

Teoría de Señales y Sistemas Lineales



UNIVERSITAS

Teoría de Señales y Sistemas Lineales

Victor H. Sauchelli

UNIVERSITAS

Editorial Científica Universitaria

Pje España 1467. B° Nueva Córdoba. (5000) Córdoba. Argentina. Email: univer@cmefcm.uncor.edu

Diseño de Tapa: Ing. Jorge G. Sarmiento
Autoedición: V. Sauchelli – M. Tejerina
Producción Gráfica: Universitas.

Esta Editorial realiza venta directa a público y Librerías, prescindiendo de distribuidores, para tratar que el libro llegue al lector al menor precio posible. Los pedidos se pueden realizar a la dirección de la Editorial o al siguiente correo electrónico:

Email: univer@cmefcm.uncor.edu

ISBN: 987-9406-73-7

Prohibida su reproducción, almacenamiento y distribución por cualquier medio, total o parcial sin el permiso previo y por escrito de los autores y/o editor. Esta también totalmente prohibido su tratamiento informático y distribución por internet o por cualquier otra red. Se pueden reproducir párrafos citando al autor y editorial y enviando un ejemplar del material publicado a esta editorial.

Hecho el depósito que marca la ley 11.723.

Acerca del Autor

- Profesor de Sistemas de Control II de la UNC. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Profesor de Instrumentación y Control Automático de la UTN. Facultad Regional Córdoba.
- Profesor de Control en la Universidad Blas Pascal. Córdoba.
- Egresado de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, en el año 1971, como Ingeniero Electricista Electrónico.
- Posgrado en Control Digital en la Universidad Federal de Río de Janeiro, presentando Tesis Doctoral en la Universidad Nacional de Córdoba.
- Doctor en Ciencias de la Ingeniería (Orientación Control) de la Universidad Nacional de Córdoba en el año 1997.

Especialista en Educación Universitaria egresado en 1999 de la Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Córdoba.

© 2004 Primera Edición. UNIVERSITAS.

Indice

Indice	5
Introducción	11
1. Señales de tiempo continuo	13
1.1. Señales	13
1.1.1. Señales de tiempo continuo.....	14
1.2. Transformación de señales	15
1.2.1. Amplificación, atenuación, inversión	15
1.2.2. Sumarle o restarle componentes de continua	16
1.2.3. Logaritmación	17
1.2.4. Integración, derivación.....	17
1.3. Señales periódicas	18
1.4. Potencia en dominio del tiempo.....	20
1.5. Señales Circulares	23
1.5.1. Señales cosenoidales y senoidales	23
1.5.2.- Propiedades de las señales circulares (senos y cosenos).....	25
1.6. Transformaciones de la variable	27
1.6.1. Retardos o avances de la señal	27
1.6.2. Escalado en tiempo	28
1.6.3. Atrasos y adelantos de señales	31
1.7. Señales básicas en tiempo continuo	31
1.7.1. Señal: paso, escalón, posición, o función de Heaviside.....	31
1.7.2. Señal rampa, velocidad, recta.....	32
1.7.3. Señal parábola, aceleración	33
1.7.4. La señal impulso, función singular impulso o función generalizada impulso	34
1.7.5. La derivada de $\delta(t)$	37
1.7.6. Formas de la Función Singular Impulso	37
1.7.7. Tren de Impulsos.....	38
1.7.8. Señal Exponencial.....	38
1.8. Señales pares e impares.....	42
Ejercicios resueltos.....	44
Problemas	477
2. Señales de tiempo discreto.....	51
2.1. Introducción	51
2.2. Propiedades de las señales discretas	52
2.2.1. Compresión – expansión.....	52
2.2.2. Desplazamientos de la señal	54
2.2.3. Periodicidad	55
2.2.4. Paridad	58

2.3. Señales elementales de tiempo discreto	59
2.3.1. Señal Impulso	59
2.4. Propiedad de muestreo de $\delta(n)$	59
2.4.1. Señal Paso	60
2.4.2. Señal rampa	60
2.4.3. Exponenciales	61
2.5. Potencia y energía de señales discretas	61
2.6. Ecuaciones en diferencia (Eed)	62
2.6.1. Diferencia	¡Error! Marcador no definido.
2.6.2. Suma	¡Error! Marcador no definido.
2.6.3. Corrimientos	¡Error! Marcador no definido.
2.7. Método de la suma parcial	¡Error! Marcador no definido.
2.8. Ecuaciones en diferencia de orden superior	¡Error! Marcador no definido.
2.9. Solución de la Eed de segundo orden homogénea a coeficientes constantes	¡Error! Marcador no definido.
Problemas	79
3. Sistemas LIT	87
3.1. Sistemas	87
3.1.1. Sistemas nítidos y borrosos	88
3.1.2. Sistemas estocásticos y deterministas	89
3.1.3. Sistemas de tiempo continuo o analógicos y de tiempo discretos o digitales	89
3.1.4. Sistemas con memoria y de memoria nula	89
3.1.5. Sistema Causal	91
3.1.6. Sistemas invertibles	92
3.1.7. Sistemas Estables	93
3.1.8. Linealidad	94
3.1.9. Sistemas invariantes en el tiempo	96
Problemas	101
4. Respuesta de SLIT en Tiempo Continuo	105
4.1. La convolución en tiempo continuo	105
4.1.1. Cálculo de la integral de convolución	107
4.1.2. Propiedad: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$	109
4.2. Propiedades de los SLIT en relación a la convolución	113
4.2.1. La convolución es conmutativa	113
4.2.2. Distributiva	113
4.2.3. Asociativa	114
4.2.4. Sistema con y sin memoria	114
4.2.5. Invertibilidad	114
4.2.6. Causalidad	115
4.2.7. Estabilidad	115
4.2.8. Dobletes y algunas aplicaciones de la convolución	115
4.3. Respuesta de SLIT a entradas periódicas	116
4.3.1. Extensión periódica y envolvente	116
4.4. Convolución periódica	120
4.5. Correlación	121

4.5.1. Correlación como convolución	122
Problemas	123
Autocorrelacion de Señales.....	126
5. Serie de Fourier para Señales de Tiempo Continuo	129
5.1. Señales Ortogonales.....	129
5.2. Respuesta de <i>SLIT</i>	130
5.3. Propiedades	140
5.3.1. Convolución de señales de tiempo continuo.....	140
5.3.2. Teorema de la Potencia o de Parseval.....	141
5.3.3. Propiedad del desplazamiento en el tiempo.....	142
5.3.4. Propiedad de linealidad.....	142
5.3.5. Propiedad del producto (cuando se vea señales en tiempo discreto).....	143
5.4. Sistemas con entrada periódica	143
Ejercicios resueltos.....	
Problemas	147
6. Transformada de Fourier para Señales de Tiempo Continuo.....	153
6.1. Transformada de Fourier de tiempo continuo.....	153
6.2. Ejemplos de Transformadas de Fourier	157
6.3. Propiedades de la Transformada	159
6.3.1. Linealidad.....	159
6.3.2. Simetría	159
6.3.3. Desplazamiento Temporal	160
6.3.4. Desplazamiento en frecuencia.....	160
6.3.5. Escalado Temporal.....	160
6.3.6. Diferenciación.....	161
6.3.7. Integración restringida.....	161
6.3.8. Teorema de Parseval o de la energía.....	162
6.3.9. Señal de Potencia: Generalización del Teorema de Parseval.....	163
6.3.10. Propiedad de la Convolución	163
6.3.11. Transferencia de energía por un <i>SLIT</i>	165
6.3.12. Dualidad	165
6.4. Transformada del escalón $u(t)$	166
6.4.1. Transformada de la integral	167
6.5. Transformada de Fourier de una señal periódica en tiempo continuo	168
6.5.1. Propiedad: convolución en dominio de la frecuencia	170
6.5.2. Teorema de la Modulación	170
6.5.3. Teorema del Muestreo	172
6.6. Espectro de densidad de potencia de una señal periódica.....	174
6.7. Transformada seno y coseno de Fourier	175
6.8. Transformada inversa de Fourier	176
Problemas	179
7. La Transformada de Laplace	187
7.1. Introducción	187

7.2. La transformada de Laplace	187
7.2.1. Regiones de convergencia	190
7.3. Propiedades de la Transformada de Laplace	191
7.3.1. Cálculo de la transformada bilateral mediante la transformada unilateral	191
7.4. Propiedades de la Transformada de Laplace	192
7.4.1. Linealidad	192
7.4.2. Desplazamiento Temporal	192
7.4.3. Desplazamiento en el dominio de s	192
7.4.4. Escalamiento en el tiempo	193
7.4.5. Diferenciación en el dominio temporal	193
7.4.6. Integración en dominio temporal	194
7.4.7. Convolución	195
7.4.8. Teorema del valor inicial	196
7.4.9. Teorema del Valor Final	196
7.5. Transformada inversa de Laplace	197
7.6. Expansión en fracciones simples (conocidas)	197
Problemas	205
8. Respuesta de SLIT digitales	213
8.1. Convolución de señales digitales	213
8.2. Convolución Periódica	217
Problemas	223
9. Serie y Transformada de Fourier	231
9.1. Análisis de SLIT en tiempo discreto	231
9.2. Serie de Fourier en tiempo discreto	234
9.3. Transformada de Fourier de una señal de energía	237
9.4. Transformada de una señal periódica de tiempo discreto	240
9.5. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto	243
9.5.1. Periodicidad	243
9.5.2. Linealidad	243
9.5.3. Desplazamiento en el tiempo	244
9.5.4. Desplazamiento en dominio de la frecuencia	244
9.5.5. Convolución	244
Problemas	245
Series de Fourier de Tiempo Discreto	245
Transformada de Fourier de Tiempo Discreto	¡Error! Marcador no definido.
10. La Transformada z	259
10.1. Definición de transformada z	259
10.1.1. Región de convergencia de la Transformada Z	261
10.2. Propiedades de la Transformada Z	262
10.2.1. Lineal	262
10.2.2. Desplazamiento temporal	262
10.2.3. Resumen: Regiones de convergencia de la Transformada z	264
10.3. Transformada z inversa	265
10.3.1. Método de la integral de inversión	265

10.3.2. Transformada z inversa de secuencia finitas	266
10.3.3. Por medio de la división larga.....	267
10.3.4. Método de expansión en fracciones conocidas o simples	267
10.3.5. La RDC en la Inversión.....	268
Problemas	271
11. Aplicaciones	277
11.1. Filtros	277
11.2. Muestreo.....	280
11.3. Interpolación	284
11.3.1. Procesamiento de señales de tiempo continuo en tiempo discreto	286
Anexo 1.....	291
A2. Ancho de banda y duración de las señales de energía	295
A2.1. Definición de ancho de banda	295
A2.1.1. Primera definición	295
A2.1.2. Ancho de banda de potencia mitad o a 3 dB	296
A2.1.3. Ancho de banda equivalente	297
A2.1.4. Ancho de banda entre nudos (cruce por cero o nodos)	298
A2.1.5. Ancho de banda eficaz (RSM) o de Gabor	298
A2.1.6. Distancia entre ceros	298
A2.1.7. Radio de Giro	299
A2.2. Principio de Incertidumbre.....	299

Introducción

Este texto trata las señales, en tiempo continuo y en tiempo discreto, trabajadas mediante operaciones y transformaciones tanto de la señal como de la variable y se analizan las clásicas señales usadas a la entrada de filtros y redes para su ensayo, modelado y diseño.

Iniciamos con el estudio de señales en tiempo continuo o "analógicas". Esto puede realizarse dando una continuidad al cálculo diferencial.

Nota: (Análisis Matemático I y II, que junto con Algebra Lineal son los antecedentes mínimos para iniciar este curso).

En el segundo capítulo, se presentan las señales de tiempo discreto, con un estudio que sigue el mismo razonamiento que se usó en tiempo continuo y con un análisis comparativo en algunos aspectos, destacando las diferencias, que hará propia sus aplicaciones.

Las señales en tiempo continuo modelan sistemas mediante ecuaciones diferenciales, especialmente se tratan las ordinarias (EDO). Por otra parte las señales en tiempo discreto modelan sistemas mediante ecuaciones en diferencia (Eed). Si el lector no posee un antecedente en este tema, se adjunta un resumen de la resolución en dominio temporal de las Eed que tiene la finalidad de actualizar los conocimientos del lector.

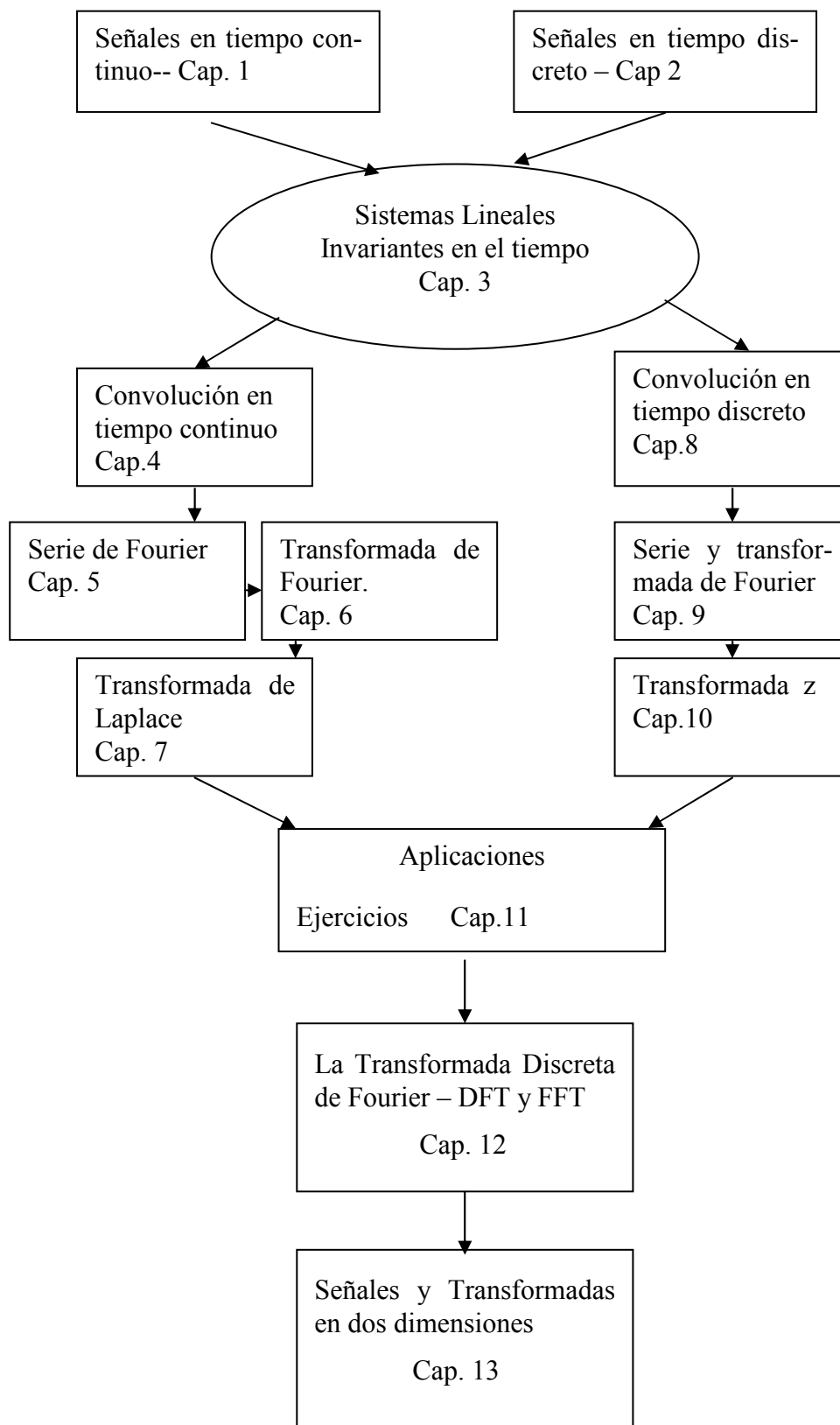
Luego de un estudio de los sistemas lineales invariantes en el tiempo y los modelos matemáticos externos, denominado así porque vinculan entrada con salida, se tratan los temas de las transformadas al dominio de la frecuencia siendo en tiempo continuo de Fourier y de Laplace y en tiempo discreto de Fourier y transformadas z .

Para cerrar el texto, se presenta un capítulo con aplicaciones que refuerzan las teorías tratadas.

Esta asignatura nos invita a un estudio sobre las señales con la técnica de "hacer haciendo" debe ser leído, como todo tema en ingeniería, con papel y lápiz, esto no es como leer un diario o una novela, se lee realizando los ejemplos y los ejercicios que se brindan al finalizar cada unidad.

He tratado de individualizar todo lo posible el dominio de tiempo discreto y el de tiempo continuo a fin que pueda, aún fuera del estudio de teoría de señales, ser consultado este material en forma práctica y rápida en cuanto se necesite a lo largo del resto de la carrera de ingeniería y en su vida profesional.

Esquema conceptual



Señales de tiempo continuo

1.1. Señales

En el estudio de relaciones de reales en los reales, prestamos gran atención a las relaciones funcionales. Una aplicación real valuada, se dice:

$$f : x \rightarrow f(x) = y$$

donde f es la función, es el elemento del dominio y $f(x)$ es el elemento de la imagen, reflejado por la función.

Grafo o gráfica de la función se entiende por la representación de los elementos del dominio generalmente en eje horizontal "contra" los elementos de la imagen, eje vertical, para conformar la representación cartesiana.

Por ejemplo si $f(x) = x^2$ entendemos $Dom f : \mathbb{R}$ e $Im : f : \mathbb{R} \geq 0$ y su representación gráfica está en \mathbb{R}^2 ; es el conjunto $S = \{(x, f(x))\}$

```
t=-6:0.1:6;
f=t.^2;
plot(t,f),xlabel('t'),ylabel('f')
```

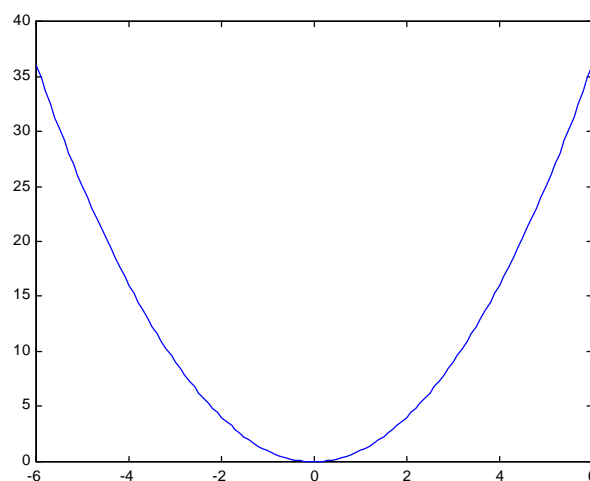


Figura 1-1

Con la expresión “*señal*”, en “general” nos referimos a relaciones funcionales, pero no las únicas, podemos con este término mencionar relaciones que no son estrictamente función.

El término “*señal*”, acuñado más de la técnica que de la matemática, se entiende como una relación entre el conjunto de partida (o dominio) que es el “*tiempo*”; un número real, (aunque puede estar aplicado a veces en forma compleja), hacia un conjunto de llegada que también puede ser complejo.

Decir “*señal*” es establecer una relación cuya partida es la variable, la “*mayoría*” de las veces, el tiempo y que en se trata de relaciones no necesariamente funcionales; aunque la más de las veces trabajemos con funciones.

A pesar que variable “*t*” es real, tanto la partida (dominio) como la llegada (imagen) son tales, que si no se advierte otra cosa, pertenecen al conjunto de los complejos.

Aunque no los trataremos en esta materia, las señales pueden ser relaciones de campo vectorial de vectores aplicando $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. En esta asignatura, las señales son, relaciones del $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, o relaciones real valuadas.

1.1.1. Señales de tiempo continuo

Si decimos $x(t) = t^2$ nos referimos a una señal donde, en este caso, es una relación funcional $x: t \rightarrow t^2$ (las aplicaciones son siempre funcionales) “*x* es la función” y $t \in \mathbb{R}$ es el elemento de partida.

Observamos que las letras usadas para denotar funciones como *f*, *g*, *u*, *v*, etc. ahora se le incorporan las letras *x*, *y*, *w*, etc. esto es, porque desde René Descartes¹, padre de la Geometría Analítica estableció “*x*” como entrada e “*y*” como salida y en sistemas se denomina $x(t)$ a la señal de entrada e $y(t)$ a la señal de salida, ambas relaciones de *t* y como dijimos puede ser de complejos a complejos.

En particular si estas señales son funciones poseen todas las cualidades, propiedades y restricciones, que fueron estudiadas en cursos de matemática.

En un primer estudio $t \in]-\infty, \infty[$ constituyendo “*señales de tiempo continuo*”, también llamadas “*analógicas*” porque son análogas a magnitudes físicas de tiempo continuo, que estas señales modelan.

Así el sonido con su variación de presión y velocidad del aire afecta a un conductor que está bajo un campo magnético y estas vibraciones mecánicas del conductor producen una “*señal*” eléctrica que es “*análoga*” al sonido.

Lo mismo sucede con la temperatura, el calor en un punto genera una *fem* por el efecto de la termocupla

1. Rene Descartes 1596 – 1650 filósofo, científico y matemático considerado el fundador de la filosofía moderna y el “padre” de la geometría analítica, por sus trabajos en representación plana.



Figura 1-2

y esta es una señal eléctrica análoga al fenómeno del calentamiento.

Con la luminancia, la posición, la rapidez etc. fenómenos que implican al tiempo en forma continua. Las señales analógicas se pueden encontrar en transductores o sensores que transforman la energía en otra “*forma*” en general: eléctrica.

A veces, ya sea porque la naturaleza del fenómeno lo exige, o porque conviene procesarlas así, el tiempo es discreto, se evalúa la relación solo en instantes $t = n T$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $T \in \mathbb{R}$ y en este caso $x(n T)$ constituye una señal de tiempo discreto. Se adopta a T como la unidad de tiempo, pues el muestreo se supone “uniforme” o sea T es constante y así $x(n)$ es una sucesión comunmente denominada por traducción de textos en inglés como “secuencia”, nosotros usaremos indistintamente ambos términos con la conciencia que la denominación correcta es sucesión.

Por ejemplo la señal: número de botellas de bebida que pasa por la cinta transportadora en cierto punto, o clientes pasando por la caja del supermercado, también los objetos a distribuir en estantes, son señales naturalmente discretas, hay otras que siendo generadas en tiempo continuo como el sonido conviene discretizarla (CD) a fin de almacenarla con mejor calidad.

En estos casos la escritura puede ser como función $x(n)$ o como sucesión x_n o para destacar la sucesión ampliada como $x[n]$, usaremos y se usan las tres “*formas*” de anotación.

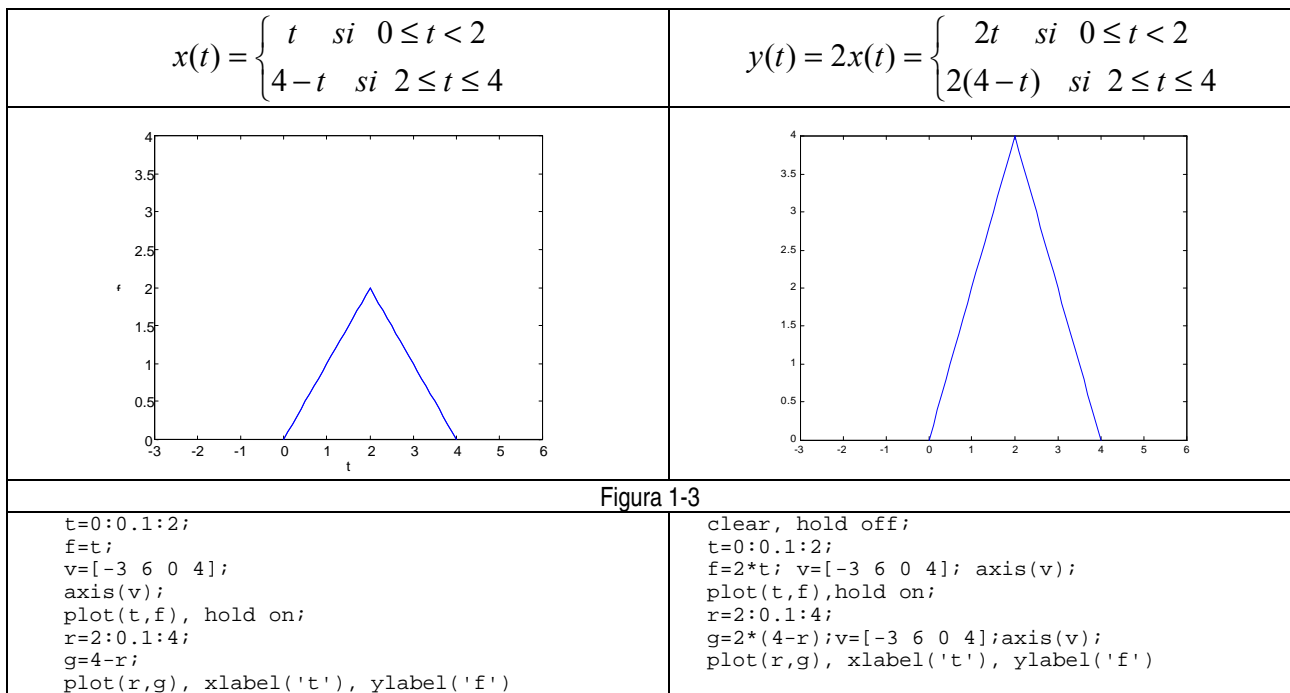
Nota: si es de tiempo continuo no corresponde la anotación x_t ya que significan en general otra cosa distinta que $x(t)$.

Destaco que el “*tiempo*” en el estudio de señales lo mencionamos con las letras t o n (a veces se usa k). Hablar de n o k es también referirse al tiempo.

1.2. Transformación de señales

1.2.1. Amplificación, atenuación, inversión

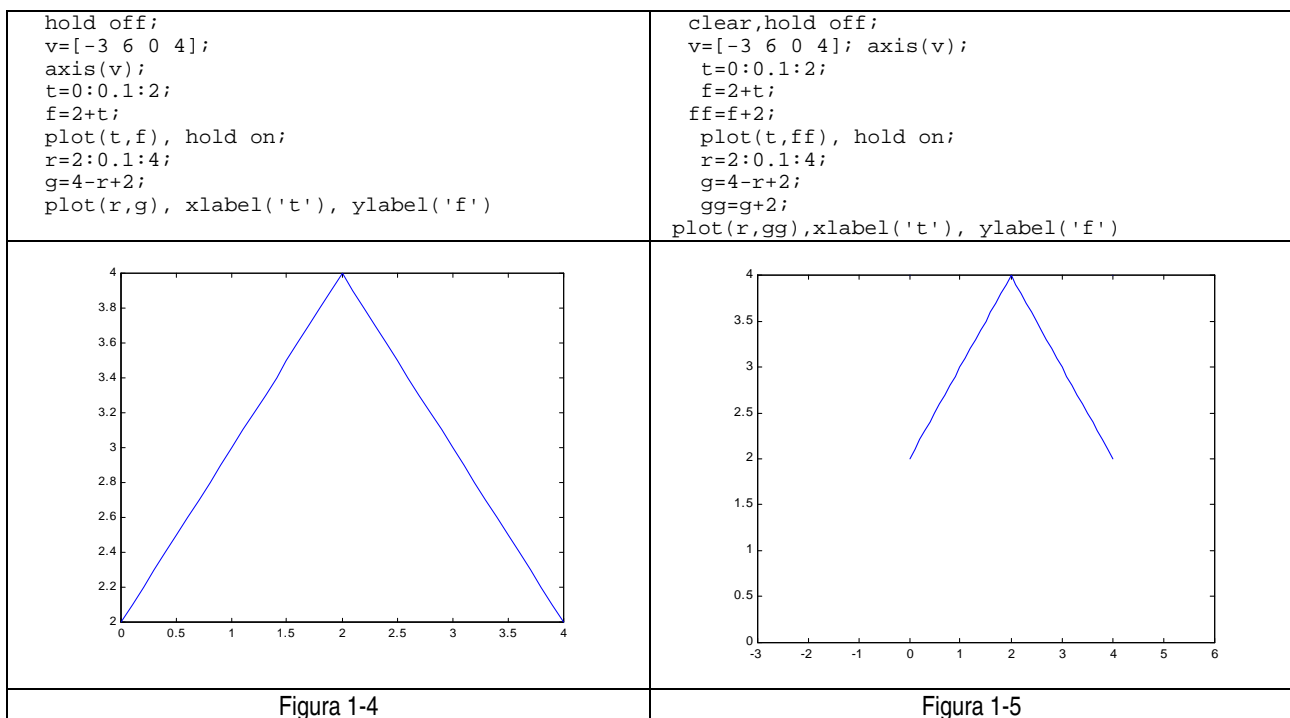
A una señal se la puede multiplicar por un número, si $x(t)$ es la salida de un micrófono, $100 x(t)$ es una amplificación de esta señal, o sea se la puede multiplicar por un número y conseguir una mayor, se dice: amplificación, si el valor que multiplica mayor que uno; se lo menciona como atenuación y si es un número está entre 0 y 1 y si es negativo, se dice inversión.



Si bien existe el cambio en la “forma” de la señal, no es considerado una distorsión porque puede rescatarse la original mediante una operación inversa a la realizada.

1.2.2. Sumarle o restarle componentes de continua

A una señal $x(t)$ le podemos agregar un valor constante a . Así $x(t)+a$ es de la misma “forma” pero desplazada una cantidad a .



Si $a > 0$ desplaza hacia arriba y si $a < 0$ está hacia abajo

1.2.3. Logaritmicación

A veces, por ejemplo un cuestiones de señales de sonido, se realiza el logaritmo a la señal $x(t)$.

Si entra $x(t)$, sale $\log|x(t)|$ esto se hace así para producir una atenuación acorde a la impresión sensorial que no es lineal con la amplitud.

```
clear, hold on;
» t=-2:0.1:2;
» v=[-4 4 0 6];
» axis(v);
» f=(t.^2)+1;
» l=log(f);
» plot(t,f,'o'), hold on;
» plot(t,l,'-'), grid
```

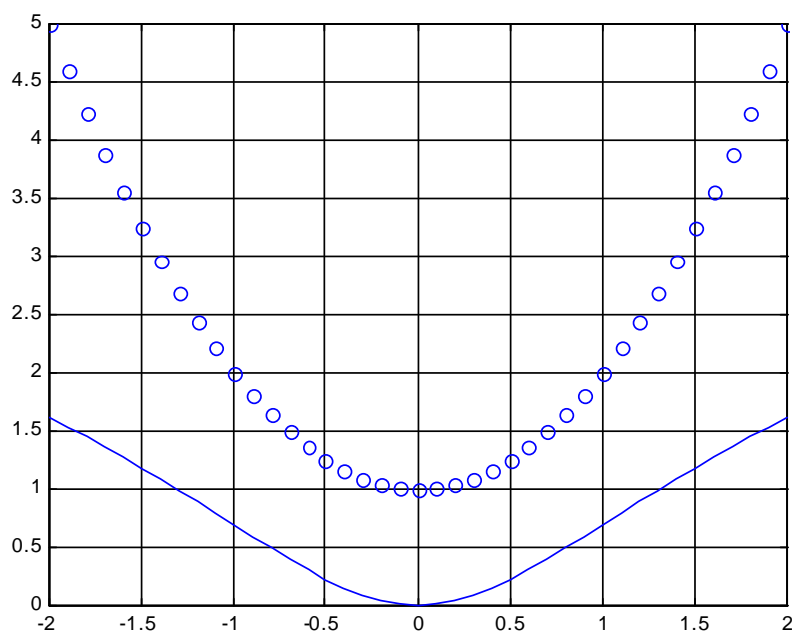


Figura 1-6

O por la relación física, por ejemplo una señal que determine el flujo de líquido por una cañería mediante una estrangulación del fluido (placa orificio o tubo Venturi) la diferencia de presión diferencial, antes/después de la obstrucción, es proporcional al cuadrado del flujo de líquido, en este caso entra $x(t) \xrightarrow{\text{Sale}} K x^2(t)$; K es un número real positivo.

Estos procesos donde una función afecta a la señal y es factible de rescatar la señal original por el proceso inverso, no son consideradas distorsiones, sino adecuaciones o adaptaciones de señal.

Distorsión es cuando aparece una afectación, que queda encubierta en la señal y no se puede con medios convencionales, distinguir la señal fiel de la distorsionada.

1.2.4. Integración, derivación

Estas operaciones realizadas sobre la señal $x(t)$ no son distorsiones y son muy frecuentes en nuestro estudio de señales.

Debe destacarse que $\frac{d x(t)}{d t}$ es “otra” señal distinta en general a $x(t)$, lo mismo que $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

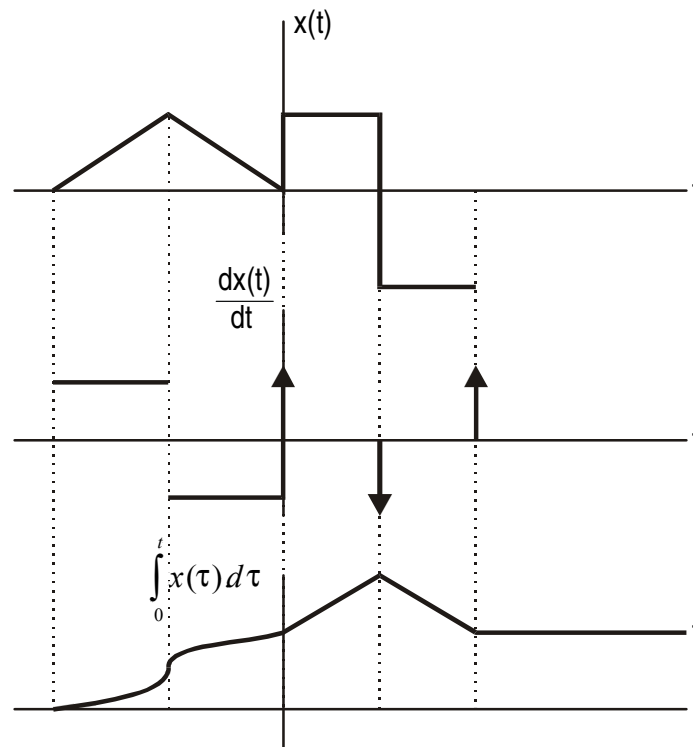


Figura 1-7

1.3. Señales periódicas

Se dice que una señal es periódica si se puede reconocer un conjunto de valores que se repite a lo largo del tiempo.

Las señales periódicas entonces poseen un conjunto de $x_T(t)$ que se repite desde $-\infty$ hasta ∞ con una secuencia T . La condición matemática a cumplir es que $x(t)$ es periódica si:

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \quad \text{con} \quad T_0 \in \mathbb{R}$$

Observamos que es “para todo t ” y que T_0 es un valor real cualquiera en general se toma positivo y no nulo. Así si:

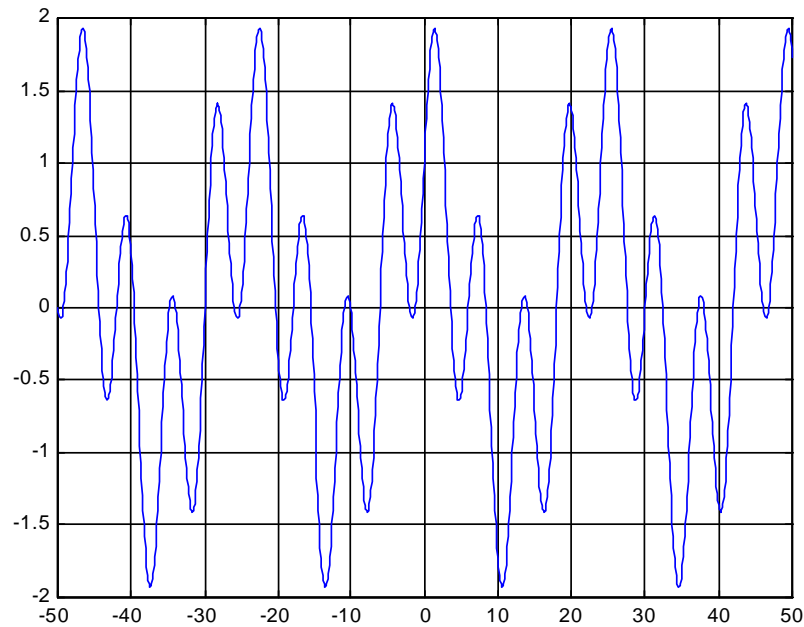


Figura 1-8

```
t=-50:0.1:50;
» x=sin(pi/3*t)+cos(pi/12*t);
» plot(t,x), grid
```

es periódica, descubrimos un conjunto de valores de $x(t)$ que se repite cada T_0 , pero.... también se repite cada $T_1 = 2T_0$ y cada $T_2 = 6T_0$. Luego ¿cuál es el período?

Si decimos T_0 , nos pueden afirmar que es T_1 y también tendrá sus razones. Si una señal es periódica posee infinitos valores de T_i tal que

$$x(t) = x(t + T_i) \quad , \quad \forall t; \quad T_i = nT_0 \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

la menor de estas T_i es la que denominaremos T_0 período fundamental, también observamos que

$$\begin{aligned} T_1 &= 2 T_0 \\ T_2 &= 3 T_0 \\ &\vdots \\ T_k &= k T_0 \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Los T_k se denominan armónicas de la señal. Así el primer armónico es $T_1 = 2 T_0$, el del segundo armónico es $3 T_0$, etc.

Cuando nos referimos: "conocer el período de una señal", es que nos referimos al menor valor de tiempo que ésta se repite o sea específicamente al T_0 .

Conocer este valor de T_0 implica aplicar la definición matemática; por ejemplo si

$$x(t) = 3 \cos(20 t)$$

Para estudiar la periodicidad, preguntamos si puede ser igual a $x_{(t+T_0)}$, $\forall t$ o sea de que forma puede $x(t+T_0)$ ser igual $x(t)$, veamos

$$x(t+T_0) = 3 \cos[20(t+T_0)] = 3 \cos[20t + 20T_0]$$

como el $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$, para $k \in \mathbb{Z}$ el coseno es congruente, el valor de la función es el mismo si sumamos un arco de giro (o muchos) completo de 2π hacia la izquierda o hacia la derecha.

Con este conocimiento es el que me permito afirmar que si $20T_0 = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ satisface lo solicitado y el menor T_0 o sea el fundamental es cuando $k=1$, luego

$$20T_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{\pi}{10}$$

Podemos afirmar que $x(t) = 3 \cos(20t)$ es periódica de período $T_0 = \frac{\pi}{10}$ (observar que no arrastramos la denominación de período fundamental).

Conocer que una señal es periódica y conocer el período fundamental es conocer “*toda*” la señal, pues por inducción, lo que sucede en la perpetuidad de la señal, sucede en el intervalo T_0 que se repite.

Se puede por lo tanto para definir un periodo y conocer la señal; cualquier “espacio” de tiempo de duración T_0 ya que es el conjunto de puntos de la función repite, así :

$$[0, T_0] \quad \text{ó} \quad \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right] \quad \forall t$$

Posiblemente al lector se le presente ahora una serie de dudas:

¿será que cambiar la fase de señales periódicas afecta al período?

¿será que la suma de señales periódicas es periódica?

¿será que el producto de señales periódicas es periódica?

y tantas otras... lo invito a resolver los ejercicios de este capítulo.

1.4. Potencia en dominio del tiempo

En una red eléctrica, pasiva con tensión de voltaje $v(t)$ y corriente por el circuito, $i(t)$ con una **resistencia pura** R_L

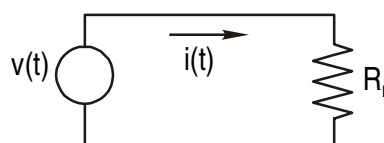


Figura 1-9

La potencia instantánea entregada por la fuente a la carga es $P_{(t)} = v_{(t)} \cdot i_{(t)}$ se mide en vatios $[W]$. Si $v_{(t)} = V$ es un valor constante, la corriente es $I = cte.$ también y la potencia $P = V \cdot I$ [Volts.Amperes = vatios]

Si la red de carga es resistiva pura, es decir existe una resistencia R_L equivalente se puede establecer la relación de Ohm y $V = I \cdot R_L$ ó $v_{(t)} = i_{(t)} \cdot R_L$

En este caso la potencia es

$$P_{(t)} = \frac{v_{(t)}^2}{R_L} = i_{(t)}^2 \cdot R_L$$

es la potencia en el instante t , si se quiere promediar a lo largo de un tiempo entre t_0 y t_1 . será:

$$P = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} P_{(t)} dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{v_{(t)}^2}{R_L} dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} R_L i_{(t)}^2 dt$$

Se suele usar la potencia normalizada $R_L = 1 \Omega$, denominada P_n y para conocer la potencia P hacemos $\frac{P_n}{R_L}$

Nota: En lo sucesivo, en cuanto hablemos de potencia normalizada lo indicamos con P obviando la "n" de P_n . Luego:

$$P_n = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v_{(t)}^2 dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} |v_{(t)}|^2 dt \quad \text{en caso de } v_{(t)} \text{ compleja}$$

La pregunta es: ¿qué valor de tensión $v_{ef.}$ producirá la misma potencia si fuese la $v_{(t)}$ la tensión constante V ?, o sea

$$\frac{1}{R_L} \cdot \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v_{(t)}^2 dt = \frac{1}{R_L} V^2$$

a este valor de "alterna" que produce el mismo efecto sobre la carga resistiva R_L en términos de potencia que una continua V se la denomina eficaz y se denota v_{ef}

$$v_{ef.}^2 = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v_{(t)}^2 dt$$

Así es que dada $v_{(t)}$ (o $i_{(t)}$) señales de tensión (o corriente) se le asocia un valor eficaz v_{ef} (o i_{ef}) equivalente a la misma potencia que le entregaría a la carga si fuese continua V (o I).

Al valor:

$$v_{CD} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

se lo denomina componente de continua de $v(t)$ o también valor medio o promedio de $v(t)$ en t_0 hasta t_1 se lo suele denotar con una raya $v_{CD} = \bar{v}$

A la diferencia $v(t) - \bar{v}$ se lo denomina valor de variación de la señal a su media. Es importante el promedio de esta variación lo que conduce a la idea de variancia

$$V_{ar}(v) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - \bar{v})^2 dt$$

Observe que la variación, a veces denominada error: $v(t) - \bar{v}$, está elevado al cuadrado lo que mantiene esta diferencia siempre positiva, al valor:

$$\sigma = \sqrt{V_{ar}(v)} = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - \bar{v})^2 dt}$$

corresponde el desvío (o desviación estándar) y se denomina para la señal, la “*componenete de alterna*” entre t_0 y t_1 .

Resumen

Si es periódica de periodo T se puede decir:

$v(t)$	señal de tensión (o corriente)
$v_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{<T>} v^2(t) dt}$	valor eficaz
$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{<T>} v(t) dt$	valor medio o de continua
$\sigma = \sqrt{V_{ar}(v)} = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (v(t) - \bar{v})^2 dt}$	valor de alterna

Nota: Al símbolo $\int_{<T>} (.) dt$ significa que se integra sobre un periodo T sin importar desde donde hasta donde siempre que la duración sea T o sea:

$$\int_{<T>} (.) dt = \int_{-T/2}^{T/2} (.) dt = \int_0^T (.) dt = \int_{-\frac{T}{2}+a}^{\frac{T}{2}+a} (.) dt \dots$$

Ejemplo

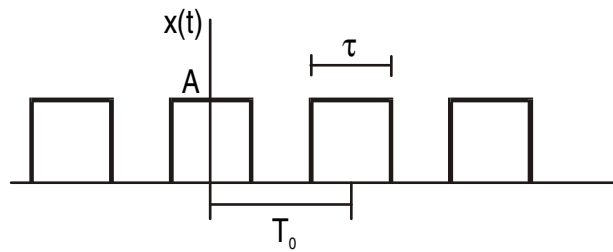


Figura 1-10

$x(t)$ es un tren de pulsos rectangulares periódicas de período T_0 y amplitud A con duración τ (al valor $\frac{\tau}{T_0} = c$ se lo denomina ciclo de trabajo)

$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{A \tau}{T_0}$$

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T_0} \tau} = A \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T_0}}$$

Las señales $x(t)$ que cuando $[t_0, t_1] \longrightarrow]-\infty, \infty[$ poseen energía **finita** se denomina de energía, si existe

$$E_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

esto es en dimensiones $\text{volt}^2 \cdot \text{seg}$; (o $\text{amper}^2 \cdot \text{seg}$) que corresponde al Joule o sea es una energía normalizada, entonces $x(t)$ se denomina “señal de energía”.

Se denominan señales de potencia, a aquellas donde existe, (es un número) la potencia o los vatios:

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Existen señales que no son ni de potencia ni de energía, es decir esta P_n diverge.

1.5. Señales Circulares

1.5.1. Señales cosenoidales y senoidales

A las señales circulares

$$x_{(t)} = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

y a la señal

$$x_{2(t)} = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

las analizamos en un conjunto ya que sus cualidades son muy semejantes en lo que respecta a su “forma”. Sabemos que

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Si

$$x_{(t)} = A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \text{ con } A, \omega_0, \text{ y } \phi_0 \in \mathbb{R}$$

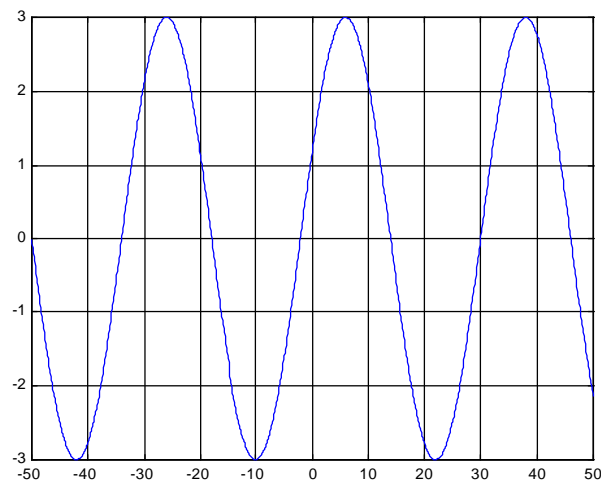


Figura 1-11

```
t=-50:0.1:50;
» x=3*sin(pi/16)*t+0.4);
» plot(t,x), grid
```

A el valor de A se lo denomina “*amplitud*” se lo suele indicar como valor *pico de* $x_{(t)}$: $A = \hat{x}_{(t)}$ o a veces se lo suele indicar como valor *pico a pico de* $x(t)$ que es $2A$.

Es periódica y el período fundamental es tal que:

$$\omega_0 T_0 = 2\pi k \quad \text{con} \quad k=1$$

resulta

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Al valor $f_0 = 1/T_0$ se lo denomina frecuencia en *Herzios* como unidad es el $\frac{1}{\text{seg}} = \text{seg}^{-1}$, al valor de

$\omega_0 = 2\pi f_0$ le corresponde también una frecuencia, dada en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$.

Es indistinto referirse a la frecuencia como f en *Hz* o como ω en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, difieren solo en la constante

2π , (en el ambiente técnico se usa en *Hz*, en la mayoría de los estudios sobre señales se usa ω) ϕ_0 es el *ángulo o fase* cuando $t = 0$; el valor de $x_{(t)} = A \sin \phi_0$, indica el momento de inicio de la “onda” senoidal; por ejemplo si $\phi_0 = \frac{\pi}{8}$ será

$$x_{(t)} = A \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Nota: La gráfica de la fig.1-11 indica una fase de 0,4 radianes y si se observa se puede apreciar este corrimiento.

1.5.2.- Propiedades de las señales circulares (senos y cosenos)

Su valor medio es tomado en un intervalo de tiempo $t_1 - t_0 = T_0$ (en un período). Lo que sucede en T_0 lo podremos generalizar para toda la señal así:

$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x_{(t)} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \sin(\omega_0 t) dt = \frac{A}{\omega_0 T_0} [-\cos(\omega_0 t)]_0^{T_0} = \frac{A}{\omega_0 T_0} [-1 + 1] = 0$$

son señales de valor medio nulo. La potencia normalizada ($R_b = 1\Omega$) es:

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} A^2 \sin^2(\omega_0 t) dt = \frac{A^2}{T_0 \omega_0} \left[\frac{\omega_0 t}{2} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{4} \right]_0^{T_0} = \frac{A^2}{T_0 \omega_0} \cdot \frac{\omega_0 T_0}{2} = \frac{A^2}{2}$$

El valor eficaz es

$$x_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x_{(t)}^2 dt} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo

Si alimentamos una estufa de resistencia con una tensión de 220 V y frecuencia de 50 Hz. La estufa posee una resistencia en caliente de 50 Ω

¿Cuál es la señal de tensión?

¿Cuál es la potencia entregada?

Solución

La $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ como la fase por el momento no es relevante adoptamos $\phi_0 = 0$. La frecuencia es en $\frac{rad}{seg}$ para la línea de alimentación de 50 Hz es:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 314,159 \frac{rad}{seg}$$

La amplitud que se indican en electrotecnia son los valores eficaces $x_{ef} = 220$ V

$$A = x_{ef} \cdot \sqrt{2} = 220 \cdot \sqrt{2} = 311,126 \text{ V}$$

Luego

$$x(t) = 311,126 \sin(314,159 t)$$

La potencia es

$$\frac{P_n}{R} = \frac{A^2}{2R} = 968,199 \frac{Watt}{Vatios}$$

Ejemplo

Determine el período de $x(t) = 3 \cos(300 t) + 4 \sin(10 t)$

Solución

Para que sea periódica debe ser

$$x(t) = x(t + T_0); \quad \forall t,$$

luego

$$x(t + T_0) = 3 \cos(300(t + T_0)) + 4 \sin(10(t + T_0))$$

Un término de esta suma determina un $T_0' = \frac{300}{2\pi}$, pero el otro determina un $T_0'' = \frac{10}{2\pi}$, el valor del período para la suma tendrá que contener un número entero de veces a T_0' y a T_0'' o sea

$$T_0 = n T_0' = m T_0'' \quad \text{con} \quad n, m \in \mathbb{N}$$

El menor T_0 será el mínimo común múltiplo de $\{T_0', T_0''\}$ en nuestro caso $T_0 = T_0' = 30 T_0''$.

$$\text{Luego } T_0 = \frac{300}{2\pi}$$

Observamos que las amplitudes (3 y 4) no intervienen en la determinación del período. Si hubiera sido:

$$x(t) = 3 \cos(300 t) + 4 \sin(5\sqrt{2} \cdot t)$$

que podemos decir?

$$T_0 = n T_0' = m T_0'' \quad ?? \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}$$

esto implica que sea

$$\frac{T_0'}{T_0''} = \frac{m}{n} = q \quad \text{con } q \in \mathbb{Q}$$

o sea un racional y en nuestro caso

$$\frac{300}{5\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

luego no es periódica.

La suma de señales periódicas en general no es una señal periódica, lo será si las frecuencias de las señales suma, son tales que su relación sea un número racional.

Si

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

con

$$x_1(t) = x_1(t + T_1); \quad x_2(t) = x_2(t + T_2) \quad x_3(t) = x_3(t + T_3)$$

entonces

$$T_0 = n T_1 = m T_2 = \ell T_3 \quad \text{con } n, m, \ell \in \mathbb{N}$$

o lo que es lo mismo T_0 es el mínimo común múltiplo $\{T_1, T_2, T_3\}$ de lo contrario, si no existe este mínimo común múltiplo, *no es periódica*. Podemos decir lo mismo del producto de señales? Por favor investigue.

1.6. Transformaciones de la variable

1.6.1. Retardos o avances de la señal

Sea $x_{(t)}$ una señal como la dibujada

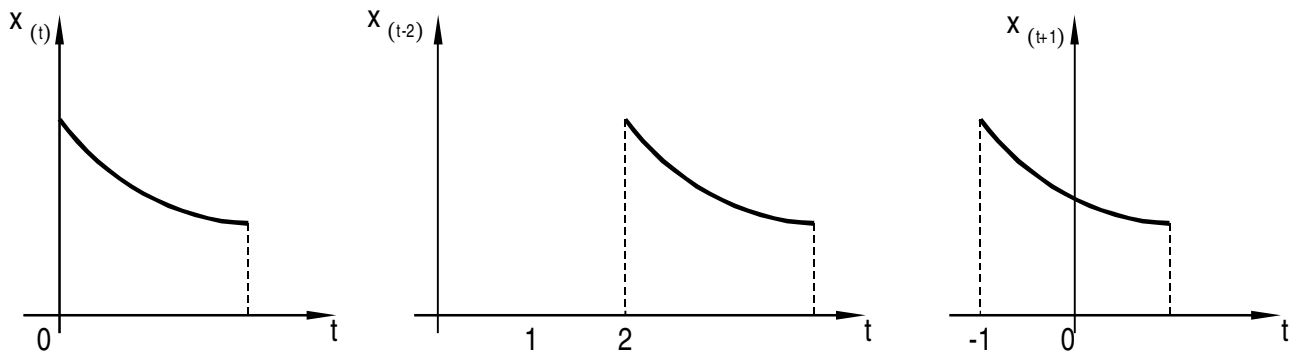


Figura 1-12

Si ahora tomamos la señal $y(t) = x(t-2)$ vemos que es similar, desplazada dos unidades a la derecha, pues el $x_{(0)} = 0$ y resulta que este $x_{(0)}$ se consigue cuando $t = 2$, así para $x_{(2)}$ que es alcanzado en $x(t-2)$ cuando $t=4$.

