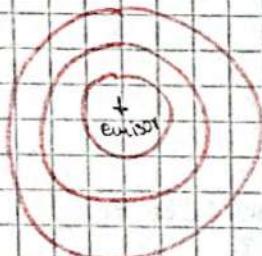
Si los decibéles son muy fuertes durante mucho tiempo

\Rightarrow el daño puede ser permanente

Adaptación: propiedad subjetiva

Los oídos ueltro oídos están captando información dejando de escuchar sonidos que no tiene información

Efecto Doppler



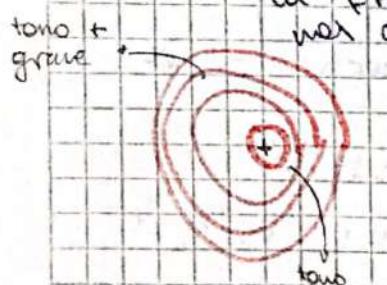
El emisor emite sonido hacia todos los lados con el mismo nivel.

\rightarrow Ondas esféricas

Si nos acercamos a la fuente emisora, nuestra velocidad se va a sumar a la velocidad de propagación.

\Rightarrow Producir que la longitud de onda se haga más pequeña

\rightarrow La frecuencia se incrementa (el tono aumenta si nos acercamos al emisor)



El emisor se mueve en forma horizontal hacia la derecha.

Cuando el emisor se ve moviendo, las ondas se ven produciendo en diferentes posiciones con el tiempo.

NOTA mayor que el emitido

se produce un atascoamiento de frente de onda

l - Reuje la longitud de onda y sube la frecuencia

Cuando un emisor se mueve a la misma velocidad del sonido (1100 km/h)



Se produce una sumatoria de todo el frente de presión de las ondas, provocando un gran frente de compresión.

Si se supera la velocidad:

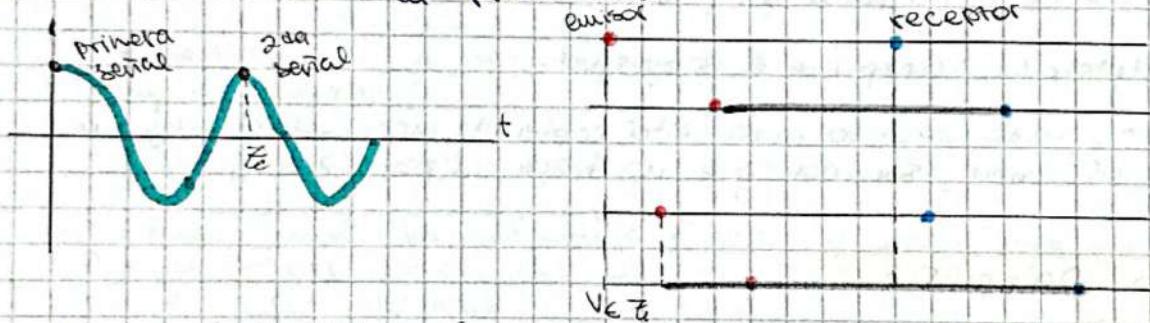


Q

El fenómeno de compresión ocurre en la envolvente (línea recta) como alrededor del frente de compresión y se propaga a la velocidad del sonido.

Cuando este frente llega a nuestro oído escuchamos una explosión "sónica".

Para calcular la frecuencia



Cuando el emisor envía la primera señal y le llega al receptor, este se ha desplazado una cierta distancia.

En el momento en el que se recorre un periodo τ_0 , la distancia recorrida por el emisor es $= v_e \tau_0$

Cuando el sonido llega al receptor, el tiempo transcurrido es t y la distancia recorrida $= v_s t$

la distancia recorrida por el receptor es $= v_e t$

Cuando entre la segunda señal llega al receptor \Rightarrow el tiempo transcurrido es $= t' - t$

la distancia que recorre la señal es $= v_s (t' - t_0)$.

la distancia que recorre el receptor desde t_0 es $v_e t_0$

$$N_S t = \alpha + N_0 t$$

$$\alpha = N_S (t' - \rho) - N_0 t$$

Igualando

$$t' = t' - \rho = \frac{c - N_0}{c - N_S} t$$

(ρ longitud de onda)

$$f' = \frac{c - N_S}{c - N_0} f$$

frecuencia del emisor
frecuencia que escucha el receptor

periodo normal

$$N^{\circ} \text{ de Mach } Ma = \frac{v}{c} \rightarrow \text{velocidad de un móvil}$$

$\rightarrow v_S$ (velocidad del sonido)