Luego sin alterar su “forma” se desplaza a la derecha. Qué sucedería con $z(t) = x(t+1)$ pues se desplaza a la izquierda una unidad.

1.6.2. Escalado en tiempo

Dada $x(t)$, el valor de $x(2t)$ implica una compresión ya que:

Tiempo t	$x(t)$	$x(2t)=x(\tau)$	Tiempo τ
$t=0$	$x(0) =$	$x(0)$	$\tau=0$
$t=1$	$x(1) =$	$x(1/2)$	$\tau=1/2$
$t=2$	$x(2) =$	$x(1)$	$\tau=1$

y así sucesivamente, luego sin alterar la amplitud de $x_{(0)}$ se comprime

Si

$$x_{(t)} = -(t-1)(t-2) \quad \text{para} \quad t \in [1; 2]$$

es el caso de línea continua y

$$\ell_{(t)} = -(2t-1)(2t-2)$$

es el caso de la línea de puntos

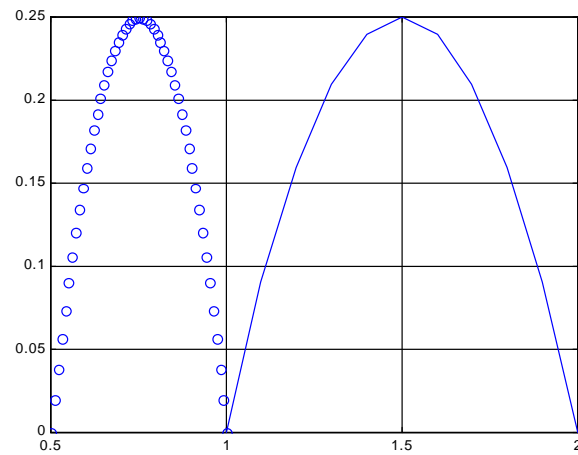


Figura 1-13

```

t=1:0.1:2;
x=-(t-1).*(t-2);
l=2:0.01:4;
h=-((l*2)-1).*((l*2)-2);
plot(t,x);
plot(l,h,'o'),hold on, grid

```

Si fuese ahora fuese $x(t/2)$ se produce una expansión de la forma:

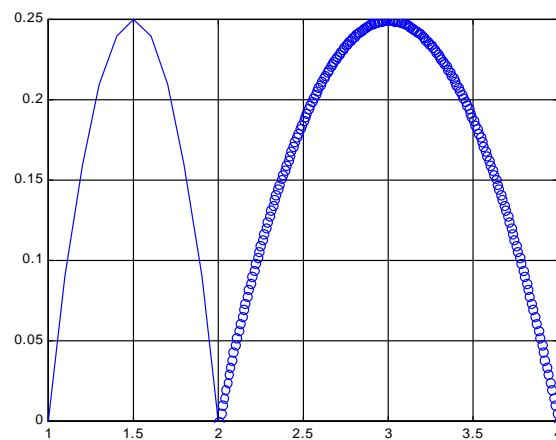


Figura 1-14

```

t=1:0.1:2;
x=-(t-1).*(t-2);
l=2:0.01:4;
h=-((l/2)-1).*((l/2)-2);
plot(t,x);
plot(l,h,'o'),hold on, grid

```

Estos son procesos de compresión y expansión en el tiempo.

Si ahora fuese multiplicado t por una cantidad negativa, digamos $x(-t)$ que resulta:

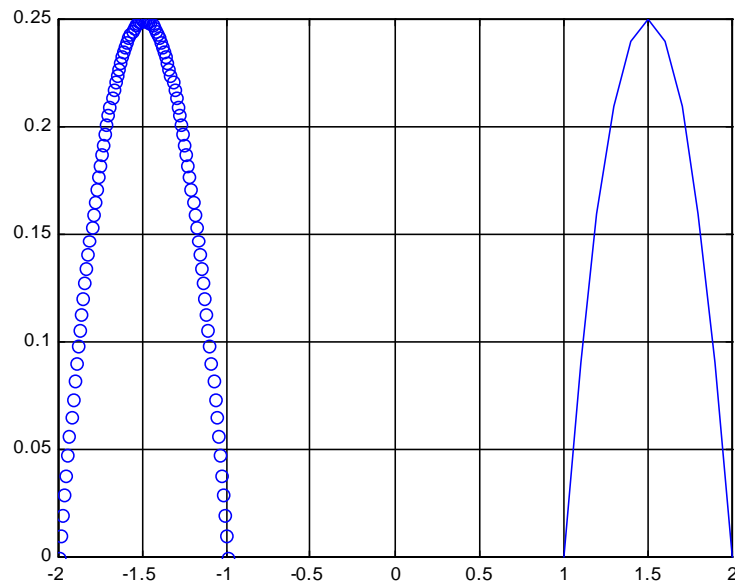


Figura 1-15

```
t=1:0.1:2;
x=-(t-1).*(t-2);
r=-2:0.01:-1;
g=-(-r-1).*(-r-2);
plot(t,x),hold on,plot(r,g,'o'),grid
```

Luego se produce una rotación (180°) en torno del eje vertical, se suele denominar reflexión.

Podemos presentar ahora casos más complejos y combinados de estas transformaciones, por ejemplo $x(2t+1)$ se trata de compresión, traslación. Observe que el 1 traslada a $2t$ no a t si se quiere ver lo que afecta a t es conveniente escribirlo como

$$x\left(2\left[t+\frac{1}{2}\right]\right)$$

lo que significa comprimir dos unidades y trasladar $\frac{1}{2}$ hacia la izquierda. Si fuese

$$x(-t+1)$$

el desplazamiento de 1 afecta a $-t$, no a t , esto puede expresarse como

$$x(-(t-1))$$

o sea se invierte $x(t)$ y se desplaza una unidad hacia la derecha pues a t le afecta al -1

Más allá de resolver por comprensión analítica, es conveniente verificarlo por puntos.

1.6.3. Atrasos y adelantos de señales

Si pensamos que el tiempo crece hacia la derecha del eje, toda señal a la izquierda de otra es generada anteriormente, o sea la más nueva, la última está a la derecha.

Entre la señal

$$y(t) = x(t) \quad \text{y} \quad z(t) = x(t-1)$$

cuando $t = 0$ resulta

$$y_{(0)} = x_{(0)} \quad z_{(0)} = x_{(-1)}$$

o sea es $z_{(t)}$ anterior a $y_{(t)}$ pues luego de un segundo, $t=1$ $z_{(1)}$ toma el valor de $y_{(0)}$, se dice que restar un número positivo “*atrás*” la señal así como sumarle un número positivo la “*adelanta*” pues si fuese

$$z(t) = x(t+1)$$

El $x_{(0)}$ se obtiene para $t = -1$ o sea el $z_{(-1)}$ que es anterior o adelantada el 0.

Así por ejemplo, vemos los siguientes gráficos:

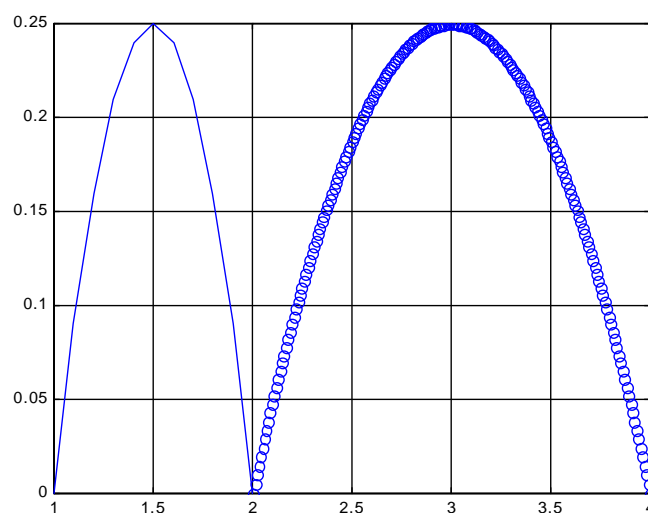


Figura 1-16

La señal ‘-’ está adelantada a la señal ‘o’ es decir es anterior, mas vieja.

1.7. Señales básicas en tiempo continuo

1.7.1. Señal: paso, escalón, posición, o función de Heaviside

Esta señal es como el nombre lo indica, es escalón. A lo largo del estudio de ingeniería se tratan con cantidades constantes y en la mayoría de las experiencias se trabaja a partir del tiempo cero, es decir no se consideran tiempos negativos, por ello como hipótesis de trabajo se parte de $t > 0$, de estas

consideraciones surge de gran utilidad una señal escalón denominada $u(t)$ (de unidad) o $I(t)$ y es definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

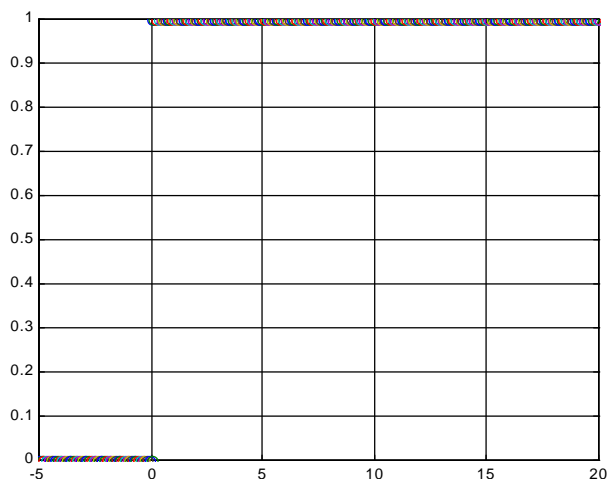


Figura 1-17

Observamos que $u(t)$ no está definida en cero, el dominio de esta función son los $\mathbb{R} \neq 0$, luego es una función continua en su dominio.

A veces es necesario adoptar un valor en $t = 0$ de función, en este caso estamos frente a una función discontinua. En $t = 0$ se suele adoptar 0, $\frac{1}{2}$ ó 1, depende del análisis que se esté haciendo.

En general $u(t)$ es tal como la definimos y hago la aclaración que no debe confundirse con señales de “entrada” en sistemas donde también se usa $u(t)$, pero no se trata del escalón.

También, a veces, esta señal escalón “*no se la denota*”, se da en forma tácita cuando se establece que la experiencia se realiza a partir de $t > 0$.

Esta señal $u(t)$ puede multiplicarse por un número, desplazarla, sumarla a otra señal, en general soporta las operaciones propias de las funciones.

A propósito, observar que $u(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$ “*no es periódica*”.

1.7.2. Señal rampa, velocidad, recta

Esta señal es $t \cdot u(t)$ y se la define como

$$t \cdot u(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

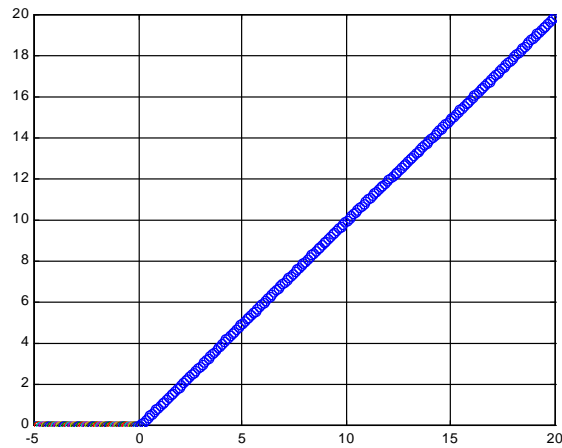


Figura 1-18

Si $x(t) = t \cdot u(t)$ observamos que

$$\frac{d x(t)}{d t} = u(t)$$

o sea la derivada de la rampa es el escalón, lo mismo podemos decir que

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = x(t)$$

Esta propiedad establece cierta familiaridad entre el escalón y la rampa.

1.7.3. Señal parábola, aceleración

Siguiendo con la familia de señales más frecuentemente usadas en el estudio de sistemas, aparece la parábola

$$x(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$$

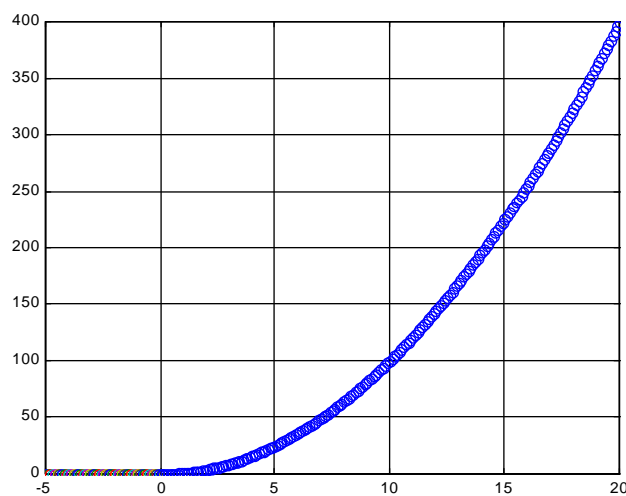


Figura 1-19

observamos que si $p(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$, entonces $\frac{d p(t)}{d t} = t \cdot u(t)$ rampa y que

$$\int_{-\infty}^t t u(t) dt = \frac{t^2}{2} \cdot u(t) \quad \text{parábola}$$

Se podría seguir encontrando parentesco, muchos textos se refieren a $u(t)$ como escalón, $u_1(t)$ rampa, $u_2(t)$ como parábola y así sucesivamente parábola cúbica como $u_3(t)$, etc.

1.7.4. La señal impulso, función singular impulso o función generalizada impulso

Como la denominación indica tratamos de definir un impulso (impacto) muy, ... pero muy breve. Que exista, o sea se le asocie cierta energía unitaria, decir que posee energía asociada es decir que existe y dura un tiempo que tiende a un punto o sea a cero.

Se puede definir esta señal $\delta(t)$ denominada delta Dirac o impulso (ponderomotriz) como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ 0 & \forall t \neq 0 \end{cases}$$

Se la gráfica por comprensión como una flecha en el origen

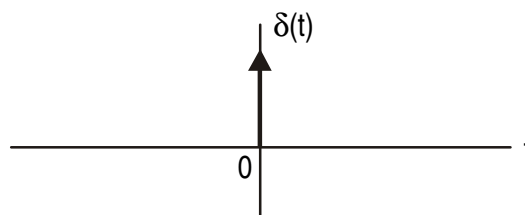


Figura 1-20

o sea es nula para todo t , salvo en $t = 0$ cuya amplitud no se define, existe ya que el área encerrada por esta señal es unitaria, energía uno.

Alguna alternativa de expresar esta señal aparece en textos de estudios de señales como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

pero no es muy rigurosa su expresión y no siempre aceptada.

A pesar de no ser función, puede soportar “ciertas” operaciones propias de las funciones: como ser: multiplicación de $\delta(t)$ por un número

Se indica como flecha y se denota como el valor del área de este impulso por ejemplo: $4 \delta(t)$

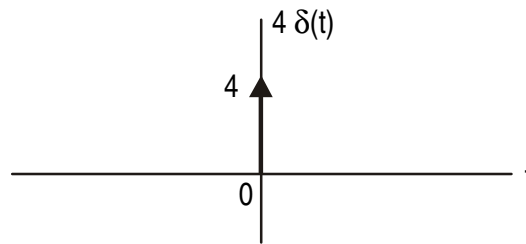


Figura 1-21

También $-2\delta(t)$ puede asociarse el área 2 y el $(-)$ significa por debajo del eje de la t .

También quizá $\delta(t-2)$ donde desplaza dos unidades a la derecha.

Se puede multiplicar por una señal $x(t)$ de forma $\delta(t) \cdot x(t)$ este producto solo no es nulo cuando $t=0$ o sea es lo mismo que poner $x(0) \cdot \delta(t)$ lo que significa un impulso cuya área es el valor $x_{(0)}$.

Al valor del área se la denomina “peso”.

Si multiplicamos $x(t) \cdot \delta(t-t_0)$ con $t_0 \in \mathbb{R}$ resulta el impulso $x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$ o sea un impulso en $t=t_0$ con peso $x(t_0)$

Se puede calcular el peso de una función impulso si $x(t) = K \cdot \delta(t)$ el peso es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \cdot \delta(t) dt = K$$

calculando el área de esta señal.

Así si se desea el valor de una señal $x(t)$ en el instante $t=t_0$ se puede conocer “muestreando” y determinando el peso, de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \cdot \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

ya que $x(t_0)$ no es un valor dependiente de t .

Esta propiedad es muy fuerte y hasta puede usarse como definición de $\delta(t)$ diciendo si existe una señal $\phi(t)$ continua, como función prueba, entonces $\delta(t)$ es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) dt = \phi(0)$$

o sea aplicada a $\phi(t)$ determina el peso del nuevo impulso, esto es $\phi(0)$.

La aplicación del producto integral de $\delta(t)$ genera una nueva variedad de posibilidades, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) \cdot x(t) dt = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot x\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = \frac{1}{|a|} \cdot x(0)$$

¿Porque el valor absoluto de a ?

El lector puede meditar si $t = \frac{\tau}{a}$ que sucede con el intervalo de integración cuando $a < 0$ y cuando $a > 0$.

Podemos incorporar a $\delta(t)$ a la familia de $u(t)$, si consideramos que

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = u(t)$$

pues si $t < 0$ esta integral es nula y si $t > 0$ es de valor uno.

Podemos hacer las siguientes consideraciones a fin de realizar parentelas entre $\delta(t)$ y $u(t)$. No deben adoptarse estas verificaciones como definiciones.

Sea una señal $u_{\Delta}(t)$ como la dibujada:

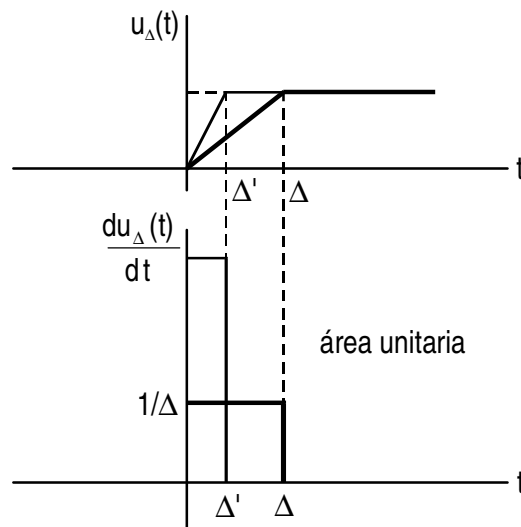


Figura 1-22

Observe que el área encerrada de $\frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$ es: $\Delta \cdot \frac{1}{\Delta} = 1$. Si ahora hacemos $\Delta \rightarrow 0$ vemos que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t) = u(t)$$

y el

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \delta(t)$$

es algo cuya área es unitaria y vale cero para todo $t \neq 0$. Luego $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

1.7.5. La derivada de $\delta(t)$

Esta derivada hay que estudiarla por la propiedad frente a la señal de prueba $\phi(t)$. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) dt = \phi(0)$$

su derivada (considerando que la derivada de la integral es la integral de la derivada si estas existen)

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \cdot \phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi'(t) dt = 0$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) \cdot \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi'(t) dt = -\phi'(0)$$

pues la segunda integral determinada por la segunda propiedad del muestreo de $\delta(t)$ el valor del $\phi'(0)$; en el origen. Esto muestra que la señal $\delta'(t)$ es un impulso que asigna a $\phi(t)$ el valor de $-\phi'(0)$ según lo observado en la primera integral.

Si $\delta'_{(t)} = \frac{d \delta_{(t)}}{dt}$ aplicando a $\phi(t) \rightarrow -\phi'(0)$

por extensión:

$$\delta^n_{(t)} = \frac{d^n \delta_{(t)}}{dt^n}$$

aplicando a

$$\phi(t) \rightarrow (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

La señal $\delta(t)$ posee solo realidad matemática, está claro que no se lo puede realizar físicamente, aunque la tendencia y la capacidad técnica haga que se esté alcanzando impulsos tan breves como altos y a los fines prácticos estos se comportan como $\delta(t)$.

1.7.6. Formas de la Función Singular Impulso

La función generalizada impulso $\delta(t)$ se puede definir como limite de secuencias de funciones de muestreo, así:

1. Pulso de Gauss

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$$

2. Pulso triangular

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (1 - \frac{|t|}{\tau}); & |t| < \tau \\ 0; & |t| > \tau \end{cases}$$

3. Pulso exponencial

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$

4.-Función de muestreo

$$\{ \text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \}$$

Se puede demostrar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) dt = 1$$

luego

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt).$$

Se puede extender esta “forma” para la función:

$$\text{senc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

1.7.7. Tren de Impulsos

Una señal muy usada como reloj (clock) y como señal de muestreo ideal entre otras tantas aplicaciones. El tren de impulsos, consiste en una señal periódica de impulsos $\delta(t)$ desplazada el tiempo de muestreo T_s :

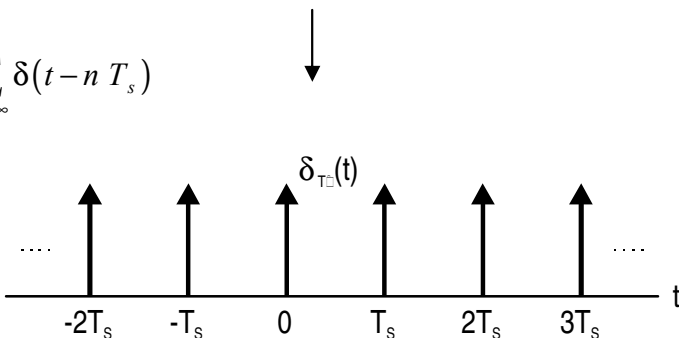
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n T_s)$$


Figura 1-22

1.7.8. Señal signus o signo

Se define a la señal signo como: $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ se trata de una señal impar.

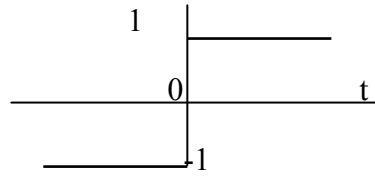


Figura 1-23

A fin de encontrarle cualidades relacionadas con el impulso y el paso, es que podemos realizar las siguientes reflexiones:

Sea una señal $\text{sgn}_\Delta(t)$ como la dibujada:

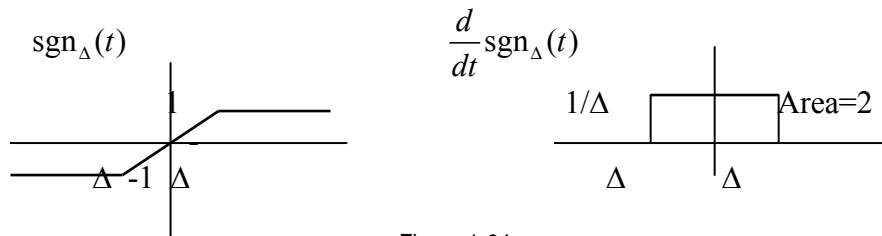


Figura 1-24

Tomando límites:

veremos que: $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \text{sgn}_\Delta(t) = \text{sgn}(t)$ y $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \text{sgn}_\Delta(t) = 2\delta(t)$

como $\text{sgn}(t) = u(t) + u(-t)$ vemos que $\frac{du(t)}{dt} = \frac{du(-t)}{dt} = \delta(t) = \delta(-t)$

entonces: $\frac{d \text{sgn}(t)}{dt} = 2\delta(t)$

1.7.9. Señal Exponencial

Las señales exponenciales son muy frecuentes en ingeniería, no es que se pretenda ilustrar sobre una señal extraña, sino, como ustedes han podido apreciar, las soluciones de EDOs son exponenciales, el crecimiento de una bacteria o el crecimiento de la población en general es exponencial, el perfil de una trompeta, de una bocina, de una antena es exponencial.

```
t=-1:0.01:6;
» x=exp(-0.2*t);
» plot(t,x),grid
```

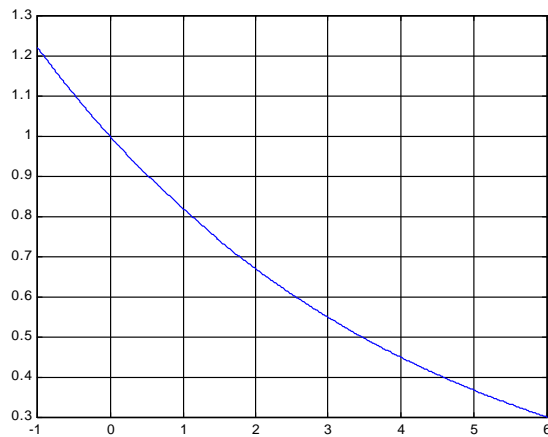


Figura 1-25

En general una señal exponencial toma la forma:

$$x_{(t)} = k \cdot e^{s \cdot t} \quad \text{donde } k, s \in \mathbb{C}$$

s es compleja de la forma $s = \sigma + j\omega$; el uso de estas letras griegas σ y ω es porque la historia ya ha instalado a s como variable compleja con parte real e imaginaria, como lo escrito. Lo más común es que $k \in \mathbb{R}$ y s sea o un número real puro o imaginario puro.

Si $x_{(t)} = e^{2t}$ la representación es

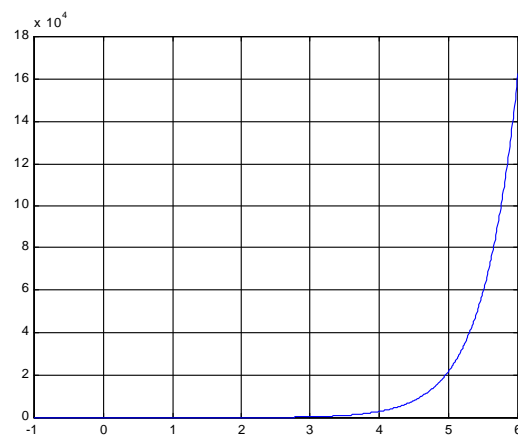


Figura 1-26

es monótona creciente.

Puede ser $x_{(t)} = e^{-t}$

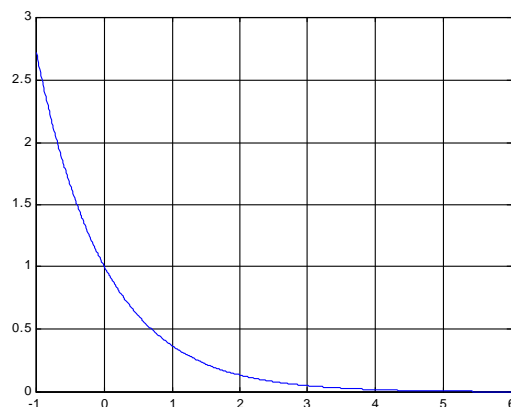


Figura 1-27

es monótona decreciente.

Y en nuestras aplicaciones es muy común la señal $x(t) = e^{j\omega t}$ en este caso t , que pertenece a un real y afecta al exponente imaginario, lo que compone una función de variable compleja, entonces en general $x(t)$ también es compleja:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x(t)\} + j \operatorname{Im}\{x(t)\}$$

La función exponencial compleja es una función del $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por lo tanto su gráfica está en el \mathbb{R}^4 ; no se la realiza. Para los estudiantes de ingeniería esto es grave, pues estamos acostumbrados a representar las funciones a fin de conocerlas más profundamente y ahora tendremos que estudiar las cualidades de la función $x(t) = e^{j\omega t}$ sin gráficas. Por suerte, Euler² estableció y se lo demuestra desarrollando en serie de Taylor³ en el origen (Mc Laurin⁴) que:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t)$$

a esta señal $e^{j\omega_0 t}$ se la denomina “*exponencial armónica*”. Es una señal periódica pues

$$e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T_0}$$

bastará que $e^{j\omega_0 T_0} = 1$ lo que significa

$$\omega_0 T_0 = 2\pi\ell, \quad \text{con } \ell \in \mathbb{Z}$$

² Leonardo Euler (1707-1789) nació en Basilea, Suiza. Miembro de la Academia de Berlín y San Petersburgo, su producción abarca todos los temas de matemática, se publicó (y aún se están publicando) 70 volúmenes

³ Brook Taylor (1685-1731) Matemático, músico, pintor. Publica en 1715 un centenar de páginas que aún hoy influyen en el desarrollo del Análisis Matemático. Colin Maclaurin (1698 -1746) Profesor de Edimburgo, alumno de Isaac Newton, geómetra por excelencia cita la fórmula de Taylor en sus trabajos.

⁴ Colin Maclaurin (1698 -1746) Profesor de Edimburgo, alumno de Isaac Newton, geómetra por excelencia cita la fórmula de Taylor en sus trabajos.

siendo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ el período fundamental.

Aceptada esta expresión de Euler, sabiendo que el $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ y que el $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$ entonces $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$

si sumamos estas expresiones resulta

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos(\omega t)$$

si los restamos

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j \sin(\omega t)$$

Que se adoptan como las “formas” exponenciales del coseno y del seno ya que

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

1.8. Señales pares e impares

Una señal $x(t)$ es par si $x(t) = x(-t)$, la denominación de par viene por los polinomios, señales que cumplen con esta condición, todas las potencias de los monomios deben ser pares o cero.

$$x_{(t)} = 5t^4 + 2t^2 + 3$$

si cambiamos t por $-t$ obtenemos la misma función.

La paridad establece una simetría respecto al eje vertical pues es el mismo valor de función para t que para $-t$.

Una señal $x(t)$ es impar si:

$$x(t) = -x(-t)$$

esto es así es porque los polinomios que las representan, poseen las potencias de los monomios impares.

$$x_{(t)} = 4t^3 + 8t$$

si cambiamos t por $-t$ resulta

$$x_{(t)} = -4t^3 - 8t$$

La señal impar es simétrica respecto a un punto, el origen.

Toda señal puede ser considerada como la suma de una parte par más una impar.

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

¿Como podemos conocer estas partes par e impar de $x(t)$?

Si a $x(t)$ la reflejamos como $x(-t)$ y sumamos

$$x(t) + x(-t) = 2 x_p(t)$$

el doble de la parte par y elimina la impar pues $x_i(t) = -x_i(-t)$ si es impar.

Así también $x(t) - x(-t) = 2 x_i(t)$. Por ejemplo si $x(t)$ es la dibujada

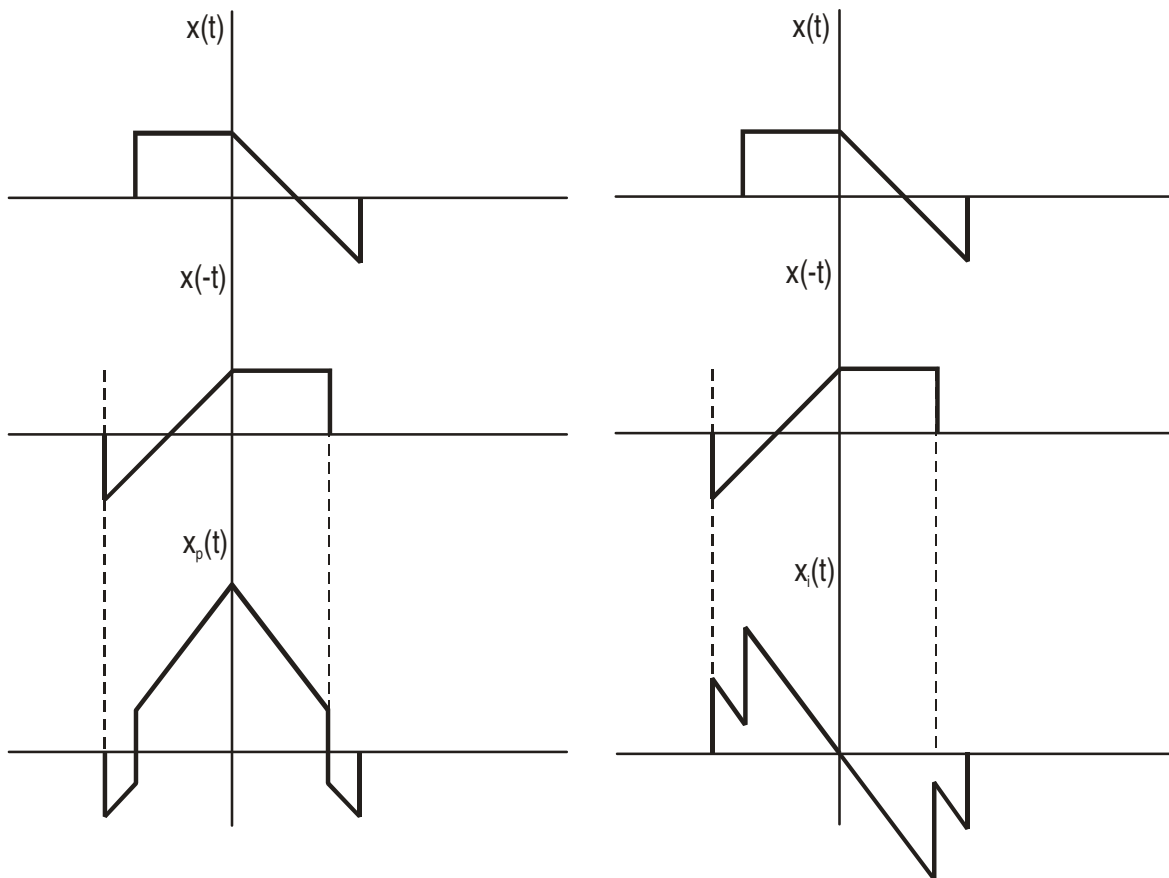


Figura 1-28

Si sumamos la parte par más la impar, recuperamos $x(t)$

Ejercicios resueltos

1- Encuentre la parte par e impar de $x(t)$:

a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

b) $x(t) = 1 + t^2$

Sol:

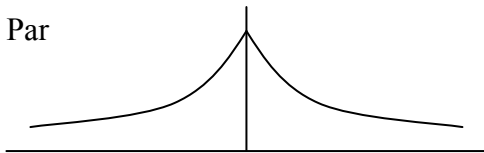
a)

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{e^{-t}u(t)}{2} + \frac{e^t u(-t)}{2}$$

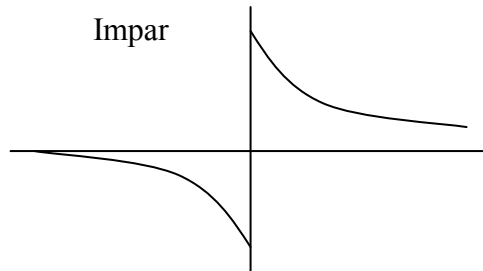
$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{e^{-t}u(t)}{2} - \frac{e^t u(-t)}{2}$$

Graficando:

Par



Impar



b)

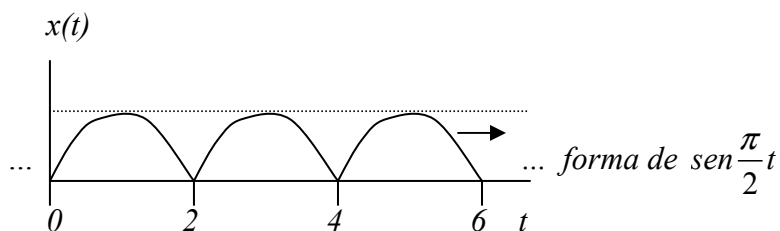
$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \frac{1+t^2}{2} + \frac{1+(-t)^2}{2} = 1+t^2$$

pues es una función "par" .

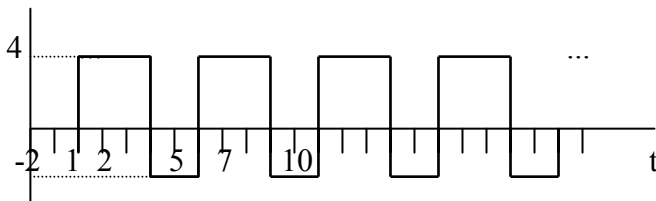
$$x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \frac{1+t^2}{2} - \frac{1+(-t)^2}{2} = 0$$

2- Calcule el valor medio o componente de continua de las siguientes señales:

a)



b)



Sol :

$$a) \quad x_m = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = -\frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi}$$

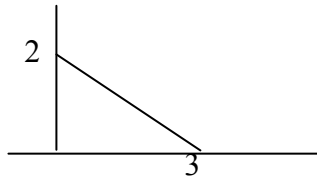
b)

El periodo es $T=4$

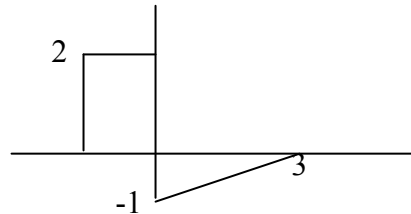
$$x_m = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt = \frac{1}{4} \int_2^5 4 dt - \frac{1}{4} \int_5^7 2 dt = 2$$

3- Obtenga en forma gráfica las partes par e impar de:

a)



b)



4- Calcule si es posible, la potencia o la energía de cada señal siguiente

$$a) \quad x(t) = e^{2t} \cdot u(-t)$$

$$b) \quad x(t) = e^{1+2t} \cdot u(1-t)$$

$$c) \quad x(t) = \cos(\pi t) \cdot u(t)$$

$$d) \quad x(t) = \frac{1}{1+|t|}$$

Sol

$$a) \quad \text{La señal es de energía, } E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt = \frac{1}{4} e^{4t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{4}$$

$$b) \quad \text{La señal es de energía, } E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^1 e^2 e^{4t} dt = \frac{1}{4} e^2 e^{4t} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{1}{4} e^6$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \cos^2(\pi t) \cdot dt =$$

c) La señal es de potencia,

$$= 2 \int_0^{1/2} \frac{1 + \cos 2(\pi t)}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \text{sen} 2(\pi t) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|t|}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2} dt$$

d) La señal es de energía, Si $t > 0$, $|t| = t$; Si $t < 0$, $|t| = -t$

$$E = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt = 1 + 1 = 2$$

5- Son periódicas las siguientes señales? Si lo son calcule su periodo.

a) $u[\text{sen}(\pi t)]$

b) $\delta[\text{sen}(\pi t)]$

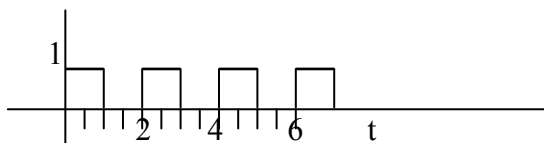
c) $x(t) = 2e^{j16\pi t} + 3e^{-j7\pi t}$

d) $x(t) = 2\cos(16\pi t) + 3\text{sen}(200t)$

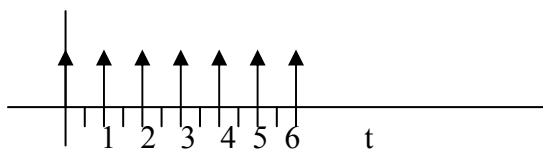
Sol.

$$x(t + T_0) = x(t); \forall t, T_0 \in \mathbb{R}$$

a) Si $\pi T_0 = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, basta que $T_0 = 2$ ($k=1$) periodo fundamental
 grafica de $x(t)$:



b) Idem, con señales impulsos y periodo $T_0=1$



c)

$e^{j16\pi t}$ es periodica de $\omega_1 = 16\pi$, $T_1 = 8$

$e^{-j7\pi t}$ es periodica de $\omega_2 = 7\pi$, $T_1 = 7/2$

luego $\omega_0 = 16.7\pi$ contiene 16 veces a ω_2 y 7 veces ω_1

$$T_0 = \frac{2\pi}{16.7\pi} = \frac{1}{56}$$

d)

$\cos 16\pi t$ es periodica $\omega_1 = 16\pi$

$\text{sen } 200t$ es periodica de $\omega_2 = 200$

como ω_1 y ω_2 no pueden ser tal que $\omega_0 = n\omega_1 = m\omega_2$; con $n, m \in \mathbb{Z}$
 no es periódica.

Problemas

Problema 1

Sea $x(t) = \cos [\omega_x(t + \tau_x) + \theta_x]$

Determine la frecuencia en Herz y el período de $x(t)$ para cada uno de los siguientes casos:

	ω_x	τ_x	θ_x
1)	$\pi/3$	0	2π
2)	$3\pi/4$	1/2	$\pi/4$
3)	3/4	1/2	1/4

Problema 2

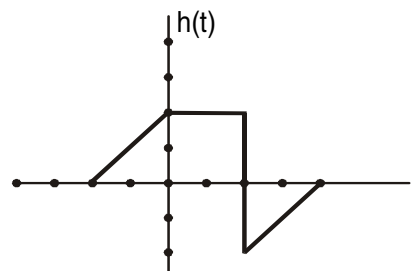
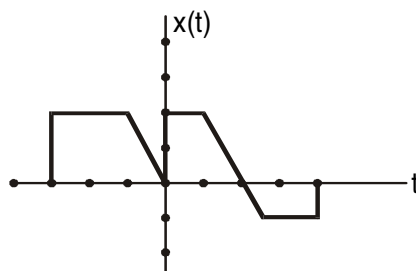
Con $x(t) = \cos [\omega_x(t + \tau_x) + \theta_x]$ e $y(t) = \cos [\omega_y(t + \tau_y) + \theta_y]$, determine para cada una de las siguientes combinaciones cuando $x(t)$ es igual a $y(t)$ para todo t .

	ω_x	τ_x	θ_x	ω_y	τ_y	θ_y
1)	$\pi/3$	0	2π	$\pi/3$	1	$-\pi/3$
2)	$3\pi/4$	1/2	$\pi/4$	$11\pi/4$	1	$3\pi/8$
3)	$3/4$	1/2	1/4	3/4	1	3/8

Problema 3

Dadas las siguientes señales $x(t)$ y $h(t)$ grafique lo pedido:

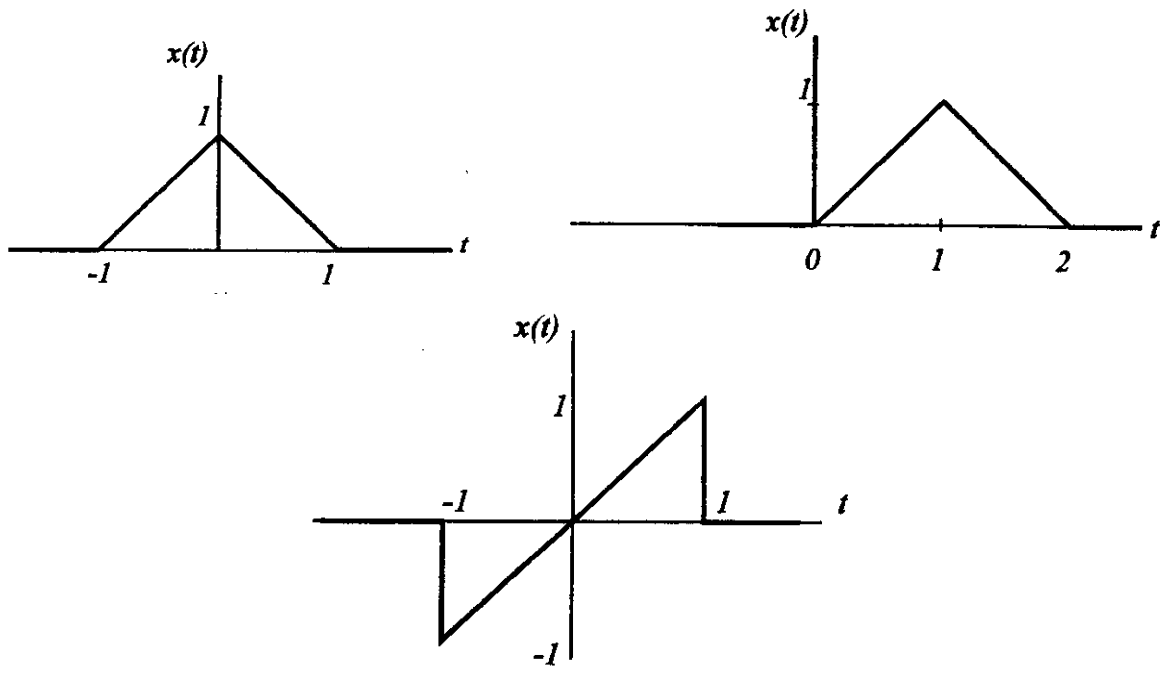
- a) $x(t-1)$
- b) $x(3t)$
- c) $x(-t)$
- d) $x(2-t)$
- e) $x(1-t/3)$
- f) $h(t+3)$
- g) $h(1-2t)$
- h) $5 h(t/5)$
- i) $h(t/2) \delta(t+1)$
- j) $1/2 h(t) u(t) + h(-t) u(t)$



k) Grafique los productos $x(t) \cdot h(t)$ y $x(t) \cdot h(-t)$

Problema 4

Para cada una de las siguientes señales, determine si es par, impar o ninguna:



Problema 5

Sea $x(t) = \sqrt{2}(1+j)e^{\frac{j\pi}{4}}e^{(-1+j2\pi)t}$. Grafique y denomine las siguientes funciones:

- $Re\{x(t)\}$
- $Im\{x(t)\}$
- $x(t+2) + x(t-2)$

Ayuda: pueden usar la relación: $1+j = \sqrt{2}e^{\frac{j\pi}{4}}$

Problema 6

a) Sea $x(t)$ e $y(t)$ señales periódicas con período fundamental T_1 y T_2 respectivamente. Bajo que condiciones la suma de $x(t) + y(t)$ es periódica, y que es el período fundamental?

b) Considere las señales:

$$x(t) = \cos(2\pi t/3) + 2 \sin(16\pi t/3)$$

$$y(t) = \sin \pi t$$

Muestre que $z(t) = x(t)y(t)$ es periódica.

c) Demuestre si se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2(t)dt$$

Problema 7

Determine si son o no periódicas las señales, si lo son, determinen el período fundamental

a) $x(t) = e^{(j\pi-1)t}$

b) $x(t) = 2 \cos (3t - \pi/4)$

c) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

d) $x(t) = \cos (\omega_0 t + \Phi)$

e) $x(t) = \{\sin (t - \pi/6)\}^2$

Problema 8}

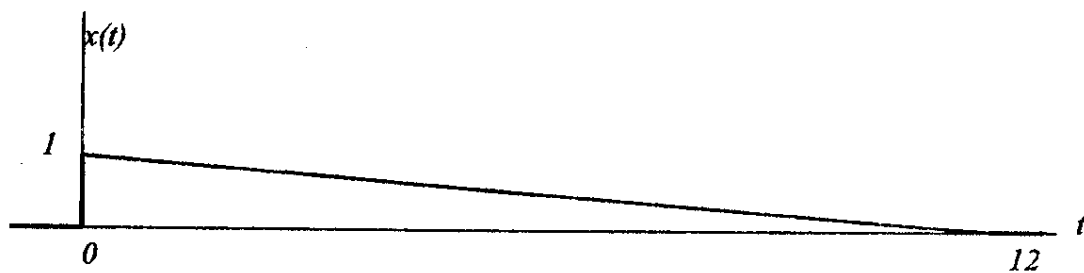
Grafique cada una de las siguientes señales:

a) $x(t) = u(t + 3) - u(t - 3)$

b) $x(t) = e^{-t} u(t)$

Problema 9

Para $x(t)$ de la figura, grafique las señales resultantes de las operaciones:



a) $x(1-t) u(t+1) - u(t-2)$

b) $x(1-t)[u(t+1) - u(2-3t)]$

2

Señales de tiempo discreto

2.1. Introducción

Las técnicas para analizar señales y sistemas a tiempo discreto son conceptualmente similares a las de tiempo continuo pero guardan diferencias que son fundamentales.

La gráfica de estas señales las realizamos con la orden *stem* de *Matlab* y aparece el valor de la señal vinculado al eje de los tiempos con segmentos verticales o bastones. Las señales de tiempo discreto son sucesiones en sentido amplio o sea para la variable $n \in \mathbb{Z}$.

Así $x[n] = n^2$ significa

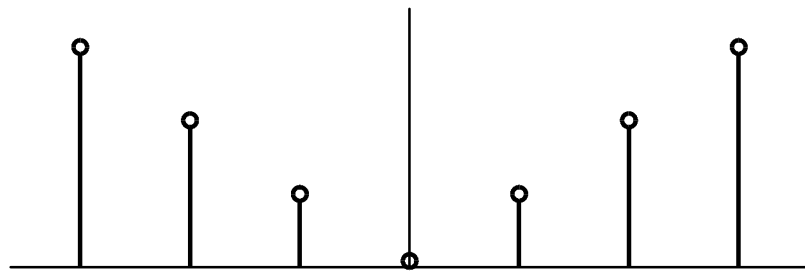


Figura 2-1

esta “forma” de graficarla en ejes x-y es como las señales de tiempo continuo.

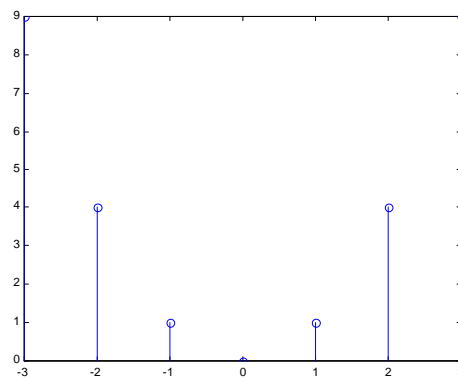


Figura 2-2

```
n=-3:1:3;  
x=n.^2;
```

```
stem(n,x),xlabel('n'), ylabel('x(n)')
```

En el estudio de las sucesiones muchas veces se grafica sólo en su imagen, pues el dominio son los \mathbb{N} o los \mathbb{Z} así esta sucesión $x[n] = n^2$ se suele graficar como:

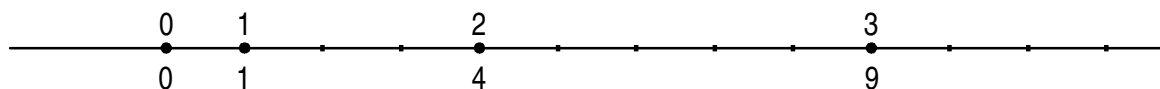


Figura 2-3

Es común indicar las sucesiones sin los paréntesis sobre la variable, así: $a_n = n = \{1, 2, 3, \dots\}$ con $n \in \mathbb{N}$; está bien escrita, nosotros usamos indistintamente la notación de sucesiones a_n o de funciones $a_{(n)}$ o destacadas $a_{[n]}$.

La variable tiempo discreta es n o k , así cuando aparezcan estas letras implicadas como tiempo se presupone que pertenecen a un entero.

2.2. Propiedades de las señales discretas

2.2.1. Compresión – expansión

Ciertas transformaciones aplicadas a la variable tiempo discreto son similares a las de tiempo continuo, lo que a su razonamiento conceptual se refiere, pero surgen diferentes en cuanto se trabaje con secuencias, así sucede con la compresión y expansión.

Si conocemos $x(n) = n$ para $0 \leq n \leq 4$, cero para otro n , podemos obtener $x(2n)$ como una compresión:

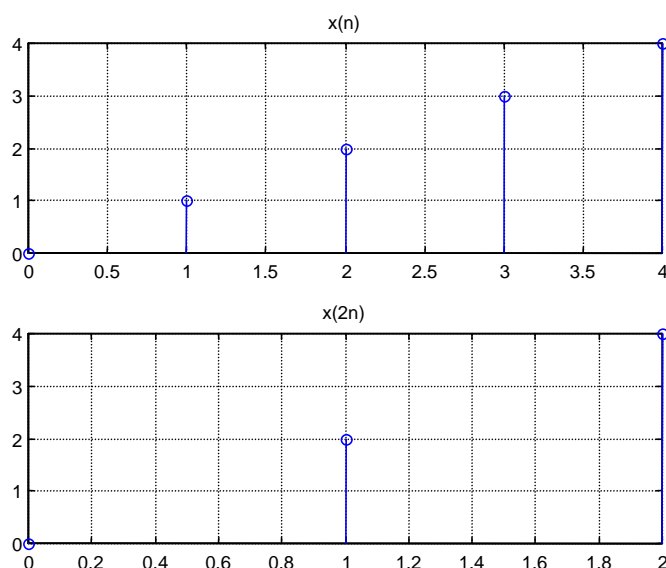


Figura 2-4

$x(2n)$ sólo es no nulo para valores de $n=1$ y 2 de $x(n)$ donde $x(2n)$ toma el valor de $x_{(2)}$ y de $x_{(4)}$, conclusión: se “*pierde*” información si comprimimos esta señal.

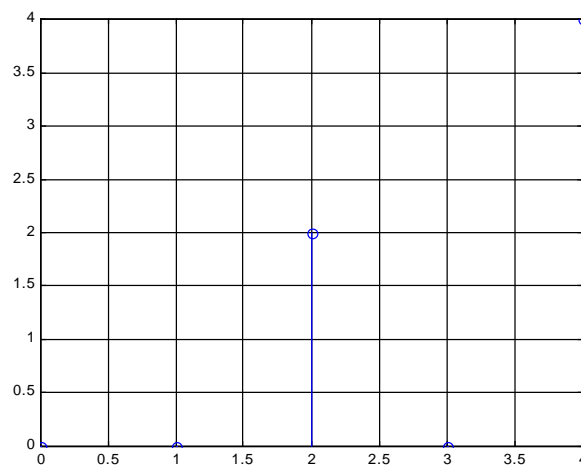


Figura 2-5

Al realizar la inversa es decir expandir, resulta que lo que recuperamos es:

$$y(n) = x(2n) \xrightarrow{\text{expandir}} z(n) = y\left(\frac{n}{2}\right) \neq x(n)$$

sucede que

$$n = 0 \quad z(0) = x(0) = 0$$

$$n = 1 \quad z(1) = y(1/2) \quad \text{no existe, asignamos cero.}$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow z(2) = y(1) = 2$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow z(3) = y(3/2) \quad \text{no existe., asignamos cero.}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow z(4) = y(2) = 4$$

que difiere de la señal original $x(n)$, o sea las operaciones de expansión y compresión que en tiempo continuo eran operaciones inversas:

$$x(t) \xrightarrow{\text{compresión } k>1} x(kt) = y(t) \xrightarrow{\text{expansión}} y\left(\frac{t}{k}\right) = x(t)$$

para todo $k_{>1} \in \mathbb{R}$ ahora en tiempo discreto no es posible. Al comprimir se pierde información y al expandir no hay como recuperarla.

Vemos además, que se puede obtener dado $x(n)$ una compresión con $y(n) = x(kn)$ si $k \in \mathbb{N}$ y no tiene sentido si k no fuese natural, por ejemplo $y(n) = x(1,5n)$ pues no existe definición de señal para valores de la variable que no sean enteros.

En el caso de expansión también posee limitaciones si $x(n)$ es:

$$x\left(\frac{n}{2}\right)$$

cuando n sea 1 o 3 o cualquier otro impar, no tiene definición, existe solo si $x\left(\frac{n}{k}\right)$ con $k \in \mathbb{N}$ y cuando n es múltiplo de k de lo contrario caemos en un valor donde no está definida la función, luego se dice que

$$x\left(\frac{n}{k}\right) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{k}\right) & \text{si } n \text{ es múltiplo de } k \\ 0 & \text{otro } n \text{ (o no existe)} \end{cases}$$

Se puede obtener con las mismas restricciones vistas a $x(kn)$ con $k \in \mathbb{N}$ negativo, en este caso es la rotación (o reflexión) en torno del eje vertical. Con similares consideraciones que las vistas en tiempo continuo.

2.2.2. Desplazamientos de la señal

El desplazamiento $x(n - n_0)$ es hacia la izquierda si $n_0 > 0$ y hacia la derecha si $n_0 < 0$.

No tiene sentido desplazamientos que no sea n_0 número entero, pues si decimos $x(n + k)$ con $k \in \mathbb{Z}$ es avanzar o atrasar en $x(n)$ pero no existe dominio si k fuese 0,5 o 1,2 o sea “*solo puede desplazarse valores enteros*” y esto establece una nueva limitación y diferencia frente a las de tiempo continuo.

Si $x_{(t)} = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ está corrida en fase un valor de ϕ_0 y esto es equivalente a una corrimiento en el tiempo pues es lo mismo poner

$$x_{(t)} = A \cos\left(\omega_0 \left[t + \frac{\phi_0}{\omega_0}\right]\right) = A \cos(\omega_0 [t + t_0])$$

o sea un **corrimiento de fase equivalente a un corrimiento de tiempo** $t_0 = \frac{\phi_0}{\omega_0}$ lo que permite además afirmar que un corrimiento en el tiempo significa corrimiento de fase.

Pero en discreta no es así, si tenemos

$$x_{[n]} = A \cos[\Omega_0 n + \phi_0]$$

es una señal corrida en fase ϕ_0 que significa

$$x_{(n)} = A \cos \left(\Omega_0 \left[n + \frac{\phi_0}{\Omega_0} \right] \right)$$

un corrimiento en el tiempo solo si $\frac{\phi_0}{\Omega_0} \in \mathbb{Z}$ de lo contrario **corrimientos de fase no significan corrimientos en el tiempo**, no es lo mismo señal desplazada un valor n_0 sino es otra señal distinta para cada fase ϕ_0 si:

$$\frac{\phi_0}{\Omega_0} \notin \mathbb{Z}.$$

Sin embargo el corrimiento en el tiempo si significa correr la fase:

$$x_{(n)} = A \cos [\Omega_0 (n + n_0)] = A \cos [\Omega_0 n + \Omega_0 n_0] = A \cos [\Omega_0 n + \phi_0]$$

con $\phi_0 = \Omega_0 n_0$ y esto siempre es posible pues $\phi_0 \in \mathbb{R}$

2.2.3. Periodicidad

Se dice que $x(n)$ es periódica si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x(m + N_0) = x(n) \quad \forall n$$

El mínimo entero N_0 que satisface esta relación se denomina período fundamental.

Sea

$$x(n) = A \cos(\Omega_0 n + \phi_0)$$

será periódica si es igual a:

$$x(n + N_0) = A \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N_0 + \phi_0)$$

bastará que: $\Omega_0 N_0 = 2\pi \ell$ con $\ell \in \mathbb{Z}$. El período fundamental si existe es $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$.

Digo si existe porque es necesario que N_0 si existe, sea un natural por lo que Ω_0 implique el valor de $q \cdot 2\pi$ (racional q)

Ejemplo

La señal $x(n) = 3 \cos(10n)$ ¿Es periódica? Determine su período.

Solución

Vemos

$$x_{(n+N_0)} = 3 \cos[10(n+N_0)] = 3 \cos[10n + 10N_0]$$

como sabemos que $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi \ell)$ con $\ell \in \mathbb{Z}$, entonces se tendrá que cumplir que

$$10 N_0 = 2\pi \ell \quad \text{con } \ell \in \mathbb{Z} \quad \text{y con } N_0 \in \mathbb{N}$$

Claro está que $N_0 = \frac{2\pi \ell}{10}$ y esto no puede ser un número natural, luego N_0 no existe y la señal no es periódica.

Pero... como, no es que el coseno y el seno son periódicas?

Claro, pero si la función que implica senos y cosenos es de variable “*continua*”; de lo contrario no es una función coseno o seno con las propiedades conocidas de hecho el $\cos(10n)$ no es periódica.

¿Bajo que condiciones una señal $x_{(n)} = A \cos(\Omega_0 n)$ es periódica? Analicemos:

$$x(n+N_0) = A \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N_0)$$

$$\text{Tendrá que ser } \Omega_0 N_0 = 2\pi \ell \quad \text{con } \ell \in \mathbb{Z} \quad \text{y } N_0 \in \mathbb{N}$$

lo cual exige que

$$\Omega_0 = 2\pi \frac{\ell}{N_0} = 2\pi q \quad \text{con } q \in \mathbb{Q}$$

Concluimos que las señales de la forma seno o coseno de variable discreta son periódicas si su frecuencia digital Ω_0 es un racional q por 2π . Si esto no se cumple no son periódicas.

Observamos que en Ω_0 debe estar implicado π para que pueda ser periódica, la forma de Ω_0 es $\Omega_0 = q \pi$.

Hablamos de frecuencia digital y tuvimos la precaución de denotarlo Ω (omega mayúscula) y a la frecuencia analógica con ω (omega minúscula) y desde ya “*parece*” que se pretende establecer diferencias de significado. Comparemos las señales analógicas y discretas periódicas:

Señal de tiempo continuo		Señal de tiempo discreto	
$x(t) = \cos(\omega_0 t)$		$x(n) = \cos(\Omega_0 n)$	
I	$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)$	I	$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

II	$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right)$	II	$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{6} n\right)$
III	$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4} t\right)$	III	$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$
IV	$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right)$	IV	$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$
Si seguimos aumentando ω_0 obtenemos señales distintas		Si seguimos aumentando Ω_0 no siempre obtenemos señales periódicas distintas	
V	$x(t) = \cos\left(\frac{9}{8} \pi t\right)$	V	$x(n) = \cos\left(\frac{9}{8} \pi n\right)$
VI	$x(t) = \cos\left(\frac{17}{8} \pi t\right)$	VI	$x(n) = \cos\left(\frac{17}{8} \pi n\right)$ igual a 1
VII	$x(t) = \cos\left(\frac{13}{6} \pi t\right)$	VII	$x(n) = \cos\left(\frac{13}{6} \pi n\right)$ igual 2

Conclusión

ω_0 puede variar de 0 a infinito generando siempre señales distintas, las frecuencias aumentan y la señal cambia.

Ω_0 puede variar de 0 a 2π generando señales periódicas distintas, pero a partir de este valor de 2π genera señales igual a alguna ya representada en el intervalo entre 0 y 2π .

O sea las infinitas señales distintas periódicas de $x(n) = \cos(\Omega_0 n)$ están definidas para $\Omega_0 \in [0, 2\pi[$.

Cuando se interpreta la frecuencia analógica ω_0 se piensa que aumenta la frecuencia y trae como consecuencia mayor cantidad de períodos por segundo o sea $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$, si f_0 aumenta, lo

hace $\frac{1}{T_0}$ el número de T_0 en un segundo.

Cuando se interpretan señales discretas, la frecuencia Ω_0 determina una modalidad de variación de la señal periódica, la mínima variación que sufre es cuando $\Omega_0 = 0$ y la máxima variación es cuando $\Omega_0 = \pi$, significa la rapidez de variación de la señal $x(n)$

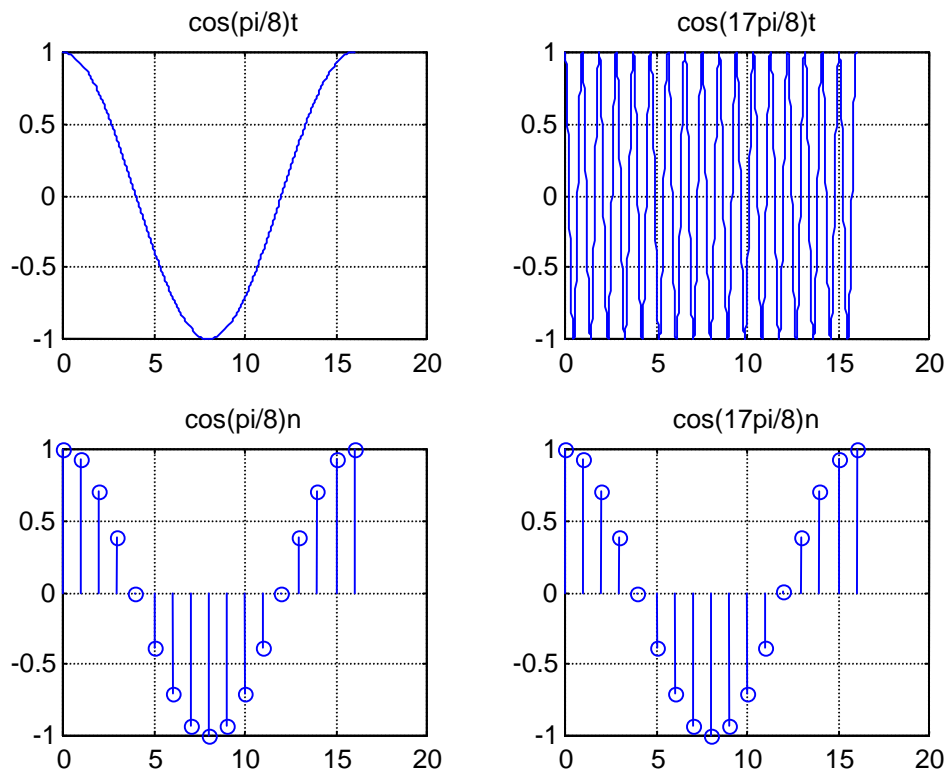


Figura 2-6

```

clear all
» t=0:0.01:16;
» x1=cos((pi/8)*t);
» x2=cos((17*pi/8)*t);
» n=0:1:16;
» y1=cos((pi/8)*n);
» y2=cos((17*pi/8)*n);
» subplot(2,2,1),plot(t,x1),grid,title('cos(pi/8)t'),
» subplot(2,2,2),plot(t,x2),grid,title('cos(17pi/8)t'),
» subplot(2,2,3),stem(n,y1),grid,title('cos(pi/8)n'),
» subplot(2,2,4),stem(n,y2),grid,title('cos(17pi/8)n');

```

2.2.4. Paridad

$x(n)$ es par si

$$x(n) = x(-n) \quad \forall n$$

Impar si

$$x(n) = -x(-n) \quad \forall n$$

$$x_p(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)]$$

$$x_i(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)]$$

Toda señal es la suma de su parte par mas la parte impar: $x(n) = x_i(n) + x_p(n)$

2.3. Señales elementales de tiempo discreto

2.3.1. Señal Impulso

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

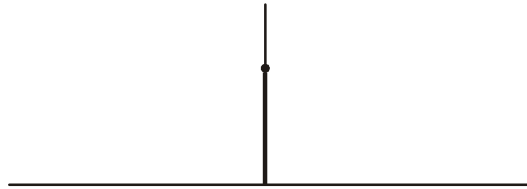


Figura 2-7

Se puede desplazar $\delta(n-k)$ si $k \in \mathbb{Z}$ o sea

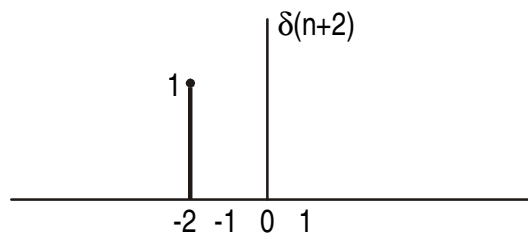


Figura 2-8

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

Se puede multiplicar por un número real K :

$$K\delta(n) = \begin{cases} K & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

2.4. Propiedad de muestreo de $\delta(n)$

$$x(n) \delta(n-k) = x(k) \delta(n-k)$$

a cualquier señal $x(n)$ la podemos pensar como la suma de señales deltas desplazadas. Supongamos

$$x(n) = n(u(n) - u(n-4)) = \{0, 1, 2, 3\}$$

Se puede escribir

$$x(n) = 0 \cdot \delta(n) + \delta(n-1) + 2 \cdot \delta(n-2) + 3 \cdot \delta(n-3)$$

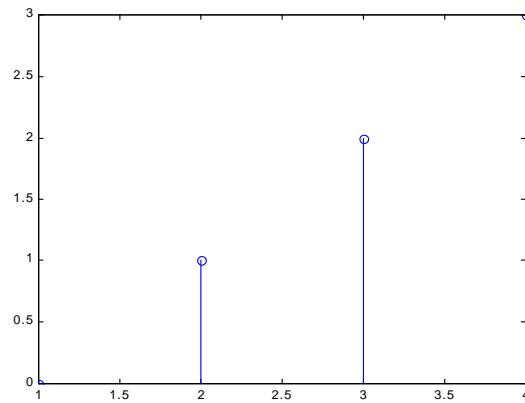


Figura 2-9

En general:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

2.4.1. Señal Paso

$$l(n) = u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Se vincula con $\delta(n)$ pues $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$; primer diferencia hacia atrás. Además

$$\sum_{k=-\infty}^n \delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} = u(n)$$

Otra forma de escribir esto sería

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = u(n)$$

2.4.2. Señal rampa

En este caso puede expresarse como:

$$x(n) = n.u(n)$$

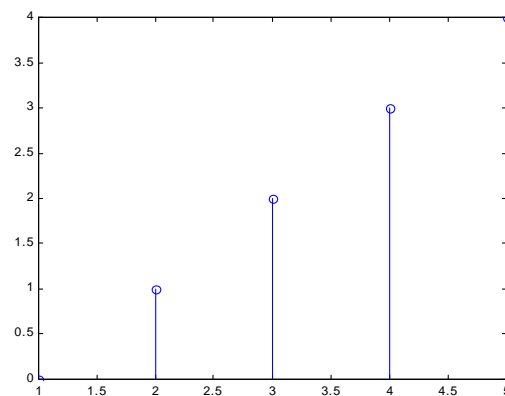


Figura 2-10

2.4.3. Exponenciales

En general poseen la forma de $x(n) = C a^n$ con $C, a \in \mathbb{C}$, el caso de señal real es $C=1$ (número real) y $a \in \mathbb{R}$ de esta forma es una sucesión real valuada

Las gráficas de:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \quad y(n) = (2)^n \text{ si } 0 \leq n \leq 4; \quad z(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

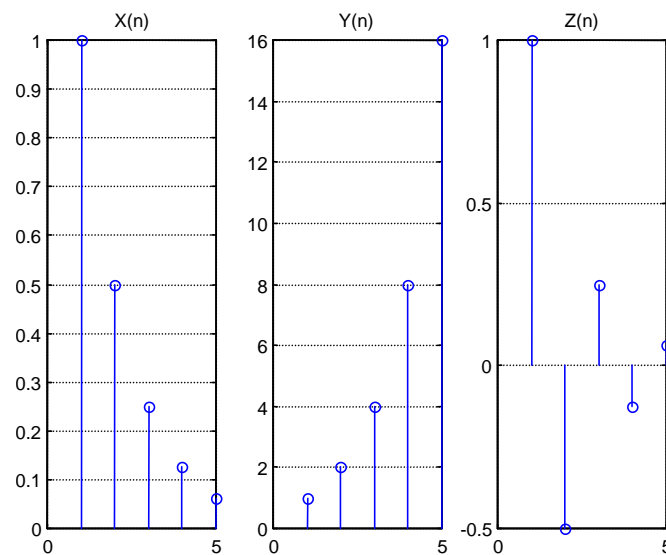


Figura 2-11

```
n=0:1:4;
x=(1/2).^n;
y=2.^n;
z=(-1/2).^n;
subplot(1,3,1),stem(x),grid,title('X(n)'),
subplot(1,3,2),stem(y),grid,title('Y(n)'),
subplot(1,3,3),stem(z),grid,title('Z(n)');
```

La relación de Euler es posible si $a = e^{j\Omega_0}$ la exponencial resulta:

$$x(n) = e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j \sin(\Omega_0 n)$$

periódica si $\Omega_0 = q \cdot 2\pi$ con $q \in \mathbb{Q}$

Esta exponencial compleja, demás está decir, reviste una gran importancia en nuestro estudio de señales.

2.5. Potencia y energía de señales discretas

Las sucesiones de energía son tales que la energía asociada normalizada es finita:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad [\text{Joule}]$$

En un intervalo

$$E = \sum_{n=-N_0}^{N_1} |x(n)|^2$$

Observamos que tomamos el valor absoluto de $x(n)$ al cuadrado a fin de considerar los casos donde $x(n)$ es compleja.

Si E es finita para la señal a lo largo de todo n , entonces se dice que es señal de energía. Muchas señales que poseen energía infinita tienen potencia media finita definida como:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2$$

Si fuese periódica

$$P = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} |x(n)|^2$$

Si P es finita y distinta de cero la señal se denomina de potencia.

Por ejemplo la potencia y energía de la sucesión escalón unitario. La energía del escalón es infinita, pues la serie

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} u^2(t) \rightarrow \infty$$

Puede ser de potencia, veamos:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

Consecuentemente la señal escalón unidad es una señal de potencia. Así como una señal rampa no es señal de potencia ni de energía.

2.6. Ecuaciones de diferencia (Edd)

Las ecuaciones en diferencia lineales poseen una semejanza con la EDO. De hecho las EDO expresan relaciones de entradas y salidas de SLIT en tiempo continuo, y la Edd las relaciones en tiempo discreto.

Veamos como surge la necesidad de estas ecuaciones con un ejemplo simple:

Un criadero de conejos sabe que cada pareja tiene 12 crías al mes, o sea incrementa los conejos en 6 por 1.

Se desea conocer el número de conejos al fin del año (12 meses)

El planteo de solución es partiendo de supongamos dos conejos así:

$$x(0) = 2$$

$$x(1) = x(0) + 6 \cdot x(0) = 7x(0) = 2 + 6 \cdot 2 = 14$$

$$x(2) = x(1) + 6 \cdot x(1) = 7x(1) = 7^2 x(0) = 14 + 12 = 26$$

$$x(3) = x(2) + 6x(2) = 7x(2) = 7^3 x(0) = 686$$

:

$$x(n+1) = 7^n x(0)$$

$$x(12) = 7^{11} x(0) = 3.954.653.486$$

A fin de estudiar comparaciones veamos una EDO de primer orden homogénea y una Edd de primer orden, homogénea también.

Sea:

$$y' + ay = 0 \quad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay \quad \frac{dy}{y} = -at \quad \ln y = -at \quad \text{solucion general } y = Ce^{-at}$$

$$\text{Solucion particular } y = e^{-at}$$

Sea:

$$y(n+1) + ay(n) = 0 \quad y(0) = 1$$

$$y(1) = -ay(0) = -a$$

$$y(2) = -ay(1) = a^2$$

$$y(n) = (-1)^n a^n$$

La "forma" de solución es tal que la ecuación característica de ambas ecuaciones diferencial y en diferencia poseen digamos la raíz r , entonces en la EDO la solución es de la forma e^{rt} y en la Edd de la forma r^n

2.6.1 Diferencia

Se denomina primer diferencia (hacia delante) a : $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

Esta diferencia que puede ser aplicando el operador Δ posee propiedades interesantes:

1- La diferencia de una constante por la función es la constante por la diferencia de la función:

$$\Delta\{ax(n)\}=a\Delta\{x(n)\}$$

2- La diferencia de la suma de funciones es la suma de las diferencias

$$\Delta\{u(n)+v(n)\}=\Delta\{u(n)\}+\Delta\{v(n)\}$$

2.6.2 Suma

Si dos funciones $U(n)$ y $u(n)$ satisfacen que $\Delta U(n)=u(n)$, entonces $u(n)$ se denomina diferencia de $U(n)$ y recíprocamente $U(n)$ es suma de $u(n)$.

$u(n)$ es una solución de la ecuación $\Delta U(n)=u(n)$, o ampliando $U(n+1)-U(n)=u(n)$.

Se denota con: $\Delta^{-1}u(n)=U(n)+C$, C es una constante, pues la inversa de la diferencia no es una biyección ya que $U(n)$ puede tomar valores dentro de la familia de $U(n)+C$ y cumplir con la ecuación.

Se denominan a Δ y Δ^{-1} operadoras en el sentido que se pueden "aplicar" :

$$\Delta^{-1}(\Delta U(n))= \Delta^{-1} \Delta U(n) = U(n)+C$$

en sentido amplio, Δ^{-1} y Δ son operaciones inversas, (equivalente a derivar e integrar).

2.6.3 Corrimientos

Se suele indicar los corrimientos de las funciones con operadores desplazamiento, como:

$$Sx(n)=x(n+1) \quad \text{adelanto}$$

$$Dx(n)=x(n-1) \quad \text{atraso}$$

Se puede generalizar a corrimientos mayores que uno:

$$x(n+3)=S^3 x(n)$$

De esta forma la ecuación característica de una Edd puede expresarse como polinomio:

Por ejemplo: $x(n+2)+5x(n+1)-6x(n)=r(n)$

$$(S^2+5S-6).x(n)=r(n)$$

Ejemplo:

$$\text{sea: } x(n+1)-ax(n)=b \quad a \neq 1$$

Buscamos la solución de la ecuación homogénea: $u(n+1)-au(n)=0$

esto significa:

$$u(1)=au(0)$$

$$u(2)=au(1)=a^2u(0)$$

$$u(3)=a^3u(0)$$

:

$$u(n)=a^n u(0)$$

La solución posee la forma de $u(n)=C.a^n$ y verificamos si puede ser para cualquier numero C ensayando esta solución en la ecuación : $Ca^{n+1}-aCa^n=0$ para todo C , luego es solución general de la homogénea.

Ahora, expresado como primer diferencia como $u(n+1)=a.u(n)=a^{n+1}$ resulta:

$$u(n+1)-u(n)=(a-1)u(n) \quad \text{ó} \quad \Delta u(n)=(a-1)u(n); \quad \text{aplicando la operación suma:}$$

$$u(n)=(a-1) \Delta^{-1}\{u(n)\}; \quad \text{luego: } \Delta^{-1}\{u(n)\} = \frac{u(n)}{1-a}$$

$$\text{Adoptando para } u(n)=a^n \text{ que es solución se puede poner: } \Delta^{-1}\{a^n\} = \frac{a^n}{1-a} \quad [1]$$

La constante C la consideramos uno para no arrastrarla inútilmente, el lector puede darse cuenta que si la considera se traslada al resultado sin afectar al resultado final.

La ecuación que queremos resolver es: $x(n+1)-ax(n)=b$, si aplicamos el símil del método de los coeficientes indeterminados se propone que $x(n)=u(n).v(n)$ donde $v(n)$ es una función a determinar.

$x(n+1)=u(n+1)v(n+1)$; reemplazando:

$$u(n+1)v(n+1)-au(n)v(n)=b$$

$$\text{Si } v(n+1)-v(n)=\Delta v(n), \quad u(n+1)\Delta v(n) + \underbrace{u(n+1).v(n) - a.u(n).v(n)}_{\text{es nulo pues } u(n) \text{ sol. homogénea}} = b$$

conduce a:

$$\Delta v(n)u(n+1)=b$$

$$v(n) = \Delta^{-1} \left\{ \frac{b}{u(n+1)} \right\} = \Delta^{-1} \left\{ \frac{b}{a^{n+1}} \right\} = \frac{b}{a} \Delta^{-1} \left\{ \frac{1}{a^n} \right\}$$

Por lo visto en [1] resulta:

$$v(n) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a} - 1} + C$$

$$x(n)=u(n).v(n) = C.a^n + \frac{b}{1-a} \quad \text{solución general de la Edd.}$$

Este método es sistemático pero muchas veces extensos, el utilizar el factor integrante puede ser mucho más rápido para resolver las Edd.

$$x(n) = \underbrace{u(n)}_{\text{solucion homogénea}} + \underbrace{p(n)}_{\text{solucion particular}}$$

Como solución homogénea se obtiene $u(n)=Ca^n$ y como solución particular $x(n)=u(n)+K$ proponemos solución particular a una constante K por ser b una constante.

Reemplazando:

$$Ca^{n+1}+K-aCa^n-aK=b \quad \text{esto es: } K(1-a)=b \quad \text{luego: } K = \frac{b}{1-a} \quad \text{y se obtiene la solución El}$$

problema es encontrar la solución particular, para esto existen propuestas estándar, tanto para EDO como para Edd, siendo "semejantes".

2.7. Método de la suma parcial

Sea:

$$u(n)\Delta v(n)=u(n)[v(n+1)-v(n)] = u(n)v(n+1)-u(n)v(n)$$

$$\text{como } \Delta\{u(n)v(n)\}=u(n+1)v(n+1)-u(n)v(n)$$

$$\text{siendo } u(n+1)=\Delta u(n)+u(n)$$

$$\begin{aligned}\text{resulta: } u(n)\Delta v(n) &= \Delta u(n)v(n+1)+u(n)v(n+1)-u(n)v(n) \\ &= \Delta u(n)v(n+1)+u(n)\Delta v(n)\end{aligned}$$

Se puede decir que:

$$u(n)\Delta v(n)=\Delta\{u(n)v(n)\}-\Delta u(n)v(n+1)$$

$$\Delta^{-1}\{u(n)\Delta v(n)\}=\Delta^{-1}\Delta\{u(n)v(n)\}-\Delta^{-1}\{v(n+1)\Delta u(n)\}$$

$$\Delta^{-1}\{u(n)\Delta v(n)\}=u(n)v(n)-\Delta^{-1}\{v(n+1)\Delta u(n)\} \quad [2]$$

Esta última expresión equivalente a la integral por partes es la que puede usarse para resolver Edd.

$$\text{Por ejemplo: } x(n+1)-ax(n)=r(n)$$

La ecuación homogénea es $u(n+1)-au(n)=0$ y posee solución $u(n)=Ca^n$

si $x(n)=u(n).v(n)=Ca^n v(n)$ reemplazando

$$Ca^{n+1}.v(n+1)-aCa^n v(n)=r(n)$$

$$Ca^{n+1}\Delta v(n)=r(n) \qquad \Delta v(n)=\frac{r(n)}{a^{n+1}}$$

$v(n) = \Delta^{-1} \left\{ \frac{r(n)}{a^{n+1}} \right\} + K$ a la constante K la podemos tomar dentro de la constante C

$$x(n) = u(n) \cdot v(n) = Ca^n + a^n \Delta^{-1} \left\{ \frac{r(n)}{a^{n+1}} \right\}$$

Para el cálculo de $v(n) = \Delta^{-1} \left\{ \frac{r(n)}{a^{n+1}} \right\} + K$ es que se recurre a la propiedad [2] el lector puede aplicarla para obtener un modelo de solución.

Sin duda el factor integrante es la mejor manera de resolver estas Edd, el inconveniente es encontrar una solución particular, que depende de la $r(n)$ por ello se dan algunas pautas que son usadas para las Edd simples y quizá más frecuentes:

Tabla de soluciones particulares propuestas según sea la excitación o entrada

Entrada $r(n)$	Solución particular $x_p(n)$
n^p	$c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \dots + c_1 n + c_0$
a^n	$C \cdot a^n$
$n^p \cdot a^n$	$a^n [c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \dots + c_1 n + c_0]$
$\cos(n\theta + \Phi)$	$C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)$
n	$C_0 + C_1 n$
na^n	$a^n (C_0 + C_1 n)$

Así por ejemplo:

$$x(n+1) - 3x(n) = 2n - 5$$

Proponemos como solución particular a $c_1 n + c_2$

A la solución homogénea la calculamos como hemos visto y $u(n)=C3^n$

Luego la solución propuesta es $x(n)=C3^n+c_1n+c_2$

reemplazando en $x(n+1)-3x(n)=2n-5$

$$C3^{n+1}+c_1(n+1)+c_2-3[C3^n+c_1n+c_2]=2n-5 \quad \text{lo que conduce a: } -2c_1n-2c_2+c_1=2n-5$$

Dando valores a n resulta: $c_1=-1 \quad c_2=2$

Luego la solución es $x(n)=C3^n-n+2$

Otro ejemplo:

$$x(n+1)-3x(n)=2^n$$

Se propone: $x(n)=C3^n+c_1a^n$

reemplazando: $c_1a^n(a-3)=2^n$ luego $a=2$ y $c_1=-1$

La solución general es: $x(n)=C3^n-2^n$

2.8. Ecuaciones de diferencias de orden superior

Repitamos el caso de los conejos, pero ahora se supone que nacen cada dos meses o sea las crías son a partir del segundo mes.

Esto conduce a una Edd de la forma: $x(n)=x(n-1)+6x(n-2)$ y puesto que es cada dos meses esta ecuación es válida para $n>1$, así si se asigna inicial $x(0)=2$, será $x(1) = 2$

Entonces:

$$x(2)=x(1)+6x(0) = 14$$

$$x(3)=x(2)+6x(1)=26$$

:

La Edd puede ser escrita como: $x(n)-x(n-1)-6x(n-2)=0 \quad n=2,3,4\dots$

o especulando matemáticamente:

$$x(n+2)-x(n+1)-6x(n)=0 \quad n=0,1,2\dots$$

Surge ahora la necesidad de definir la diferencia segunda o sea:

$$\Delta x(n) = x(n+1)-x(n)$$

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) \quad \text{reemplazando resulta:}$$

$$\Delta^2 x(n) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$$

Así la Edd dada se puede expresar como:

$$\Delta^2 x(n) + \Delta x(n) - 6x(n) = 0$$

y resolverse con técnicas de doble diferencia que si bien son un tanto extensas constituye un método sistemático de resolución.

Instalamos esta inquietud sobre las Edd, pero se resuelve en general usando coeficientes indeterminados, como factor integrante o sea buscando una solución particular o forzada. Es además en los casos lineales posible utilizar técnicas de transformaciones operacionales que simplifican notablemente estas resoluciones, como se pueden ver en los Ejemplos.

2.9. Solución de la Edd de segundo orden homogénea a coeficientes constantes

Sea la Edd de la forma: $x(n+2)+ax(n+1)+b(x(n)=0$

se propone como solución a $u_1(n)=C_1 r^n$

y vemos si cumple:

$$C_1\{r^{n+2}+ar^{n+1}+br^n\}=0 \quad ; \quad C_1r^n[r^2+ar+b]=0$$

la ecuación característica es entonces $r^2+ar+b=0$ y si C_1 no es nulo, la forma de cumplir la ecuación en diferencia es satisfaciendo la ecuación característica, surgen las raíces r_1 y r_2 que pueden ser:

Caso I

r_1 y r_2 son reales distintas, en este caso la solución general propuesta es de la forma:

$x(n)=C_1r_1^n+C_2r_2^n$ con C_1 y C_2 constantes, para verificar esta propuesta veremos si cumple con la Edd dada:

reemplazando: $C_1r_1^{n+2}+C_2r_2^{n+2}+aC_1r_1^{n+1}+aC_2r_2^{n+1}+bC_1r_1^n+bC_2r_2^n=0$, acomodando:

$$C_1r_1^{n+2}+aC_1r_1^{n+1}+bC_1r_1^n+C_2r_2^{n+2}+aC_2r_2^{n+1}+bC_2r_2^n=0$$

Como r_1 y r_2 son raíces de la ecuación característica, se cumple.

Caso II si $r_1=r_2=r$ se trata de dos raíces reales iguales entonces la solución propuesta es de la forma:

$x(n)=[C_1+nC_2]r^n$ para verificar esta propuesta veremos si cumple con la Edd dada:

$$[C_1+C_2(n+2)]r^{n+2}+[aC_1+aC_2(n+1)]r^{n+1}+b[C_1+C_2n]r^n=0 \text{ acomodando}$$

$$C_2(n+2)r^2+aC_2(n+1)r+bC_2n=0 \quad \text{surge:} \quad n(r^2+ar+b)+2r^2+ar=0 \quad [3]$$

siendo r solución de la ecuación característica anula lo que esta en paréntesis, además como es raíz

doble resulta: $r = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = -\frac{a}{2}$ lo cual anula la expresión [3] y satisface la ecuación

Caso III

si las raíces son complejas conjugadas, estamos en el Caso I pero se pueden acomodar para no trabajar con números complejos de la siguiente forma:

$$r_1 = \alpha + j\beta, \quad r_2 = \alpha - j\beta; \quad \text{si } \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$x(n) = \rho^n [K_1 \cos(\beta n) + K_2 \sin(\beta n)]$$

Relaciones de auxilio

SUCESIONES

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$
$\sum_{k=1, \text{impar}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$	$\sum_{k=1, \text{impar}}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96}$
SUMAS	
$\sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2} N(N+1)$	$\sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1)$
$\sum_{k=1}^N k^3 = \frac{1}{4} N^2(N+1)^2$	$\sum_{k=0}^N a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{N+1}}{1-a} ; a \neq 1 \\ N+1 ; a = 1 \end{cases}$
$\sum_{k=1}^N ka^k = \begin{cases} \frac{a}{(1-a)^2} [1 - (N+1)a^N + Na^{N+1}] ; a \neq 1 \\ \frac{1}{2} N(N+1) ; a = 1 \end{cases}$	
SERIES	
$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad a < 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}, \quad a < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}, a < 1$	$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a^k = \frac{a^2 + a}{(1-a)^3}, a < 1$
--	--

Ejemplo 1

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 4x(n) = 0 \quad x(0) = 1 \quad ; \quad x(1) = 4$$

Ecuación característica: $r^2 - 4r + 4 = 0$

$$r_1 = r_2 = 2$$

luego $x(n) = (C_1 + C_2 n) 2^n$ solución general

$$x(0) = C_1 = 1$$

$$x(1) = (C_1 + C_2) 2 = 4 \quad ; \quad C_2 = 1$$

$$x(n) = (1 + n) 2^n \quad \text{solución particular}$$

Ejemplo 2

$$x(n+2) + 2x(n+1) + 4x(n) = 0 \quad x(0) = 2 \quad x(1) = -2(1 + \sqrt{3})$$

$$r^2 + 2r + 4 = 0$$

$$r_1 = -1 + j\sqrt{3} \quad r_2 = -1 - j\sqrt{3}$$

$$x(n) = 2^n [K_1 \cos n\sqrt{3} + K_2 \sen n\sqrt{3}] \quad \text{solución general}$$

$$x(0) = 2 = K_1$$

$$x(1) = 2 [2 \cos \sqrt{3} + K_2 \sen \sqrt{3}] = -2(1 + \sqrt{3}) \quad ; \quad K_2 = \frac{-(1 + \sqrt{3}) - 2 \cos \sqrt{3}}{\sen \sqrt{3}}$$

determina la solución particular, al conocer K_1 y K_2 .

Ejemplo 3

Sea el sistema discreto caracterizado por:

$$y(n) + ay(n-1) = x(n) \quad \text{con } a \neq 0; \text{ siendo: } y(n) = [(5 + 3(0,5)^n)]u(n)$$

- Identifique la respuesta natural y la forzada.
- Identifique los valores de $y(-1)$ y de a .
- Identifique la respuesta a entrada nula y de estado cero.
- Identifique $x(n)$

Sol. Sin duda necesitamos la solución libre u homogénea o incompleta de esta Edd:

$$y_N(n) + ay_N(n-1) = 0 ; \text{ La ecuación característica: } 1 + ar^{-1} = 0 ; r = -a$$

La solución es:

$$y_N(n) = (-a)^n$$

Como la solución $y(n) = y_N(n) + y_F(n)$ con $y_F(n)$ como solución forzada o particular.

$$y(n) = (-a)^n + y_F(n) = [5 + (0,5)^n]u(n) \Rightarrow \text{si } n \geq 0; y(n) = (0,5)^n + 2 \cdot (0,5)^n + 5$$

$$a = -0,5$$

$$y_F(n) = 2 \cdot (0,5)^n + 5$$

La respuesta al punto b) es tal que $y(-1) = 0$ pues la solución propuesta posee $u(n)$.

A fin de identificar $x(n)$ recurrimos a la tabla de posibles $y_F(n)$ para $x(n)$ y vemos que a $C \cdot b^n + C_I$ le corresponde una entrada $x(n) = b^n + c$ verificamos ensayando en la Edd los valores de b y c :

$$y_F(n) = 2 \cdot (0,5)^n + 5 \quad 2 \cdot (0,5)^n + 5 - 0,5[4 \cdot (0,5)^n + 5] = b^n + c = 2,5$$

$$x(n) = 2,5 \cdot u(n)$$

Ejercicio 4

Resolver la Edd si: $y(n) - 0,5y(n-1) = 5 \cos(0,5n\pi) ; n \geq 0 ; y(-1) = 4$

Sol. Primero obtenemos la solución natural, general:

$$y_N(n) - 0,5y_N(n-1) = 0 \quad ; \quad 1 - 0,5r^{-1} = 0 \quad ; \quad r = 0,5 \quad ; \quad \Rightarrow y_N(n) = C.(0,5)^n$$

La solución forzada, lo hacemos proponiendo una particular o forzada según la tabla:

$$y_F(n) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) ; \text{ ensayando :}$$

$$y_F(n-1) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) = -C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 0,5C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 0,5C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$\text{Dando : } C_1 = 4 ; C_2 = 2 \quad ; \quad \text{luego : } y_F(n) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$y(n) = C.(0,5)^n + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) ; \text{ como } y(-1) = 4 \text{ resulta : } C = 3$$

$$y(n) = 3.(0,5)^n + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Solución particular.

Ejercicios resueltos

1- Sea $x(n)=\{1,2,5,-1\}$ inicia en 2.

- a) genere $x(2n)$ (diezmar o descender por dos)
 c) genere tres versiones interpoladas de $x(n/3)$

Sol. a) $x(2n)=\{2,-1\}$

b)

- ◆ Caso de interpolación de ceros: $g_1(n)=x(n/3)=\{1,0,0,2,0,0,5,0,0,-1,0,0\}$
- ◆ Caso de interpolación con retenedor de orden cero:

$$g_2(n)=x(n/3)=\{1,1,1,2,2,2,5,5,5,-1,-1,-1\}$$

- ◆ Caso de interpolación con retenedor de orden uno o lineal:
 $g_3(n)=x(n/3)=\{1,4/3,5/3,2,3,4,5,3,1,-1,-2/3,-1/3\}$

2- Determine el periodo de

$$x(n) = e^{j0,2\pi n} + e^{-j0,3\pi n}$$

Sol.

$$\Omega_1 = 0,2\pi ; \Omega_2 = 0,3\pi ; \Omega_0 = n\Omega_1 = m\Omega_2 ; n, m \in Z$$

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{m}{n} = \frac{0,2\pi}{0,3\pi} = \frac{2}{3} ; \text{ basta que } m=2 \text{ y } n=3$$

$$\text{luego } \Omega_0 = 3 \times \Omega_1 = 0,6\pi , N'_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = 0,3 \text{ no es entero!}$$

$$N_0 = kN'_0 = 3 ; \text{ corresponde } k=10 \text{ es periodica en la novena armonica.}$$

3- Determine la energía o la potencia de cada señal (si son de potencia o de energía)

a) $x(n)=\{6,4,2,2\}$

b) $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n)$

c) $x(n) = 8(0,5)^n \cdot u(n)$

Sol.

$$a) \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = 36 + 16 + 4 + 4 = 60$$

b) Es periódica de $N_0=4$; luego

$$P = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{1}{4}(1+1) = 1/2$$

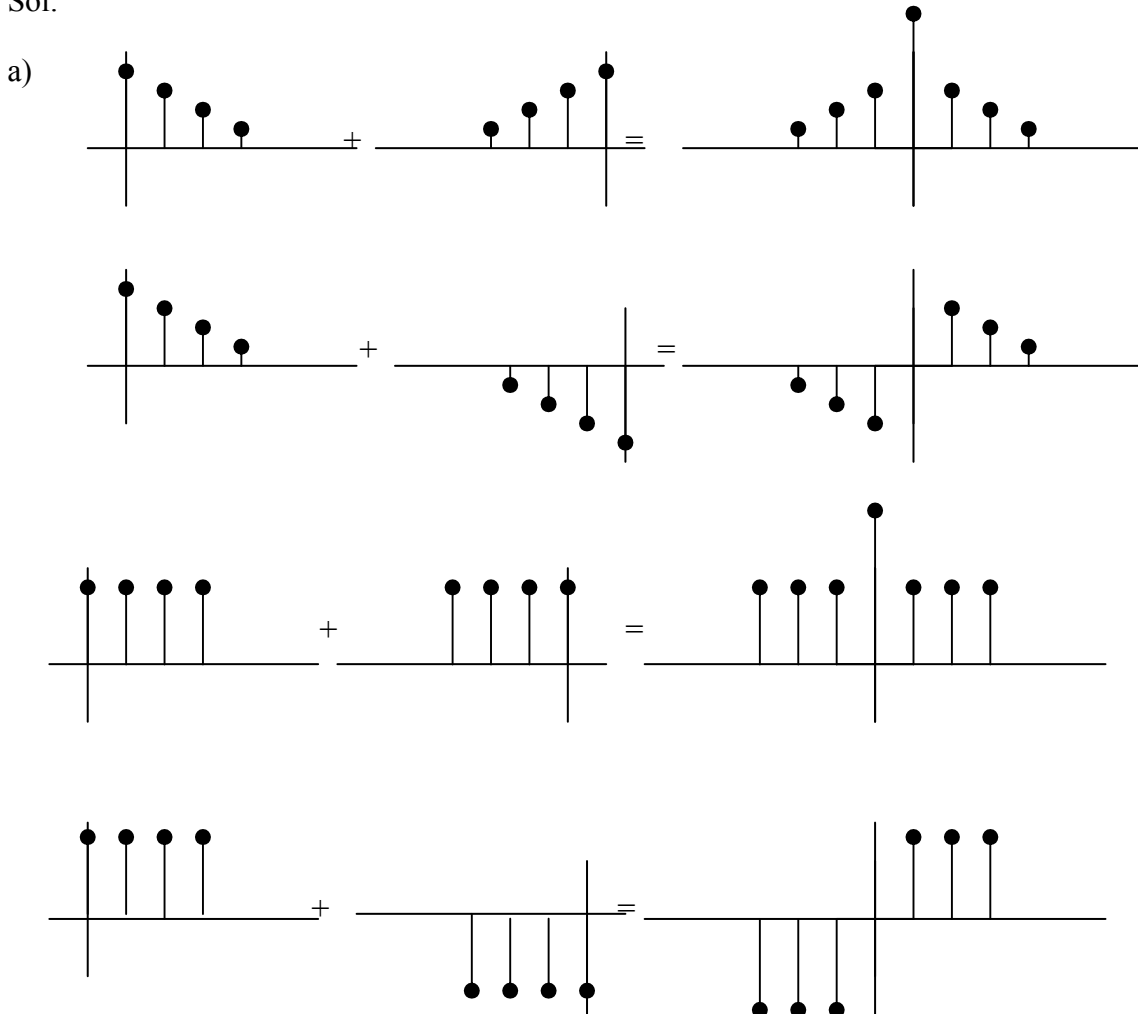
$$c) \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = 8^2 \sum_{n=0}^{\infty} (0,5)^{2n} = 64 \frac{1}{1-0,5^2} = 85,33\dots$$

4- Dibujar las partes pares e impares de $x(n)$

$$a) \quad x(n) = 8(0,5)^n \cdot u(n)$$

$$b) \quad x(n) = u(n) - u(n-4)$$

Sol.



5- Determine el periodo de las señales periódicas:

$$a) \ x(t) = 4 - 3\sin\left(\frac{7}{4}\pi n\right)$$

$$b) \ x(t) = \cos\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$c) \ x(t) = j^{n/2}$$

Sol. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$a) \ \Omega_0 = \frac{7}{4}\pi ; N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}k = \frac{8}{7}k, \text{ si } k = 7 \text{ entonces } N_0 = 8$$

Es periódica en la sexta armónica de periodo 8.

$$b) \ x(n) = \cos(n/2), \ x(n + N_0) = \cos\left(\frac{n}{2} + \frac{N_0}{2}\right) ; \ \frac{N_0}{2} = 2\pi k, \ N_0 = 4\pi k$$

N_0 no puede ser entero, luego no es periódica

c)

$$x(n + N_0) = j^{\frac{n}{2}} \cdot j^{\frac{N_0}{2}}, \text{ basta que } j^{\frac{N_0}{2}} = 1, \ \forall n, \ N_0 \in \mathbb{Z}$$

recordando que $j^{4k} = 1$, sera $N_0 = 8$; pues ($k = 1$)

Problemas

Problema 1

Sea

$$x[n] = \cos (\Omega_x (n + P_x) + \theta_x)$$

Determine el período de $x[n]$ para cada una de las siguientes combinaciones de los tres casos:

	Ω_x	P_x	θ_x
1)	$\pi/3$	0	2π
2)	$3\pi/4$	2	$\pi/4$
3)	$3/4$	1	$1/4$

Problema 2

Con

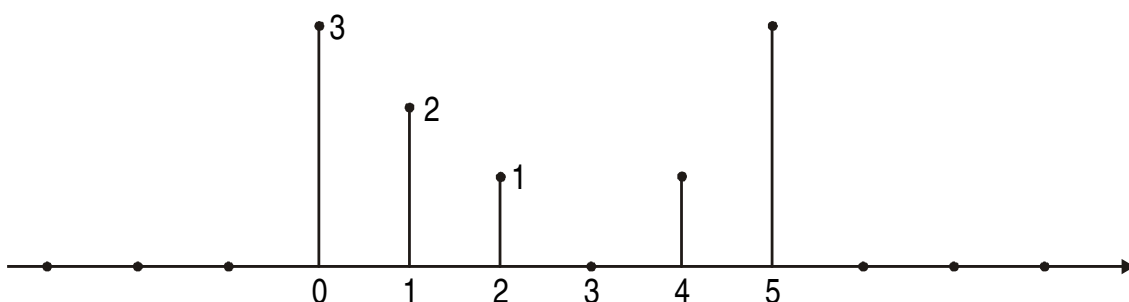
$$x[n] = \cos [\Omega_x (n + P_x) + \theta_x] \text{ e } y[n] = \cos [\Omega_y (n + P_y) + \theta_y]$$

determine para cada una de las siguientes combinaciones cuando $x[n]$ e $y[n]$ son iguales para todo n

	Ω_x	P_x	θ_x	Ω_y	P_y	θ_y
1)	$\pi/3$	0	2π	$8\pi/3$	0	0
2)	$3\pi/4$	2	$\pi/4$	$3\pi/4$	1	$-\pi$
3)	$3/4$	1	$1/4$	$3/4$	0	1

Problema 3

La señal de tiempo discreta $x[n]$ es mostrada:



a) Grafique y determine las siguientes señales:

1) $x[n-2]$

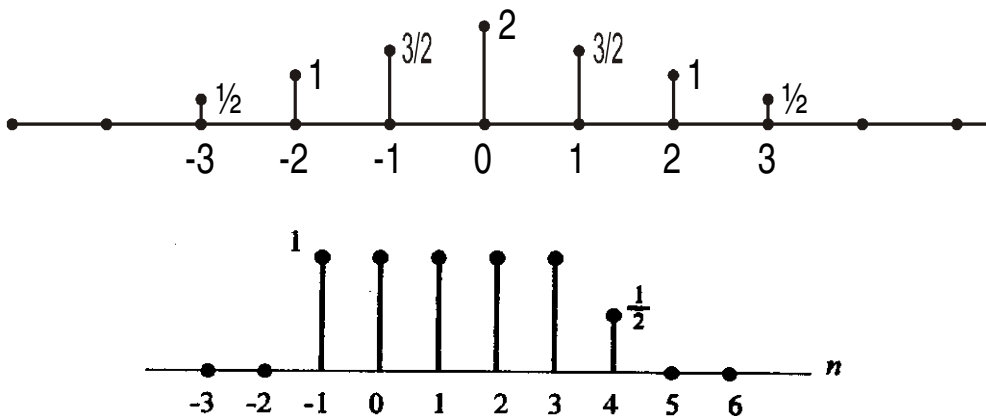
2) $x[4-n]$

3) $x[2n]$

b) Que dificultad encuentra cuando pretende definir la señal $x[n/2]$?

Problema 4

En base a las señales discretas $x[n]$ mostradas en la figura, grafique las señales pedidas:



a) $x[n-2]$

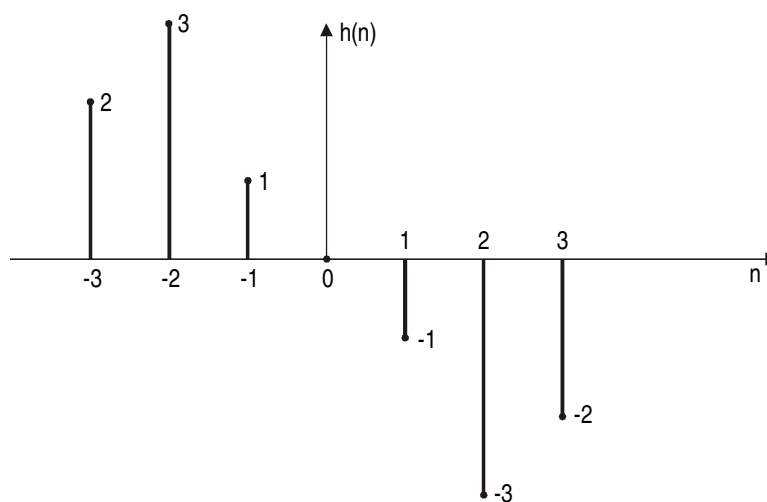
b) $x[3-n]$

c) $x[3n]$

d) $x[n-1] \delta[n-3]$

e) $x[n^2]$

Problema 5



Partiendo de la a señal $h[n]$, grafique:

a) $h[n-2]$

- b) $h[n+2]$
- c) $h[-1-n]$
- d) $h[2n] u[n]$
- e) $h[-n] \delta[n-2]$

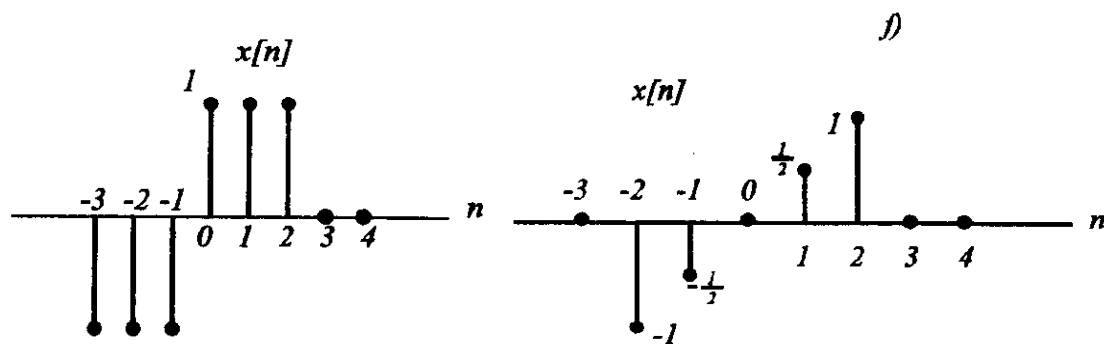
Problema 6

Grafique los productos:

- a) $h[n] x[n]$
- b) $x[n+2] h[1-n]$
- c) $x[1-n] h[n+4]$
- d) $x[n-2] h[n-4]$

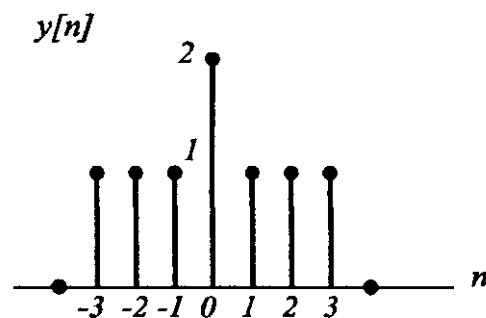
Problema 7

Para cada una de las siguientes señales, determine si es par, impar o ninguna:



Problema 8

Considere la señal $y[n]$ de la figura:



- a) Descubra la señal $x[n]$ tal que $\text{Par}\{x[n]\} = y[n]$ para $n > 0$ e $\text{Imp.}\{x[n]\} = y[n]$ para

$$n < 0$$

- b) Suponga que $\text{Par}\{w[n]\} = y[n]$ para todo n . También asuma que $w[n] = 0$ para $n < 0$. Descubra $w[n]$.

Problema 9

Grafique cada una de las siguientes señales:

a) $x(n) = \delta(n) + \delta(n - 3)$

b) $\delta(n) + 1/2\delta(n - 1) + (1/2)^2\delta(n - 2) + (1/2)^3\delta(n - 3)$

Problema 10

a) Grafique $x[n] = \alpha^n$ para el rango de $-1 < \alpha < 0$

b) Asuma que $\alpha = -e^{-1}$ y defina $y(t)$ como $y(t) = e^{\beta t}$

Descubra el número complejo β tal que $y(t)$ cuando es evaluada en el entero n es descripta por $(-e^{-1})^n$.

Problema 11

Evalúe las siguientes sumas:

a) $\sum_{n=0}^5 2\left(\frac{3}{a}\right)^n$

b) $\sum_{n=2}^6 b^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$

Problema 12

Sea $x[n]$ e $y[n]$ señales periódicas con período fundamental N_1 y N_2 respectivamente. Bajo que condiciones la suma de $x[n] + y[n]$ es periódica, y que es el período fundamental en este caso?

Problema 13

En este problema, vamos a explorar las propiedades de señales pares e impares:

a) Muestre que si $x[n]$ es impar entonces:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = 0$$

b) Muestre que si $x_1[n]$ es impar y $x_2[n]$ es par entonces $x_1[n] x_2[n]$ es una señal impar.

c) Sea $x[n]$ una señal arbitraria con partes par e impar, indique para:

$$x_p[n] = \text{Par}\{x[n]\}, x_i[n] = \text{Imp}\{x[n]\}$$

que:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_p^2(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^2(n)$$

Problema 14

Sea $x(t)$ señal continua exponencial compleja de la forma:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

con frecuencia fundamental ω_0 y período fundamental T_0 . Considere que la señal discreta obtenida por muestras igualmente espaciadas de $x(t)$ tal que $x[nT] = e^{j\omega_0 nT}$

a) Muestre que $x[n]$ es periódica si solo si T/T_0 es un número racional, y el período de muestreo es un múltiplo de el período de $x(t)$.

b) Suponga que $x[n]$ es periódica, y que: $T/T_0 = p/q$.

Donde p y q son enteros. Cual es el periodo fundamental de $x[n]$? Exprese la frecuencia fundamental como una fracción de $\omega_0 T$

c) Asumiendo que T/T_0 satisface la condición anterior, determine precisamente el período de $x(t)$ que es necesario para obtenerla de la muestreada $x[n]$.

Problema 15

Determine si son o no periódicas las señales, si lo son, determinen el período fundamental

a) $x[n] = \cos(\Omega_0 n + \Phi)$

b) $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi n}{7} + 2\right)$

c) $x[n] = e^{j(n/8 - \pi)}$

d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

Problema 16

Considere la señal discreta periódica:

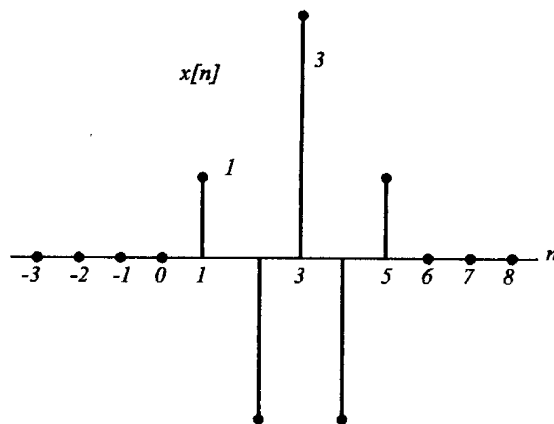
$$x[n] = e^{jm(2\pi N)n}$$

Muestre que el período fundamental N_0 está dado por: $N_0 = q \cdot N$ o mN_0 es un múltiplo de N

Problema 17

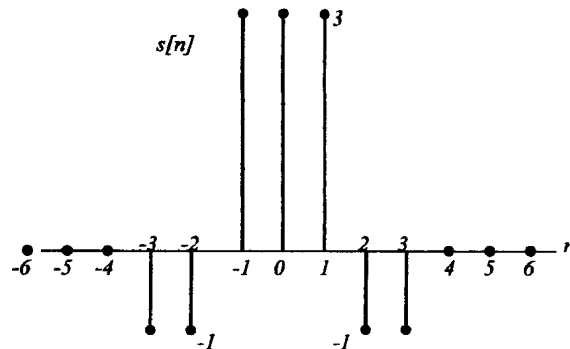
a) Exprese la siguiente suma de funciones impulsos desplazadas, esto es de la forma:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(n-k)$$



b) Exprese las siguientes secuencias como suma de funciones de paso unitarias de la forma:

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u(n-k)$$



Problema 18

Considere al siguiente conjunto de funciones o familia :

$$\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/7)n}$$

Descubra al período fundamental y/o la frecuencia para todo valor de k entero.

Problema 19

Repita el P 18 para $\Phi_k[n] = e^{jk(2\pi/8)n}$

Problema 20

Resolver

a) $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0$

$x(0) = x(1) = 1$

b) $x(n+2) + 6x(n+1) + 9x(n) = 0$

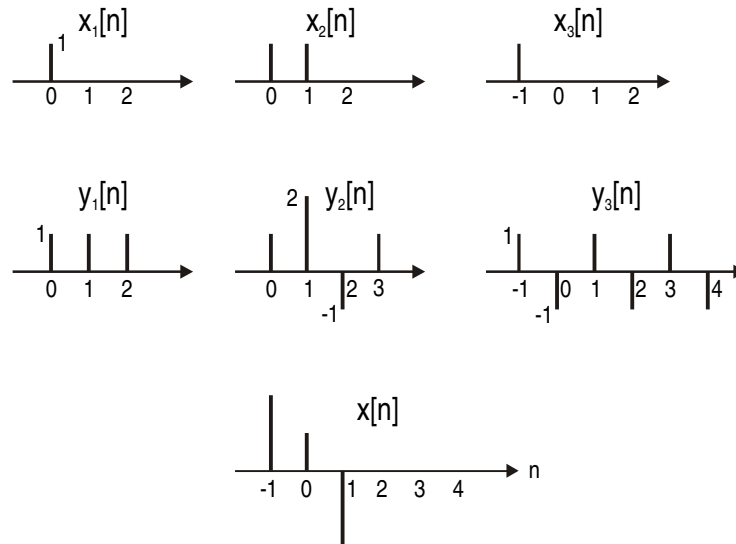
c) $x(n+2) + x(n) = 0$

$x(0) = a$

$x(1) = b$

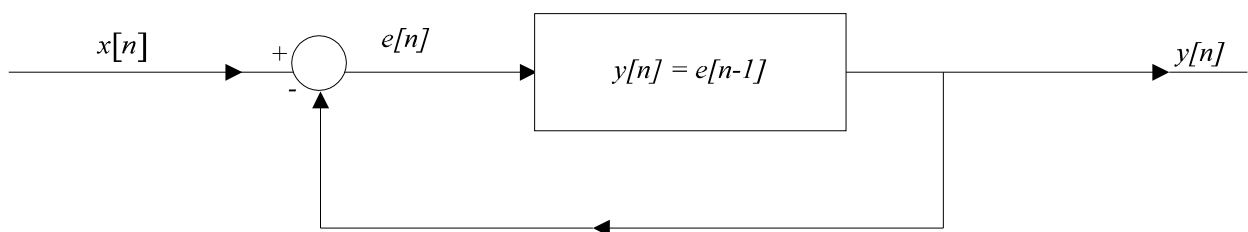
Problema 21

Suponga un sistema de tiempo discreto, con las respuestas $y_1[n]$; $y_2[n]$; e $y_3[n]$ a las señales de entrada $x_1[n]$; $x_2[n]$ y $x_3[n]$ respectivamente, si la entrada a este sistema es $x[n]$ también ilustrada en la figura, cual será la salida $y[n]$?



Problema 22

Considere el sistema realimentado de la figura. Suponga que $y[n] = 0$ para $n < 0$; dibuje las salidas si $x[n] = \delta[n]$ y si $x[n] = u[n]$



3

Sistemas LIT

3.1. Sistemas

Los sistemas están íntimamente vinculados a las señales y cierto tipo de sistemas muy usados en electrónica se modelan con las mismas expresiones que las señales. Es tan próximo este modelo que puede intercambiarse sistema por señal, esto es lo que se realiza en la construcción de filtros digitales mediante estructuras matemáticas realizadas por computadoras que cumplen las mismas funciones que filtros realizados con *RLC* y *AO* (*Resistencia, Inductancia, Capacitor y Amplificadores Operacionales*).

La definición de “*sistema*” es muy amplia según la disciplina que se estudie seguramente encuadra alguna concepción de sistema.

Para nosotros, sistema es un filtro que procesa una señal o un conjunto de señales de entradas para obtener una salida o un conjunto de salidas. Nuestro concepto de sistema es el elemento que vincula entradas con salidas y se pretende modelarlo en forma matemática.



$$y(t) = S(x(t))$$

Figura 3-1

Existen muchos tipos de sistemas y seguramente muchas propuestas de simulación y modelado.

En orden de complejidad creciente podemos decir a grandes rasgos que los sistemas son:

Sistemas	Técnicas a utilizar para la toma de decisión
Mecánicos	Se modelan con <i>EDOs</i> o con <i>Eed</i>
Estructurales	
Eléctricos	Se aplica el Álgebra Lineal y el Cálculo Diferencial
Electrónicos	
Fluídicos	Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Se aplica Álgebra y Cálculo
Químicos	
Termodinámicos	Se modelan con probabilística, aplica Álgebra y Cálculo
Biológicos	
Ecológicos	Se modelan con técnicas particulares, teoría de juego, de las catástrofes, caos, bifurcaciones, etc.
Humanos	
Sociales	Aplican: Geometría Fractal - Matemática General
Organizacionales	
Económicos	Heurísticos, decisiones según el momento y el lugar
Administrativos	
Políticos	

Los sistemas que nosotros estudiamos son los que permiten procesar señales eléctricas, almacenarlas, distribuir las, transmitir las, adaptar las a un destino. Es necesario digitalizar, comprimir, modular, codificar, eliminar ruido, encriptar, entre otras operaciones. Esto exige un profundo conocimiento de la señal y su contenido, el tema objeto de esta asignatura es “*conocer más las señales*”.

Los sistemas se pueden clasificar en:

- Sistemas de una entrada una salida *SISO*
- Sistemas de múltiples entradas y una salida *MISO*
- Sistemas de una entrada y múltiples salidas *SIMO*
- Sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas *MIMO*

En esta asignatura estudiaremos especialmente a los *SISO*.

3.1.1. Sistemas nítidos y borrosos

Se denominan nítidos si las variables que definen el “*estado*” del sistema son identificables, en el caso de borrosos se dispone de la posibilidad de encontrar las variables que determinen sus estados.

3.1.2. Sistemas estocásticos y deterministas

Los sistemas estocásticos están definidos por conjuntos de probabilidades que determinan la tendencia del sistema. Los determinísticos permiten definir los estados y a las salidas.

3.1.3. Sistemas de tiempo continuo o analógicos y de tiempo discretos o digitales

Se denominan sistemas de tiempo continuo o analógicos a aquellos cuyas funciones *entradas/salidas* son de tiempo continuo. Los de tiempo discreto se los suele denominar digitales y las señales *entradas/salidas* son en general sucesiones. Veamos las siguientes cualidades de los sistemas que es necesario profundizar.

3.1.4. Sistemas con memoria y de memoria nula

Si la salida del sistema depende de la entrada en un momento dado y del pasado de esta entrada se dice con memoria. Si el sistema es de memoria nula o instantáneo la salida depende sólo de la entrada actual. Por ejemplo una resistencia alimentada por la tensión $x(t)$ voltios y la salida sea la corriente $y(t)$ amperes

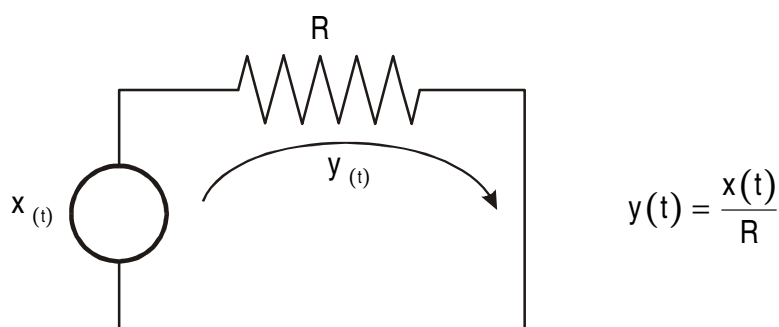


Figura 3-2. Sistema instantáneo

Si este sistema posee una capacidad, será:

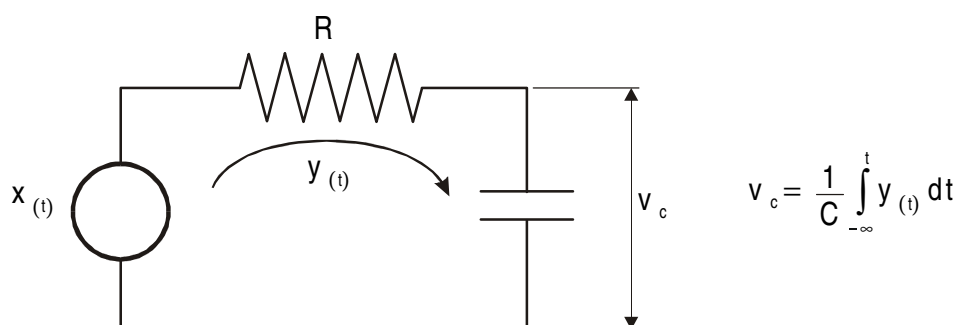


Figura 3-3

La salida en este caso $v_c(t)$ (voltios) depende de la carga (Coulomb) sobre la capacidad (Faradios). Es claro de ver que la salida en cualquier instante t depende de la “historia” pasada; de la carga del capacitor.

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{RC} dt \quad \Rightarrow \quad \ln u = -\frac{1}{RC} t + cte.$$

Planteamos el modelo basado en la ley de cada elemento

caída de tensión en R

$$v_R = R \cdot i$$

caída de tensión en C

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

Ley de la malla o del conjunto

$$v_{i(t)} = R \cdot i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt$$

genérico

$$x_{(t)} = R \, y_{(t)} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t y_{(t)} \, dt$$

llamando a $\int_{-\infty}^t y_{(t)} \, dt = q_{(t)}$ con $\frac{dq_{(t)}}{dt} = y_{(t)}$ (carga en Coulomb)

$$x_{(t)} = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

La ecuación homogénea o incompleta es

$$R \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} u = 0$$

como buscamos “una” solución de la homogénea tomamos $cte. = 0$ y

$$u = e^{-\frac{1}{RC} t} \text{ (¡en la solución homogénea o propia aparece la exponencial!)}$$

La solución de la ecuación diferencial completa u original es:

$$q_{(t)} = w_{(t)} \cdot u_{(t)}$$

$$g'_{(t)} = w' u + w u'$$

reemplazando

$$v_{(t)} = R w' u + R w u' + \frac{u \cdot w}{C}$$

como u es la solución de la homogénea $R u' + \frac{u}{C} = 0$, resulta

$$v_{(t)} = R w' u$$

$$w' = \frac{v_{(t)}}{R u_{(t)}} = \frac{1}{R} e^{\frac{1}{RC}t} \cdot v_{(t)}$$

$$w = \frac{1}{R} \int e^{\frac{1}{RC}t} \cdot v_{(t)} dt$$

ahora nos preguntamos ¿cómo es $v(t)$? para resolver esta integral. Supongamos que $v(t) = 1(t)$ escalón unitario. Luego

$$w_{(t)} = \frac{1}{R} \int e^{\frac{1}{RC}t} dt \quad \text{si } t > 0 \text{ y } w_{(t)} = 0 \text{ si } t < 0$$

$$w_{(t)} = C e^{\frac{1}{RC}t} + K$$

$$q_{(t)} = \left(C e^{\frac{1}{RC}t} + K \right) e^{-\frac{1}{RC}t} = C + K e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Observamos el comportamiento exponencial de $q_{(t)}$ o de $v_{C(t)} = \frac{q_{(t)}}{C}$

Si fuese $y_{(t)} = a x_{(t)} + b x_{(t-2)}$ observamos que la salida es a veces $x(t)$ y b veces x en $t-2$ o sea es la entrada en ese instante $t=0$ multiplicada por a más la entrada en el instante $t=2$; hace dos segundos anteriores multiplicada por b . Luego es un sistema con memoria.

Si se nos ocurre un sistema tal que la salida $y_{(t)} = 8x_{(t+1)}$, la salida en $t=0$ es 8 veces la entrada en $t=1$ que aún no vino!.. o sea la salida es la entrada adelantada, esto es un sistema que no es con memoria ni de memoria nula.

Sigamos entonces estudiando los sistema y sus cualidades.

3.1.5. Sistema Causal

Es causal o no anticipativo, también se los denomina “*realizables*” si la salida en el instante t_0 solo depende de la entrada para $t \leq t_0$. Se trata de que no es un sistema predictivo, la salida depende de entradas pasadas o presentes, (no futuras).

En el ejemplo anterior si $y_{(t)} = 8x_{(t+1)}$ no es causal, se puede decir que la salida debe estar “sobre” la entrada o a su “derecha” del eje de t para que sea causal.

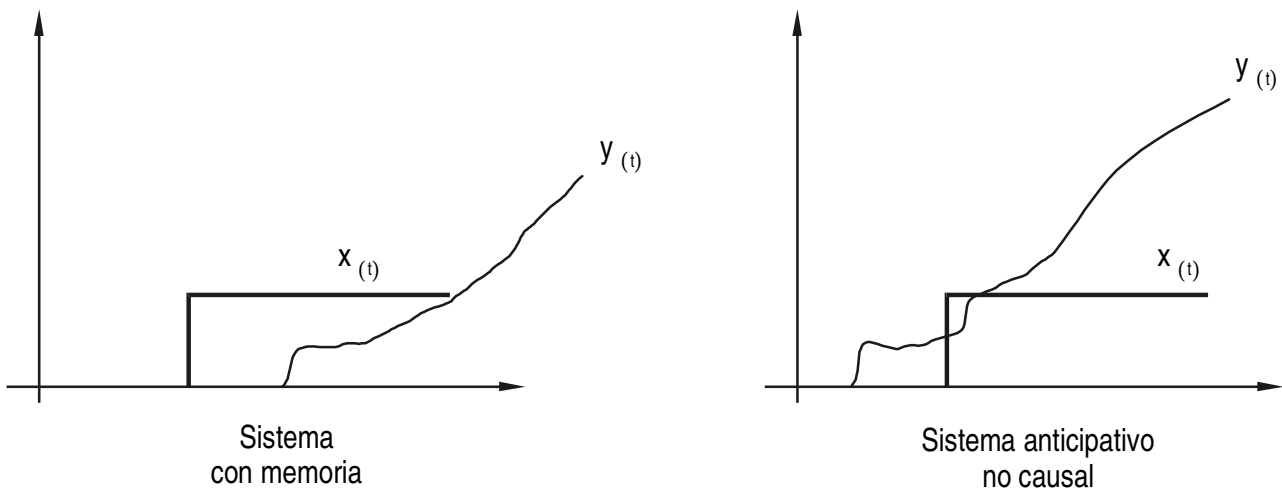


Figura 3-4

Así si $y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt}$. Será el derivador puro un sistema causal (realizable)?

Esta expresión significa que

$$y_{(t)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{(t+h)} - x_{(t)}}{h}$$

Si $h \rightarrow 0^-$ sería un sistema causal, con memoria pero si $h \rightarrow 0^+$ entonces no es causal ya que la salida anticipa la entrada.

Efectivamente la derivada pura no es realizable, pero se puede aproximar tanto que a fines prácticos se puede considerar “pura” aún así tendremos que considerar las restricciones de la derivada pura.

Que el sistema no sea causal, o sea no responde a la ley “*causa – efecto*” no quiere, en particular hoy en día, decir que es no realizable en sentido estricto, la “*inteligencia artificial*” se basa justamente en sistemas anticipativos, y en muchos casos que se pueda prevenir una salida se puede anticipar la decisión, esto está sucediendo en edificios inteligentes, seguimiento de satélites, calefacción de ambientes, etc.

A los fines de esta asignatura, que estamos preocupados por el comportamiento de filtros y procesadores de señales electrónicos, nos interesan por el momento los sistemas causales.

3.1.6. Sistemas invertibles

Un sistema se dice *invertible* si observando la salida se puede determinar la entrada. Es decir un sistema inverso a otro es cuando si se entra con la salida de aquel, se obtiene la entrada de éste.

Se dice que un sistema es inverso a otro dado, si colocarlo en cascada, produce la misma señal de entrada a la salida de ambos.

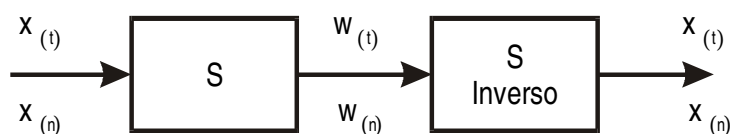


Figura 3-5

Notamos que si dos entradas producen la misma salida, ya no es invertible, o sea como las relaciones funcionales, para que sea invertible debe el sistema ser biyectivo, en relación a su entrada. Además el inverso puede o no ser causal, en nuestro estudio de inverso, en teoría de señales no nos preocupa este hecho, en cuanto a la realización de filtros inversos. Lo que si es importante que sea causal.

Ejemplo

Si $y_{(t)} = 4x_{(t)}$ el inverso es $y_{(t)} = \frac{1}{4}x_{(t)}$,

Si $y_{(t)} = \cos(x_{(t)})$ no es inverso pues $y_{(t)} = \arccos(x_{(t)})$ no es una biyección salvo si $x_{(t)} \in [0, \pi]$

Si $y_{(t)} = x_{(t+1)}$ el inverso es $y_{(t)} = x_{(t-1)}$

Como en el cálculo, el inverso es funcional y corresponde cambiar elementos del dominio por elementos de la imagen, lo que técnicamente se suele hacer (por abuso de tratamiento), cambiando $x_{(t)}$ por $y_{(t)}$ y viceversa.

3.1.7. Sistemas Estables

Sobre el estudio de la estabilidad y las formas de estabilidad de un sistema hay mucho de que hablar a lo largo de la carrera de ingeniería.

De hecho existen de partida dos definiciones válidas de estabilidad:

En un concepto amplio diremos que un sistema es estable, si solicitado a una entrada acotada, $|x_{(t)}| < K$ la salida es acotada $|y_{(t)}| < M$. Con $K, M \in \mathcal{R}$

Así si entra una señal paso $x(t) = u(t)$ y la salida es $y_{(t)} = |\cos(\omega_0 t)|$, el sistema es estable.

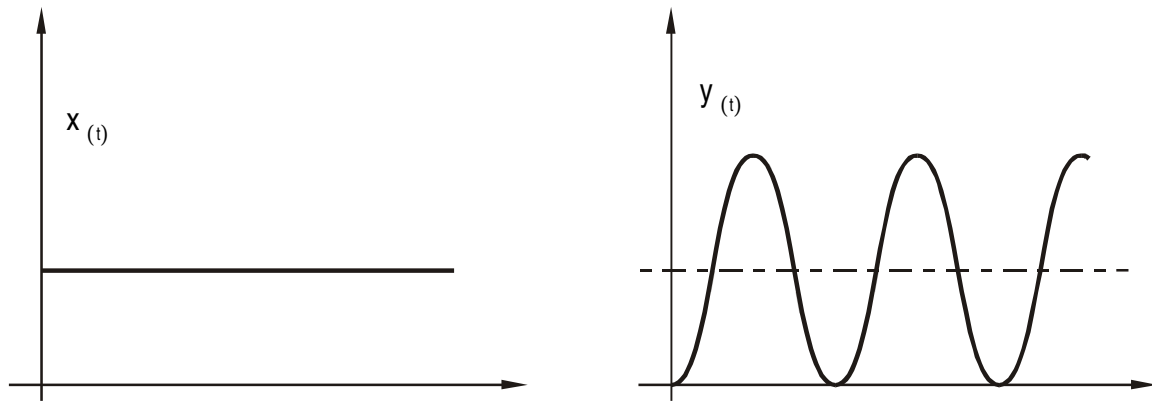


Figura 3-6

Otro concepto de estabilidad, muy usado en ingeniería es la estabilidad asintótica, que su definición implica a la señal impulso $\delta_{(t)}$ y la respuesta del sistema a esta $\delta_{(t)}$ que se la denomina $h(t)$ o ponderante. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ el sistema posee estabilidad asintótica que es más estricta que la anterior.

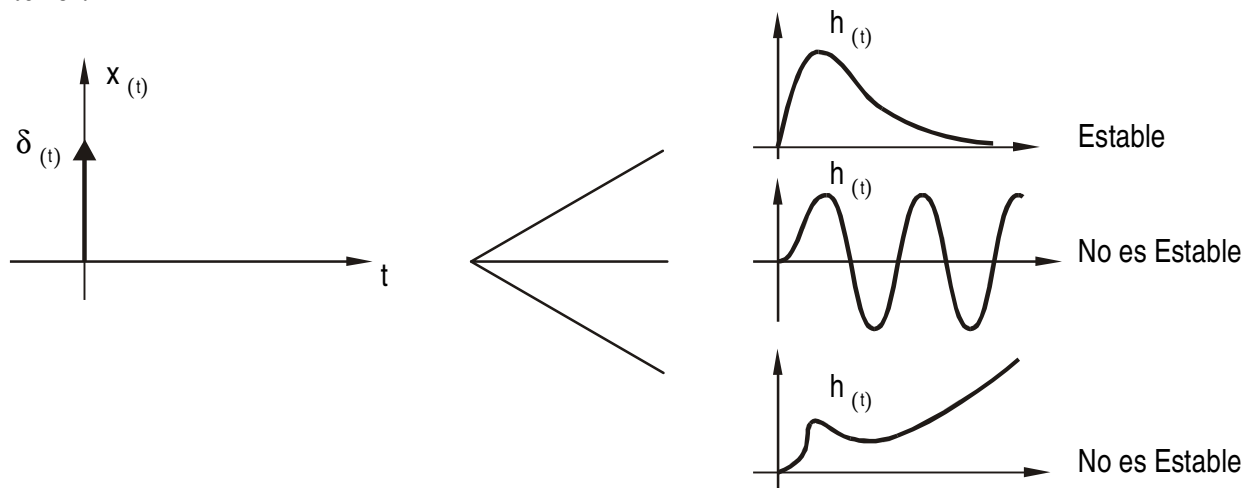


Figura 3-7

En cuanto a nuestro estudio, cuando decimos estable se trata de la primera definición, o sea entrada acotada salida acotada.

3.1.8. Linealidad

Esta propiedad, es muy difícil de alcanzar por un sistema y es una de las más importantes en sistemas electrónicos. Los sistemas lineales son los que pueden modelarse mediante funciones de transferencia. Los no lineales, a veces si, otras no, es decir, en general el modelo matemático es propio del sistema no lineal en estudio.

Las condiciones de linealidad son

Si entra $x(t)$	sale	$y(t)$	
Si entra $k x(t)$	sale	$k y(t)$	con $k \in \mathbb{R}$

Esta propiedad se denomina de homogeneidad.

$$\text{Si entra la suma } x_1(t) + x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y_1(t) + y_2(t)$$

O sea, la simple suma de entradas produce la simple suma de salidas de cada una de ellas. El sistema no es sinérgico y esto es válido para cualquier número de entradas y de respectivas salidas.

Esta condición se denomina de aditividad que definen en general la condición de linealidad, si $a, b, c, \in \mathbb{R}$ entonces

$$a x_1(t) + b x_2(t) + c x_3(t) \longrightarrow a y_1(t) + b y_2(t) + c y_3(t)$$

para cualquier número de entradas

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k(t) \longrightarrow \sum_{k=1}^n a_k y_k(t)$$

(aunque $n \rightarrow \infty$ y se trate de una serie)

Esta condición de linealidad si bien parece estricta, aproxima con mucha fidelidad la mayoría de filtros, amplificadores, líneas y demás sistemas electrónicos (que no sean moduladores, demoduladores, conversores).

Los sistemas lineales son comunes en electrónica y constituyen un grupo de sistemas muy interesantes para conocer, especialmente porque los filtros son lineales, o al menos lineales a tramos, o quizá linealizables. Esta propiedad es la base del análisis y síntesis mediante transformaciones.

Aquellos sistemas que no cumplen con esta propiedad, o sea los no lineales, definidos así por negación de los lineales (que sin duda son los más abundantes), pueden o no modelarse con la teoría de señales que estudiamos.

Ejemplo

Si $y_{(t)} = a x_{(t)} + b x_{(t+1)}$, ¿es lineal?

Sí; pues

$$\tilde{y}_{(t)} = a k x_{(t)} + b k x_{(t+1)} \longrightarrow k \left[a x_{(t)} + b x_{(t+1)} \right] = k y_{(t)}$$

$$y_{1(t)} = a x_{1(t)} + b x_{1(t+1)}$$

$$y_{2(t)} = a x_{2(t)} + b x_{2(t+1)}$$

$$y_{1(t)} + y_{2(t)} = a (x_1 + x_2) + b (x_{1(t+1)} + x_{2(t+1)})$$

luego cumple; es lineal.

Si $y_{(t)} = x_{(t)}^2$ es lineal? . Veamos si entra $k x_{(t)}$ sale:

$$\tilde{y}_{(t)} = \left(k x_{(t)}\right)^2 = k^2 x_{(t)}^2 = k^2 \cdot y_{(t)}$$

no es homogéneo, luego no es lineal.

Es $y_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt}$ lineal?

$$\text{Si entra } k x_{(t)} \longrightarrow \tilde{y}_{(t)} = k \frac{dx_{(t)}}{dt}$$

$$\text{Si } y_1 = \frac{dx_1}{dt}; \quad y_2 = \frac{dx_2}{dt}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{d(x_1 + x_2)}{dt}$$

luego es lineal

3.1.9. Sistemas invariantes en el tiempo

Se trata de sistemas cuyos parámetros no cambian con el tiempo, o sea, no “*mudan*” de opinión con el tiempo.

Si $x_{(t)} \longrightarrow y_{(t)}$ entonces $x_{(t-t_0)} \longrightarrow y_{(t-t_0)} \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$

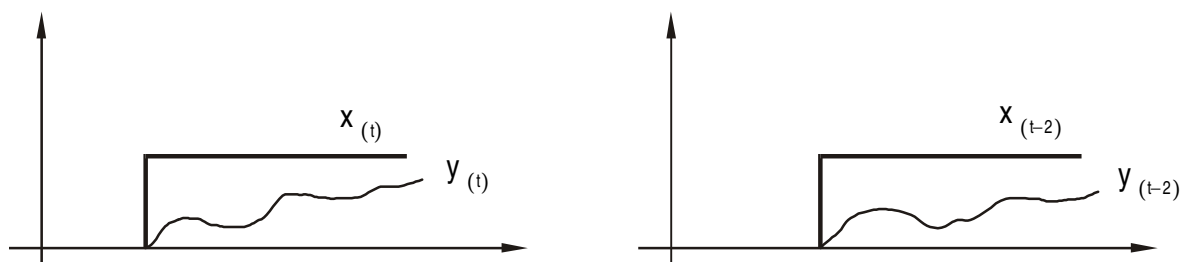


Figura 3-8

Ejemplo

Si $y_{(t)} = x_{(t)}^2 + 3 x_{(t)}$ es invariante en el tiempo?

$$y_{(t-t_0)} = x_{(t-t_0)}^2 + x_{(t-t_0)} \text{ pues sí}$$

Si $y_{(t)} = 3 t \cdot x_{(t)}$

$$y_{(t-t_0)} = 3(t-t_0) x(t-t_0) = \underbrace{3t x_{(t-t_0)}}_{\text{Entrada en } t-t_0} - \underbrace{3t_0 x_{(t-t_0)}}_{???}$$

es variante en el tiempo.

Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (*SLIT*) juegan un papel importante en ingeniería y en esta asignatura.

Ejemplo

Sea un sistema vinculado por la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

es lineal? es invariante en el tiempo (*IT*)?

Sí; pues

$$a x_1 + b x_2 \longrightarrow a y_1 + b y_2$$

y además $x_{(t-t_0)} \longrightarrow y_{(t-t_0)}$

todo bien, se trata de un *SLIT*.

Estudiemos esta otra ecuación diferencial de primer orden “*lineal*”

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3t y(t) = x(t)$$

es lineal, si pues cumple con estas condiciones, pero no es *IT*, vemos que al estar multiplicado por t hace que dependa del valor del tiempo, luego no se trata de un *SLIT*.

Las vinculaciones *entrada/salida* mediante modelos de EDOS para que sean lineales es necesario que los coeficientes sean constantes, (si existe término independiente constituye una alinealidad incremental) en rigor no es lineal, pero puede linealizarse, por ejemplo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) + 4 = x(t)$$

$$x_1 = \frac{dy_1}{dt} + 3y_1 + 4$$

$$x_2 = \frac{dy_2}{dt} + 3y_2 + 4$$

$$x_1 + x_2 = \frac{d(y_1 + y_2)}{dt} + 3(y_1 + y_2) + \underline{8}$$

¿8? debe ser 4, luego no es lineal!! pero podemos considerar:

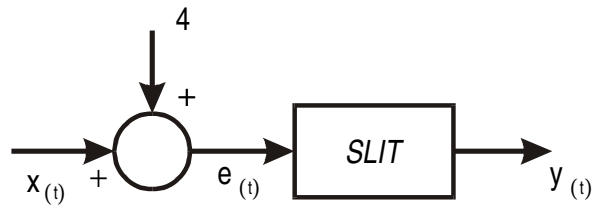


Figura 3-9

$$4 + \frac{dy}{dt} + 3y = x \quad \equiv \quad \frac{dy_{(t)}}{dt} + 3y = e_{(t)}$$

A este tipo de sistema se lo denomina incrementalmente lineal porque la segunda ecuación es lineal.

Todas estas propiedades de los sistemas a tiempo continuo, pueden aplicarse a señales y sistemas discretos con las mismas cualidades y propiedades (tomando siempre desplazamientos enteros).

Ejercicios resueltos

1- Determine si cada sistema es o no: Lineal - Invariante en el Tiempo

a) *Modulacion amplitud* : $y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c t)$

b) $y(t) = \cos(x(t) \cdot \omega_c t)$

c) $y(t) = t^2(x(t) + 2)$

d) $y(t) = 2x(t) + 3$

e) $y(t) = x^2(t) + 2x(t)$

Sol.

a)

$$y_1 = x_1 \cos(\omega_c t)$$

$$y_2 = x_2 \cos(\omega_c t)$$

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) \cos(\omega_c t) \quad \text{ademas : } ky = kx \cos(\omega_c t) \text{ luego es lineal.}$$

$$y(t + t_0) = x(t + t_0) \cdot \cos(\omega_c t + \omega_c t_0) \neq x(t + t_0) \cdot \cos(\omega_c t) \text{ no es IT}$$

b)

$$y_1 = \cos(x_1 \omega_c t)$$

$$y_2 = \cos(x_2 \omega_c t)$$

$$y_1 + y_2 = \cos(x_1 \omega_c t) + \cos(x_2 \omega_c t) \neq \cos[(x_1 + x_2) \omega_c t]; \text{ no es lineal}$$

$$y(t + t_0) = x(t + t_0) \cdot \cos[x(t + t_0)(\omega_c t + \omega_c t_0)] \neq \cos[x(t + t_0) \omega_c t]; \text{ no es IT}$$

c)

$$y_1 = t^2(x_1 + 2)$$

$$y_2 = t^2(x_2 + 2)$$

$$y_1 + y_2 = t^2(x_1 + x_2 + 4) \neq t^2(x_1 + x_2 + 2); \text{ no es lineal}$$

$$y(t + t_0) = (t + t_0)^2 x(t + t_0) \neq t^2 x(t + t_0); \text{ no es IT}$$

d)

$$y_1 = 2x_1 + 3$$

$$y_2 = 2x_2 + 3$$

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 2x_2 + 6) \neq [2(x_1 + x_2) + 3]; \text{ no es lineal}$$

$$y(t + t_0) = 2x(t + t_0) + 3; \text{ es IT}$$

e)

$$y_1 = x_1^2 + 2x_1$$

$$y_2 = x_2^2 + 2x_2$$

$$y_1 + y_2 = (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 + x_2) \neq (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2); \text{ no es lineal}$$

$$y(t + t_0) = x^2(t + t_0) + 2x(t + t_0); \text{ es IT}$$

2- Determine si son o no Lineales e Invariantes en el Tiempo

a) $y(n) = x(n).x(n-1)$; *no es lineal, es IT*

b) $y(n) = n.x(n)$; *es lineal, no es IT*

c) $y(n) = x(2n)$; *es lineal, no es IT*

d) $y(n) = x(n-2)$; *es lineal, es IT*

e) $y(n) = 2^{x(n)}.x(n)$; *no es lineal, es IT*

Problemas

Problema 1

La siguiente tabla contiene las relaciones de entrada -salida para sistemas de tiempo continuo y de tiempo discreto, $x(t)$ y $x(n)$ son señales arbitrarias.

Indique si es correcta o no la propiedad indicada.

$y(t), y[n]$	Memo nula	Lineal	Invariante Tiempo	Causal	Inverti- ble	Estable
a) $(2 + \sin t) \cdot x(t)$						
b) $x(2t)$						
c) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)$						
d) $\sum_{k=-\infty}^n x(k)$						
e) $\frac{dx(t)}{dt}$						

Problema 2

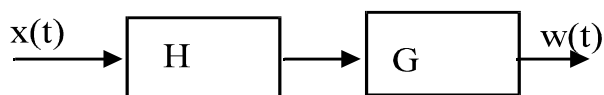
Considere los siguientes sistemas:

$$H: y(t) = \int_{-\infty}^t x(t) dt$$

$$G: y(t) = x(2t)$$

a) Cuál es H^{-1} y G^{-1} ?

b) Considere al sistema: obtenga F^{-1} y grafique en cajas. (F^{-1} en función de H^{-1} y G^{-1}).



Problema 3

Considere un sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ relacionando la entrada y salida por la expresión:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-nT)$$

- Es lineal el sistema?
- Es invariante en el tiempo?
- Si la entrada $x(t) = \cos 2\pi t$, dibuje la salida para los valores de T dados :

$$T = \{ 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12 \}$$

Problema 4

- Muestre que $\delta(2t) = 1/2 \delta(t)$
 - Expresa que entiende como $\delta[2n]$ en relación a $\delta[n]$
-

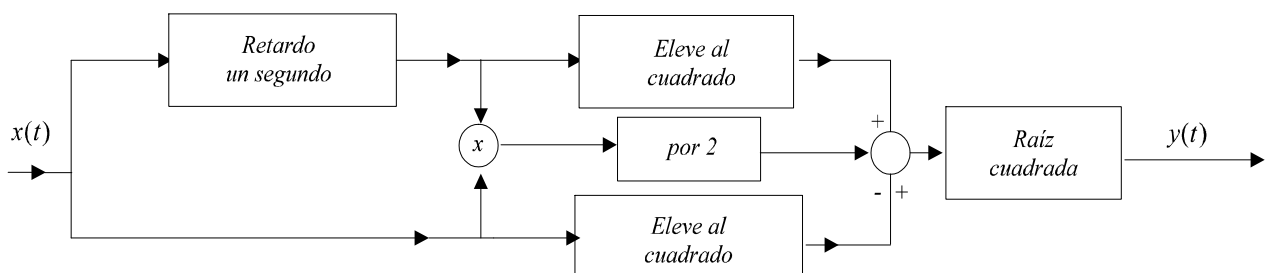
Problema 5

Determine las cualidades de los sistemas dados por las relaciones entradas-salidas: 1) Memoria ; 2) Invariante en el tiempo ; 3) Lineal ; 4) Causal ; 5) Estable

- $y(t) = e^{x(t)}$
 - $y[n] = x[n] \cdot x[n-1]$
 - $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
 - $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$
 - $y[n] = x[n-2] - 2x[n-4]$
 - $y(t) = [\sin(6t)] x(t)$
 - $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$
-

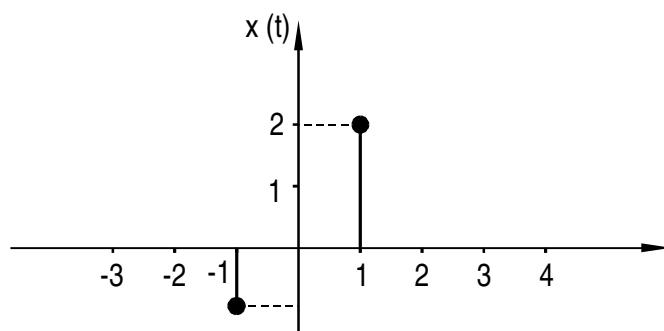
Problema 6

Considere al sistema mostrado:



- Descubra la relación entre $y(t)$ versus $x(t)$

- b) Es lineal el sistema?
 c) Es invariante en el tiempo?
 d) Cual es la respuesta $y(t)$ a una entrada $x(t)$ como la dibujada?



Problema 7

Los siguientes enunciados son verdaderos o falsos ?

- a) La serie de dos sistemas lineales, invariantes en el tiempo es también lineal e invariante en el tiempo.
 b) La serie de dos sistemas no lineales es también un sistema no lineal.

Problema 8

Dado tres sistemas por las relaciones entrada-salida:

$$\text{Sistema 1: } y[n] = \begin{cases} x(n/2) & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\text{Sistema 2: } y[n] = x[n] + (1/2) x[n-1] + (1/4) x[n-2]$$

$$\text{Sistema 3: } y[n] = x[n/2]$$

Suponga una conexión en cascada de los tres, se pregunta:

Es lineal el sistema resultante ? ; Es invariante en el tiempo ?

Considere ahora otros tres sistemas dados por las relaciones:

$$\text{Sistema 1: } y[n] = x[-n]$$

$$\text{Sistema 2: } y[n] = a x[n-1] + b x[n] + c x[n+1]$$

$$\text{Sistema 3: } y[n] = x[-n]$$

donde a, b, c son números reales, bajo que condiciones de a, b, c el sistema posee las propiedades de:

- 1) El sistema total es invariante en el tiempo
- 2) La relación entrada-salida es igual al del sistema 2
- 3) El sistema final es causal

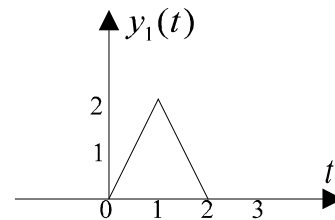
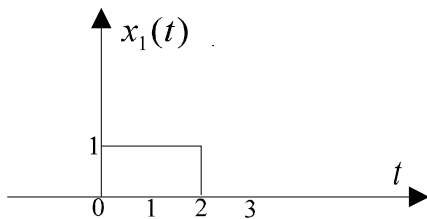
Problema 9

Muestre que la causalidad para un sistema lineal de tiempo continuo es equivalente a la expresión:

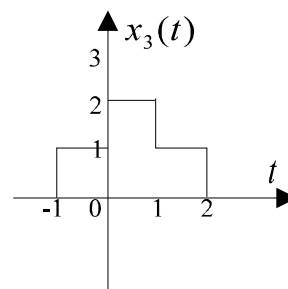
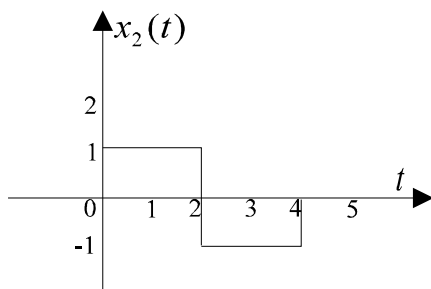
Para cualquier tiempo t_o y cualquier entrada $x(t)$ de modo que $x(t) = 0$ para todo $t < t_o$ entonces $y(t) = 0$ para todo $t < t_o$

Problema 10

Considere un SLIT cuya respuesta a la señal $x_1(t)$ de la figura es la señal $y_1(t)$.



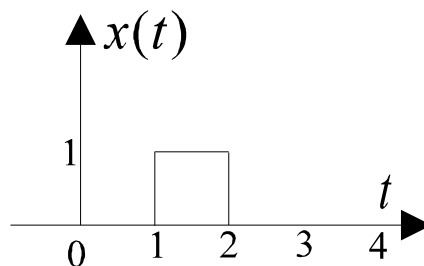
Determine y grafique la respuesta a las entradas dibujadas como $x_2(t)$ y $x_3(t)$



- b) Suponga un segundo sistema LIT que tiene como respuesta a un escalón unitario $u(t)$ la siguiente señal:

$$y(t) = e^{-t} u(t) + u(-1-t)$$

Determine y dibuje la respuesta del sistema la entrada $x(t)$ mostrada:



Respuesta de SLIT en Tiempo Continuo

4.1. La convolución en tiempo continuo

Las cualidades del SLIT se las modela mediante *EDOs* o *Eed* que vinculan entradas con salidas y sus derivadas (o integrales). Este modelo de ecuación diferencial en caso de tiempo continuo y de ecuaciones en diferencias para tiempo discreto es muy poderoso y existen muchos estudios al respecto. En este trabajo, se estudia una introducción a ecuaciones en diferencias, en capítulo 2.

La forma de buscar un modelo matemático del SLIT es formular las leyes de los elementos y concretar una ley del conjunto, constituyendo la ecuación diferencial o en diferencias. Otra “forma” es mediante un ensayo, observando la respuesta del SLIT ante una entrada conocida. La entrada es la señal delta $\delta_{(t)}$ por lo que se suele denominar señal ponderomotriz (pondera \equiv pesar, evaluar; motriz \equiv su dinámica) la respuesta a $\delta_{(t)}$, es la que caracteriza, o “pesa” al sistema). Según sea la “forma” de $h_{(t)}$ denominada “ponderante” descubrimos cualidades del SLIT.

Si bien $\delta_{(t)}$ es una señal matemática, es decir en rigor no es realizable, en la práctica ensayos impulsivos se usan en el estudio de comportamientos de transformadores, equipos de maniobra entre tantas otras aplicaciones. Se genera un impulso real que se adopta a los fines prácticos como $\delta_{(t)}$.

Lo dicho, si entra $\delta_{(t)}$ sale $h_{(t)}$ del SLIT.



Figura 4-1

Si entra una combinación lineal de señales delta desplazadas en tiempo, sale la misma combinación lineal en $h(t)$ igualmente desplazada temporalmente:

$$\delta_{(t)} + 3 \delta_{(t-1)} + 4 \delta_{(t+2)} \xrightarrow{\text{Sale}} h_{(t)} + 3 h_{(t-1)} + 4 h_{(t+2)}$$

porque justamente se trata de un SLIT lo que permite generalizar:

$$\text{Entra } \sum_{k=-N}^N a_k \delta_{(t-k)} \xrightarrow{\text{Sale}} \sum_{k=-N}^N a_k h_{(t-k)} \quad \text{con } a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k$$

Note que tratamos de modelar el sistema con relación entrada/salida, sin meternos dentro de él, esto ha hecho que estos modelos se denominen de caja negra o externos, ya que no buscamos las relaciones de sus variables internas, sino las relaciones entrada/salida sin precisar que hay (negro) adentro.

Si conocemos $h(t)$ la pregunta es: qué sucede si entramos con una señal $x(t)$ que es arbitraria, la salida es $y(t)$, entonces: cómo la conocemos?

Aunque parezca extraño, comencemos a expresar $x(t)$ como “suma” de señales $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

aplicamos esta propiedad de esta forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

ya que el único valor no nulo, del producto subintegral es cuando $\tau = t$ en este caso t es un valor fijo o parámetro, se trata de una integral paramétrica, impropia.

Como $x(t)$ no es función de τ se puede escribir:

$$x(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) d\tau = x(t); \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego una forma de expresar $x(t)$ un tanto engorrosa, pero útil, es como suma de integral de señales delta:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau; \quad t \in \mathbb{R}$$

En esta ultima forma de expresar la función $x(t)$, el término de la derecha, solo posee como función de la variable tiempo t a la señal delta, la integral es el límite de una suma, se trata de una suma integral de muestras $\delta(t-\tau)$, punto a punto.

Si entra una cierta suma de señales deltas, sale del SLIT la misma suma de señales donde se transforma $\delta(t)$ en $h(t)$, obteniendo una salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau; \quad t \in \mathbb{R}$$

la salida queda así expresada conocida la entrada $x(t)$ y la función ponderante del sistema $h(t)$, a través de la integral mencionada, que se denomina de **convolución**.

4.1.1. Cálculo de la integral de convolución

Sea:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

Esta expresión puede ser operativamente complicada calcularla por la necesidad de determinar los extremos de integración, fijados por la definición de la cantidad subintegral.

Para resolver esta integral de convolución lo primero que hay que hacer es distinguir t de τ , t es una constante a los fines de integrar y esta constante puede a su vez ser cualquier real.

El proceso de transformar $x(t)$ en $x(\tau)$, no es mas que un cambio de variables, obtener $h(-\tau)$ es un cambio de variables de $h(t)$ y una reflexión.

Luego podemos pensar que $h(t-\tau)$ se desplaza horizontalmente según sean los valores de t , si $t > 0$ hacia la derecha, pues t afecta a $-\tau$ y si $t < 0$ se mueve hacia la izquierda. Esto lo realizamos para todo t real.

A fin de plantear las posibles integraciones, es muy conveniente ayudarse con los gráficos, determinar así la fórmula de la salida.

Nota: Observe que $*$ significa convolución, no confundir con Matlab donde significa producto.

Ejemplo 1:

Sea

$$x(t)=u(t) \text{ y } h(t)=e^{-t}.u(t)$$

Se desea conocer la salida $y(t) = x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau$.

Si graficamos:

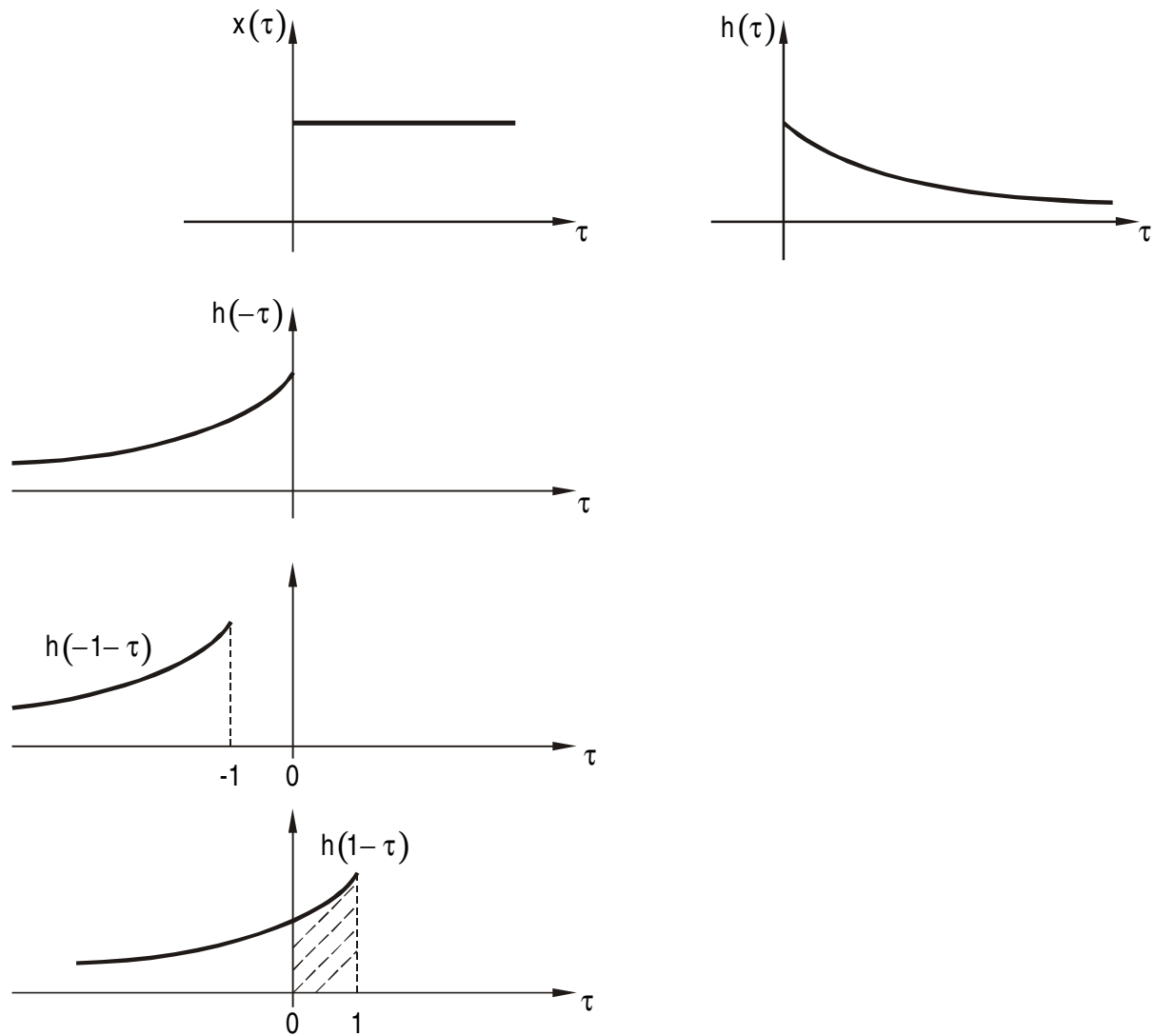


Figura 4-2

Si $t < 0$, digamos $t = -1$, la función $h(t - \tau)$ se desplaza a la izquierda, no hay “mordedura” con $x(\tau)$ lo que significa producto nulo.

Si $t > 0$, por ejemplo $t = 1$, se desplaza $h(t - \tau)$ hacia la derecha y se produce un solape con $x(\tau)$ que hace un producto no nulo.

Luego si $t < 0$ la convolución es nula pues la integral de cero es cero, luego:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = 0 \quad \text{si } t < 0$$

Si $t > 0$ el solape es para τ desde 0 hasta el valor de t y el producto no nulo determina una integral desde 0 hasta t de la forma: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$ si $t > 0$, luego se puede expresar la salida como:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

El paso siguiente es resolver la integración:

$$\int_0^t u(\tau) \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

Si graficamos $y(t)$ será:

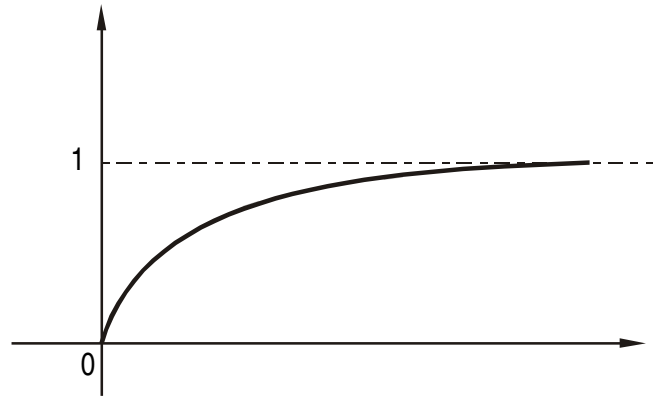


Figura 4-3

Conclusión

El problema es identificar el “movimiento” de la señal $h(t-\tau)$ para distintos valores de t , esta señal se mueve desde $t \rightarrow -\infty$ hasta $t \rightarrow \infty$.

Si $t < 0$ el movimiento es hacia la izquierda. Si $t > 0$ el movimiento es hacia la derecha.

4.1.2. Propiedad: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

Una propiedad importante es la conmutación de la convolución, veamos:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$\text{Hacemos } \gamma = t - \tau ; \quad d\gamma = -d\tau ; \quad \tau = t - \gamma$$

$$\text{Si } \tau \rightarrow \infty \Rightarrow \gamma \rightarrow -\infty ; \quad \tau \rightarrow -\infty \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty$$

Por la propiedad de la integral : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, resulta:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = \\ &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\gamma) \cdot h(\gamma) \cdot d\gamma \end{aligned}$$

Esta propiedad no solo ofrece una posibilidad de cálculo al poder mover $x(t)$ o $h(t)$ según convenga, sino es que además permite intercambiar sistema por señal, o sea un SLIT $x(t)$ con una “entrada” $h(t)$ es equivalente a un sistema $h(t)$ con entrada $x(t)$, permite interactuar señales entre sí, en forma matemática a través de un programa realizando así el filtrado de señales sin necesidad de un hard, esto da origen a filtros digitales, modulación digital y tantos otros procesos realizados en soft.

Ejemplo 2

Veamos otro ejemplo de convolución, que permita destacar como se complica si una o las dos señales son de duración finita.

$x(t)=u(t)-u(t-4)$ es un pulso rectangular de amplitud 1 y duración 4

$h(t)=e^{-t}.u(t)$ exponencial decreciente definida para $t>0$

1- Graficamos $x(\tau)$ y $h(-\tau)$:

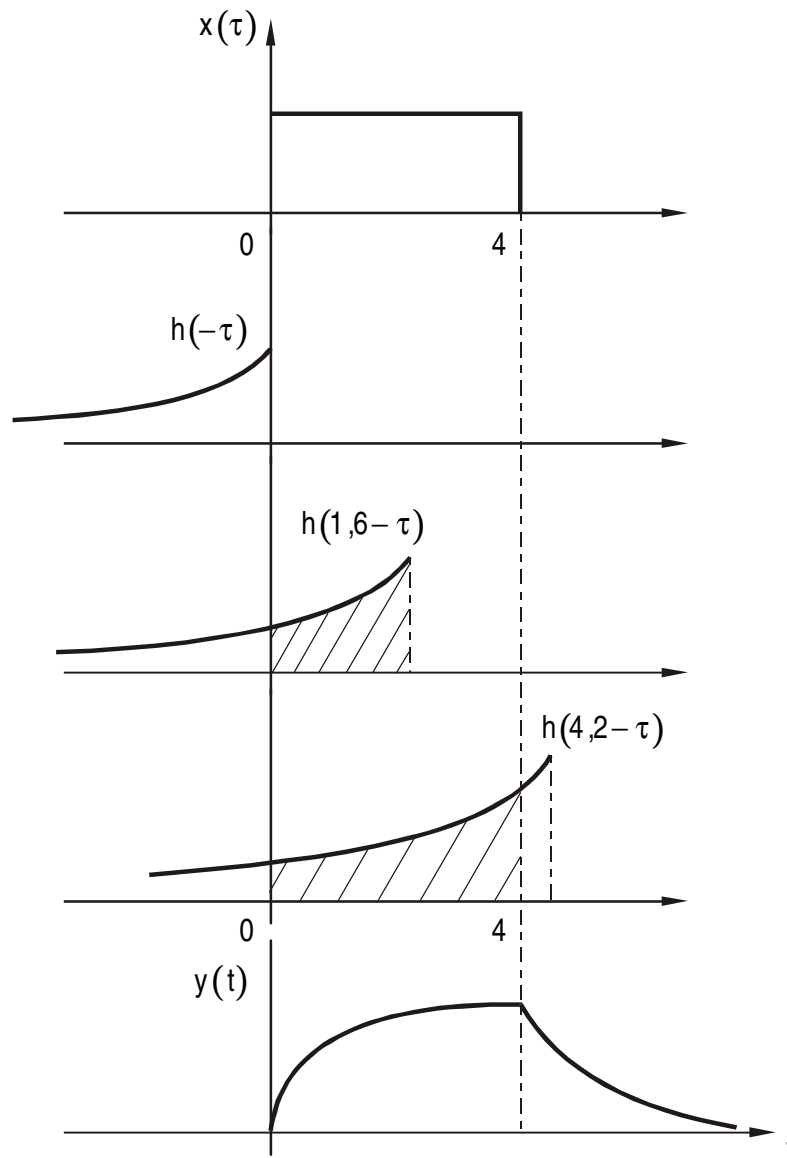


Figura 4-4

- 2- Vamos realizando el movimiento de $h(-\tau)$ de acuerdo a t : si $t<0$ se desplaza a la izquierda y no existe mordedura, luego la convolución es cero.
- 3- Si $t>0$ pero $t<4$ sucede que τ puede integrar dentro de la mordedura y esto es para τ entre 0 y t , ya que en este caso, la cabeza de la señal $h(-\tau)$ es t .

- 4- Si $t > 4$ sucede que siempre existe mordedura de toda la señal $x(\tau)$ y para cualquier valor de $t > 4$ resulta que τ barre en la integral desde 0 hasta 4. Lo que cambia en cuanto t crece, es la función $h(-\tau)$.

En resumen:

$$\begin{aligned} t < 0 & \quad y(t) = 0 \\ 0 \leq t < 4 & \quad y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \\ t \geq 4 & \quad y(t) = \int_0^4 x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

El cálculo es una cuestión de destreza, quizá lo complicado es justamente plantear estos límites de integración y definir $y(t)$.

$$\begin{aligned} \text{si: } 0 \leq t < 4; \quad \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot d\tau &= \frac{e^{-2t}}{2} \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \text{si: } t \geq 4 \quad ; \quad \int_0^4 e^{-(t-\tau)} \cdot d\tau &= \frac{e^{-2t}}{2} \cdot e^{2\tau} \Big|_0^4 = \frac{1}{2} e^{-2t} [e^8 - 1] \end{aligned}$$

Luego resulta:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2}(e^8 - 1)e^{-2t} & t \geq 4 \end{cases}$$

Que es lo que se bosqueja en un gráfico.

Nota:

Como ayuda para la determinación de los límites de integración de la convolución, siempre “conviene” mover la señal perpetua o sea definida para tiempo infinito, y dejar quieta la señal finita.

Las peores situaciones en la determinación de estos límites es cuando ambas señales $x(t)$ y $h(t)$ son finitas, veamos un último ejemplo:

$$x(t) = u(t) - u(t-6) \quad \text{pulso rectangular de amplitud 1 y duración 6}$$

$$h(t) = t \cdot [u(t) - u(t-4)] \quad \text{pulso triangular de pendiente 1 y duración 4.}$$

Representemos

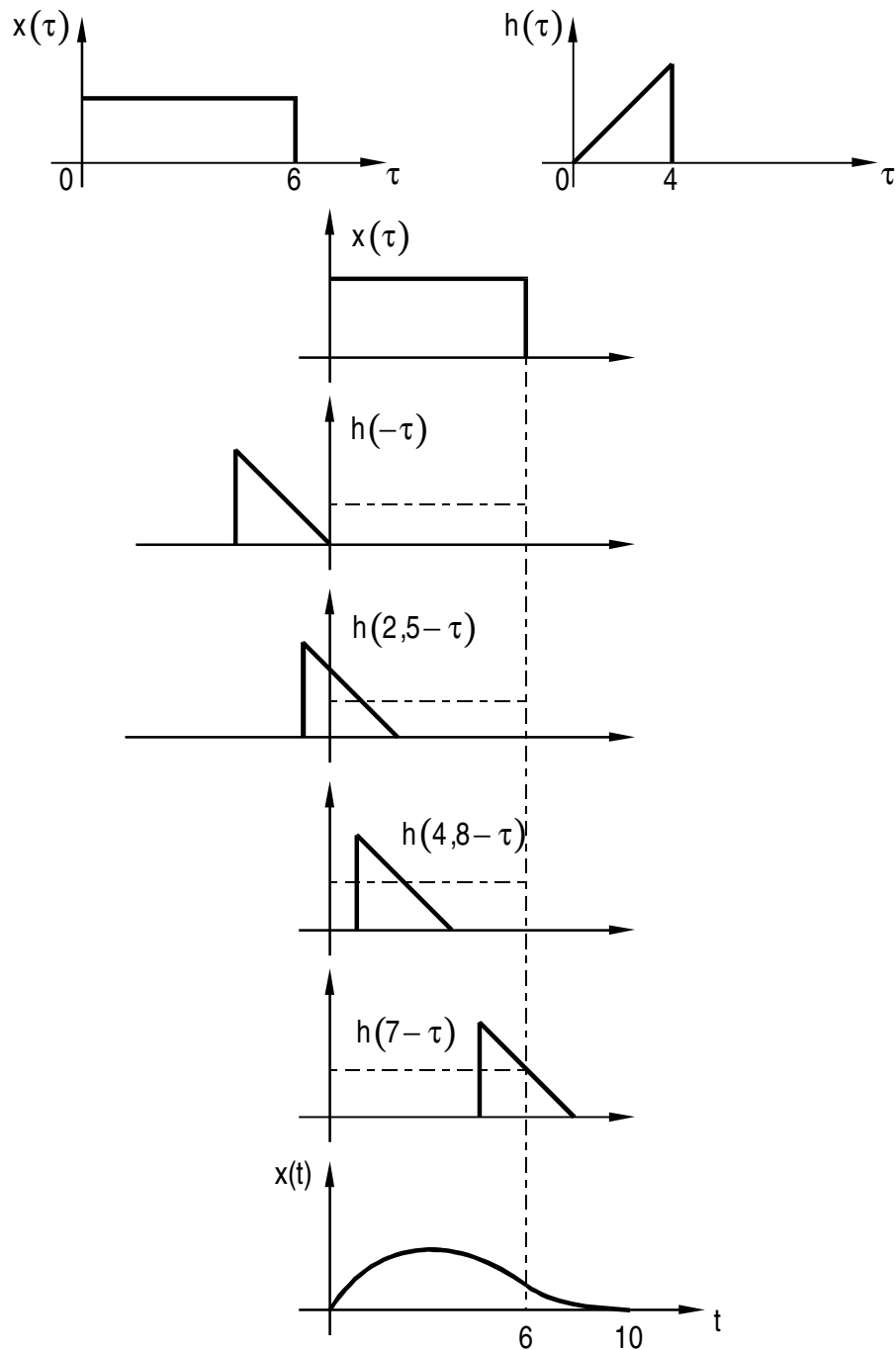


Figura 4-5

Si $t < 0$, resulta mordedura nula, entonces $y(t) = 0$, pues $h(-\tau)$ se mueve hacia la izquierda.

Si $0 \leq t < 4$, $h(t-\tau)$ se mueve hacia la derecha, hasta cuatro unidades, justo en $t=4$ es cuando el triángulo estará totalmente sumergido en el rectángulo de $x(\tau)$, luego la convolución es:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$
 por ahora no veremos en que consiste la cantidad subintegral ni como calcularla.

Si $4 \leq t < 6$ el triángulo $h(t-\tau)$ se mueve dentro del rectángulo, existiendo total mordedura, luego la convolución integra desde la “cola” del triángulo que es $t-4$, hasta la cabeza del triángulo que es t , dando :

$$y(t) = \int_{t-4}^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Si t esta comprendido entre $6 \leq t < 10$ el triángulo solapa solo la cola con el rectángulo hasta $t=10$ que sale totalmente de $x(\tau)$ luego la integral sobre τ será entre la cola $t-4$ y el valor fijo de 6 dando:

$$y(t) = \int_{t-4}^6 x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Por último si $t \geq 10$, el triángulo ya no muerde al rectángulo y la convolución $y(t)$ es nula.

En resumen:

$$y(t) = \begin{cases} t < 0 & y(t) = 0 \\ 0 \leq t < 4 & y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ 4 \leq t < 6 & y(t) = \int_{t-4}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ 6 \leq t < 10 & y(t) = \int_{t-4}^6 x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ t \geq 10 & y(t) = 0 \end{cases}$$

Un bosquejo de $y(t)$ es como el que figura debajo de los gráficos de convolución.

Al calculo integral, que se puede especular obteniendo una primitiva de la cantidad subintegral y evaluarla donde indican los límites, no lo resolvemos ahora, queda como ejercicio.

Nota: La longitud de $y(t)$ es la longitud de $x(t)$ mas la de $h(t)$ si son finitas por supuesto.

4.2. Propiedades de los SLIT en relación a la convolución

Trataremos las propiedades de la convolución que surgen de los SLIT

4.2.1. La convolución es conmutativa

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Ya denotamos esta propiedad que conmuta señal por sistema.

4.2.2. Distributiva

$$x(t) * [h(t) + g(t)] = x(t) * h(t) + x(t) * g(t)$$

Esta propiedad permite realizar la suma de sistemas:

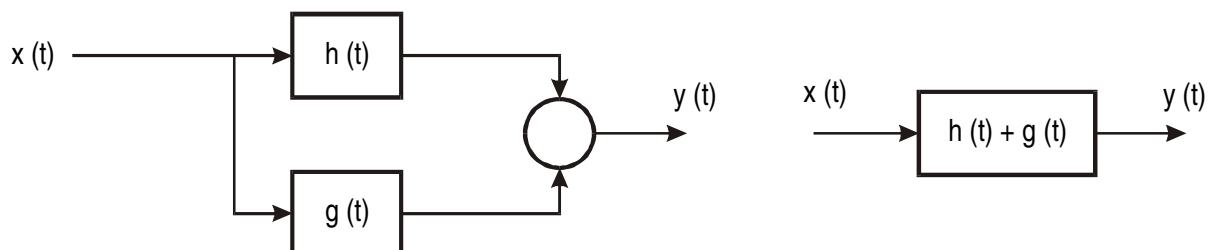


Figura 4-6

4.2.3. Asociativa

$$x(t) * [h(t) * g(t)] = [x(t) * h(t)] * g(t)$$

Esto permite la cascada o serie de sistemas:

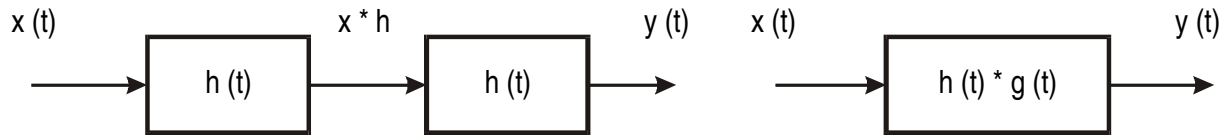


Figura 4-7

4.2.4. Sistema con y sin memoria

Si es sistema de memoria nula, la salida depende de la entrada en el mismo momento, en este caso: $h(t) = K\delta(t)$, luego si $y(t) = x(t) * h(t) = Kx(t)$ ya que :

$$x(t) * \delta(t) = x(t),$$

propiedad esta importante, que se puede enunciar como convolucionar una señal con un impulso es repetir dicha señal, pues:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \cdot d\tau$$

el único valor no nulo del producto subintegral es cuando $\tau = t$, luego:

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) \cdot d\tau = x(t)$$

Extendiendo esta propiedad se puede desplazar $x(t)$ por medio de la convolución:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0).$$

4.2.5. Invertibilidad

Si $x(t) * h(t) = y(t)$ el inverso es tal que $y(t) * h_I(t) = x(t)$ o sea en una conexión de cajas:

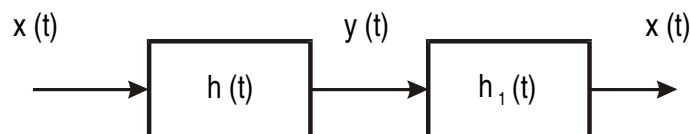


Figura 4-8

Es necesario entonces que $h(t) * h_I(t) = \delta(t)$ para que entre $x(t)$ y salga $x(t)$

4.2.6. Causalidad

El sistema es causal si $h(t)=0$ para $t<0$, ya que $h(t)$ es la respuesta al impulso que se manifiesta en $t=0$, y no puede haber respuesta antes de $t=0$.

Luego:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau).d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau).d\tau$$

ya que por lo dicho, $h(t)=0$ si $t<0$

Si ahora hacemos un cambio de variables en la integral

$$\begin{aligned} \text{Hacemos } \gamma &= t - \tau ; & d\gamma &= -d\tau ; & \tau &= t - \gamma \\ \text{Si } \tau \rightarrow \infty &\Rightarrow \gamma \rightarrow -\infty ; & \tau \rightarrow -\infty &\Rightarrow \gamma \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Cambiando el signo de la integral y orden de los extremos, y llamando nuevamente a γ como τ resulta:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau).d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau).d\tau$$

4.2.7. Estabilidad

Si $|x(t)| < K$, hace que $|y(t)| < M$, con $K, M \in \mathbb{R}$ con $y(t)=x(t)*h(t)$ se dice que es estable.

Entonces:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| < M$$

como $x(t)$ está acotada y es menor que un cierto K podemos decir que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \left| K \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)d\tau \right|$$

lo cual exige que si esta acotada la integral de:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)d\tau \right| < Q \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < P, \quad \text{con } Q, P \in \mathbb{R}$$

entonces el sistema es estable.

4.2.8. Dobletes y algunas aplicaciones de la convolución

$$8.1. x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$8.2. x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad \text{para } t_0 \text{ real}$$

8.3. Si $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ se denomina al sistema: derivador puro, y si $u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$, doblete que aplicado a $x(t)$ como convolución determina: $y(t) = x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ su derivada.

8.4.
$$x(t) * u(t) = \int_0^\infty x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau: \quad \text{integral de } x(t)$$

$$u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \int_0^t dt = t \quad \text{si } t > 0: \text{ la rampa}$$

4.3. Respuesta de SLIT a entradas periódicas

Si a un SLIT determinado por $h(t)$ se lo excita con una entrada armónica, periódica de periodo T_0 , de la forma:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

la salida es

$$y_{(t)} = x_{(t)} * h_{(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

lo que se puede escribir como

$$y_{(t)} = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

El valor de la integral no depende del tiempo, es un número que depende de $h(t)$ y de ω_0 , se lo denomina autovalor $H_{(j\omega_0)}$

Como conclusión, la salida $y_{(t)}$ es también periódica, de periodo T_0 ya que es de la forma $e^{j\omega_0 t}$ idem a la entrada, multiplicada por un número $H(\omega_0)$

Este razonamiento permite afirmar: *“La convolución de dos señales, una de las cuales es periódica, es también periódica del mismo periodo.”*

4.3.1. Extensión periódica y envolvente

Si se conoce la respuesta del SLIT a un periodo de la entrada periódica, se puede encontrar la respuesta usando superposición y desplazamiento. Esta superposición produce una señal también periódica a la salida.

Se define extensión periódica de una señal de energía (limitada en tiempo) $x(t)$ y se la denomina $x_{pe}(t)$, a la suma de $x(t)$ y su réplica desplazadas en múltiplo de T .

$$x_{pe}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t+kT) \quad k \in \mathbb{Z}$$

El “método” de la envolvente puede ser usado para encontrar la salida periódica como la extensión periódica de la respuesta a un periodo de la entrada.

Ejemplo 1

Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo como el dibujado, denominada $x_p(t)$:

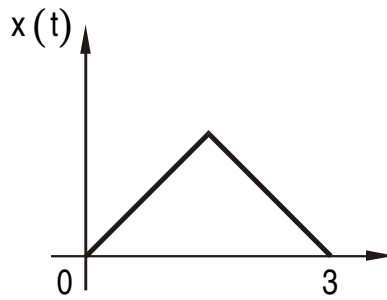


Figura 4-9

La extensión periódica para $T=4$ es:

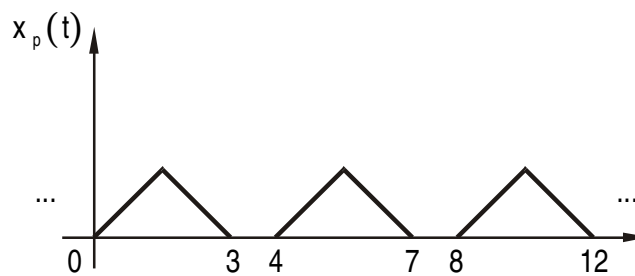


Figura 4-10

Si fuese $T=2$, se debe tomar la “envolvente”:

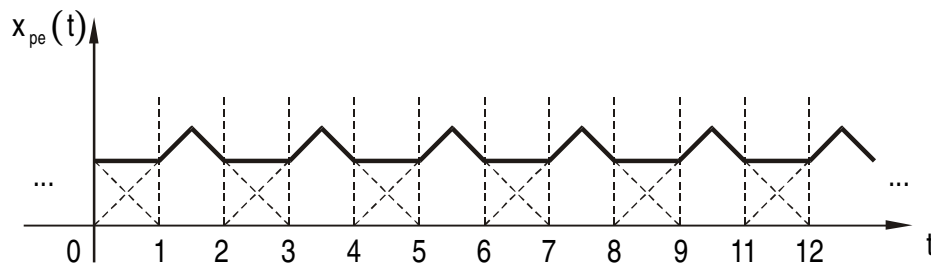


Figura 4-11

Ejemplo 2

Obtener la extensión periódica de la señal $x(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, con $a > 0$, con periodo T , usando envolventes.

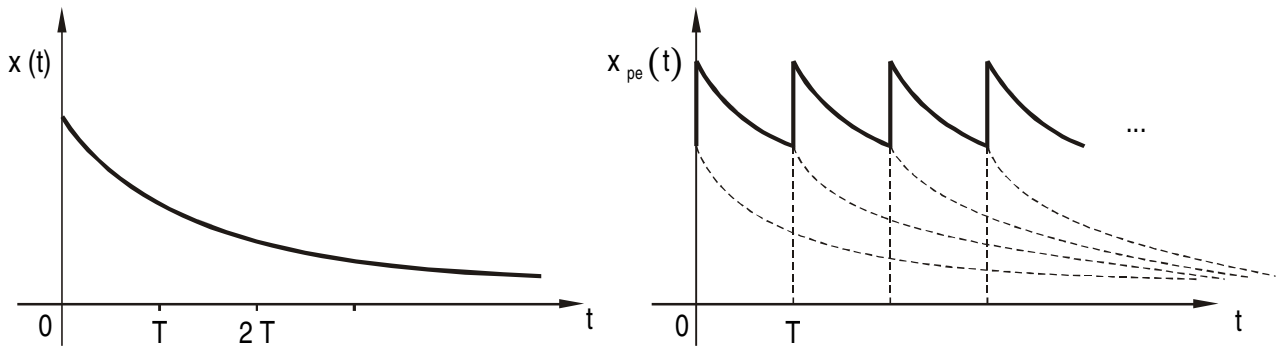


Figura 4-12

$$x_{pe}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+T k)} u(t+T k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a(t+T k)}$$

ya que $u(t+T k) = 0$ si $t+T k < 0$, como $0 < t < T$ surge la expresión

$$x_{pe}(t) = e^{-at} + e^{-a(t+T)} + e^{-a(t+2T)} + \dots = e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} = \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT}} = A e^{-at}$$

Resumen

Una forma de obtener la respuesta a una entrada periódica es encontrar la extensión $h_{pe}(t)$ de $h(t)$ y luego convolucionar un periodo de $x_p(t)$ con un periodo $h_{pe}(t)$. Se debe usar luego la envolvente para generar a $y_p(t)$

Ejemplo 3

Sea un filtro pasabajos (PB) con $h(t) = e^{-t} \cdot u(t)$, excitado por una señal rectangular periódica de amplitud 1; periodo $T=2$, y duración de cada pulso de $\tau=1$:

La extensión periódica del filtro esta dada por $h_{pe}(t) = A e^{-t}$ de periodo $T=2$, y donde A por lo visto en extensión de las exponenciales es: $A = \frac{1}{1 - e^{-2}}$.

Primero encontraremos la convolución de un periodo de $x(t)$ con un periodo de la $h_{pe}(t)$.

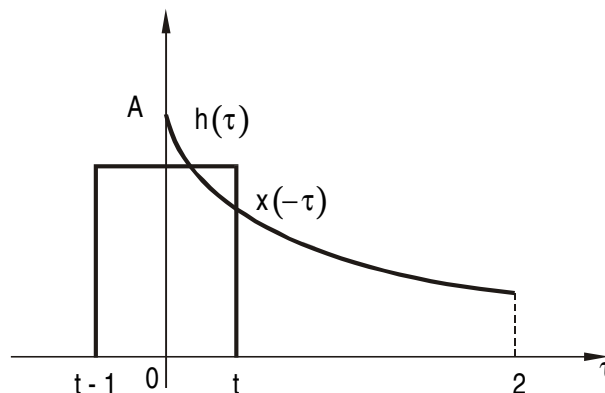


Figura 4-13

En este intervalo de $0 \leq t < 1$ la integral de convolución resulta: $\int_0^t A e^{-\tau} d\tau = A(1 - e^{-t})$

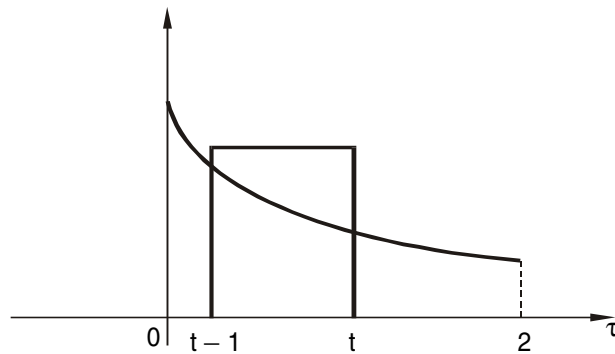


Figura 4-14

En $1 \leq t < 2$ la integral de convolución resulta:

$$\int_{t-1}^t A e^{-\tau} d\tau = A(e^{-(t-1)} - e^{-t})$$

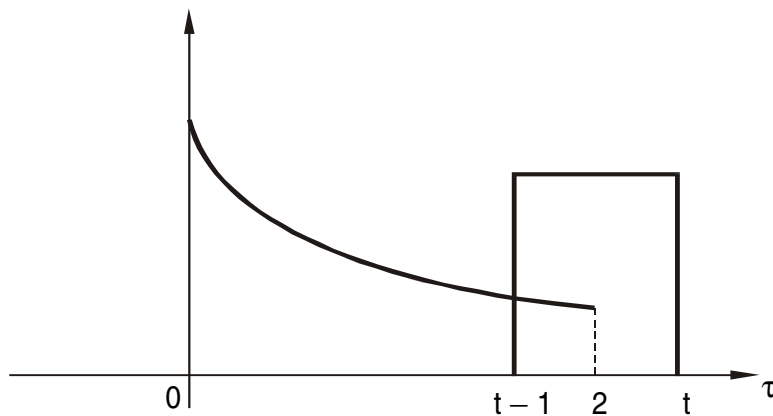


Figura 4-15

En $2 \leq t \leq 3$ la integral de convolución resulta:

$$\int_{t-1}^2 A e^{-\tau} d\tau = A(e^{-(t-1)} - e^{-2})$$

Envolvemos el último intervalo mas allá de $t=2$, reemplazando t por $t+2$ y sumamos el primer termino, para obtener un periodo de la salida periodica $y_p(t)$ como:

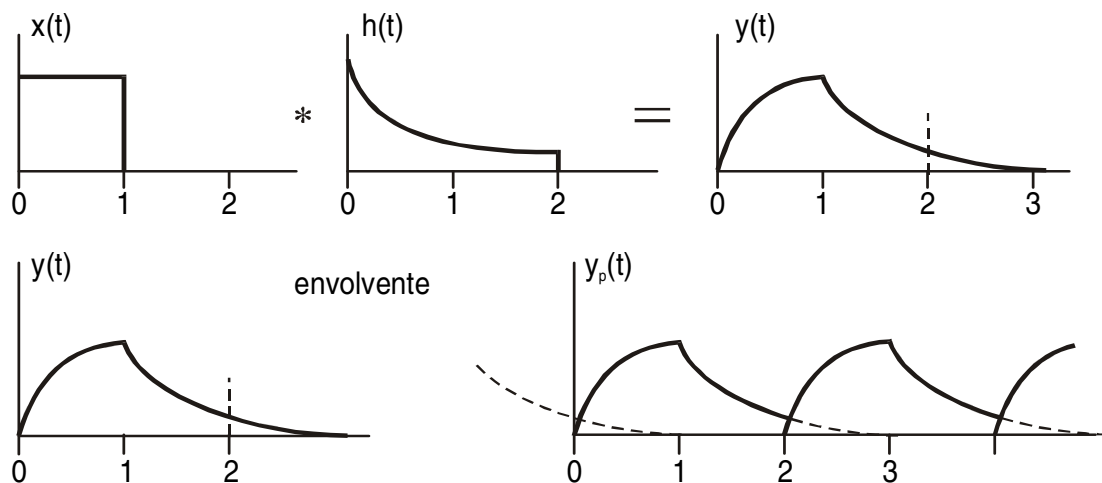


Figura 4-16

$$y_p(t) = \begin{cases} A(1 - e^{-t}) + A[e^{-(t-1)} - e^{-t}] = 1 - \frac{e^{-(t-1)}}{1+e}, & 0 \leq t < 1 \\ A[e^{-(t-1)} - e^{-t}] = \frac{e^{-(t-2)}}{1+e}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

4.4. Convolución periódica

La convolución implica determinar el área del producto de una señal y la versión reflejada y desplazada de otra. Las señales periódicas son de extensión infinitas por lo que el producto de señales periódicas es infinito o cero.

La convolución de señales periódicas no existe en sentido usual o estricto.

La diferencia de convolución periódica y la convolución lineal se lo puede comparar con la diferencia entre señales de energía y de potencia.

Si se trata de señales de energía infinita una medida útil puede ser la potencia si existe, y es el promedio de la energía en el tiempo.

Similarmente señales cuya convolución es infinita una medida útil es la convolución promedio y se denomina convolución periódica como: $x(t) \otimes h(t)$ para dos señales periódicas del mismo periodo T .

La convolucion periódica $y(t)$ es también periódica de periodo T y se la calcula como:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = x(t) \otimes h(t) \text{ para } 0 \leq t \leq T$$

Observamos que la duración de $y(t)$ es de $2T$ pues posee la duración de la suma de cada señal componente.

Para obtener la convolución periódica de señales del mismo periodo, primero se realiza la convolución en un periodo T , de forma ordinaria, y luego se crea la extensión de $y(t)$ que es también periódica de periodo T , usando la envolvente cuando sea necesario y se normaliza dividiendo por T .

Ejemplo

Caso I: $T=2$, $x(t)$ y $h(t)$ duran 1 unidad de tiempo.

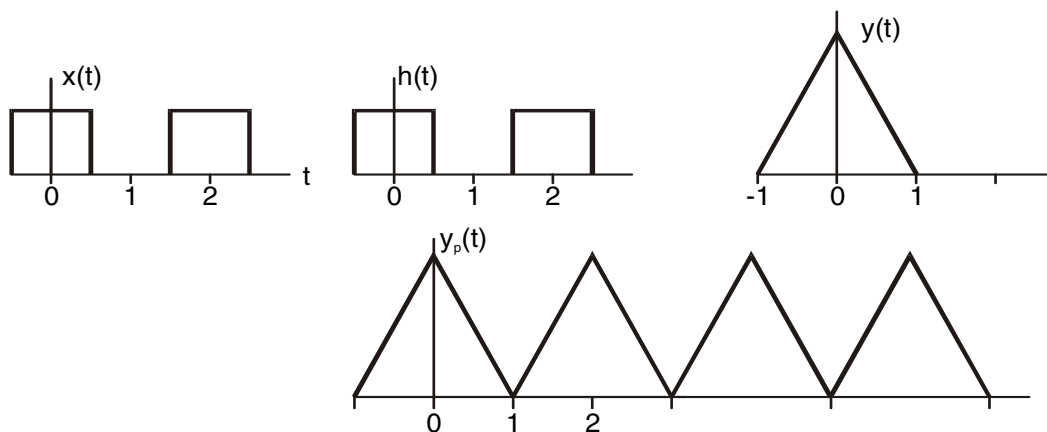


Figura 4-17

Caso II: $T=4$, $h(t)$ dura 2 unidad de tiempo.

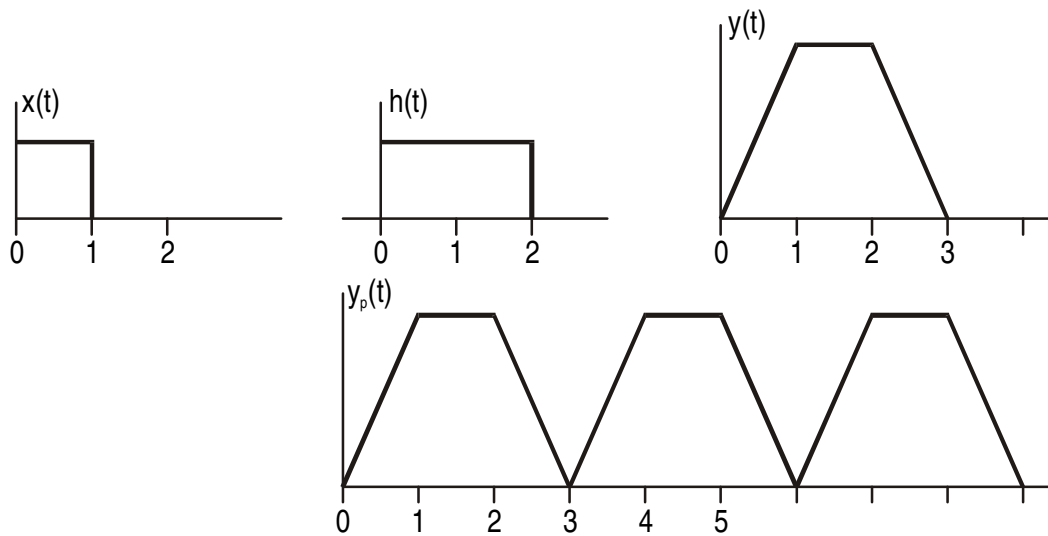


Figura 4-18

Caso III: $T=3$, duración de $x(t)$ y de $h(t)$ es de 2 unidades de tiempo.

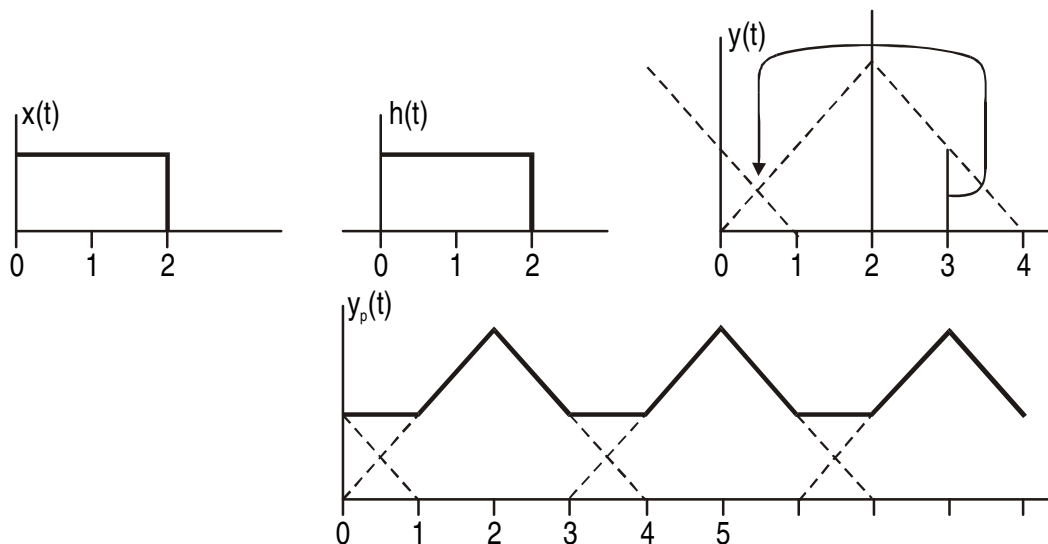


Figura 4-19

4.5. Correlación

La autocorrelación puede verse como una medida de similitud o coherencia entre la función $x(t)$ y su versión desplazada. Si no existe desplazamiento las funciones se igualan y resulta un máximo de autocorrelación (máximo de parecido).

Con un desplazamiento de una señal en relación a la otra, es de esperar una reducción de la autorrelación.

La operación es similar a la convolución. Implica una función mas allá de otra y encontrar el área bajo el producto resultante. La diferencia operativa de la convolución es que no se efectúa ninguna reflexión.

La correlación $r_{xx}(t)$ de dos funciones idénticas (o una función consigo misma) se denomina autocorrelación. Para dos funciones diferentes $x(t)$ e $y(t)$ la correlación $r_{xy}(t)$ se conoce como correlación cruzada.

Las correlaciones se definen como: (usamos el símbolo $**$)

$$r_{xx}(t) = x(t) ** x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t) \cdot x(\tau) \cdot d\tau$$

$$r_{xy}(t) = x(t) ** y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(\tau - t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + t) \cdot y(\tau) \cdot d\tau$$

$$r_{yx}(t) = y(t) ** x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot x(\tau - t) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau + t) \cdot x(\tau) \cdot d\tau$$

La variable t es denominado retraso, y las definiciones no son estándares algunos autores cambian las definiciones. Observar que $r_{xy}(t) \neq r_{yx}(t)$ en general.

4.5.1. Correlación como convolución

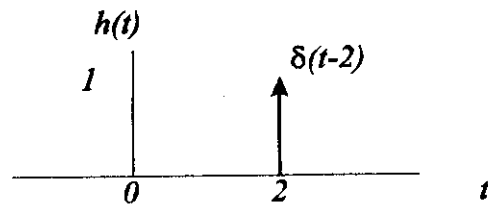
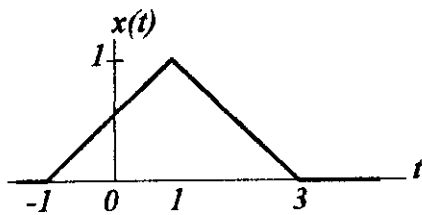
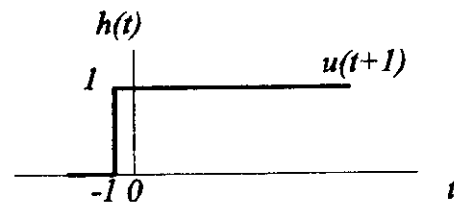
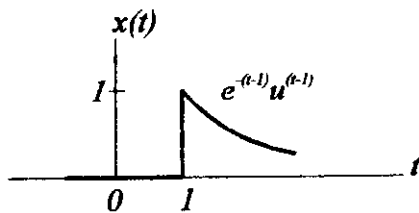
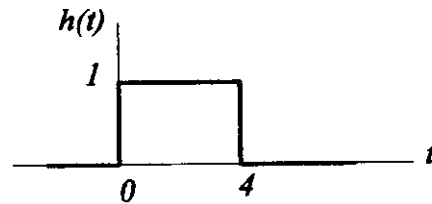
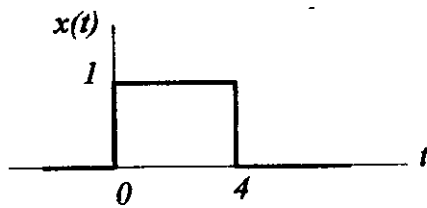
La ausencia de reflexión implica que la correlación de $x(t)$ e $y(t)$ es equivalente a la convolución de $x(t)$ con la versión reflejada $y(-t)$, se tiene y así lo interpreta Matlab que

$$r_{xx}(t) = x(t) ** y(t) = x(t) * y(-t).$$

Problemas

Problema 1

Determine la convolución de $x(t)$ y $h(t)$ para cada uno de los siguientes casos:



Problema 2

a) Utilizando la convolución y el gráfico de la respuesta del S L I T con respuesta al impulso de:

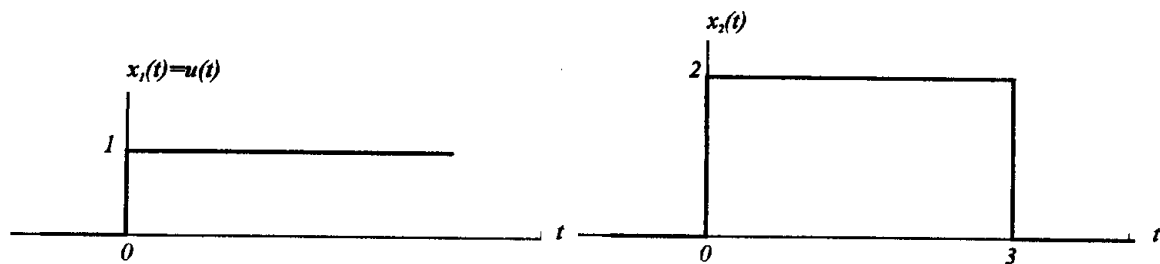
$$h(t) = e^{-t/2}u(t)$$

Para cada una de las entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ mostradas y con $y_1(t)$ denotando la respuesta a $x_1(t)$ como $y_2(t)$ la de $x_2(t)$.

b) $x_2(t)$ puede expresarse en términos de $x_1(t)$ como:

$$x_2(t) = 2[x_1(t) - x_1(t-3)]$$

Utilizando las ventajas de las propiedades de los S L I T determine ahora $y_2(t)$ en términos de $y_1(t)$. Verifique su expresión por evaluación con $y_1(t)$ obtenido en a) y comparando con $y_2(t)$ obtenido en parte a).



Problema 3

Calcule la integral de convolución, descubra la respuesta $y(t)$ si $h(t)$ es la salida del SLIT a $\delta(t)$

a)

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \text{Si } \alpha \neq \beta \quad \text{y además si } \alpha = \beta$$

$$h(t) = e^{-\beta t} u(t)$$

b)

$$x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$$

$$h(t) = e^{2t} u(1-t)$$

c)

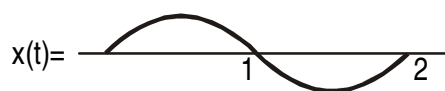
$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

$$h(t) = u(t-1)$$

d)

$$x(t) = \begin{cases} e^t & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t} & t > 0 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

e)



$$h(t) = u(-2-t)$$

Problema 4

Considere al Sistema Lineal siguiente:

$$h_{\tau}(t) = u(t-\tau) - u(t-2\tau)$$

respuesta a $\delta(t-\tau)$

a) Es invariante en el tiempo?

b) Es causal ?

c) Determine la respuesta del sistema a las entradas:

$$1) x_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

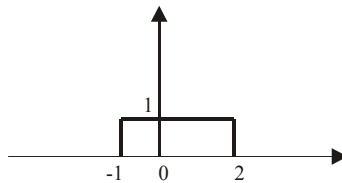
$$2) x_2(t) = e^{-t} u(t)$$

Problema 5

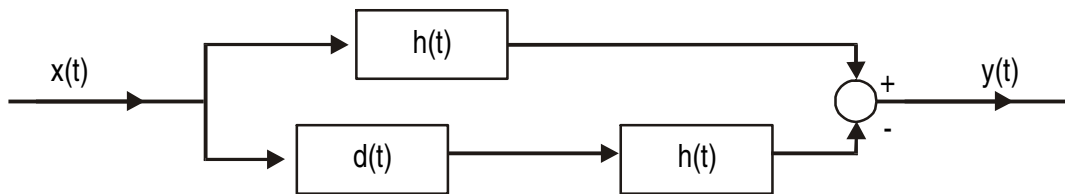
Considere al sistema LIT con entrada y salida relacionadas por la siguiente fórmula:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$

- a)Cuál es la respuesta a un impulso de este sistema ?
 b) Determine la respuesta de el sistema cuando la entrada $x(t)$ es mostrada en la figura:



- c) Considere la interconexión de SLIT mostrada

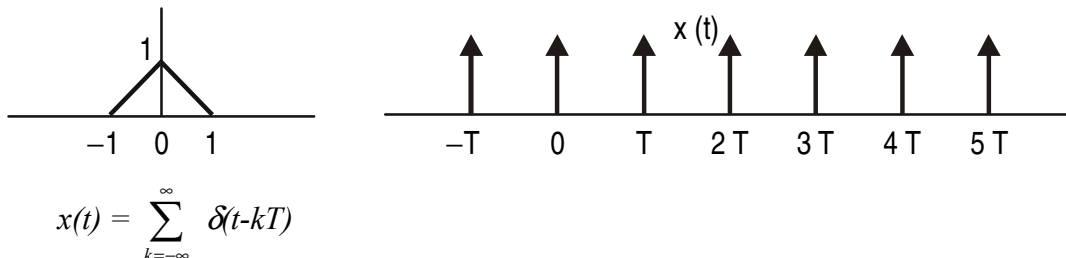


Donde la $h(t)$ es la mostrada en la parte a) y $d(t) = \delta(t)$.

- d) Determine la salida $y(t)$ cuando la entrada es la del punto b) por los dos siguientes métodos:
 1) Calculando la respuesta de todo el sistema usando la integral de convolución.
 2) Usando las propiedades de la convolución sobre el resultado de la parte b).

Problema 6

Sea $h(t)$ el pulso triangular mostrado y $x(t)$ el tren de impulsos:



- a) Determine y bosqueje $y(t) = x(t) * h(t)$ para los siguientes valores de T :

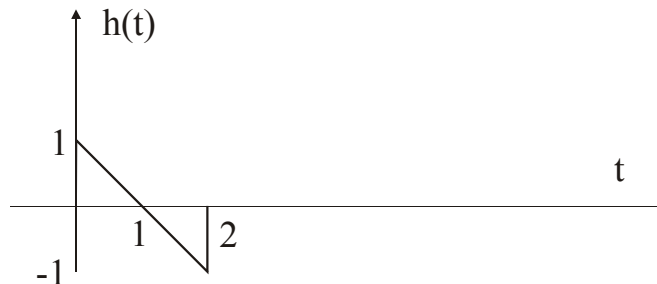
$$T = 4 ; T = 2 ; T = 3/2 ; T = 1$$

- b) Considere el sistema LIT con la respuesta al impulso $h(t) = e^{-t} u(t)$

Determine y bosqueje la salida $y(t)$ donde $x(t)$ es el tren de impulsos

$$\delta_T(t) \text{ con } T = 1; \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-k)$$

Determine y bosqueje la salida si $h(t)$ es:



Cuando la entrada $x(t)$ es la descrita en b)

Problema 7

Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas, con período común T . Se define como convolución periódica a:

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^T x_1(t) x_2(t-\tau) d\tau = y(t)$$

a) Muestre que $y(t)$ es también periódica, de período T

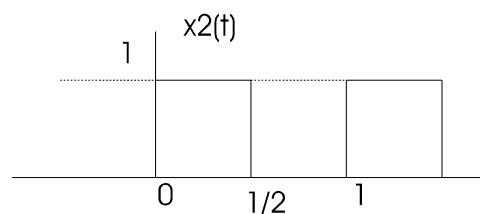
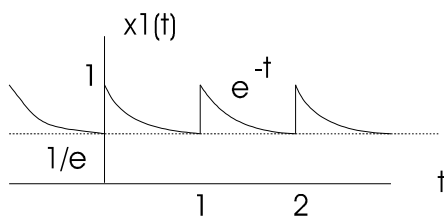
b) Considere la integral

$$y_a(t) = \int_a^{a+T} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Muestre que $y(t) = y_a(t)$

Ayuda: escriba $a = kT + b$ con $0 \leq b < T$

c) Calcule la convolución periódica de:



Autocorrelacion de Señales

Problema 8

Determine y trace las funciones de autocorrelación de los siguientes pulsos exponenciales:

a) $x(t) = e^{-at} u(t)$

b) $x(t) = e^{-a|t|}$

c) $x(t) = e^{-at} (t)u(t) - e^{at} u(-t)$

Problema 9

Determine y trace la función de autocorrelación de un pulso de Gauss definido por:

$$x(t) = \frac{1}{t_0} e^{-\left(\frac{\pi}{t_0}\right)^2 t^2}$$

Problema 10

Determine la función de autocorrelación del pulso $A \operatorname{senc}(2\omega_b t)$ y dibújela.

Serie de Fourier para Señales de Tiempo Continuo

5.1. Señales Ortogonales

El concepto de señales ortogonales es de gran importancia ya que, permite tanto la representación matemática como realizar el proceso de las señales aprovechando cualidades de la ortogonalidad.

A fin de introducirnos en el concepto de ortogonalidad, desde un punto de vista técnico, partimos de señales escalares, si decimos $x_1(t) = 20 \cdot \sin(100t)$ es una señal real en relación a otra señal $x_2(t) = 15 \cdot \sin(200t)$ real también, estudiar su ortogonalidad suena a primera instancia extraño, ya que la idea de ortogonalidad se la vincula a vectores.

De hecho el término “ortogonal” es tomado del Álgebra Lineal, se pretende expresar una señal como combinación lineal de señales bases y a fin de establecer las “bases” posibles, es que podemos investigar la ortogonalidad a fin de establecer si son linealmente independientes.

Por topología de ideas con vectores es posible establecer que

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1(t) \cdot x_2(t) dt$$

es el producto escalar de dos señales reales, es equivalente al de vectores $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ y que

$$\int_{t_1}^{t_2} x_2^2(t) dt$$

es la energía asociada a la señal $x_2(t)$ normalizada.

En general, dada dos señales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ (reales o complejas) el producto escalar de ellas en el intervalo $t \in [t_1, t_2]$ es

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t) \cdot \phi_2^*(t) dt = \langle \phi_1(t) | \phi_2(t) \rangle$$

* significa conjugada

Note que no conmuta en general $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle \neq \langle \phi_2 \phi_1 \rangle$ salvo que fueran reales, en este caso $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_2 x_1 \rangle$ (la demostración de esta última definición es de estudio en *Análisis III*).

Luego se dice que dos señales son ortogonales si su producto escalar es nulo en un intervalo *finito* de tiempo, observe es un fenómeno local en $t \in [t_1, t_2]$ no en perpetuidad.

Si son ortogonales, son linealmente independientes.

Así las señales $x_1(t) = 20 \sin(100t)$ y $x_2(t) = 15 \sin(20t)$ son ortogonales en digamos $t \in [-\pi, \pi]$ si

$$\begin{aligned} 300 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(100t) \cdot \sin(20t) dt &= \frac{300}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(100-20)t dt - \\ &= -\frac{300}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(100+20)t dt = 0 \end{aligned}$$

Es además si

$$\int_{t_1}^{t_2} x_i^2(t) dt = 1 \quad \text{para } i = 1, 2$$

se denominan ortonormales. En general es de esperar que las señales existan o sea posean energía asociadas y que la

$$\int_{t_1}^{t_2} x_i^2(t) dt \neq 0$$

5.2. Respuesta de SLIT

Dijimos que si entra $\delta(t)$ sale $h(t)$ y que si entra $x(t)$ sale $y(t) = x(t) * h(t)$, esta parece ser la ley de hierro de los SLIT.

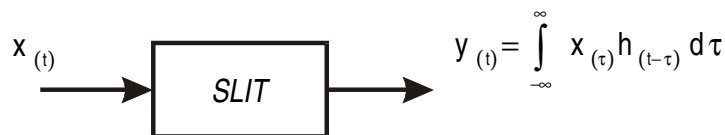


Figura 5-1

Supongamos que $x(t) = e^{st}$ exponencial donde $s \in \mathbb{C}$, es decir un número complejo. ¿Cuál será la salida del SLIT caracterizado por la ponderante $h(t)$?

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

La salida es la misma entrada e^{st} multiplicada por un número que no depende de t (amplificada o atenuada). Este número es $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ que depende de h y del valor de s por ello lo denominamos $H(s)$ o sea

$$\text{entra } x(t) = e^{st} \xrightarrow{\text{Sale}} y(t) = e^{st} \cdot H(s)$$

a estas señales que a la entrada de un *SLIT* aparecen a la salida amplificadas o atenuadas por un valor, pero es la misma señal de entrada, se denominan autofunción del *SLIT* y el número $H(s)$ se denomina autovalor del *SLIT*.

Si se puede expresar a la entrada como combinación de exponenciales digamos

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t} \text{ la salida del } SLIT \text{ será}$$

$$y(s) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

con

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s\tau} d\tau$$

y luego evaluamos en s_1 , s_2 y s_3 .

Conocemos con facilidad la salida ya que sólo hay que calcular los autovalores.

Entonces veamos las posibilidades de expresar a $x(t)$ como combinación de exponenciales y de esta forma las salidas serán conocidas a través del cálculo de autovalores.

Para ello, conozcamos la familia de funciones $\phi_k(t) = e^{j\omega_0 k t}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Se trata de una familia infinita $\phi_k(t) = \{\dots e^{-j\omega_0 2t}, e^{-j\omega_0 t}, 1, e^{j\omega_0 t}, \dots\}$

que en realidad queremos utilizar como base para poder representar una señal $x(t)$.

Con el espíritu de comprenderlas y determinar si pueden o no ser bases, veamos primeramente si estas infinitas funciones son periódicas

$$\phi_k(t) = \phi_k(t + T_0) \quad \forall t \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\phi_k(t + T_0) = e^{j\omega_0(t+T_0)k} = e^{j\omega_0 t k} e^{j\omega_0 T_0 k}$$

bastará que $e^{j\omega_0 k T_0} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ para que afirmemos que es periódica, esto exige:

$$\cos(\omega_0 k T_0) + j \sin(\omega_0 k T_0) = 1 \Rightarrow \omega_0 k T_0 = 2\pi \ell; \text{ con } \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Luego } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 k} \cdot \ell$$

Si adoptamos el periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 k}$ este “sirve” para todas las funciones base, ya que para cada valor de k encontramos un valor de $\ell = k$ que determina a T_0 como el período fundamental o múltiplo de toda otra periódica de $\phi_k(t)$

Esto permite estudiar toda la familia de señales en un tiempo T_0 .

Ahora veremos si las señales base adoptadas en la familia $\phi_k(t)$ son ortogonales, si es así podemos entonces usarlas para expresar una señal en un espacio de señal combinación lineal de estas bases.

Analicemos la ortogonalidad y la independencia de las bases; tomemos dos bases cualquiera, la n -ésima y la k -ésima y realicemos su producto escalar: $\int_{\langle T_0 \rangle} e^{j\omega_0 n t} \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt$

Nota: el signo menos en el exponente de la base $e^{j\omega_0 k t}$ es porque se toma la conjugada de ésta, el símbolo $\int_{\langle T_0 \rangle}$ significa integral a lo largo de T_0

Como $p = n - k$ es un entero, supongamos que $n \neq k$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j\omega_0(n-k)t} dt &= \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j\omega_0 p t} dt = \frac{1}{j\omega_0 p} e^{j\omega_0 p t} \Big|_0^{T_0} \\ &= \frac{1}{j\omega_0 p} [e^{j\omega_0 p T_0} - 1] \\ \frac{1}{j\omega_0 p} \left[e^{j \frac{2\pi}{T_0} p T_0} - 1 \right] &= \frac{1}{j\omega_0 p} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

ya que $e^{j2\pi p} = \cos(2\pi p) + j \sin(2\pi p) = 1$ si $p \in \mathbb{Z}$

Si $p = 0$ o sea $n = k$ debemos evaluar “antes” de integrar (de lo contrario se divide por cero y es incorrecta la operación), en este caso:

$$\int_{\langle T_0 \rangle} dt = T_0 \quad \forall n = k$$

el producto de una base por si misma es T_0 .

Estas dos situaciones nos permiten afirmar que $\phi_k(t)$ es una familia de funciones ortogonales en el intervalo T_0 y además son periódicas de período T_0 , que contiene a los periodos de todas las bases.

Podemos expresar a una señal como combinación lineal de $\phi_k(t)$ en el intervalo T_0 , si esa señal existe y si no tiende a infinito en T_0 o posee discontinuidades esenciales o no evitables, podemos decir:

Si $x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$ con $T_0 \in \mathbb{R}$ además $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ existe porque $T_0 \neq 0$ y si $x(t)$ es continua o posee discontinuidades evitables en un período, y cumple con la condición de energía finita o de Dirichlet[∴]: $\int_{\langle T_0 \rangle} x^2(t) dt \leq K$ con $K \in \mathbb{R}$ existe en sentido estricto, está acotada, entonces:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

Nota: la condición de Dirichlet de integral del cuadrado acotada la expresamos:

$$\int_{\langle T_0 \rangle} x^2(t) dt < \infty, \text{ con el mismo significado visto.}$$

$a_k \in \mathbb{C}$ coeficientes de la combinación lineal y en general es un número complejo. $a_k = A_k - j B_k$ con: $A_k, B_k \in \mathbb{R}$

Si $x(t)$ es real la suma de complejos conjugados es real, luego a_k complejo debe aparecer en forma de un complejo mas su conjugado.

La idea de esta transformación es pasar de $x(t)$ real a a_k complejo, luego operar sobre estas a_k que pretendemos sea mas simple, para luego volver a $x(t)$.

El hecho de que sea $x(t)$ real obliga a la aparición de frecuencias negativas, tanto como positivas.

Veamos como podemos conocer a_k , denominado **coeficiente de la serie de Fourier**.

Si multiplicamos por $e^{-j\omega_0 n t}$, no es función de k , al multiplicar la suma es posible multiplicar cada sumando:

$$x(t) e^{-j\omega_0 n t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 (k-n)t}$$

Si integramos en T_0 ambos miembros, sabiendo que la integral de la suma es la suma de las integrales, resulta:

[∴] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859): Sucedió a Gauss en la cátedra de Göttingen. A él se debe la formulación general del concepto de función y las condiciones de desarrollo de Fourier.

$$\int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j\omega_0 (k-n)t} dt$$

como vimos al estudiar las bases de señales que

$$\int_{\langle T_0 \rangle} e^{j\omega_0 (k-n)t} dt = \begin{cases} T_0 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

Entonces esta suma de infinitos términos, el único que no es nulo es cuando $n = k$; todas las demás son ceros y cuando $n = k$ la integral es T_0 , luego

$$\int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt = a_n \cdot T_0$$

Denominando a n como k a fin de no incorporar una nueva variable, resulta

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad \text{Coeficiente de la serie de Fourier}$$

Podemos escribir esta integral como:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} [x(t) \cos(\omega_0 k t) - j x(t) \sin(\omega_0 k t)] dt$$

$$\text{con } A_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) \cos(\omega_0 k t) dt \text{ y } B_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) \sin(\omega_0 k t) dt$$

Si $x(t)$ es real entonces

$$A_{-k} = A_k \quad \text{es par en } k$$

$$B_{-k} = -B_k \quad \text{es impar en } k$$

lo que nos indica que $a_k = a_{-k}^*$.

Si a la expresión de $x(t)$ la “abrimos”

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k - j B_k) [\cos(\omega_0 k t) + j \sin(\omega_0 k t)]$$

a la

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} (\cdot) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} (\cdot)}_{[1]} + \underbrace{\sum_{k=0}^0 (\cdot)}_{[2]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (\cdot)}_{[3]}$$

resulta que la parte [1]:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (A_k - j B_k) [\cos(\omega_0 k t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 k t)] = \sum_{k=\infty}^1 (A_k + j B_k) [\cos(\omega_0 k t) - j \operatorname{sen}(\omega_0 k t)]$$

pues $A_k = A_{-k}$ y $B_k = -B_{-k}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\omega_0 k t) + B_k \operatorname{sen}(\omega_0 k t) - j A_k \operatorname{sen}(\omega_0 k t) + j B_k \cos(\omega_0 k t)]$$

la [2] si $k=0$ resulta A_0 pues $B_0=0$ y a la [3] es

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\omega_0 k t) + B_k \operatorname{sen}(\omega_0 k t) + j A_k \operatorname{sen}(\omega_0 k t) - j B_k \cos(\omega_0 k t)]$$

Lo que sumando [1], [2] y [3], resulta

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_0 k t) + B_k \operatorname{sen}(\omega_0 k t)$$

Observamos que si

$x(t)$ es par solo existen no nulos los A_k

$x(t)$ es impar solo existen no nulos los B_k

Lo que notamos es que los A_k son componentes de la parte **par** de $x(t)$ y los B_k componentes de la parte **impar** de $x(t)$.

Esta serie se denomina trigonométrica y es como Fourier la pensó originariamente, claro que el álgebra lineal del siglo XIX, no podría demostrar lo que en su momento Fourier afirmaba.

Esta serie, nos dice que una señal periódica se la puede sintetizar con funciones cosenos y senos de frecuencias armónicas de la fundamental $f_0 = \frac{1}{T_0}$.

En esta serie se muestran frecuencias todas positivas y la suma es de funciones reales determina otra función real.

Por ser más compacta y operativa la forma exponencial de la serie de Fourier es la más usada.

Otra forma de expresar la serie de Fourier es la forma polar, esto es desde las propiedades de el coseno de la suma de ángulos, y dejo al lector la operatoria de su verificación.

Siendo $C_o, C_k \in \mathcal{R}$ resulta:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(\omega_0 k t + \theta_k), \quad C_k = |A_k - j B_k|; \quad \theta_k = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-B_k}{A_k}$$

Si

$$x_{(t)} = C \cos(\omega_0 k t + \theta) = C [\cos \omega_0 k t \cos \theta - \operatorname{sen} \omega_0 k t \operatorname{sen} \theta]$$

luego

$$A = C \cos \theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2$$

$$B = -C \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-B}{A}$$

Veamos un Ejemplo

Sea $x(t)$ el tren de pulsos rectangular de duración τ amplitud A y período fundamental T_0

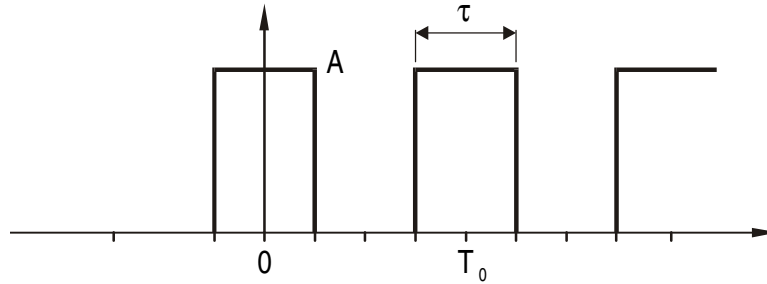


Figura 5-2

Estamos interesados en conocer las componentes de las distintas frecuencias que lo sintetizan, a priori vemos flancos verticales lo que implica frecuencias muy altas y vemos también crestas planas horizontales lo que implica frecuencias muy bajas. ¿Pero que amplitud le corresponde a cada frecuencia? Sabemos que las frecuencias que componen esta señal son múltiplos de ω_0 (o continua) pues por lo visto en Fourier las señales periódicas contienen frecuencias armónicas de la fundamental, si $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, estas son $k\omega_0$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Podemos definir a esta señal como:

$$x(t) \begin{cases} A & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \text{periódica de período } T_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad x(t) = \operatorname{rect}_{T_0}(\tau)$$

Pasemos a calcular los coeficientes de la serie

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T_0} \frac{A}{(-j\omega_0 k)} \cdot e^{-j\omega_0 k t} \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ a_k &= \frac{A}{-jT_0 \omega_0 k} \left(e^{-j\omega_0 k \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega_0 k \frac{\tau}{2}} \right) \\ a_k &= \frac{2A}{T_0 \omega_0 k} \frac{e^{+j\omega_0 k \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega_0 k \frac{\tau}{2}}}{2j} = \frac{2A}{T_0 \omega_0 k} \operatorname{sen} \left(\omega_0 k \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

Observemos que la variable es k , pues es una sucesión. Aparece aquí una función muy frecuente en el estudio de señales, se puede asociar para una variable continua x a la señal $S_a(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ o también $\text{senc}(x) = \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x}$ estas funciones por su uso frecuente se denomina S_a (de Sampling) o función muestra, o senc (seno cociente) y se usan indistintamente.

Realicemos la gráfica de $\text{senc}(x)$

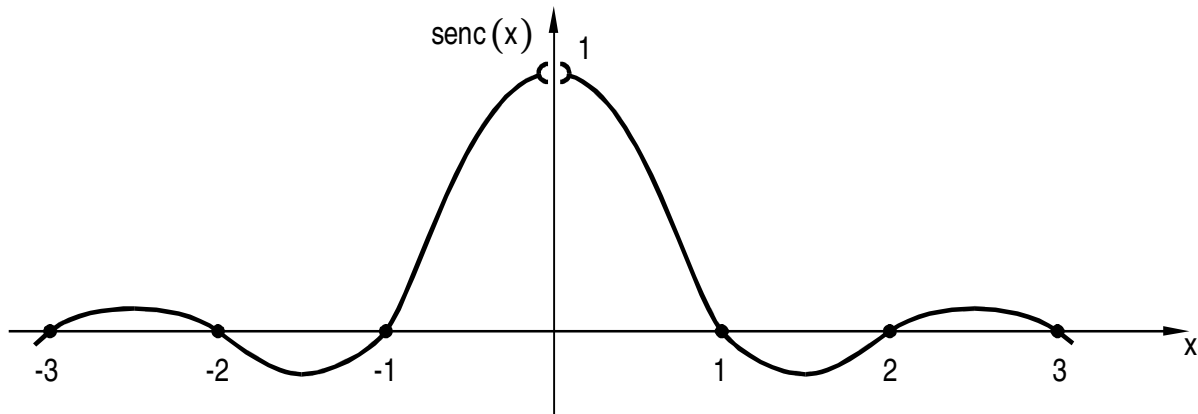


Figura 5-3

Se trata de la función $\text{sen } \pi x$ multiplicada por la hipérbola $\frac{1}{\pi x}$ dando una senoidal amortiguada.

Si observamos $a_k = \frac{2A}{T_0 \omega_0 k} \text{sen}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)$ podemos escribirla como

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\text{sen}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_0 k \frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T_0} \text{Sa}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right) = \frac{A\tau}{T_0} \text{senc}(f_0 k \tau)$$

Se trata de un seno cociente, claro está que la variable es k y es “discreta” pues $k \in \mathbb{Z}$ o sea la $\text{Sa}(x)$ actúa como una envolvente de valores de a_k discreta. Se acostumbra, colocar como variable no a k sino a $\omega_0 k$ y en ese caso los “saltos” de frecuencia son cada ω_0 .

Observar que entre las frecuencias ω_0 no hay nada, o sea no existe otra frecuencia que no sea múltiplo de ésta.

A los fines de representar y comprender que sucede tomemos: $T_0 = 4\tau$ $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{4}$

los nodos o ceros de la función $\text{Sa}(x)$ es cuando su ángulo sea π o un múltiplo de π . Si $\omega_0 k \frac{\tau}{2} = \pi$ estamos en el primer nodo y esto sucede si

$$\frac{2\pi}{T_0} k \frac{\tau}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{4} = 1; \quad k=4$$

o sea el valor de $k=4$ o al valor de frecuencia de $4\omega_0$, que indica que sucede el primer medio lóbulo, existen cuatro valores de k por lóbulo, además $\omega_0 k \frac{\tau}{2} = \pi$ lo que $\omega_0 k = \frac{2\pi}{\tau}$ el punto del cero.

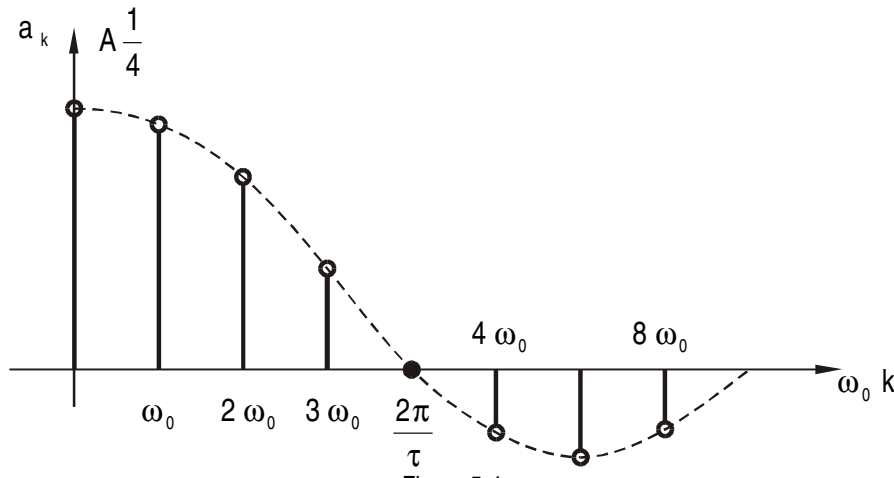


Figura 5-4

Observamos que si manteniendo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ constante achicamos τ , el punto de cero en el primer lóbulo es $\frac{2\pi}{\tau}$ se desplaza hacia la derecha, si por ejemplo aumentamos el periodo de la señal o disminuimos su duración, el efecto es el mismo, supongamos mantener T_0 constante y hacer: $T_0 = 8\tau'$

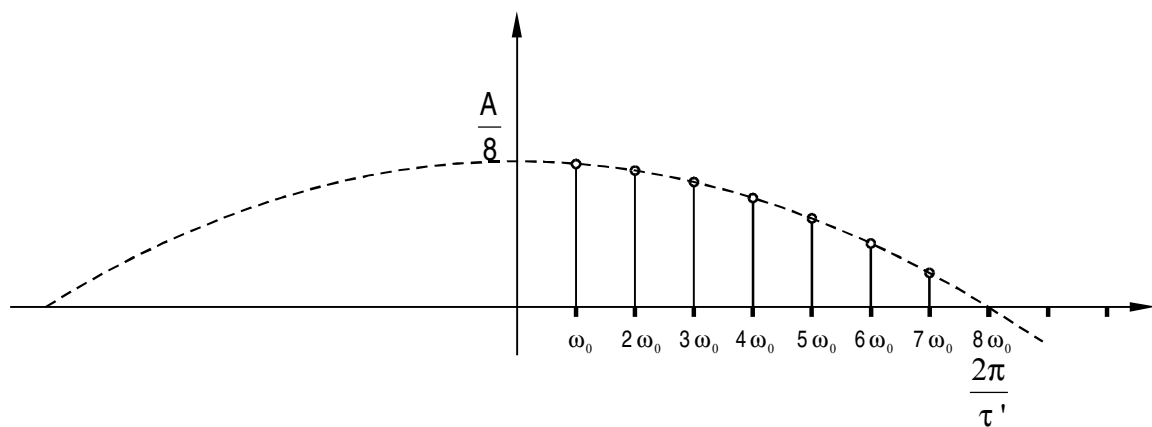


Figura 5-5

aparecen ahora siete frecuencias en el primer lóbulo y el punto del primer nodo se desplaza hacia la derecha.

Esto establece el canje en las señales, disminuir la duración del pulso, aumenta el ancho de banda. También vemos que la amplitud se reduce a $\frac{A}{8}$ en la componente de continua (y sucesivos).

Disminuir la duración del pulso, aumenta el tamaño del primer lóbulo y las frecuencias significativas de la señal.

La componente de continua, está representada por a_0 y debe siempre calcularse por aparte del cálculo para a_k , sino cuando $k=0$ se indetermina la integral.

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot dt = \frac{A \tau}{T_0}$$

existe y es este su valor, (no está fuera del dominio como en $\text{Sa}(x)$ o $\text{senc}(x)$).

Note la simetría de frecuencias positivas y negativas.

Si existe a_k también existe a_{-k} del mismo valor de magnitud si $x(t)$ es real.

En resumen si $x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \quad \text{con } t_0 \in \mathbb{R} \neq 0$

y si cumple con Dirichlet $\int_{<T_0>} x^2(t) dt < \infty$ entonces $x(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$

Esta es la síntesis; siendo $a_k = A_k - j B_k$ también:

$$x(t) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\omega_0 k t) + B_k \text{sen}(\omega_0 k t)]$$

Y la expresión del análisis es:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) dt$$

$$A_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cos(\omega_0 k t) dt$$

$$B_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \text{sen}(\omega_0 k t) dt$$

Nota:

A la función

$$a_k = \frac{2 A}{T_0 \omega_0 k} \text{sen}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)$$

se la puede expresar como

$$a_k = \frac{A \tau}{T_0} \frac{\text{sen}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)}{\omega_0 k \frac{\tau}{2}} = \frac{A \tau}{T_0} \text{Sa}\left(\omega_0 k \frac{\tau}{2}\right)$$

Si se trabaja con frecuencias en Herzios, como $\omega_0 = 2\pi f_0$ resulta

$$a_k = \frac{2A\tau}{T_0 2\pi f_0 k} \operatorname{sen}\left(2\pi f_0 k \frac{\tau}{2}\right)$$

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0} \frac{\operatorname{sen} \cancel{2\pi f_0 k} \frac{\tau}{\cancel{2}}}{\cancel{2\pi f_0 k} \frac{\tau}{2}} \omega_0 k t$$

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0} \operatorname{senc}(f_0 k \tau)$$

(Es quizá más compacta, trabajar con **senc** que con **Sa**.)

5.3. Propiedades

5.3.1. Convolución de señales de tiempo continuo

Para señales del mismo período T_0 se puede definir una forma muy “especial” de convolución que es la convolución periódica o circular en tiempo continuo. La denominación de circular se justificará en cuanto estudiemos señales en tiempo discreto.

Se definió la convolución de dos señales periódicas, $x(t)$ con $y(t)$, del mismo período T_0 , como:

$$z(t) = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$z(t)$ también es periódica de período T_0 .

Si cumplen $x(t)$ e $y(t)$ con Dirichlet, es posible encontrar su coeficiente de Fourier, c_k como

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} z(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \left[\int_{\langle T_0 \rangle} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega_0 k t} dt$$

cambiando el orden de integración y multiplicando por $e^{-j\omega_0 k \tau} \cdot e^{j\omega_0 k \tau} = 1$ resulta

$$c_k = \frac{1}{T_0^2} \int_{\langle T_0 \rangle} x(\tau) e^{-j\omega_0 k \tau} \left[\int_{\langle T_0 \rangle} y(t-\tau) e^{-j\omega_0 k (t-\tau)} dt \right] d\tau$$

La integral entre corchetes se la puede expresar como:

$$\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} y(t-\tau) e^{-j\omega_0 k (t-\tau)} dt = I_k \quad \text{si } t-\tau = \sigma; \quad dt = d\sigma$$

τ es constante en esta integral

$$\begin{aligned} \text{si } t = 0 & \Rightarrow \sigma = -\tau \\ \text{si } t = T_0 & \Rightarrow \sigma = T_0 - \tau \end{aligned}$$

Luego

$$I_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau}^{T_0 - \tau} y(\sigma) e^{-j\omega_0 k \sigma} d\sigma$$

como $y(t)$ es periódica los extremos de integración siguen cubriendo un período T_0 luego esta integral es el coeficiente de Fourier de $y(t)$, denominemos b_k

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} y(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

que no es función de τ ; y si a_k es el coeficiente de Fourier de $x(t)$, expresamos:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

resulta

$$c_k = b_k \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(\tau) e^{-j\omega_0 h \tau} d\tau = b_k \cdot a_k$$

El producto de los coeficientes de Fourier de dos señales periódicas es el coeficiente de Fourier de la señal convolución periódica de ambas.

Ahora vamos encontrando sentido a la definición de convolución periódica.

Son muchas y todas muy relevantes las propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier, veremos ahora algunos que en cuanto profundizamos en el estudio de señales se nos hace cada vez más evidentes.

5.3.2. Teorema de la Potencia o de Parseval

Una señal que sea periódica y cumple con Dirichlet se le asocia la potencia normalizada de

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x^2(t) dt$$

Si $x(t)$ son voltios o ampere P serán vatios. Si $x(t)$ es compleja se toma su valor absoluto:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

Si $x(t)$ es real

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cdot x(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} dt$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \cdot \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt]$$

si $x(t)$ es real la integral dentro de la serie es a_k^* . Luego

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot a_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Si $x(t)$ no fuese real, el resultado es el mismo. Partiendo de la expresión

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cdot x^*(t) dt$$

dejo al lector su demostración definitiva.

5.3.3. Propiedad del desplazamiento en el tiempo

Si

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(t+t_0) \longrightarrow d_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t+t_0) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

$$d_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t+t_0) e^{-j\omega_0 k(t-t_0)} e^{-j\omega_0 k t_0} dt =$$

si consideramos $t-t_0 = \sigma$; $dt = d\sigma$ vemos que

$$d_k = e^{-j\omega_0 k t_0} a_k$$

5.3.4. Propiedad de linealidad

La serie de Fourier es lineal pus cumple con:

$$x_1(t) \longrightarrow a_{1k}$$

$$P_1 x_1(t) \longrightarrow P_1 a_{1k}$$

$$x_2(t) \longrightarrow a_{2k}$$

$$P_1 x_1(t) + P_2 x_2(t) \longrightarrow P_1 a_{1k} + P_2 a_{2k}$$

$$P_1, P_2 \in \mathbb{R}$$

5.3.5. Propiedad del producto (cuando se vea señales en tiempo discreto)

Sean señales periódicas de período T_0 igual, para $x(t)$ e $y(t)$ entonces si: $z(t) = x(t) \cdot y(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_0 n t}$$

$$x(t) \cdot y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_0 n t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k b_n e^{j\omega_0 k t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\omega_0 n t}$$

Si llamamos $\ell = k + n$; $k = \ell - n$

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\ell-n} b_n \right] e^{j\omega_0 \ell t}$$

como a $z(t)$ se lo puede escribir $z(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{\ell} e^{j\omega_0 \ell t}$

comparando resulta $c_{\ell} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n a_{\ell-n}$

que es justamente una suma de convolución de señales discretas o sea $c_k = a_k \otimes b_k$, como veremos en el capítulo 8.

5.4. Sistemas con entrada periódica

Por lo visto y con el espíritu de realizar un resumen si entra $x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t$ tal que

$$x(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

la salida será

$$y(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} H(j\omega_0 k) a_k e^{j\omega_0 k t}$$

donde

$$H(j\omega_0 k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad (\text{autovalor})$$

Luego $b_k = a_k \cdot H(j\omega_0 k)$

Se puede obtener $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ y evaluamos $s = j\omega_0 k$ para cada k .

Ejercicios resueltos

1) Sea la señal de salida de un rectificador de media onda como la dibujada:



Cada lóbulo es $A \sin(\omega_0 t) = A \sin(2\pi 50t)$

Se pide:

a) La componente de continua a_0 .

b) Los coeficientes de Fourier a_k y especialmente determinar la frecuencia del mayor coeficiente.

Sol. El periodo de esta señal es $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{50}$, sinendo nula la mitad de este periodo, luego:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega_0 k t} dt \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \sin(\omega_0 t) dt = \frac{A}{-T_0 \omega_0} \cos(\omega_0 t) \Big|_0^{T_0/2}$$

$$a_0 = \frac{A}{\pi}$$

Para conocer los coeficientes para otro k:

$$a_k = \frac{1}{2jT_0} \int_0^{T_0/2} A(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega_0 k t} dt = \frac{1}{2jT_0} \int_0^{T_0/2} A(e^{-j\omega_0 t(k-1)} - e^{-j\omega_0 t(k+1)}) dt$$

$$\text{si } k \neq 1 \text{ y } k \neq -1: a_k = \frac{A}{2jT_0} \left[\frac{1}{-j\omega_0(k-1)} e^{-j\omega_0 t(k-1)} \Big|_0^{T_0/2} - \frac{1}{-j\omega_0(k+1)} e^{-j\omega_0 t(k+1)} \Big|_0^{T_0/2} \right]$$

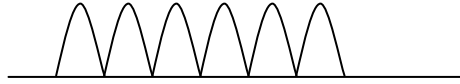
siendo $1 \pm k = p$ número entero, $e^{-j\omega_0 p \frac{T_0}{2}} = \cos p\pi - j \sin p\pi = -1$

$$a_k = \frac{A}{T_0} \left[\frac{1}{\omega_0(1-k)} + \frac{1}{\omega_0(1+k)} \right] = \frac{A}{2\pi} \left[\frac{1}{(1-k)} + \frac{1}{(1+k)} \right]$$

Si $k=2$ o -2 es la mayor componente que corresponde a 100 Hz. y vale:

$$\frac{A}{2\pi} \left[-1 + \frac{1}{3} \right] = \frac{A}{2\pi} \left[-\frac{2}{3} \right] = -\frac{A}{3\pi}$$

2) Como afecta al valor de la CC si fuese rectificador a onda completa?



Sol:

Ahora el periodo es de $T_0/2$ luego:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} A \sin(\omega_0 t) dt = \frac{2A}{\pi}$$

Problemas

Problema 1

- a) Suponga que $e^{j\omega t}$ es aplicada a la entrada de un S L I T y posee como respuesta al impulso $h(t)$. Por el uso de la integral de convolución muestre que la salida está dada por:

$$H(\omega) e^{j\omega t} \text{ donde } H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau .$$

- b) Asuma que el sistema es caracterizado por la E.D.O.1

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = x(t)$$

Si $x(t) = e^{j\omega t}$; $\forall t$ y entonces $y(t) = H(\omega) e^{j\omega t}$; $\forall t$. Por sustitución en la E.D.O. obtenga $H(\omega)$.

- c) Represente $H(\omega)$ en módulo y argumento.
-

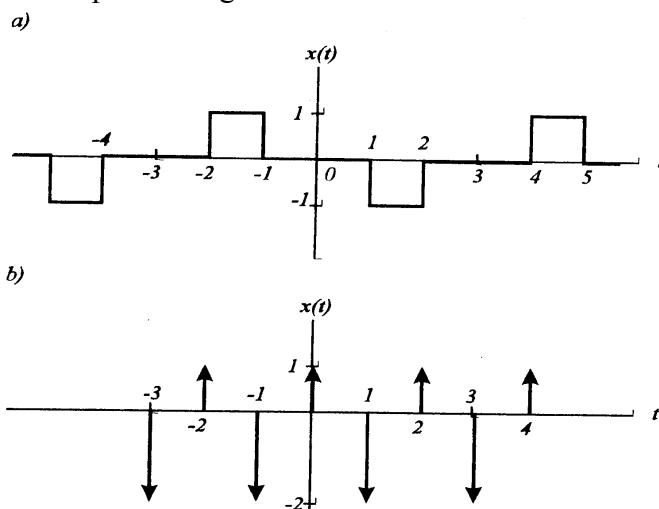
Problema 2

Obtenga los coeficientes de Fourier para cada una de las siguientes señales:

- a) $x(t) = \text{sen}(10\pi t + \pi/6)$
 b) $x(t) = 1 + \cos(2\pi t)$
 c) $x(t) = (1 + \cos(2\pi t)) (\text{sen}(10\pi t + \pi/6))$
-

Problema 3

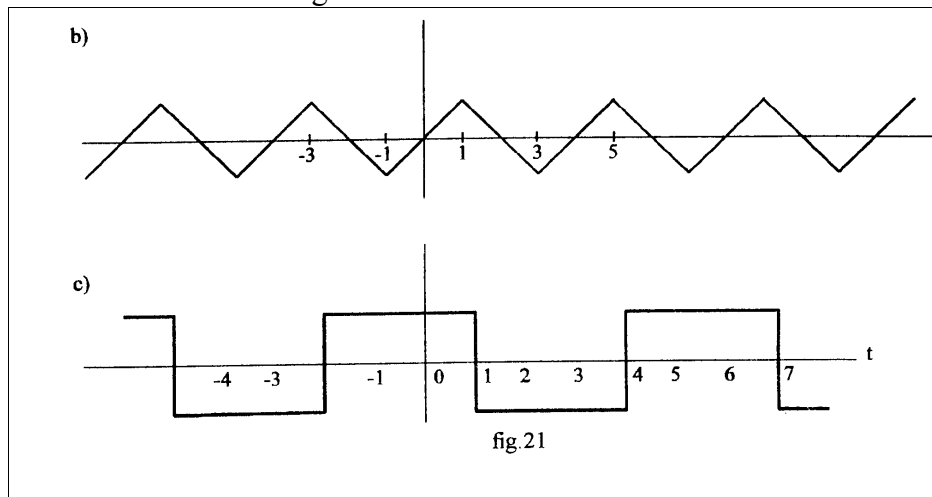
Determine las series de Fourier para las siguientes señales.



Problema 4

Determine los coeficientes de la serie de Fourier para las señales periódicas de la figura siguiente, que tengan coeficientes de Fourier con las siguientes propiedades:

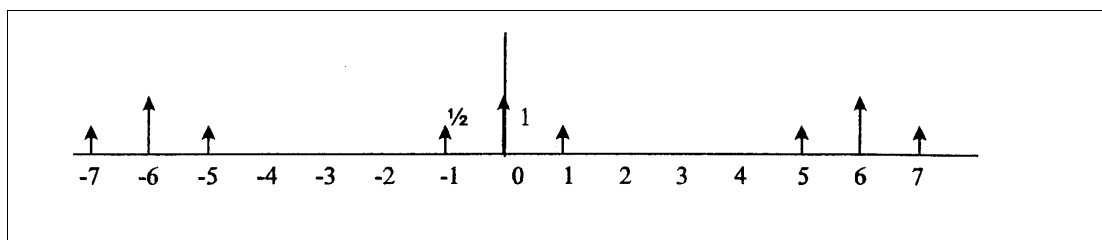
- 1) Tienen solo armónicas pares.
- 2) Poseen solo coeficientes reales.
- 3) Poseen solo coeficientes imaginarios.



Problema 5

Determine la representación en serie de Fourier para cada una de las siguientes funciones:

- a) e^{j200t}
- b) $\cos\left\{\frac{\pi(t-1)}{4}\right\}$
- c) $\cos(4t) + \sin(8t)$
- d) $\cos(4t) + \sin(6t)$
- e) $x(t)$ es la dibujada:



Problema 6

Una rectificación de onda completa produce a partir de una tensión $x(t)$ una salida de $y(t) = |x(t)|$

- a) Grafique entrada y salida si $x(t) = \cos t$; Cuál es el periodo fundamental de la salida?
- b) Cuál es la amplitud de la componente de continua?

Problema 7

Sea un SLIT con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, si $\Phi(t)$ es una autofunción del sistema se cumple que $\Phi(t) \rightarrow \lambda \Phi(t)$.

- a) Suponiendo que se pueda expresar la entrada $x(t)$ como una combinación lineal de las autofunciones $\Phi_k(t)$ con sus correspondientes autovalores λ_k :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi_k(t)$$

Expresa la salida del sistema en términos de $\{c_k\}$; $\{\Phi(t)\}$ y $\{\lambda_k\}$

- b) Considere el sistema caracterizado por:

$$y(t) = t^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + t \frac{dx(t)}{dt}$$

Es el sistema lineal? Es invariante en el tiempo?

- c) Muestree que el conjunto de funciones $\Phi_k(t) = t^k$ son autofunciones del sistema dado en b)
- d) Determine la salida $y(t)$ si la entrada es: $x(t) = 10 t^{10} + 3t + 1/2 t^4 + \pi$

Problema 9

Considere un SLIT con respuesta al impulso $h(t) = e^{-4t}u(t)$. Descubra la representación en series de Fourier de las salidas $y(t)$ para cada una de las entradas siguientes:

- a) $x(t) = \cos 2\pi t$
- b) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$
- c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$

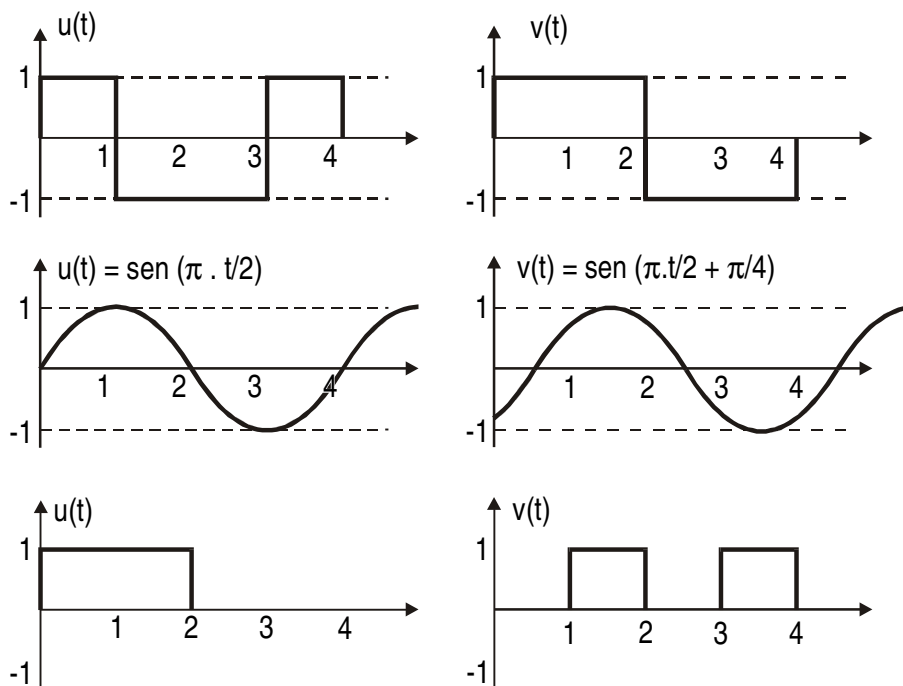
Problema 10

Dos funciones en dominio del tiempo complejas son denominadas ortogonales sobre el intervalo $]a, b[$ si se cumple que: $\int_a^b u(t) \cdot v^*(t) dt = 0$. Si además si se cumple que :

$$\int_a^b |u(t)|^2 dt = \int_a^b u(t) \cdot u^*(t) dt = \int_a^b v(t) \cdot v^*(t) dt = \int_a^b |v(t)|^2 dt = 1$$

se denominan ortonormales.

- a) Considere el par de funciones descritas en la figura, determine si cada par de funciones es ortogonal en el intervalo $]0, 4[$



- b) son las funciones $\text{sen}(m\omega_0 t)$ y $\text{sen}(n\omega_0 t)$ ortogonales sobre el intervalo $]0, T[$ donde $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$? Son ortonormales ?
- c) Muestre que las funciones $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ son ortogonales sobre todo intervalo de longitud $T = 2\pi/\omega_0$. Son además ortonormales ?

Problema 11

Sea $x(t)$ una señal periódica, con periodo fundamental T_0 y los coeficientes de la serie de Fourier a_k .

Muestre las propiedades de los coeficientes de la serie de Fourier en las siguientes señales:

- a) $x(t-t_0)$ b) $x(-t)$
- c) $x^*(t)$ d) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ con $a_0 = 0$
- e) $x'(t)$

Problema 12

Sea $x(t)$ una señal real periódica con una representación en serie de Fourier trigonométrica:

$$x(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k \omega_0 t - B_k \sin k \omega_0 t)$$

a) **Determine la serie exponencial de Fourier**

- b) Determine los coeficiente α_k y β_k en términos de los coeficientes de la serie trigonométrica tal que $a_k = \alpha_k - j \beta_k$

c) Verifique que: $\text{par}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jk\omega_0 t}$; $\text{impar}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}$

d)Cuál es la relación entre α_k y α_{-k} y la relación entre β_k y β_{-k}

Transformada de Fourier para Señales de Tiempo Continuo

6.1. Transformada de Fourier de tiempo continuo

Si la señal es periódica y cumple con las condiciones de Dirichlet, se la puede expresar como combinación lineal de señales de base $\phi_k(t)$ que como vimos posee propiedades que permiten “conocer” la señal en aspectos de su frecuencia. (Así como realizar operaciones, conocer salidas de filtros, comportamientos de sistemas en forma más simple que trabajando con las señales en dominio temporal).

El “truco” consiste en tomar la señal $x(t)$ de dominio temporal y en general real, pasarla a la expresión por medio de los coeficientes a_k complejos, operarla en este dominio complejo y luego volver al dominio temporal.

El problema surge si $x(t)$ no es periódica, es una señal que empieza en $t = t_1$ y termina en $t = t_2$ pero no se repite más.

Este método o estrategia de estudio de las señales se interrumpe por no cumplir con la condición de periodicidad. Es cuando el cálculo diferencial viene a nuestra ayuda y quizás podamos a una señal $x(t)$ finita considerarla “como” periódica, claro esta el próximo período es nunca, o sea una periódica de período T_0 pero.... $T_0 \rightarrow \infty$, $x(t)$ es entonces un período, un período de otra señal $x_{T_0}(t)$ tal que es periódica de período T_0 y cumple que: $x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t)$

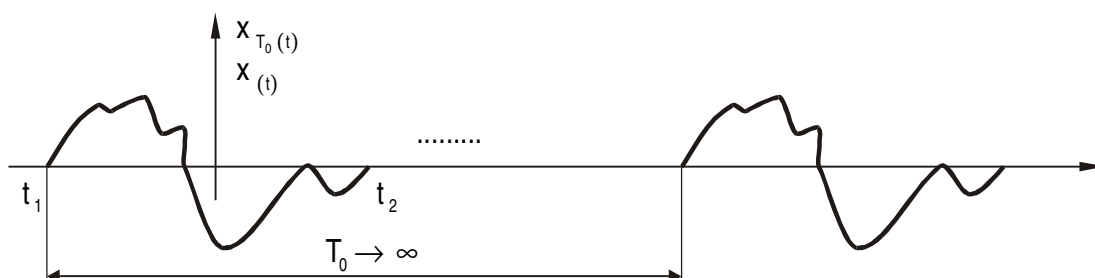


Figura 6-1

Como $x_{T_0}(t)$ es periódica si cumple con Dirichlet, o sea

$$\int_{<T_0>} |x_{T_0}(t)|^2 dt < \infty$$

o lo que en $x(t)$ se proyecta como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Luego podemos expresar a $x_{T_0}(t)$ como $x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$

$$\text{con } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ ó } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ y } a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

Partamos de esta última expresión, si estamos interesados en $x(t)$ debemos tomar límite cuando $T_0 \rightarrow \infty$, si esto es así, $a_k \rightarrow 0$ y no podemos continuar. Entonces si realizamos el producto

$$a_k T_0 = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_T(t) e^{-j\omega_0 h t} dt$$

Si tomamos el límite de esta última expresión considerando que $T_0 \rightarrow \infty$, entonces $x_{T_0}(t) \rightarrow x(t)$ y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow d\omega \rightarrow 0$ o sea el “salto” de frecuencia de ω_0 ahora tiende a cero, o sea el “salto” es punto a punto, cualquier segmento de frecuencia tendrá infinitos “puntos” o saltos o sea $k \rightarrow \infty$ y la expresión $k\omega_0$ es justamente el espíritu de una variable continua que se “mueve” punto a punto y que existen infinitos puntos en todo segmento, luego en el límite podemos decir $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \omega_0 k = \omega$ variable continua

Tomando límites de $a_k T_0$, sabiendo que el límite de una integral es la integral del límite resulta

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} a_k \cdot T_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Esta integral existe si cumple con Dirichlet y si existe es función de $x(t)$ y de ω , luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(\omega)$$

Se denomina transformada de Fourier de una señal de energía $x(t)$.

¿Qué significa? Veamos

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-j\omega_0 h t} dt$$

Si $x(t)$ son *voltios*, la cantidad subintegral son *voltios · seg* que multiplicando por $\frac{1}{T_0}$ resulta que

a_k posee la dimensión de $x(t)$ por ello se vinculan con suma directa pues $x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_0 k t}$

sabemos que las exponenciales son adimensionales y el exponente también lo es. Luego

$$[\text{voltios}] = \text{suma de } [\text{voltios}]$$

Pero... $X(\omega)$ sería suma de voltios por seg. (dt) o dicho la otra forma $\frac{\text{voltios}}{\text{Hz}}$ o $\frac{\text{voltios}}{\text{rad} \cdot \text{seg}}$.

Estamos en presencia de una densidad de amplitud en relación a la frecuencia y es la que se denomina espectro de amplitud de frecuencia (espectro acuñada de *Isaac Newton* que llamó a la descomposición de la luz blanca “*espectro*”, “*espíritu*” de la luz, aún hoy a estos contenidos de frecuencia de la luz se lo denomina espectro (*fantasma*) visible).

Es claro que $X(\omega)$ al ser una densidad de frecuencia quizá merezca una explicación más:

Supongamos una viga como la dibujada

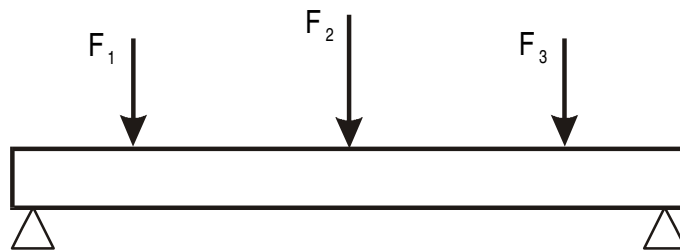


Figura 6-2

donde actúan las fuerzas puntuales F_1 , F_2 y F_3 de tantos *Newton* cada una, si se quiere conocer la magnitud de la resultante que actúa sobre los apoyos, será la suma de éstas, o sea

$$R = \sum_{i=1}^3 F_i \quad [\text{Newton}]$$

Si ahora la viga posee carga distribuida siguiendo una cierta curva $f(x)$

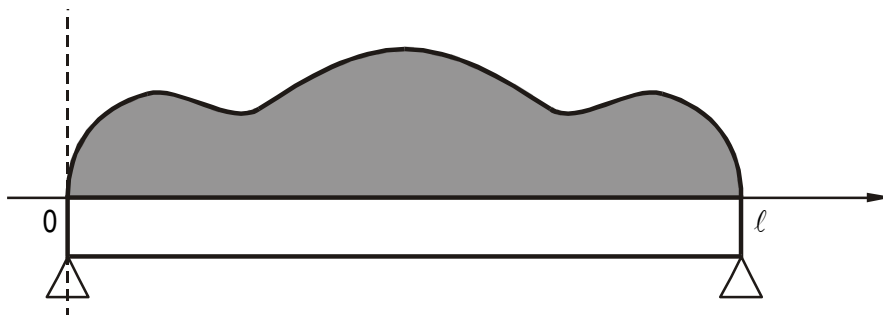


Figura 6-3

Se trata de una carga no puntual, que para definirla tendremos que conocer la función de distribución $f(x)$ en *Newton por metro* de longitud de la viga a partir digamos de cero arbitrario en el apo-

yo izquierdo. Esta $f(x)$ es una densidad de fuerza por metro lineal de viga, es el equivalente al

$X(\omega)$. Si queremos conocer la resultante en *Newton* es $R = \int_0^{\ell} f(x) \cdot dx$

pues tendremos que usar el cálculo integral, en el caso de $f(x)$, la fuerza en un punto es cero (el a_k) pues $f(x) \cdot \Delta x = 0$ si $\Delta x \rightarrow 0$

La cuestión entonces es que $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} a_k T_0 = X(\omega)$

Si ahora hacemos la consideración, si se quiere al revés, si tenemos una señal periódica $z(t)$ de período T_0 podemos obtener el c_k como coeficiente de Fourier, de la forma

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$$

Si tomamos *un* período de $z(t)$ y a este lo denominamos función $\tilde{z}(t)$ que repito es un período de $z(t)$ y le aplicamos el cociente de transformada de Fourier a $\tilde{z}(t)$ resulta

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} z(t) e^{-j\omega t} dt$$

comparando

$$c_k T_0 = Z(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0 k}$$

Es una forma de obtener c_k conocido $Z(\omega)$.

Antes de continuar con las interesantes propiedades de la transformada, veamos si podemos elaborar una expresión de síntesis de $x(t)$, recordamos que $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$ con $x_{T_0}(t)$ periódica, luego

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

Al tomar límite cuando $T_0 \rightarrow \infty$, $a_k \rightarrow 0$, lo que podemos es formar el $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} a_k T_0 = X(\omega)$ o sea

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T_0 e^{j\omega_0 k t} \frac{1}{T_0}$$

Observamos que esta serie suma términos cada k enteros y en realidad en frecuencia $\omega_0 k$, implicando sumas de frecuencias cada ω_0 , en el límite $\omega_0 \rightarrow d\omega \rightarrow 0$ o sea la serie es punto a punto, lo que corresponde al concepto de integral (límite de una serie de cantidades muy próximas).

Al tomar límite resulta $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

pues al $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} = \frac{d\omega}{2\pi}$ y el $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} a_k T_0 = X(\omega)$, al $\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \omega_0 k = \omega$

En resumen

Si $x(t)$ es una señal de energía, cumple con $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

Entonces se la puede expresar como una “integral”:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [\text{voltios}]$$

donde $X(\omega)$ es una función compleja de ω (o de $j\omega$) denominada espectro de densidad de frecuencia.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \left[\frac{\text{Voltios}}{\text{Herzios}} \right] \text{ o } \left[\frac{\text{Voltios} \cdot \text{seg}}{\text{rad}} \right]$$

Y si bien no es una amplitud compleja de los componentes de frecuencias como lo es a_k , es una forma de modelar las frecuencias que componen una señal $x(t)$.

6.2. Ejemplos de Transformadas de Fourier

1. Si $x(t) = \delta(t)$ entonces

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

la cantidad subintegral es no nula, solo si $t = 0$, luego podemos escribir, con $e^{j\omega 0} = 1$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

2. Sea $x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = A \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$

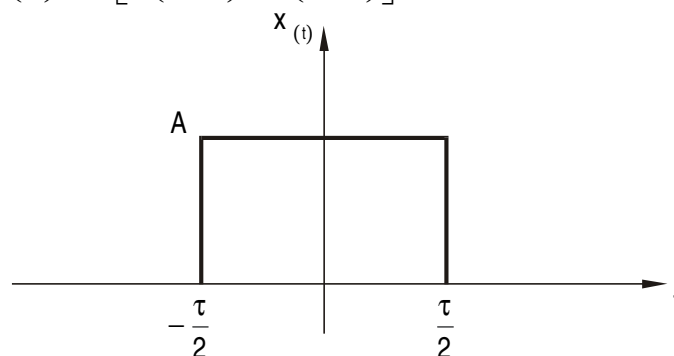


Figura 6-4

cumple con Dirichlet ya que es obvio que encierra área finita $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$ converge

luego

$$X(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$X(\omega) = \frac{A}{j\omega} \left(e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j} \right) = \frac{2A}{\omega} \operatorname{senc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) = A\tau \operatorname{senc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)$$

De nuevo aparece la función $\operatorname{Sa}(\cdot)$, recordemos que en $\omega=0$ la integral es fallida y se debe

evaluar “antes” $X(0) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = A\tau$

Con lo que completamos la función $\operatorname{Sa}(\cdot)$ en el origen y obtenemos la $X(\omega)$ continua ; pues

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} X(\omega) = X(0)$$

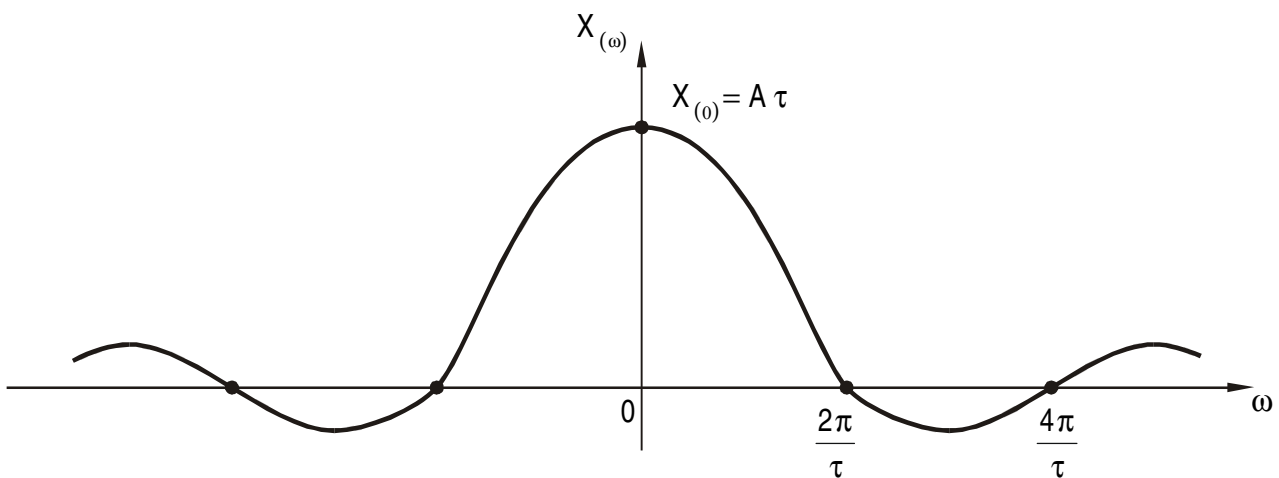


Figura 6-5

En este caso $X(\omega)$ es real puro, pero en general es complejo

De nuevo si $\tau' = \frac{\tau}{2}$ o sea se achica el ancho del pulso, el primer lóbulo se extiende en frecuencia pues el primer nodo será $\frac{2\pi}{\tau'} = \frac{4\pi}{\tau}$, la amplitud también disminuye.

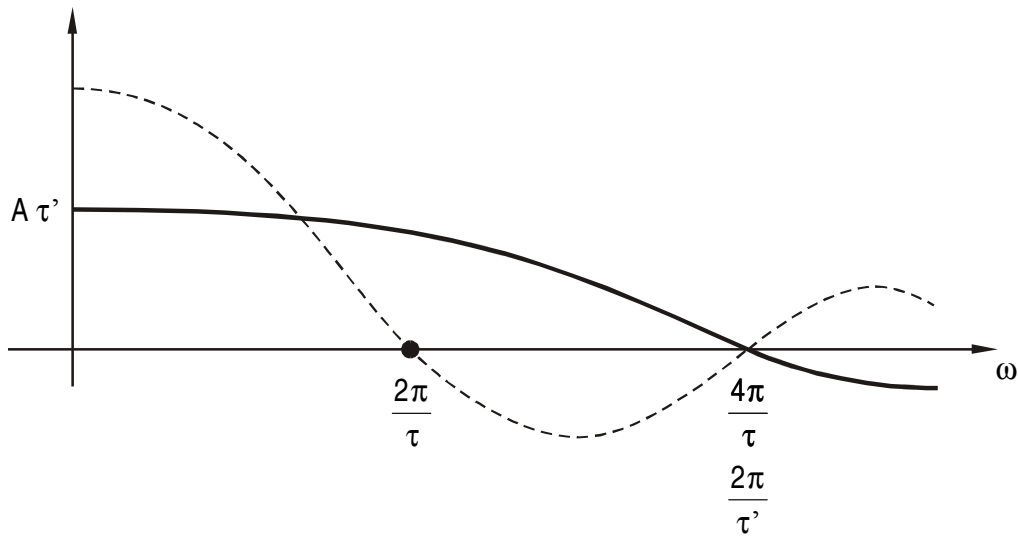


Figura 6-6

Notar el canje de señales, achicar la duración de los pulsos implica aumentar el ancho de banda[∴] en frecuencias.

6.3. Propiedades de la Transformada

6.3.1. Linealidad

Si

$$x_1(t) \longrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2(t) \longrightarrow X_2(\omega)$$

para $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$

6.3.2. Simetría

Si $x(t)$ es una señal real, entonces $X(-\omega) = X^*(\omega)$

Esto se demuestra observando a la expresión de $X(\omega)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

si $x(t)$ es real se puede ver $X^*(\omega)$ es justamente $X(-\omega)$.

Esta tiene como consecuencia que si expresamos a

[∴] Ver **Apéndice** relación entre ancho de banda y duración de las señales.

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

será

$$X^*(\omega) = |X(\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$$

sustituyendo ω por $-\omega$ en $X(\omega)$ resulta

$$X(-\omega) = |X(-\omega)| e^{+j\phi(\omega)}$$

como $X(-\omega) = X^*(\omega)$ debe ser

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|$$

simetría par

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$$

simetría impar

6.3.3. Desplazamiento Temporal

Si

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow \tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

multiplicando por $e^{j\omega_0 t_0} \cdot e^{-j\omega_0 t_0} = 1$ resulta

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega(t-t_0)} e^{-j\omega t_0} dt = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

6.3.4. Desplazamiento en frecuencia

Si

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \longrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Demostración a cargo del lector, es similar a la anterior, partiendo de $\tilde{x}_{(t)}$

6.3.5. Escalado Temporal

Si

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(at) \longrightarrow \tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

Si $a > 0$ podemos poner

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{j\frac{\omega}{a}at} d(at) = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Si $a < 0$ será

$$\tilde{X}(\omega) = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\frac{\omega}{a}at} d(at)$$

pues cambia el intervalo de integración, si $t \rightarrow \infty$ $at \rightarrow -\infty$

y si $t \rightarrow -\infty$ $at \rightarrow \infty$ pues $a < 0$

$$\text{luego } \tilde{X}(\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{si } a \neq 0$$

Si se comprime en tiempo, se expande el espectro de frecuencia, y si se expande en tiempo, comprime la frecuencia.

6.3.6. Diferenciación

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$\frac{dx}{dt} \longrightarrow \tilde{X}(\omega)$$

Si

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

derivando

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Luego

$$\tilde{X}(\omega) = j\omega X(\omega)$$

y esta propiedad puede generalizarse:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow \tilde{X}(\omega) = (j\omega)^n X(\omega)$$

6.3.7. Integración restringida

Con esta última propiedad podemos “intentar” obtener la expresión de la integral, pero recordemos del Análisis que en realidad integrar y derivar no son funciones inversas.

Si

$$F\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = j\omega X(\omega)$$

podemos pensar que $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} F\left\{\frac{dx}{dt}\right\}$ si definimos a $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

de forma que $\frac{dy}{dt} = x(t)$, nos induce a colocar $j\omega Y(\omega) = X(\omega)$

Luego: $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$, lo que extiende la propiedad de diferencial a

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) \quad [1]$$

Pero se cumple sólo si $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(\infty) = 0$; que debe satisfacer a $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = X(0) = 0$

sólo en el caso de que $X(0) = 0$ entonces se cumple la propiedad [1], de lo contrario se tendrá que ampliar esta propiedad.

6.3.8. Teorema de Parseval o de la energía

Si la energía normalizada ($R = 1\Omega$) la expresamos como $E_n = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Si $x(t)$ es real se puede poner $E_n = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$

cambiando el orden de integración resulta

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) X^*(\omega) d\omega$$

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

a la función $\psi(\omega) = |X(\omega)|^2$ se la denomina espectro de densidad de energía $\left[\frac{\text{Joule}}{\text{Hz}} \right]$

Así en una señal de banda limitada de ancho W , será

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^W \psi(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^0 \psi(\omega) d\omega$$

lo que conduce a $E_n = \frac{1}{\pi} \int_0^W \psi(\omega) d\omega$

Esto es válido aún si $W \rightarrow \infty$, siempre que $x(t)$ sea real.

6.3.9. Señal de Potencia: Generalización del Teorema de Parseval

Si la señal real: $x(t)$ no fuera finita su duración; y la señal no es de energía, pues E_n diverge, en este caso debemos determinar su potencia y trabajarla como señal de potencia.

Supongamos definir una $x_T(t)$ de duración $2T$ tal que:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T < t < T \\ 0 & \text{otro } t \end{cases}$$

como es de duración finita, cumple con Dirichlet

$$x_T(t) \longrightarrow X_T(\omega)$$

La potencia normalizada asociada a $x(t)$ es

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt \right]$$

como $x_T(t)$ es de energía, puede usarse la relación de Parseval escribiendo

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} \right] d\omega$$

Llamando $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} = S_x(\omega)$

como espectro de densidad de potencia $\left[\frac{\text{Watts}}{\text{Hz}} \right] \quad P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$

De la misma concepción de la energía se puede calcular para $x(t)$ real

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Así si deseamos estudiar la potencia asociada a la señal periódica $x(t)$ podemos obtener el

$X_{T_0}(\omega)$ de un período y determinar la densidad de potencia $S_x(\omega) = \frac{|X_{T_0}(\omega)|^2}{2T_0}$ luego calculamos la integral.

6.3.10. Propiedad de la Convolución

Si

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$h(t) \longrightarrow H(\omega)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Esta propiedad es la base del estudio de sistemas, ya que transforma la convolución en simple productos. Además se puede deconvolucionar muy fácil si deseamos $X(\omega)$ se obtiene como:

$X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)}$ o mejor aún $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ ¿se imagina usted si se quiere obtener $h(t)$ de la operación $y(t) = x(t) * h(t)$?

Probemos esta importante propiedad

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) * h(t)] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

cambiando el orden integral

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

La integral entre corchetes es el caso de señal con retardo en el tiempo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} e^{-j\omega\tau} dt = e^{-j\omega\tau} H(\omega)$$

Luego

$$Y(\omega) = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Esta propiedad relaciona entrada y salida del SLIT

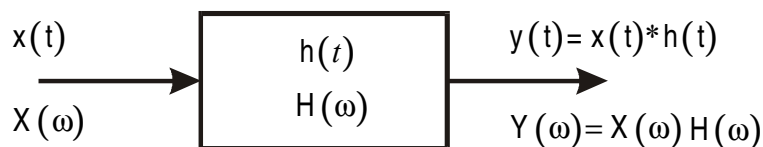


Figura 6-7

$H(\omega) = F\{h(t)\}$ si existe se denomina **función de transferencia** (transfiere la entrada hacia la salida).

A veces, por abuso de expresión, se dice que: la **función de transferencia** es la transformada de la salida sobre la transformada de la entrada con condiciones iniciales nulas: $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ pero esto es una consecuencia, no puede ser tomada como definición.

6.3.11. Transferencia de energía por un SLIT

Ahora podemos combinar las dos últimas propiedades y estudiar las energías o potencias puestas en juego en el sistema

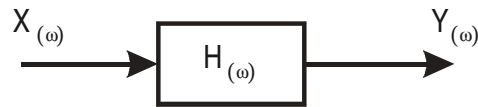


Figura 6-8

Si

$$\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$$

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega)|^2}{T}$$

La salida posee una densidad de energía o de potencia de

$$\Psi_y(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \cdot |X(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \cdot \Psi_x(\omega)$$

$$S_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H(\omega)|^2 \cdot |X_T(\omega)|^2}{T} = |H_T(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Como un ejemplo si el sistema fuese un derivador puro

$$H(\omega) = j\omega \quad \text{y} \quad S_y(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

vemos como influye en la potencia la frecuencia si es una derivada.

6.3.12. Dualidad

Si

$$g(t) \longrightarrow G(\omega)$$

$$G(t) \longrightarrow 2\pi g(-\omega)$$

pues

$$2\pi g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$2\pi g(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$$

Comparando vemos que se cumple la dualidad, la aplicamos a una señal continua:

Si

$$A \delta(t) \longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow 2\pi A \delta(-\omega) = 2\pi A \delta(\omega)$$

Un impulso de peso A es una frecuencia en espectro de valor constante A .

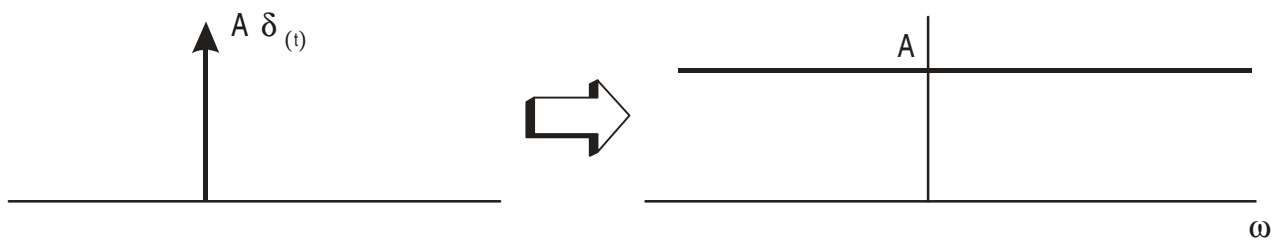


Figura 6-9

Una tensión constante A es un impulso en frecuencia de peso $2\pi A$

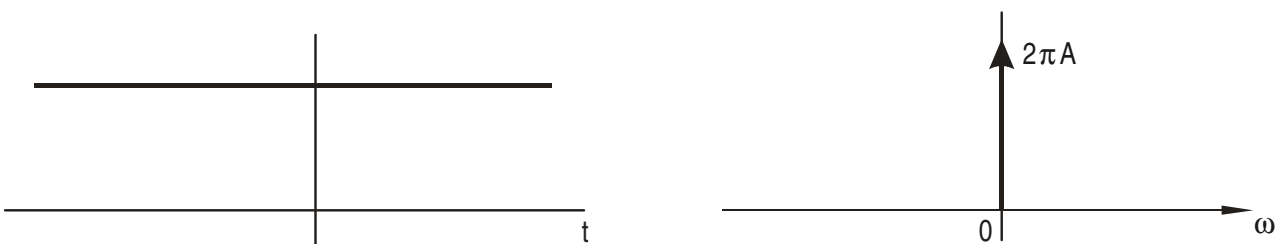


Figura 6-10

6.4. Transformada del escalón $u(t)$

Antes de continuar con nuevas propiedades de la transformada es quizá útil demostrar la transformada de señales básicas.

Por ejemplo: transformada de $u(t)$ que no cumple con Dirichlet ya que $\int_0^{\infty} dt \longrightarrow \infty$

Seguramente para calcular esta transformada tendremos que hacer algunas operaciones del cálculo diferencial o hacer uso de lo estudiado.

Definimos la función signus o signo como:

$$\text{sgn } t = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

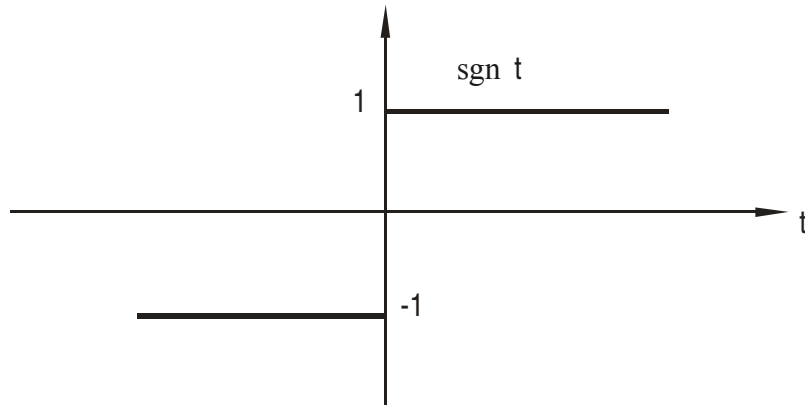


Figura 4-11

siendo : $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ [1]

A la función signo se la puede poner: $\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$ entonces:

$$\frac{d \text{sgn}(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} - \frac{du(-t)}{dt} = 2\delta(t) \quad \text{luego} \quad \frac{d\left(\frac{1}{2} \text{sgn } t\right)}{dt} = \delta(t)$$

Transformando $j\omega F\left\{\frac{1}{2} \text{sgn } t\right\} = 1$ ó $F\left\{\frac{1}{2} \text{sgn } t\right\} = \frac{1}{j\omega}$

Siendo como lo visto en dualidad, la $F\left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{2\pi}{2} \delta(\omega)$ resulta por la linealidad de la transformada

de $u(t)$ aplicada a [1], sumando las transformadas: $F\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

Recordemos cuando se estudió la propiedad de la derivada que advertimos esta situación sobre la transformada de la integral restringida.

Ahora continuamos con las propiedades de la transformada de Fourier

6.4.1. Transformada de la integral

Sea

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

por la presencia de $u(t-\tau)$ que es 1 si $t-\tau > 0$ ó $\tau < t$

Al transformar ambos miembros y aplicar las propiedades de la convolución:

$$x(t) * u(t) \rightarrow X(\omega) \cdot U(\omega) = X(\omega) \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

$$F\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = X(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

Por ello si $X(0) = 0$ resulta solo el sumando $\frac{X(\omega)}{j\omega}$ que es lo visto en integración restringida.

En comunicación de señales los componentes de continua son “*molestos*” pues polarizan el canal, y exigen amplificadores de acoplamientos directos, con situaciones de corrimientos, por ello en general $X(0) = 0$, pero esto es sólo en la mayoría de las aplicaciones.

6.5. Transformada de Fourier de una señal periódica en tiempo continuo

En resumen:

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \forall t \quad \text{con } T_0 \in \mathbb{R}$$

y cumple con Dirichlet $\int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt = K$ con $K \in \mathbb{R}$ entonces, si $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$

Si $x(t)$ es de energía: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Sería necesario y oportuno vincular los coeficientes de Fourier con la transformada de Fourier, a fin de operar señales periódicas y no periódicas mediante el uso de una sola transformada.

La expresión de las transformadas de Fourier de señales periódicas se hace mediante el límite ya que no cumple con las condiciones de ser señal de energía.

A fin de ahorrar pasos matemáticos, supongamos una señal $Z(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0 k)$ o sea un pulso de peso 2π en frecuencia ubicado en $\omega_0 k$ y nos preguntamos cuál es la $z(t)$ que lo representa, como es un pulso y no posee su simétrico en frecuencias $-\omega_0 k$ es posible afirmar que $z(t)$ es compleja. $z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 k) e^{j\omega t} d\omega$

por la propiedad de la función $\delta(\cdot)$, esto es:

$$z(t) = e^{j\omega_0 k t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 k) d\omega = e^{j\omega_0 k t}$$

Luego $F\{e^{j\omega_0 k t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0 k)$

Si

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

por linealidad de la transformada es

$$F\{x(t)\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \omega_0 k) = X(\omega)$$

que se define como la transformada de Fourier de una señal periódica.

Observe que esta expresión es “*conceptual*”, como se puede expresar algo, el cálculo es el del coeficiente a_k , lo demás es cuestión de componer la expresión.

La aparición de δ indica que hay un límite implicado.

Por ejemplo

$$x(t) = 3 \cos 200t$$

Es periódica y queremos su transformada:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \omega_0 k)$$

vemos que $\omega_0 = 200 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$, la operación consiste en obtener a_k

$$x(t) = 3 \frac{e^{j200t}}{2} + 3 \frac{e^{-j200t}}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

Claramente surgen dos valores no nulos de a_k y son

$$a_1 = \frac{3}{2} \quad a_{-1} = \frac{3}{2}$$

luego $X(\omega) = 3\pi [\delta(\omega - 200) + \delta(\omega + 200)]$

En general $F\{A \cos(\omega_0 t)\} = A\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

que corresponde a dos impulsos en frecuencia $+\omega_0$ y $-\omega_0$ de peso $A\pi$

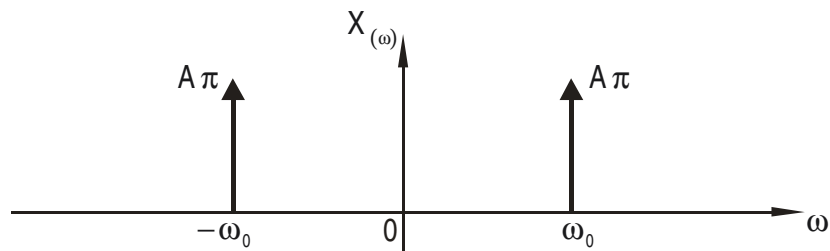


Figura 6-12

6.5.1. Propiedad: convolución en dominio de la frecuencia

Sea $Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$ convolución en frecuencia

Esto significa:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) Y(\omega - \mu) d\mu$$

$$F^{-1}\{Z(\omega)\} = z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X(\mu) Y(\omega - \mu) d\mu] e^{-j\omega t} d\omega$$

A la integral entre corchetes la podemos escribir como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega - \mu) e^{-j(\omega - \mu)t} e^{-j\mu t} d\omega = e^{-j\mu t} y(t)$$

$$z(t) = y(t) \frac{2\pi}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\mu) e^{-j\mu t} d\mu \right]$$

$$z(t) = 2\pi x(t) \cdot y(t)$$

Luego

$$x(t) \cdot y(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Esta propiedad es la usada en los teoremas de la modulación y muestreo.

6.5.2. Teorema de la Modulación

Sea $x(t)$ una señal limitada en banda, esto es que $|X(\omega)| = 0$; si $|\omega| > W$ con $W \in \mathbb{R}_{>0}$

Se pretende conocer las características de

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_c t).$$

Es natural dadas las expresiones en dominio del tiempo buscar respuestas en dominio de la frecuencia.

Supongamos $|X(\omega)|$ como el dibujado

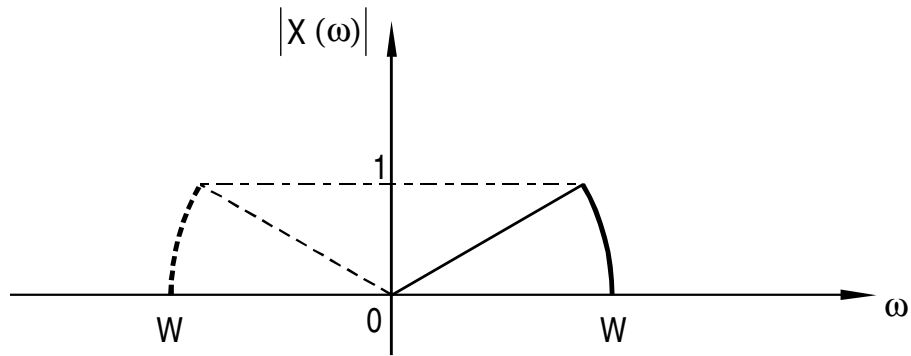


Figura 6-13

Por propiedad de la multiplicación

$$x(t) \cdot p(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) \text{ para señales } x(t) \text{ y } p(t) \text{ reales.}$$

Justamente se puede “modular” lo que se define como trasladar en frecuencia si se compone el producto

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_c t) \longrightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \cdot [\pi(\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c))]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

Ya que

$$X(\omega) \cdot \delta(\omega \pm \omega_c) = X(\omega \pm \omega_c)$$

Esto es repetir $X(\omega)$ en su “forma” dada por la función X , centrada en ω_c que es justamente este corrimiento en frecuencia la modulación

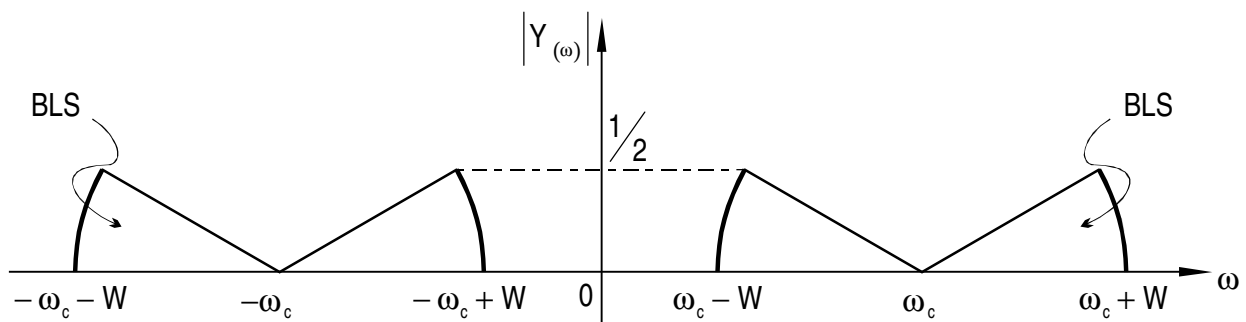


Figura 6-14

Observe que la “información” original si $\omega_c \gg W$ se repite atenuada por $\frac{1}{2}$, se origina lo que se denomina banda lateral superior (BLS) y banda lateral inferior (BLI).

6.5.3. Teorema del Muestreo

Un caso más general que la modulación es el muestreo ideal, esto se obtiene por el producto de una señal $x(t)$ limitada en banda a W por un tren de pulsos $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$

El producto genera otro tren de pulsos, cuyos “pesos” son el valor de la señal $x(t)$ en el instante kT_0 : $x(t) \cdot p(t) = x(t) \sum_k \delta(t - kT_0) = \sum_k x(kT_0) \delta(t - kT_0)$

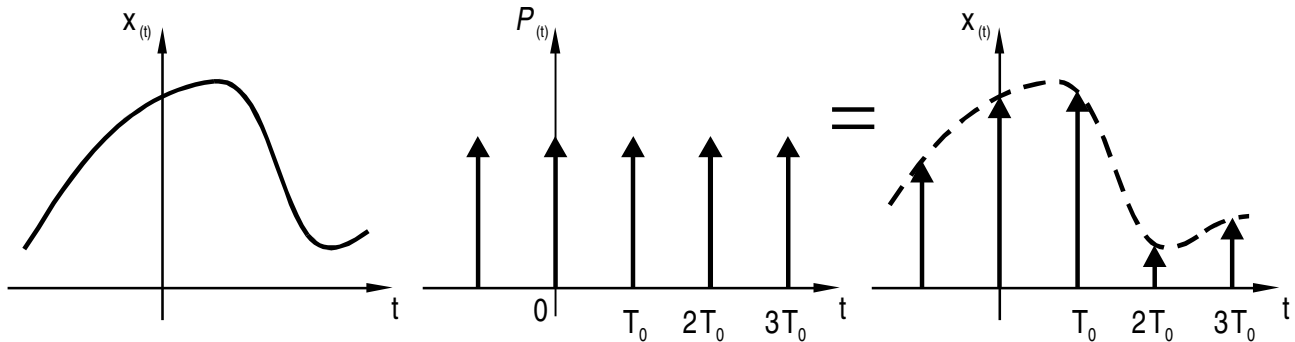


Figura 6-15

A la señal $x^*(t)$ es la señal $x(t)$ muestreada idealmente.

El teorema del muestreo trata de establecer cuántas muestras se deben tomar para conservar la información asociada a $x(t)$ y si bien esto es un muestreo ideal las condiciones que surjan pueden y deben ser cumplidas en los casos reales. Este producto implica

$$x(t) \cdot p(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) \quad \text{la convolución en frecuencia}$$

Para analizar lo que sucede debemos conocer $P(\omega)$: si $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$ se trata de una señal periódica de período T_0 , luego la transformada es de una forma

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \omega_0 k) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

se deben calcular los coeficientes a_k

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} p(t) e^{-j\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j\omega_0 k t} dt = \frac{1}{T_0}$$

Ya que en un período T_0 se encuentra un pulso solo, tomando al intervalo $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ encontramos $\delta(t)$ cuya integral ya es conocida.

Resultando $a_k = \frac{1}{T_0}$ y esto es $\forall k \in \mathbb{Z}$

Es decir, no es que existe un a_k , sino que existen infinitos, para todos k vale lo mismo $\frac{1}{T_0}$ luego

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \omega_0) = \omega_0 \sum_k \delta(\omega - k \omega_0)$$

se trata de otro tren de pulsos en frecuencia de peso ω_0 y espaciados ω_0 .

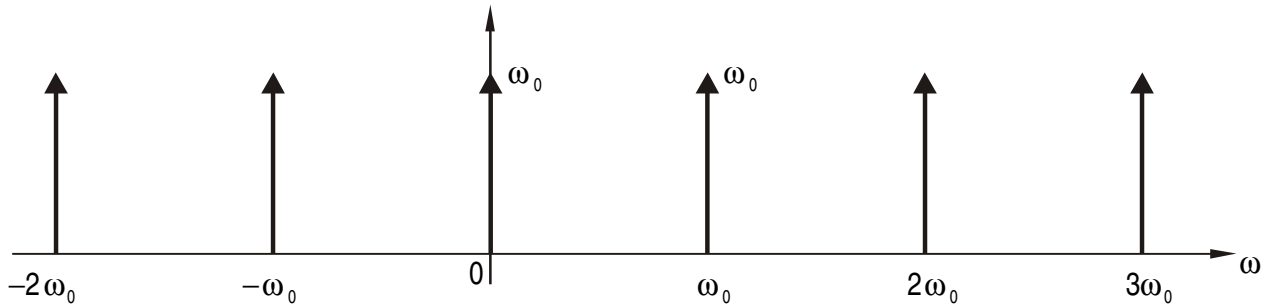


Figura 6-16

Luego

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} X(\omega) * \sum_{k_0} \delta(\omega - k \omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \omega_0)$$

o sea repite cada ω_0 el espectro $X(\omega)$

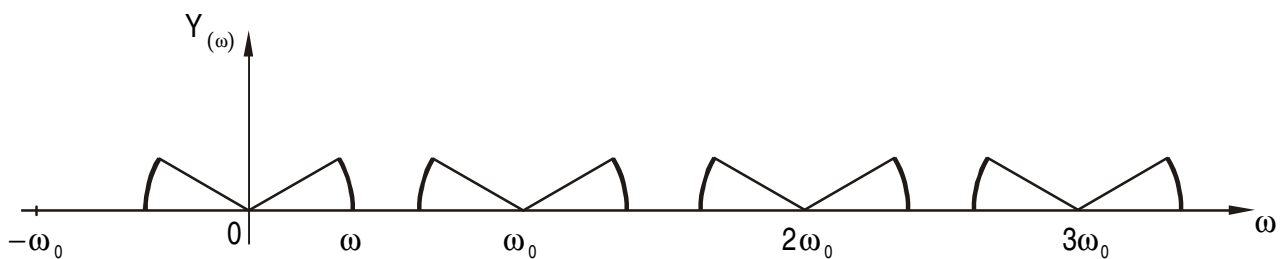


Figura 6-17

Si se produce que $\omega_0 < 2W$; hay “mordedura”

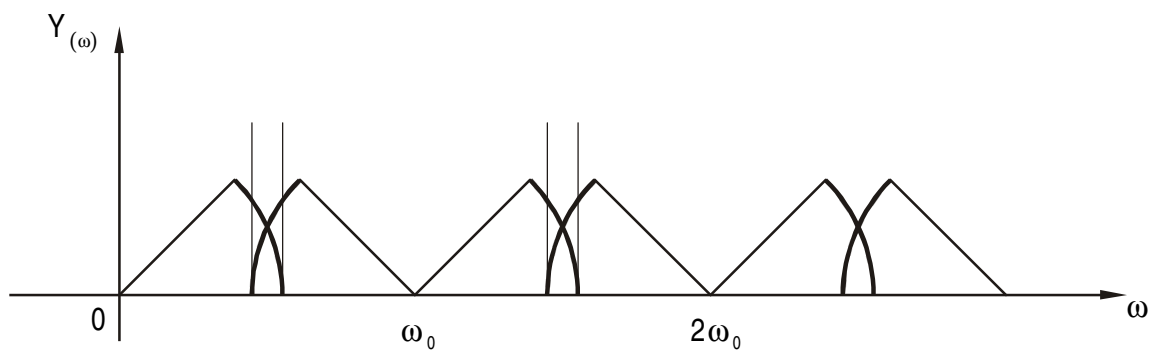


Figura 6-18

esto implica una zona donde se superponen las funciones

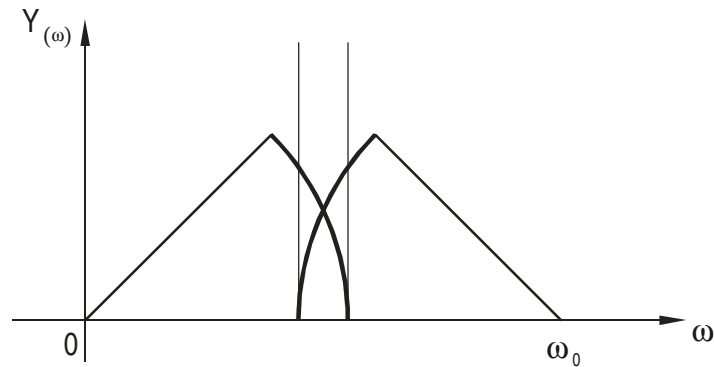


Figura 6-19

aparecen nuevas componentes de frecuencias que no estaban en $X(\omega)$ o sea se distorsiona el espectro con lo que se pierde información, este efecto se denomina “*aliasing*” o sea generación de frecuencias adjuntas (*alias*).

Para evitar el aliasing es necesario que $\omega_0 \geq 2W$. El caso $\omega_0 = 2W$ se denomina relación (tasa) de Nyquist.

Dicho de otra forma, con $W = 2\pi B$, B es el ancho de banda de la señal en Herz y si $f_0 \geq 2B$ ó $\frac{1}{T_s} \geq 2B$ o el tiempo de muestreo $T_s \leq \frac{1}{2B}$

Se suele decir: el teorema del muestreo establece que debe al menos tomarse dos muestras de la componente de mayor frecuencia para conservar la señal.

No dice como toma estas dos muestras por periodo, eso es otra cuestión.

6.6. Espectro de densidad de potencia de una señal periódica

Hemos visto que $S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}$ pero esta forma es poco operativa, pues las señales periódicas están caracterizadas por su coeficiente de Fourier a_k .

$X_T(\omega)$ era una señal “truncada” al intervalo $2T$ es decir

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) = x(t) \cdot [u(t+T) - u(t-T)]$$

Si

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \longrightarrow 2T \text{Sa}(\omega T)$$

$$x_T(t) \longrightarrow X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} [2T \text{Sa}(\omega T) * X(\omega)]$$

Si

$$X(\omega) = 2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_0 k)$$

$$X_T(\omega) = 2T \sum_k a_k \text{Sa}((\omega - \omega_0 k)T)$$

Observamos que si $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) = 1$

$$F\{1\} = 2\pi \delta(\omega)$$

luego

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 2T \text{Sa}(\omega T) = 2\pi \delta(\omega)$$

$$\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} = \frac{X_T(\omega) \cdot X_T^*(\omega)}{2T} = 2T \left[\sum_k a_k [\text{Sa}(\omega - \omega_0 k)T] \right] \left[\sum_n a_n^* \text{Sa}[(\omega - \omega_0 n)T] \right]$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} = 2\pi \left[\sum_k a_k \delta(\omega - \omega_0 k) \right] \left[\sum_n a_n^* \delta(\omega - \omega_0 n) \right]$$

de los productos de δ resulta que sobrevive solo si $n = k$ pues

$$\delta(\omega - \omega_0 k) \delta(\omega - \omega_0 n) = \begin{cases} \delta(\omega - \omega_0 k) & \text{si } k = n \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T} = 2\pi \sum_k a_k \cdot a_k^* \delta(\omega - \omega_0 k)$$

$$S_x(\omega) = 2\pi \sum_k |a_k|^2 \delta(\omega - \omega_0 k)$$

6.7. Transformada seno y coseno de Fourier

Si $x(t)$ está definida para $0 < t < \infty$ se puede representar

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X_c(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

Donde

$$X_c(\omega) = \int_0^\infty x(t) \cos(\omega t) dt$$

Ya que si $x(t)$ está definida para $0 < t < \infty$, para los valores negativos de t se puede “definir” $x(t)$ tal que $x(-t) = x(t)$ o sea transformamos a $x(t)$ en una señal par. Esto conduce a $X_c(\omega)$ que son las componentes “pares”. De la misma forma si redefinimos a $x(-t) = -x(t)$ resulta

$$X_s(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X_s(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Por ejemplo

Aproximar por medio de la transformada coseno a $x(t) = e^{-at}$, para $t > 0$; $a > 0$

$$X_c(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \cos(\omega t) dt$$

Esta integral es, aplicando el método por partes dos veces, y conduce a

$$\frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

luego

$$X_c(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad \text{real, simétrica, par}$$

Recordemos la $X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$

Justamente esta transformada coseno se usa porque la $X_c(\omega)$ es real.

6.8. Transformada inversa de Fourier

La idea es: dado $X(\omega)$ obtener $x(t)$, el método más directo es usando la tabla. Conociendo formas simples de antitransformadas y las propiedades se puede obtener la inversa en forma sistemática.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Por ejemplo si $x(t) = e^{-at}u(t)$ resulta, con $a > 0$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{-(a+j\omega)} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

como $a > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} = 0$ y resulta

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Con una tabla breve de transformadas, leyendo de atrás hacia adelante, desde $X(\omega) \longrightarrow x(t)$ se puede antitransformar. Desde ya una fracción conocida denominada simple es

$$\frac{A}{a + j\omega} \longrightarrow A e^{-at} u(t)$$

y esta se generaliza:

$$\frac{A}{(a + j\omega)^n} \leftrightarrow \frac{A t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$$

Veamos algunos ejemplos

Sea

$$X(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 10)j\omega}$$

entonces

$$X(\omega) = \frac{A}{j\omega} + \frac{B}{j\omega + 10}$$

$$A = X(\omega) \cdot j\omega \Big|_{j\omega=0} = \frac{1}{5}$$

$$B = X(\omega) \cdot (j\omega + 10) \Big|_{j\omega=-10} = \frac{4}{5}$$

$$x(t) = \frac{1}{5} u(t) + \frac{4}{5} e^{-10t} u(t)$$

Otro caso:

$$X(\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega + 1)^2 (j\omega + 5)}$$

$$X(\omega) = \frac{A}{(j\omega + 1)^2} + \frac{B}{j\omega + 5} + \frac{C}{j\omega + 5}$$

$$A = X(\omega) \cdot (j\omega + 1)^2 \Big|_{j\omega=-1} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{d}{d(j\omega)} X(\omega)(j\omega+1)^2 \Big|_{j\omega=-1} = \frac{d}{d(j\omega)} \left(\frac{j\omega+3}{j\omega+5} \right) \Big|_{j\omega=-1} =$$

$$= \frac{(j\omega+5)-(j\omega+3)}{(j\omega+5)^2} \Big|_{j\omega=-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = X(\omega)(j\omega+5) \Big|_{j\omega=5} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

Luego

$$x(t) = \frac{1}{2} t e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{8} e^{-5t} u(t)$$

Nota: En la aplicación de estas transformaciones se presupone que toda señal está definida para $t > 0$ por ello no se escribe el $u(t)$ es tácito, se entiende que es para tiempos positivos, lo vemos en muchos textos simplemente como: $x(t) = \frac{1}{2} t e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{8} e^{-5t}$

Problemas

Problema 1

Considere la señal $x(t)$, que consiste en un pulso rectangular de altura unitaria, es simétrico respecto al origen, y posee una longitud total de T_I .

- a) Grafique $x(t)$.
- b) Grafique $\tilde{x}(t)$, como señal periódica de periodo $T_0 = 3/2 T_I$ por repetición de $x(t)$.
- c) Calcule $X(\omega)$, la T de F de $x(t)$. Grafique $|X(\omega)|$ para $|\omega| < 6\pi/T_I$.
- d) Calcular a_k , los coeficientes de la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$. Grafique a_k para : $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
- e) Utilizando las respuestas de c) y d) verifique para este ejemplo:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\omega=(2\pi k)/T_0} X(\omega) d\omega$$

- f) Escriba la fórmula de la serie de Fourier para una función periódica; como puede obtenerse de la Transformada de Fourier de un periodo si la función periódica es dato.

Problema 2

Descubra la Transformada de Fourier para cada una de las siguientes señales y grafique la magnitud y la fase de la función en frecuencias, incluyendo frecuencias positivas y negativas.

- a) $\delta(t - 5)$
- b) $e^{-\alpha t} u(t)$ $\alpha > 0$ real
- c) $e^{(-1+j2)t} u(t)$

Problema 3

- a) Muestre que si $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$; Entonces: $X_3(\omega) = a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$
- b) Verifique que:

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

De esta observación, argumente sobre el hecho que:

$$\text{Real}\{e^{j\omega_0 t}\} \rightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

c) Utilizando la ecuación de síntesis de la serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Con las propiedades de la T de F sobre ambos miembros de la anterior y usando resultados de a) y b) muestre que:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

Problema 4

a) Considere la definición alternativa de T de F con el uso de f en Hz como:

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Derive la fórmula de transformación inversa.

Grafique $X_a(f)$ para la señal presentada en el problema 2-b

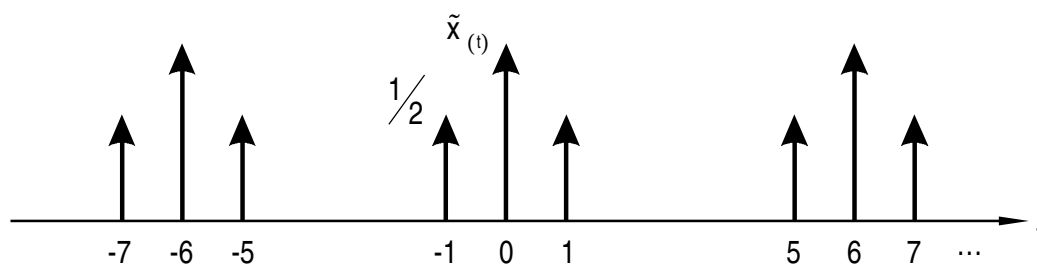
b) Una segunda alternativa de definición es:

$$X_b(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\nu t} dt$$

Descubra la relación de transformación inversa para esta definición.

Problema 5

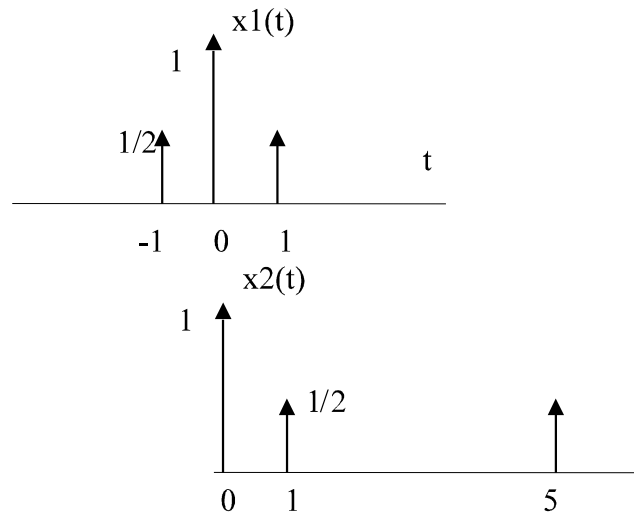
Considere la señal periódica $\tilde{x}(t)$ de la figura compuesta por impulsos aislados.



a)Cuál es el periodo fundamental T_0 ?

b) Descubra la serie de Fourier de $\tilde{x}(t)$.

c) Descubra la T de F de la señal de las figuras siguientes:



d) $\tilde{x}(t)$ puede expresarse como $x_1(t)$ repetida periódicamente o $x_2(t)$ repetida periódicamente. Esto es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(t - kT_1) \quad \text{ó}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(t - kT_2)$$

Determine T_1 y T_2 y demuestre gráficamente que estas expresiones son válidas.

e) Verifique que la serie de Fourier de $x(t)$ está compuesta de muestras en combinación lineal de $X_1(\omega)$ o $X_2(\omega)$.

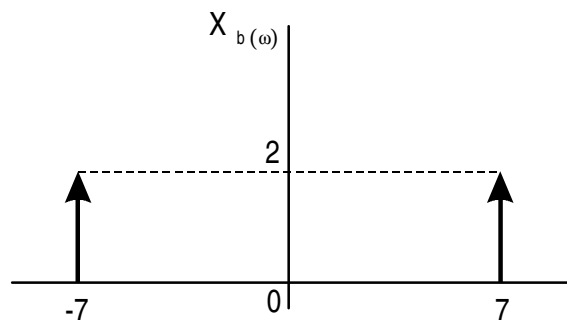
Problema 6

Determine la señal correspondiente de la siguiente transformada de Fourier.

d) $X_a(\omega) = \frac{1}{7 + j\omega}$

b) $X_b(\omega)$: la dibujada

c) $X_c(\omega) = \frac{1}{9 + \omega^2}$



Problema 7

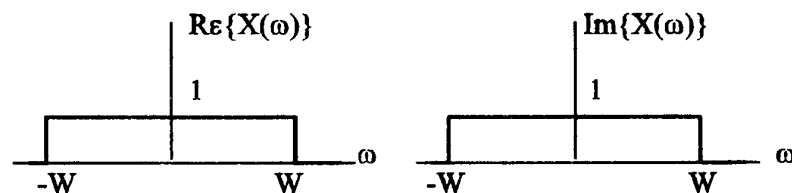
Determine la T de F de $x(t) = e^{-t/2}u(t)$ y grafique:

- a) $|X(\omega)|$
- b) $X(\omega)$
- c) $\text{Re}\{X(\omega)\}$
- d) $\text{Im}\{X(\omega)\}$

Problema 8

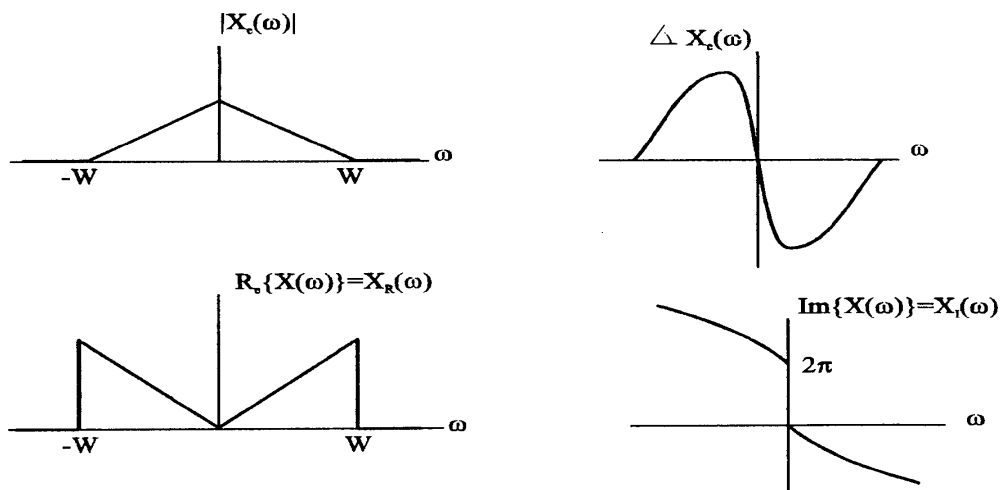
La figura muestra la parte real e imaginaria de la Transformada de Fourier de $x(t)$.

- a) Grafique magnitud y fase de $X(\omega)$.
- b) Determine $x(t)$ siendo real, y con la T de F graficada.



Problema 9

Determine por la transformada de Fourier de las siguientes figuras si corresponden o no a una $x(t)$ real; explique porque si/no



Problema 10

Por consideraciones de la ecuación de análisis de Fourier y la ecuación de síntesis. a) muestre la validez de cada uno de los siguientes estamentos.

1) Si $x(t)$ es real, entonces $X(\omega) = X^*(-\omega)$.

2) Si $x(t) = x^*(-t)$ entonces $X(\omega)$ es real.

b) Usando las definiciones dadas en a) muestre la validez de cada uno de los siguientes estamentos:

1) Si $x(t)$ es real y par, entonces $X(\omega)$ es real y par.

2) Si $x(t)$ es real e impar, entonces $X(\omega)$ es imaginaria e impar.

Problema 11

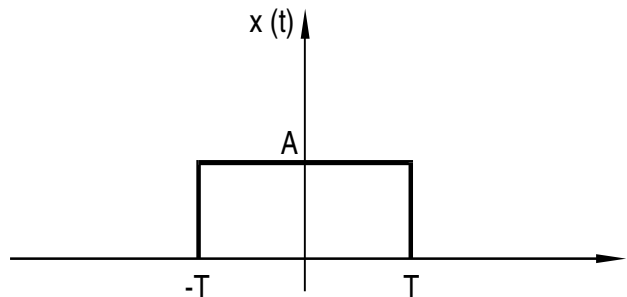
a) La transformada de $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ es supuesta conocida por tabla o por el desarrollo teórico de la asignatura. Utilizando la propiedad de linealidad

a) obtenga la Transformada de Fourier de $e^{-\alpha|t|} = x(t) + x(-t)$.

b) Usando el punto a) y la propiedad de la dualidad, determine la T de F de $\frac{-1}{1+t^2}$

c) Si $\frac{1}{1+(3t^2)}$ determine $\text{Real}\{\omega\}$

d) $x(t)$ es la graficada. Si $y(t) = x(t/2)$ grafique $y(t)$; $Y(\omega)$ y $X(\omega)$.



Problema 12

Muestre la validez de los siguientes estamentos:

a) $x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega$

b) $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$

Problema 13

La salida de un S L I T causal es caracterizada por la E.D.O.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

a) Determine la respuesta en frecuencia $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ y grafique la magnitud y fase.

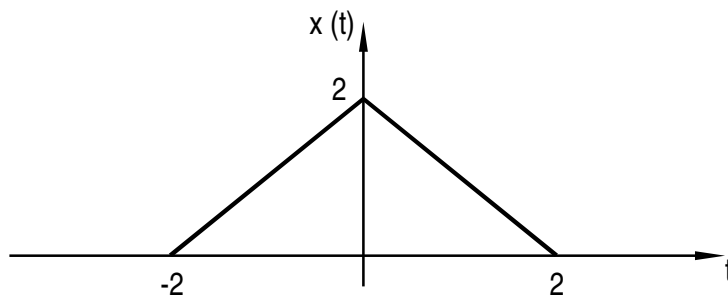
b) Si $x(t) = e^{-t} u(t)$ determine $Y(\omega)$.

c) Determine $y(t)$.

Problema 14

Dada la expresión de la señal triangular $x(t)$ de la figura, obtenida por la convolución de un pulso rectangular consigo mismo.

Determine la transformada de Fourier de $x(t)$ conocida la transformada de pulsos rectangulares por tabla y la propiedad de convolución.



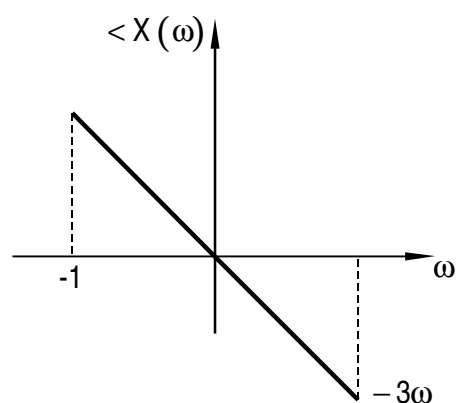
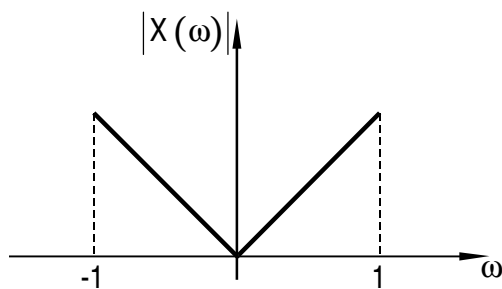
Problema 15

Determine las antitransformadas de las señales de tiempo continuo:

a) $X(\omega) = \frac{2 \sin(3(\omega - 2\pi))}{\omega - 2\pi}$

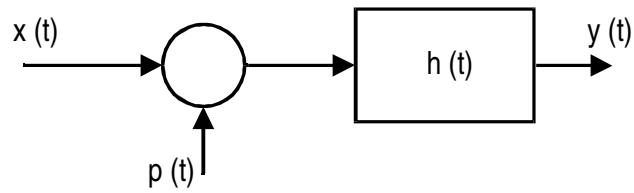
b) $X(\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$

c) $X(\omega)$ = está dada en magnitud y fase por los diagramas figura.



Problema 16

Considere el sistema:



$$x(t) = \frac{\sin(3\omega t / 2)}{\pi t}$$

$$p(t) \cos(2\omega t) + 4 \cos(8\omega t)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}$$

Encuentre la representación en series de Fourier de $y(t)$

b) Suponga que $x(t)$ es real y está dada por: (W es un número)

$$p(t) = \cos(Wt) .$$

$$p(t) = \cos(Wt)$$

$$h(t) = \frac{\sin(Wt / 2)}{\pi t}$$

Cuál es $y(t)$?

c) Cuál es $y(t)$ si $x(t)$ y $h(t)$ son los dados en la parte b) pero $p(t) = \sin(Wt)$?

La Transformada de Laplace

7.1. Introducción

Operativamente la transformada de Fourier tiene un costo matemático alto, en particular con señales que no cumplen con las condiciones de Dirichlet, ya estudiamos que señales simples como $u(t)$, dado que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \longrightarrow \infty$ no cumple con Dirichlet (como tantas otras señales simples), para obtener la transformada de Fourier hay que trabajarla mediante límites, hace aparición la señal δ en la transformada, denotando esta situación.

De todas formas es conveniente destacar nuevamente el significado de la transformada de Fourier, esta forma de ver señales en el dominio de la frecuencia son los ojos que han permitido el avance de la ciencia que procesa señales.

La idea de Laplace es transformar señales que cumplan o no con la condición de Dirichlet sin “necesidad” de estar preguntando, la propuesta original histórica es transformar por Fourier no $x(t)$ sino $\tilde{x}(t) = e^{-\sigma t} x(t)$, con $\sigma \in \mathbb{R} > 0$ y para $t > 0$, de esta forma se “pondera” $x(t)$ por un factor de convergencia tan “fuerte” como sea necesario según sea la magnitud de σ (arbitrario), la condición de Dirichlet $\int_0^{\infty} |e^{-\sigma t} \cdot x(t)| dt$ converge para una gran cantidad de señales $x(t)$ continuas. Laplace propone concretamente transformar por Fourier a $\tilde{x}(t) = e^{-\sigma t} x(t)$ y si bien la aplicación general es para $t > 0$, lo comenzamos estableciendo matemáticamente para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual el factor $e^{-\sigma t}$ puede ser divergente si $t < 0$, con $\sigma > 0$, por ello se estudia y se determinan las regiones de convergencia (RDC) de la transformada de Laplace.

7.2. La transformada de Laplace

Por definición de transformada de Laplace es:

$$F\{e^{-\sigma t} x(t)\} \triangleq L\{x(t)\}$$

en expresión abierta

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

Si llamamos a $s = \sigma + j\omega$ “frecuencia compleja”, además la integración no “mezcla” las partes reales con las imaginarias, lo que es de prever que se pueda deshacer este proceso, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s) = \mathcal{L} \{x(t)\}$$

La pregunta es ¿cuanto vale σ ?

Es intrascendente solo sabemos que es un número real, que no se mezcla con $j\omega$, de hecho si disponemos de $X(s)$ bastará hacer $\sigma = 0$ lo que significa $s = j\omega$ para obtener a la transformada de Fourier: $X(s)|_{s=j\omega} = X(\omega)$ si converge $X(\omega)$, ya que puede converger $X(s)$ y no hacerlo $X(\omega)$ justamente por ello se le afecta de la función ponderante $e^{-\sigma t}$.

Esta expresión de la transformada de Laplace se la suele denominar bilateral ya que es para todo t .

Si se restringe el dominio $t > 0$ es una transformada de Laplace unilateral y es lo que comunmente en el ambiente técnico se denomina “Transformada de Laplace”.

La transformación inversa puede calcularse de la definición pues con

$$X(s) = \tilde{X}(\omega) = X(\sigma + j\omega) \text{ partiendo de: } e^{-\sigma t} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

se puede multiplicar ambos miembros por $e^{\sigma t}$ y

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

cambiando la variable $s = \sigma + j\omega$; $ds = j d\omega$

Si $\omega \rightarrow -\infty \quad s \rightarrow \sigma - j\infty$; $\omega \rightarrow \infty \quad s \rightarrow \sigma + j\infty$

Luego

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Como es de pensar, el cálculo se encuentra facilitado con las máquinas (PC).

$X(s)$ en realidad no representa físicamente nada, no es como $X(\omega)$ que hablamos del espectro de frecuencias de $x(t)$, en este caso es un arreglo matemático.

$X(s)$ es la transformada de Fourier $e^{-\sigma t} x(t)$, la señal $x(t)$ se ve ponderada y distorsionada. Es quizá preferible comprender a Laplace como una interesante propuesta de operatividad.

Veamos un Ejemplo:

Sea $x(t) = e^{-at} u(t)$ con $a > 0$

La transformada de Fourier existe porque $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ converge, calculemos la

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty}$$

Si $s = \sigma + j\omega$ esto es

$$X(s) = -\frac{1}{s+a} e^{-(\sigma+a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a} e^{-(\sigma+a)t} e^{j\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

vemos que la función $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$ en cuanto $t \rightarrow \infty$ el límite no existe, pero está acotada, esta señal posee un módulo de 1 y un argumento (ωt) que tiende a infinito, o sea en magnitud está acotada, si la $X(s)$ diverge o converge es por el comportamiento de $e^{-(\sigma+a)t}$ cuando $t \rightarrow \infty$, la parte real de s que es σ ya que para que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma+a)t} = 0$ es necesario que $\sigma + a > 0$ o dicho de otra forma $\sigma > -a$, bastará que la parte real de s , σ esté a la derecha de $-a$ para que el límite sea cero, luego

$$X(s) = -\frac{1}{s+a} (0-1) = \frac{1}{s+a} \quad \text{si } \sigma > -a$$

La región de convergencia se expresa como la franja en el plano de s de $\sigma > -a$.

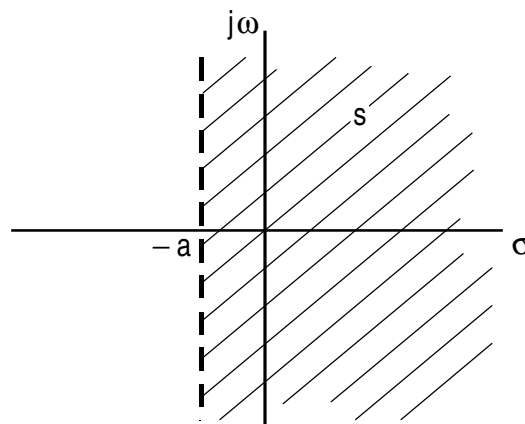


Figura 7-1

o sea $j\omega$ puede ser cualquier valor, pero $\sigma > -a$.

Como la RDC contiene al eje $j\omega$ se puede hacer $\sigma = 0$ y obtenemos la transformada de Fourier.

$$\left. \frac{1}{s+a} \right|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+a} = X(\omega)$$

Pero cuidado pueden existir aparentes igualdades de la fórmula de $X(s)$ pero ser transformada de distintas funciones, dependiendo de la RDC: por ejemplo

Sea $y(t) = -e^{-at} u(-t)$ supongamos $a > 0$ es divergente en cuanto $t \rightarrow -\infty$

$$Y(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{-at} e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a}$$

si $\sigma + a < 0$; o sea $\sigma < -a$.

Observe esta $Y(s)$ es igual a la $X(s)$ las diferencias son las RDC

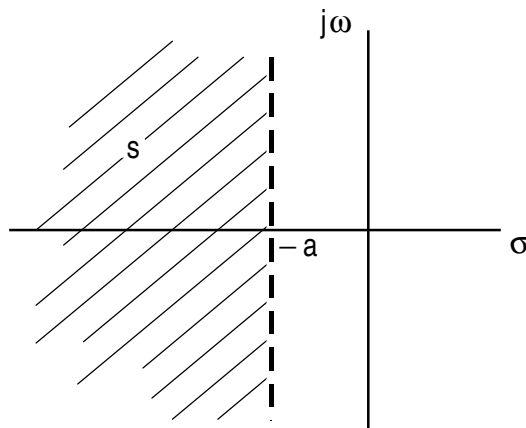


Figura 7-2

Como no contiene al eje $j\omega$ no se puede evaluar en $s = j\omega$ o sea la señal no posee transformadas de Fourier, si de Laplace.

Esto establece cierta incertidumbre si se pretende encontrar la inversa de $X(s)$ o sea $x(t)$, ya que hay que definir la RDC, claro está definir una función es dar su receta o fórmula y su dominio, de lo contrario la función no está totalmente definida.

7.2.1. Regiones de convergencia

Sobre las regiones de convergencia se puede decir que:

- 1) Los RDC no contiene polos de $X(s)$.
- 2) Si $x(t)$ es finita y cumple con Dirichlet, luego la RDC es todo el plano s .
- 3) Si $x(t)$ está definida hacia la derecha es decir para $t > t_0$, entonces la RDC es el semiplano derecho a la derecha del polo de $X(s)$ que esté más a la derecha..

- 4) Si $x(t)$ está definida hacia la izquierda o sea $t < t_0$, entonces la *RDC* es el semiplano izquierdo del polo más a la izquierda.
- 5) En general los *RDC* son bandas.

En relación a las propiedades de la transformada de Laplace son iguales a las de la transformada de Fourier, es interesante el uso de una tabla de propiedades para resolver problemas de ingeniería.

7.3. Propiedades de la Transformada de Laplace

Como mencioné, las propiedades de la Transformada de Laplace son las de Fourier, pero “*me refiero a la transformada bilateral de Laplace*” ya que la transformada unilateral posee cualidades y propiedades que algunas difieren de la bilateral y esto presenta una necesidad de atención particular ya que la unilateral es la usada en *Teoría de Redes y Control*.

7.3.1. Cálculo de la transformada bilateral mediante la transformada unilateral

A la señal $x(t) = x_+(t) \cdot u(t) + x_-(t) \cdot u(-t)$ la consideramos como suma de dos unilaterales, derecha e izquierda. La transformada bilateral será

$$X_B(s) = X_+(s) + \int_{-\infty}^0 x_-(t) e^{-st} dt$$

Si cambiamos la variable de integración: $t = -\tau$

$$X_B(s) = X_+(s) + \int_0^{\infty} x_-(\tau) e^{s\tau} d\tau$$

$$X_B(s) = X_+(s) + \mathcal{L}_+ \{x_-(\tau)\} \Big|_{s=-s}$$

El símbolo \mathcal{L}_+ indica transformada unilateral derecha, lo mismo si se escribe $X(s)$ o $X_+(s)$.

Por Ejemplo

Sea

$$x(t) = e^{at} u(-t) \quad a > 0$$

$$X_+(s) = \mathcal{L}_+ \{x_-(\tau)\} \Big|_{s=-s} = \frac{1}{s+a} \Big|_{s=-s} = -\frac{1}{s-a}$$

$$RDC: \quad \sigma < a$$

Note que si $x_-(\tau)$ posee *RDC* definida por $\sigma > a$ entonces $x_-(\tau) \cdot u(-\tau)$ debe tenerla en $\sigma < -a$

Si

$$x(t) = e^{at} u(t) \quad a > 0 \quad X(s) = \frac{1}{s+a} \quad RDC: \sigma > -a$$

Si

$$x(-t) = e^{-at} u(-t) \quad a > 0 \quad X(s) = -\frac{1}{s-a} \quad RDC: \sigma < a$$

Si

$$x(t) = e^{-at} u(t) \quad a > 0 \quad X(s) = \frac{1}{s-a} \quad RDC: \sigma > a$$

Ejemplo

$$x(t) = A e^{-at} u(t) + B t^2 e^{-bt} u(-t) \quad a, b > 0$$

$$X_B(s) = \frac{A}{s+a} + \mathcal{L}_+ \left\{ B(-t)^2 e^{bt} u(t) \right\} \Big|_{s=-s}$$

$$X_B(s) = \frac{A}{s+a} + B \frac{2!}{(s-b)^3} \Big|_{s=-s} = \frac{A}{s+a} - \frac{2B}{(s+b)^3}$$

$$RDC: \sigma > -a \quad \cap \quad \sigma < -b \quad \longrightarrow \quad -a < \sigma < -b$$

Esta propiedad es útil para trabajos de cálculo estándar y con PCs.

7.4. Propiedades de la Transformada de Laplace

7.4.1. Linealidad

Ambas transformadas uni y bilateral son transformaciones lineales.

7.4.2. Desplazamiento Temporal

Para ambas se demuestra que

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-t_0 s} X(s)$$

7.4.3. Desplazamiento en el dominio de s

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \longrightarrow X(s-s_0)$$

7.4.4. Escalamiento en el tiempo

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$x(at) \longrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

7.4.5. Diferenciación en el dominio temporal

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

Entonces

$$\frac{d x(t)}{dt} \longrightarrow s X(s) \text{ Bilateral}$$

$$\frac{d x(t)}{dt} \longrightarrow s X(s) - x(0) \text{ Unilateral derecha}$$

La propiedad de la bilateral ya la tenemos demostrada con Fourier, en cuanto a la unilateral veamos:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-st} dt$$

Si integramos por partes

$$u = e^{-st} \quad du = -s e^{-st} dt$$

$$dv = \frac{dx}{dt} \cdot dt \quad v = x(t)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = x(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} x(t) (-s) e^{-st} dt}_{s \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = s X(s)} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-st} - x(0) + s X(s)$$

Como la existencia de $X(s)$ garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ resulta

$$\mathcal{L} \left(\frac{dx}{dt} \right) = s X(s) - x(0)$$

Note que aparece el valor de $x(t)$ cuando $t=0$, es el inicial, cosa que no existe en la propiedad de la bilateral.

Generalizando, aplicando reiteradamente esta propiedad resulta para la unilateral

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} = s^n X(s) - s^n x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

Esta es una de las propiedades operativas más útiles ya que permite obtener las funciones de transferencia de sistemas modelados por ecuaciones diferenciales y aún resolver con cierta facilidad las ecuaciones diferenciales, que es en ingeniería el modelo más usado para redes y circuitos, sin menospreciar a las no lineales, donde también se usa la transformada con un sentido más de herramienta que conceptual.

7.4.6. Integración en dominio temporal

Esta propiedad requiere algunas condiciones, si la derivada es multiplicar por s a la transformada bilateral, podría concluirse que dividir por s corresponde a la integral, esto es cierto si la integral de $x(t)$ cumple con la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \int_0^t x(\tau) d\tau = 0 \quad \forall s \quad \text{con RDC } \sigma > A$$

Para esta propiedad de la integración, sumando para bi o unilateral, se puede decir, que si $x(t)$ es una señal causal (extenderemos el concepto de causalidad a señales) o sea

$$x(t) = 0 \quad \text{si } t < 0$$

y si

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

entonces

$$Y(s) = \frac{1}{s} X(s)$$

Para verificarlo decimos

$$X(s) = \int_{0+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$\frac{X(s)}{s} = \int_0^{\infty} x(t) \frac{e^{-st}}{s} dt$$

Integrando por partes

$$u = \frac{e^{-st}}{s} \quad du = -e^{-st} dt \quad 0 \leq t < \infty$$

$$dv = x(t) dt \quad v = \int_0^{\infty} x(t) dt = y(t) \Big|_0^{\infty}$$

$$\frac{X(s)}{s} = y(t) \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \int_{0+}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

El primer sumando del lado derecho tiende a cero por la condición inicialmente impuesta y el segundo sumando es justamente $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, luego

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0+}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s}$$

7.4.7. Convolución

El caso de la bilateral, afirmamos que

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$

$$h(t) \longrightarrow H(s)$$

entonces

$$x(t) * h(t) \longrightarrow X(s) \cdot H(s)$$

Siendo

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

y aceptamos esta propiedad desde Fourier, pero si $x(t)$ y $h(t)$ son causales entonces

$$x(t) * h(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Transformando por Laplace unilateral ambos miembros

$$\mathcal{L}\{x(t) * h(t)\} = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

cambiando el orden de integración

$$x(t) * h(t) \longrightarrow \int_{0+}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{0+}^{\infty} h(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau$$

En la integral interna multiplicamos por $e^{-s\tau} \cdot e^{s\tau} = 1$ y acomodando

$$x(t) * h(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right] d\tau$$

$$x(t) * h(t) \longrightarrow X(s) \cdot H(s)$$

Con RDC intersección de los RDC de $X(s)$ y de $H(s)$.

7.4.8. Teorema del valor inicial

En caso de transformada unilateral, pues la bilateral no posee valor inicial, por ello partimos de $x(t) = 0$ si $t < 0$ o sea causal.

Es conveniente desarrollar a $x(t)$ en serie de Taylor en el origen (o Mc Laurin)

$$x(t) = x(0^+) + x'(0^+)t + \frac{x''(0^+)}{2}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(0^+)}{n!}t^n + \dots \quad t > 0$$

Trasformando por Laplace (unilateral)

$$X(s) = \frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \dots$$

multiplicando por s y tomando límites cuando $s \rightarrow \infty$ resulta

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s X(s)$$

Esto permite calcular el valor inicial sin necesidad de antitransformar $X(s)$. Este teorema es útil en los sistemas con memoria ya que pueden estar “cargados” o sea existir una $h(0^+)$ y cabe destacar que es válido en la medida que “exista” este valor inicial $x(0^+)$.

Otro detalle es que tomamos cero por la derecha 0^+ y descartamos la situación en el 0, esto es así para evitar discontinuidades en 0. Exactamente en 0 no es útil sino en 0^+ o sea no pierde generalidad esta propiedad.

7.4.9. Teorema del Valor Final

Esto permite conocer el valor de una señal cuando $t \rightarrow \infty$ o sea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_{ss} = x_{reg} = x(\infty)$$

estas son formas de denotar al límite y el valor se denomina de régimen o estático o final.

Partimos de la expresión de la integral

$$\int_{0^+}^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = s X(s) - x(0)$$

si tomamos límite cuando $s \rightarrow 0$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) - x(0^+)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s) - x(0^+)$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s X(s)$$

Todo esto si existe el valor final, o sea si se trata de sistemas deben ser “estables” o sea el $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ existir, de lo contrario puede dar errada.

Por Ejemplo

$$x(t) = u(t) \cdot \cos(\omega t)$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \quad \text{no existe!}$$

sin embargo

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = 0$$

En rigor pues es necesario que $s=0$ pertenezca a la región de convergencia de $X(s)$ de lo contrario tomar límite es incorrecto, luego todos los polos de $X(s)$ deben pertenecer al semiplano izquierdo en s o sea a parte real negativa lo que significa “sea estable” (primer principio de Liapunov).

7.5. Transformada inversa de Laplace

Si $x(t) = e^{-at} u(t)$ con $a > 0$

implica $X(s) = \frac{1}{s+a}$

esto constituye una “forma” básica de transformada o conocida como se dice: “simple”.

Si $x(t) = t e^{-at} u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$

$$x(t) = t^n e^{-at} u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

Claramente la transformada $X(s)$ se puede expandir en fracciones simples (conocidas) y aplicar la tabla de atrás hacia delante.

7.6. Expansión en fracciones simples (conocidas)

Las funciones racionales de la variable s se suelen indicar $R(s)$ y se pueden expresar como el cociente de dos polinomios en s (de ahí el nombre de racionales):

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

El grado del numerador es m y el grado del denominador n , suponiendo que están ordenadas en potencias decrecientes de s será:

$$R(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}$$

Todos los coeficientes a_i y b_i son constantes reales. Se ha hecho el coeficiente $b_1 = 1$ por simple comodidad.

Vamos a considerar el caso que $R(s)$ sea fracción “propia”, es decir, si $n > m$, si fuese $n < m$, fracción impropia, entonces se puede dividir (numerador por denominador de $R(s)$) y generar una fracción propia (recordando la división):

$$\begin{array}{l} P(s) \bigg| \underline{Q(s)} \\ S(s) \quad C(s) \end{array}$$

ó

$$R(s) = C(s) + \frac{S(s)}{Q(s)}$$

Siendo $S(s)$ el resto de la división, es siempre de menor grado que el divisor y el resultado de la división se transforma en un polinomio que es el cociente más una fracción propia.

Supongamos de momento que se cumple que $n \leq m$, más aún estrictamente que $n < m$.

Se va a tratar de descomponer esta función racional, fracción propia $R(s)$ en una suma de funciones racionales cuya antitransformación (ó integración) sea conocida como la son de los tipos indicados abajo, que por ser conocidas se denominan “simples”.

$$\begin{array}{ll} \frac{A}{s - s_0} \\ \frac{A}{(s - s_0)^p} \\ p \in \mathbb{N} ; p > 1 \\ \frac{As + B}{s^2 + as + b} & \text{si} \\ s^2 + as + b \text{ posee raíces complejas conjugadas} \\ \frac{As + B}{(s^2 + as + b)^r} & \text{Si} \\ s^2 + as + b \text{ posee raíces complejas conjugadas de multiplicidad } r \end{array}$$

El primer paso consiste en descomponer $Q(s)$ en factores de primer orden o segundo orden si poseen raíces complejas, con coeficientes reales es lo que se denomina “descomposición en fracciones simples”:

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_0)(s-s_1) \dots (s-s_i)^p (s^2+as+b)}$$

Los valores

$$s_0, s_1, \dots, s_i, s_n$$

que anulan al denominador y no al numerador se denominan ceros del polinomio denominador y polos de la función racional. El teorema de la descomposición en fracciones simples nos dice: “*R(s) se puede expresar como una suma de fracciones cuya integral es conocida, de la siguiente forma*”

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_0}{(s-s_0)} + \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_{i,p}}{(s-s_i)^p} + \frac{A_{i(p-1)}}{(s-s_i)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{i1}}{(s-s_i)} + \frac{Bs+C}{s^2+as+b} + \dots$$

El problema es evaluar los números

$$A_j; A_{ij}; B_j; C_j \text{ etc.}$$

que aparecen en los numeradores y que podemos por ahora, en estos casos, denominar residuos de la expansión en los polos de $R(s)$. A propósito el teorema del álgebra que asegura esta descomposición se denomina **Teorema de Heaviside**.

A fin de estudiar los casos en forma sistemática, se presentan cuatro casos posibles y su tratamiento:

Caso 1

$Q(s)$ posee raíces reales distintas de primer orden.

Caso 2

$Q(s)$ posee raíces reales de primer orden repetidas de multiplicidad p .

Caso 3

$Q(s)$ posee raíces complejas conjugadas simples.

Caso 4

$Q(s)$ posee raíces complejas conjugadas repetidas de orden k .

CASO 1

El caso general es

$$R(s) = \frac{A_0}{s-s_0} + \frac{A_1}{s-s_1} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}$$

Si se multiplican ambos miembros por $(s-s_k)$ resulta:

$$(s-s_k) R(s) = \frac{A_0(s-s_k)}{s-s_0} + \frac{A_1(s-s_k)}{s-s_1} + A_k + \dots$$

Tomando límite para $s \rightarrow s_i$ se anulan los sumandos, menos el A_k luego:

$$A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} [(s - s_k) R(s)]$$

Ejemplo

$$R(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_0}{(s+1)} + \frac{A_1}{(s+2)}$$

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s+3}{s+2} = 2$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+3}{s+1} = -1$$

CASO 2

Polos reales múltiples. Caso general:

$$R(s) = \frac{A_{1p}}{(s-s_1)^p} + \frac{A_{1p-1}}{(s-s_1)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{11}}{s-s_1}$$

La obtención de residuos A_{ik} para estos casos, es utilizando la expresión:

$$A_{ip} = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i)^p R(s)$$

$$A_{i(p-1)} = \lim_{s \rightarrow s_i} \left[\frac{d}{ds} (s - s_i)^p R(s) \right]$$

$$A_{i(p-k)} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s - s_i)^p R(s)]$$

Ejemplo

Sea

$$R(s) = \frac{s-1}{(s+2)^3}$$

la expansión propuesta es:

$$R(s) = \frac{A}{(s+2)^3} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s-1}{(s+2)^3} (s+2)^3 = \lim_{s \rightarrow -2} s-1 = -3$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{d}{ds} (s-1) \right] = \lim_{s \rightarrow -2} 1 = 1$$

$$C = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} (s-1) = 0$$

luego:

$$R(s) = \frac{-3}{(s+2)^3} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

con

$$r(t) = -3 \frac{t^2}{2} e^{-2t} + t e^{-2t}$$

Existen muchas otras formas de obtener los residuos, aun métodos gráficos, para lo cual al alumno interesado se le recomienda leer el tema en textos de *Análisis Matemático I ó II*, bajo el título de *Integración de Funciones Racionales*.

Los Casos 3 y 4 implican valores complejos.

CASO 3

Ceros de $Q(s)$ son conjugados complejos:

Se los puede tratar como el *Caso 1* operando con valores complejos, o descomponer en una fracción cuyo denominador es un polinomio cuadrático a coeficientes reales y cuyo numerador es un polinomio lineal (de grado uno a lo sumo)

El caso general sería:

$$R(s) = \frac{A_0}{s-s_0} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{Bs+c}{s^2+as+b} + \dots$$

El polinomio s^2+as+b posee raíces complejas conjugadas, lo mantenemos sin descomponer para trabajar con coeficientes y cantidades reales puras.

La determinación de B y C se puede hacer igualando los polinomios numeradores y denominadores de la fracción $R(s)$, de esta igualdad ensayar valores para la variable s arbitrarios, (se utilizan el cero, uno o menos uno) y se determinan los valores de las constantes B y C . Una mejor explicación queda a través de un ejemplo.

Ejemplo

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s-3}{(s+1)(s^2+2)} = \frac{A_0}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2}$$

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s-3}{s^2+2} = -4/3$$

Operando la expresión, sacando denominador común:

$$\frac{s-3}{(s+1)(s^2+2)} = \frac{A_0(s^2+2) + (Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+2)}$$

a denominadores iguales corresponde numeradores iguales, para todo valor de s posible, esto es una “igualdad”. Luego

$$s-3 = A_0 s^2 + 2 A_0 + B s^2 + B s + C s + C$$

$$s - 3 = (A_0 + B) s^2 + (B + C) s + C + 2A$$

dos polinomios son iguales, si se corresponden sus coeficientes:

$$A_0 + B = 0 \quad \text{de donde } B = -A_0 = 4/3$$

$$B + C = 1 \quad \text{de donde } C = 1 - B = -1/3$$

$$C + 2A_0 = -3$$

Nota: Una ecuación es redundante pues ya se conoce A_0 .

CASO 4

Similar al *Caso 2*, trabajando con fracciones cuadráticas como el *Caso 3*, el alumno puede intentar resolver estos tipos de casos que son muy pocos frecuentes.

Ejemplo

$$F(s) = \frac{1}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$$

A y B son los residuos, números que hay que determinar

$$\frac{A(s-2) + Bs}{s(s-2)} = \frac{1}{s(s-2)}$$

luego

$$A(s-2) + Bs = 1$$

Si

$$s = 0$$

$$-2A = 1$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

Si

$$s = 2$$

$$2B = 1$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\frac{1}{s(s-2)} = \frac{-1/2}{s} + \frac{1/2}{s-2}$$

esto es por el álgebra, la antitransformada será de cada sumando:

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}$$

Ejemplo

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s^2+4)(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Como s^2+4 posee raíces complejas se le puede hacer corresponder un polinomio lineal al numerador como:

$$Bs + C$$

Ahora hay que determinar el valor de A, B, C. Como hicimos anteriormente, sacando mínimo común denominador:

$$\frac{3s+2}{(s^2+4)(s-1)} = \frac{A(s^2+4) + (Bs+C)(s-1)}{(s^2+4)(s-1)}$$

Para que esta “igualdad” sea satisfecha es necesario que los denominadores y los numeradores de las expresiones sean iguales, luego.

$$3s+2 = (A+B)s^2 + (C-B)s + 4A - C$$

La igualdad de polinomios (igual coeficientes de la misma potencia de s resulta:

$$A + B = 0$$

$$C - B = 3$$

$$4A - C = 2$$

Resolviendo:

$$A + C = 3$$

$$C = 3 - A$$

$$4A + A - 3 = 2$$

$$5A - 3 = 2 \Rightarrow A = 1$$

Si

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$C = 2$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{-s+2}{s^2+4} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = e^t - \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t$$

Un último **ejemplo**:

$$\text{Si } X(s) = \frac{s(2s-3)}{(s-1)^2(s-2)} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2}$$

Calculando

$$A = 1$$

$$B = 0$$

\Rightarrow

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s-2}$$

$$C = 2$$

$$x(t) = t e^t u(t) + 2 e^{2t} u(t)$$

Problemas

Problema 1

Considere la señal $x(t) = 3 e^{2t} u(t) + 4 e^{3t} u(t)$

a) Para cuales de los siguientes valores de σ dados por la transformada de Fourier de $x(t) e^{-\sigma t}$ converge:

- 1) $\sigma = 1$; 2) $\sigma = 2,5$; 3) $\sigma = 3,5$

b) Determine la T de L, $X(s)$ de $x(t)$. Grafique la ubicación de polos y ceros de $X(s)$ y la RDC.

Problema 2

Determine la T de L, indique polos y ceros y determine la RDC para cada una de las siguientes funciones:

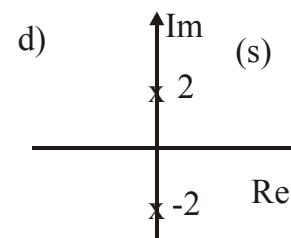
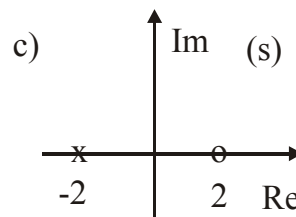
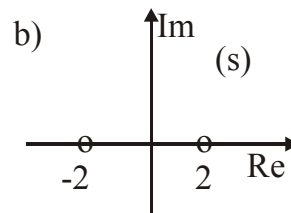
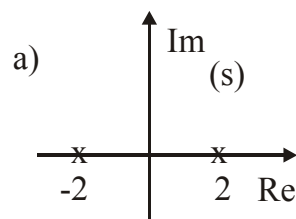
a) e^{-at} $u(t)$ $a > 0$

b) e^{-at} $u(t)$ $a < 0$

c) $-e^{-at}$ $u(-t)$ $a < 0$

Problema 3

Se muestra en la figura cuatro gráficos de polos y ceros. Para cada uno de los estamentos de la tabla se le asocia una función $x(t)$. Escriba la tabla con la correspondiente RDC.



Con las restricciones sobre la región de convergencia para polos y ceros de los dibujos

$x(t)$

(a)

(b)

(c)

(d)

i) La transformada de Fourier de $x(t)e^{-t}$ converge				
ii) $x(t) = 0$ $t > 10$				
iii) $x(t) = 0$ $t < 0$				

Problema 4

Determine $x(t)$ para las siguientes condiciones si $X(s)$ está dada por:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- a) $x(t)$ = definida hacia la derecha.
- b) $x(t)$ = definida hacia la izquierda.
- c) $x(t)$ = definida ambos lados.

Problema 5

Un S L I T tiene una respuesta al impulso $h(t)$ para cada una de las T de L. $H(s)$ es:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

Determine la salida del sistema $y(t)$ para todo t si la entrada $x(t)$ está dada por:

$$x(t) = e^{-t/2} + 2e^{-t/3} \quad \forall t$$

- a) De la expresión de la T de L de $x(t)$ obtenga la T de F.
- b) Obtenga la T de L inversa usando la T de F.

Problema 6

Determine la Transformada de Laplace bidireccional, indicando su región de convergencia y mapee los polos y ceros para cada una de las siguientes funciones:

a) $e^{-at} u(t)$; $a < 0$

b) $-e^{at} u(-t)$; $a > 0$

c) $e^{at} u(t)$; $a > 0$

d) $e^{-a/t}$; $a > 0$

e) $u(t)$

f) $\delta(t-t_0)$

g) $\sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta(t - kT)$ (obtenga la respuesta en forma cerrada antes determinar el mapeo de polos y ceros)

h) $t e^{-at} u(t)$; $a > 0$

i) $\delta(at+b)$ $a, b \in \mathbb{R}$

j) $\cos(\omega_0 t + \phi) u(t)$

Problema 7

Determine la función del tiempo $x(t)$ para cada una de las siguientes transformadas de Laplace $X(s)$ asociada a la región de convergencia dada.

a) $\frac{1}{s+1}$ $\text{Re}\{s\} > -1$

b) $\frac{1}{s+1}$ $\text{Re}\{s\} < -1$

c) $\frac{s}{s^2+4}$ $\text{Re}\{s\} > 0$

d) $\frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\text{Re}\{s\} > -2$

e) $\frac{s^2-s+1}{s^2(s-1)}$ $0 < \text{Re}\{s\} < 1$

f) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$ $-1 < \text{Re}\{s\}$

Problema 8

Hallar la transformada inversa de cada una de las siguientes funciones

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$$

$$X(s) = \frac{4}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^4}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+2}$$

Problema 9

Muchas de las propiedades y sus deducciones de la transformada de Laplace son análogas a las propiedades correspondientes a las transformadas de Fourier. Estableciendo un paralelo en las correspondientes deducciones de las transformadas de Fourier, deduzca cada una de las siguientes propiedades de la transformada de Laplace. Su deducción debe incluir una consideración sobre la región de convergencia.

- a) propiedad del retardo en el tiempo
- b) propiedad del retardo en dominio de s (frecuencia compleja)
- c) propiedad de escalamiento en el tiempo
- d) propiedad de la convolución

Problema 10

El teorema del valor inicial establece que para una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$ cumpliendo que $x(t) = 0$ para $t < 0$, el valor inicial de $x(t)$, esto es $x(0^-)$, puede obtenerse por la relación:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t)$$

Primero, note que siendo $x(t) = 0$ para $t < 0$; $x(t) = x(t) \cdot u(t)$. Expandiendo por la serie de Taylor en $t = 0$

$$x(t) = [x(0) + x^{(1)}(0)t + \dots + (1/2!)x^{(2)}(0)t^2 + \dots + (1/n!)x^{(n)}(0)t^n + \dots] u(t)$$

donde $x^{(n)}(0)$ denota la n -ésima derivada de $x(t)$ evaluada en $t=0$

- a) Determine la Transformada de Laplace para un término genérico $x^{(n)}(0^+)(t/n!)u(t)$.
- b) de la expansión de Taylor y del punto a), muestre que puede ser expresada $X(s)$ como:

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n)}(0^+) \frac{1}{s^{n+1}}$$

- c) Demuestre que $x(0^-) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ partiendo del punto b)
- d) Determine $x(t)$ y verifique el teorema del valor inicial para cada uno de los siguientes ejemplos:

- 1) $X(s) \frac{1}{s+1}$
- 2) $X(s) \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

e) Demuestre a partir del resultado en b) una forma más general del teorema del valor inicial que establece que si:

$$x^{(n)}(0) = 0 \text{ para } n < N, \text{ entonces } x^{(N)}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N+1} X(s)$$

Problema 11

Considere la transformada de Laplace dada por :

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)(s-2)}$$

Obtener cuatro posibles funciones del tiempo a las cuales corresponda esta transformada. Establezca las regiones de convergencia.

Problema 12

Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace obtenga las transformadas de las siguientes funciones:

- a) $\delta(t-T)$
- b) $[\cos \omega t] u(t)$
- c) $[e^{-at} \cos \omega t] u(t)$
- d) $[e^{-at} \sin \omega t] u(t)$

Problema 13

Considere un SLIT con entrada $x(t) = e^{-t} u(t)$ y respuesta al impulso de $h(t) = e^{-2t} u(t)$.

- a) Determine la transformada de Laplace de $x(t)$ y de $h(t)$
- b) Usando la propiedad de la convolución, determine la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida $y(t)$.

Problema 14

Un medidor de presión, que puede modelarse como un SLIT, tiene una respuesta temporal al escalón unidad dada por:

$$(1 - e^{-t} - t e^{-t}) u(t).$$

Para una cierta entrada desconocida $x(t)$ la salida observada es:

$$(2 - 3e^{-t} + e^{-3t}) u(t).$$

Para esta medición, determine la entrada de presión al medidor $x(t)$.

Problema 15

Considere el SLIT causal del cual se da la siguiente información:

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2} \quad ; x(t) = 0 \quad ; t > 0$$

y

$$y(t) = -(2/3) e^{2t} u(-t) + (1/3) e^{-t} u(t)$$

- Determine $H(s)$ y su región de convergencia
- Determine $h(t)$
- Usando la función de transferencia $H(s)$ encontrada en a), determine la salida $y(t)$ si la entrada es $x(t)$:

$$x(t) = e^{3t}, \quad -\infty < t < \infty$$

Problema 16

Considere un sistema de tiempo continuo LIT con la siguiente relación de entrada-salida mediante ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

Denotando como $X(s)$ e $Y(s)$ las transformadas de Laplace de $x(t)$ e $y(t)$, y $H(s)$, función de transferencia, o sea la transformada de Laplace de $h(t)$, respuesta impulsiva del sistema.

- Determine $H(s)$ como razón de polinomios en s . Grafique el mapeo de polos y ceros de $H(s)$.
- Determine $h(t)$ para cada uno de los siguientes casos:

- El sistema es estable
- El sistema es causal
- El sistema no es estable ni causal

Problema 17

Los SLIT causales con respuesta al impulso de $h(t)$ tienen las siguientes propiedades:

- Cuando la entrada es $x(t) = e^{2t}$ para todo t , la salida es $y(t) = (1/6) e^{2t}$ para todo t .
- La respuesta al impulso satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = (e^{-4t})u(t) + bu(t)$$

donde b es una constante desconocida.

Determine la función de transferencia del sistema $H(s)$ con la información dada.

Problema 18

La función de transferencia de un sistema LIT está dada como:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Determine y grafique la respuesta $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es la siguiente:

$$x(t) = e^{-t} \quad -\infty < t < \infty$$

Problema 19

Resolver la ecuación diferencial siguiente (transformada de Laplace se refiere al caso UNIDIRECCIONAL):

$$ay' + by = k, \quad y(0) = y_0 \quad a, b, k \text{ son constantes.}$$

Problema 20

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$2y'' + 7y' + 3y = 0 \quad y(0) = y_0, y'(0) = 0$$

Problema 21

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 2\zeta\omega_0 y' + \omega_0^2 y = 0 \quad y(0) = a, y'(0) = b \quad a, b \text{ constantes.}$$

Respuesta de SLIT digitales

8.1. Convolución de señales digitales

Sea un *SLIT* que caracterizamos por su respuesta al impulso $h(n)$ o función ponderante



Figura 8-1

Por supuesto si entra : $\sum_{k=N_0}^{N_1} a_k \delta_{(n-k)} \longrightarrow \sum_{k=N_0}^{N_1} a_k h_{(n-k)}$ por ser *SLIT*, transforma las combinaciones lineales de $\delta(n)$ en combinaciones de $h(n)$.

Nos interesa cual será la respuesta $y(n)$ ante una entrada arbitraria $x(n)$, para ello, expresemos a $x(n)$ como una suma de impulsos.

$$\text{Se pueden escribir: } x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(n-k) = x(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) = x(n)$$

pues de esta última suma el único valor no nulo es cuando $k = n$.

Ante esta entrada, el *SLIT* toma a la función delta y la transforma en h luego

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \xrightarrow{\text{sale}} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

esta suma que representa a la salida $y(n)$ conocido el sistema mediante $h(n)$ y la entrada $x(n)$, es lo que se denomina “*suma de convolución*”.

Ejemplo

$$\text{Sea } x(n) = u(n) \quad \text{y} \quad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

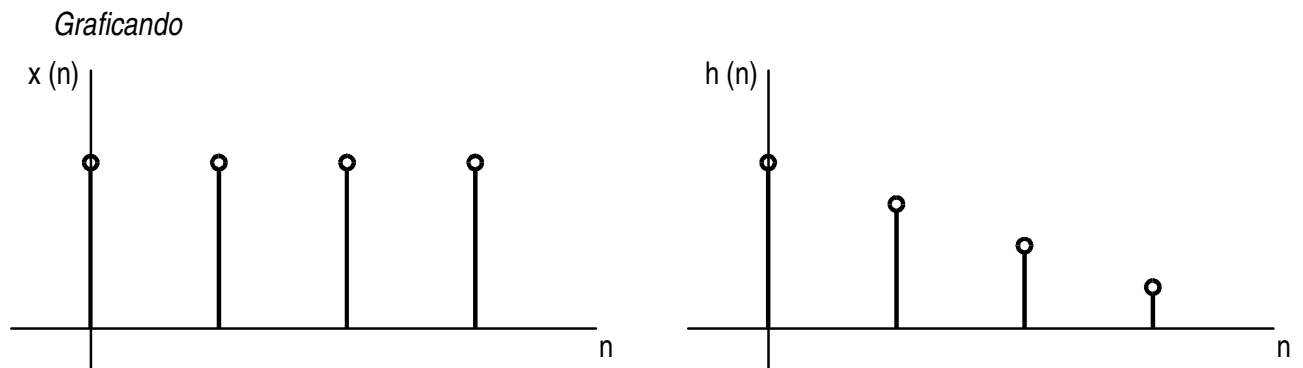


Figura 8-2

1.- Obtenemos $x(k)$ y $h(-k)$ resulta

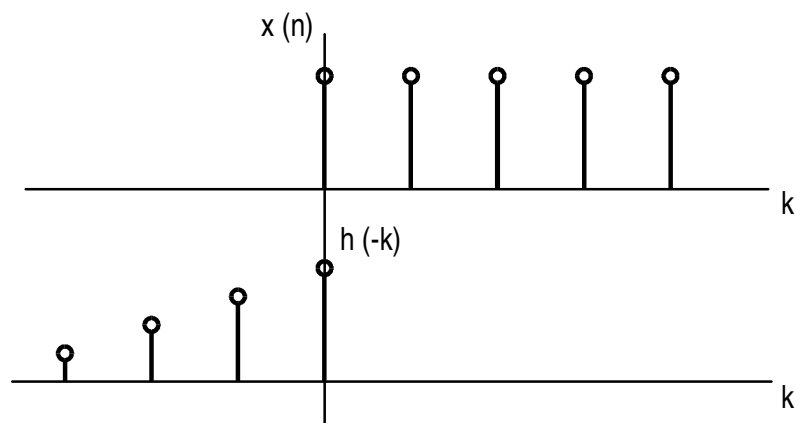


Figura 8-3

2.- “Movemos” $h(n-k)$ según el valor de n que actúa como parámetro en la suma de convolución.

Si $n < 0$ se mueve a la izquierda, luego el producto $x(n) \cdot h(n-k)$ es nulo $\forall k$

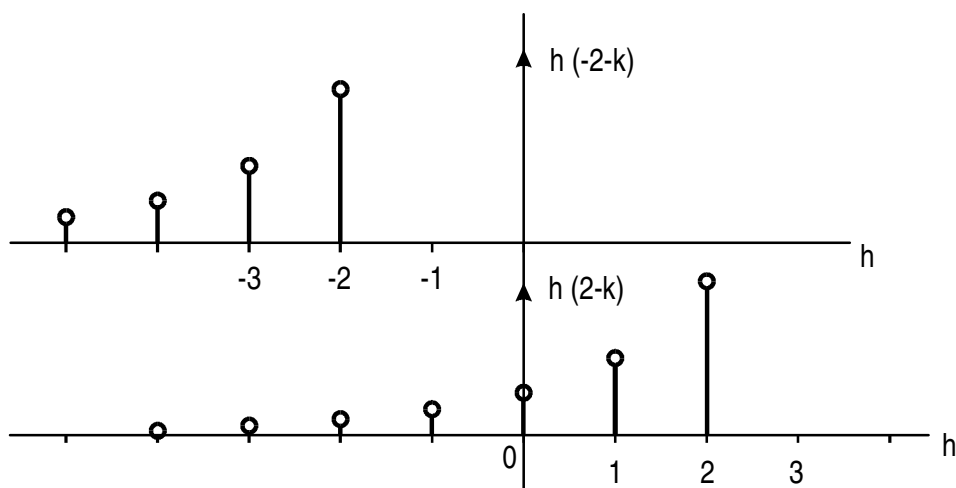


Figura 8-4

Si $n > 0$ se mueve hacia la derecha, o sea, si $n=2$ $h(2-k)$ existe mordedura en $k=0, 1$ y 2 , luego la suma de convolución:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot h(n-k) = x_{(0)} \cdot h_{(2)} + x_{(1)} \cdot h_{(1)} + x_{(2)} \cdot h_{(0)} = \sum_{k=0}^n x(n) \cdot h(n-k)$$

para $n > 0$ genera la expresión que determina a $y(n)$, luego

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ \sum_{k=0}^n x(k) \cdot y(n-k) & \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

Observe que la convolución es la suma de producto de valores aislados. Se lo puede obtener mediante una tabla donde a partir de un determinado valor de n ubicamos a $h(n)$ y a $x(n)$ (indistintamente) en sus respectivas filas y columnas.

Luego asignamos el producto de fila por columna respectiva a cada celda de esta matriz, con ello hacemos el producto de $x_{(k)} \cdot h_{(n-k)}$ para distintos n . Por último sumamos las diagonales y esto es $y(n) = x(n) * h(n)$

$h_{(n)} \backslash x_{(n)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$...
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$			

} Suma a diagonal

$$y_{(0)} = \frac{1}{2} ; y_{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} ; y_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} ; y_{(3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$y_{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{suma geométrica}$$

El problema de esta tabla es que brinda la sucesión $y(n)$ en forma extensiva. Encontrar a veces una expresión compacta es difícil, por ello se prefiere usar la fórmula de sumas de convolución y de últimas verificarla con la tabla, sobre algunos valores, con el fin de asegurarnos sobre lo calculado.

En nuestro caso $y_{(n)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $n \geq 0$; lo que conduce a la sucesión obtenida de la tabla.

Ejemplo

Cuando una señal es de energía, es de tiempo finito, los extremos de la suma pueden ser algo más “tedioso” la determinación de los extremos de las sumas para el cálculo, por ejemplo sea:

$$x(n) = u(n) - u(n+6) \quad \text{y} \quad h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n)$$

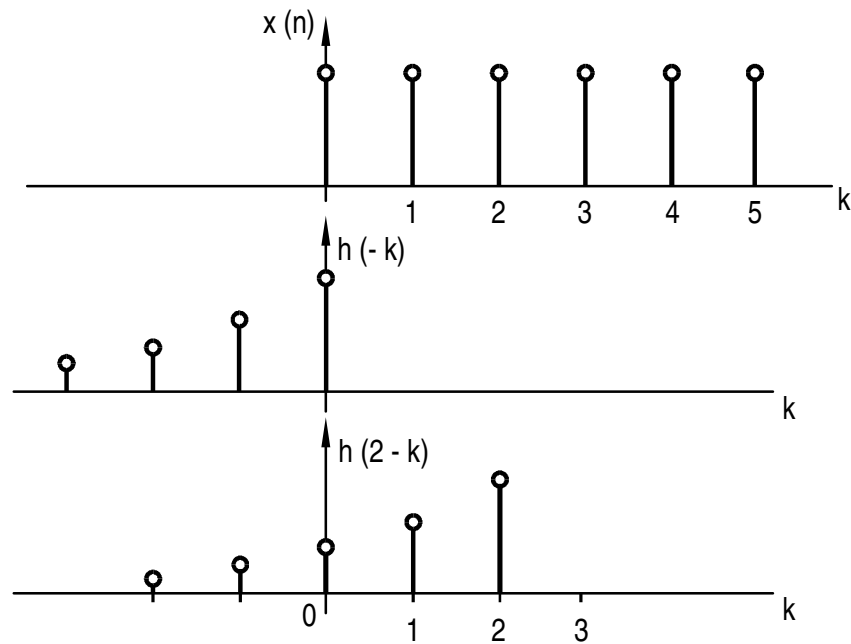


Figura 8-5

Si $n < 0$, entonces $y_{(n)} = 0$

Si $0 \leq n < 5$ entonces la señal $h_{(n-k)}$ avanza sobre $x_{(n)}$ hasta el valor asignado a n , por ejemplo si $n = 2$. Existe producto no nulo de tres valores, luego la $y_{(n)} = \sum_{k=0}^n x_{(k)} h_{(n-k)}$

Si $n \geq 5$, siempre hay una “cola” de $h_{(n-k)}$ que solapa a $x_{(n)}$ luego $y_{(n)} = \sum_{k=0}^5 x_{(k)} h_{(n-k)}$

Una vez determinado los límites de las sumas o series, la cuestión de definir a $y_{(n)}$ es una cuestión de resolver sumas o series, para lo cual se recomienda un repaso al respecto de suma geométricas, técnicas de estudio de convergencia, suma aritméticas.

En nuestro caso:

Si $0 \leq n < 5$

$$y_{(n)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^n 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (2^{n+1} - 1) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Si $n \geq 5$

$$y_{(n)} = \sum_{k=0}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^5 2^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1-2^6}{1-2} = 63 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Resultando

$$y_{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } 0 \leq n < 5 \\ 63\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n \geq 5 \end{cases}$$

8.2. Convolución de señales de longitud finita (otra forma de presentar la matriz)

Se puede tabular en forma quizá más compacta:

1. Alineamos la secuencia $x(n)$ debajo de la $h(n)$.
2. Alineado a $x(n)$ ubicamos el producto del arreglo entero $h(n)$ con esa muestra $x(n)$.
3. Sumamos las columnas para generar la secuencia resultante de la convolución.

Ejemplo:

Sea $h(n)=[1,2,2,3]$; $x(n)=[2,-1,3]$ entonces la $y(n)=x(n)*h(n)$ es:

n	0	1	3	4		
$h(n)$	1	2	2	3		
$x(n)$	2	-1	3			
	2	4	4	6		
		-1	-2	-2	-3	
			3	6	6	9
$y(n)$	2	3	5	10	3	9

8.3 Convolución como producto de polinomios

Una forma interesante de convolución es mediante el producto de polinomios pues: la convolución de señales finitas corresponde a una multiplicación polinomial:

Ejemplo:

Sea: $[1,1,3]*[1,0,2]=[1,1,5,2,6]$

$$(x^2 + x + 3)(x^2 + 2) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x + 6$$

8.4. Convolución Periódica

Es a veces necesario considerar la convolución de dos sucesiones periódicas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ con período común N (o múltiplo del período de ambas, $N = m \cdot \text{m.c.m.}\{N_1, N_2\}$).

Si realizamos la convolución lineal de estas secuencias periódicas, la convolución en general no converge, pues si $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$ la podemos descomponer en suma parciales de N elementos de un período de la forma:

Si $T_{(k)} = T_{(k+N)} \quad \forall k$ con $n \in \mathbb{N}$ o sea es periódica, entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{(k)} = \dots \sum_{k=-N}^{-1} T_{(k)} + \sum_{k=0}^{N-1} T_{(k)} + \sum_{k=N}^{2N-1} T_{(k)} + \dots + \sum_{k=rN}^{rN+N-1} T_{(k)} + \dots + \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{(k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{k=rN}^{rN+N-1} T_{(k)}$$

$$\text{si } m = k - N \quad \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} T(m + rN)$$

$$\text{luego} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(rN+m) x_2(n-rN-m)$$

Dada la periodicidad de $x_1(n)$ y $x_2(n)$ se puede escribir

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m)$$

dado que la suma de $\sum_{m=0}^{N-1}$ es un valor constante, en relación a la suma externa o sea a r , la suma total siempre diverge. Por ello se define convolución periódica de estas sucesiones como la convolución en un período:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n-m) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

$$\text{que es equivalente a} \quad y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(n-k) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

Ahora bien, la suma y el producto de señales periódicas del mismo período, es otra señal periódica.

Nota: esto sugiere que $y(n) = y_{(n+N\ell)}$ con ℓ un natural, es también periódica. El desplazamiento de $x_{2(n+N\ell)}$ para distintos n debe entonces seguir una ley tal que la longitud final de $y_{(n)}$ sea N , pero si analizamos la convolución de $x_{1(n)}$ de longitud N_1 son $x_{2(n)}$ de longitud N_2 , observamos que $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ posee una longitud de $N_1 + N_2 - 1$, esto es lo que hace denominar a esta

convolución como “*lineal*”, en el caso que estamos estudiando de convolución periódica, $y_{(n)}$ posee una longitud de N por la periodicidad de $y_{(n)}$.

Este tipo de convolución periódica se obtiene por un desplazamiento “*circular*” de las secuencias y se denomina también convolución circular.

Ejemplo: Sea

$$x_{(n)} = \{1, 2, 0, -1\} \quad \text{y} \quad h_{(n)} = \{1, 3, -1, -2\}$$

el período de estas señales de $N=4$ con inicio en $n=0$ marcado con una flecha debajo del elemento de inicio, supongamos querer $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) h(n-k)$. Ubicamos $x(k)$ en el sentido contrario a las agujas del reloj o positivo e $h(-k)$ en sentido negativo o contrario a $x(k)$ (este orden es arbitrario).

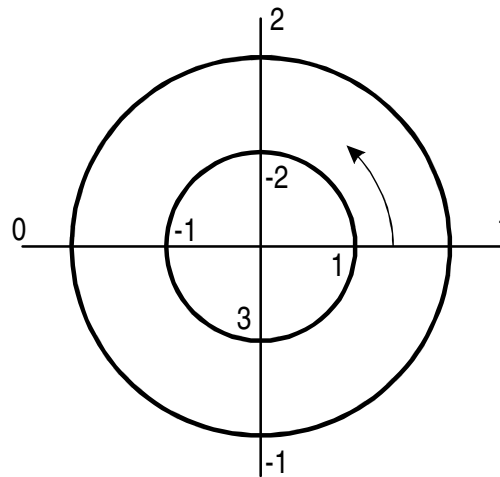


Figura 8-6

Si $n > 0$ el círculo interno de $h(n-k)$ gira en sentido positivo y esto lo hace desde $n=0$ hasta $n=N-1$ se obtiene así:

$$y_{(0)} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = -6$$

gira un salto

$$y_{(1)} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 6$$

gira

$$y_{(2)} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$$

gira

$$y_{(3)} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (0) = -5$$

gira

$$y_{(4)} = y_{(0)}$$

\vdots

lo invito a realizar estos corrimientos circulares, lo que se hizo es

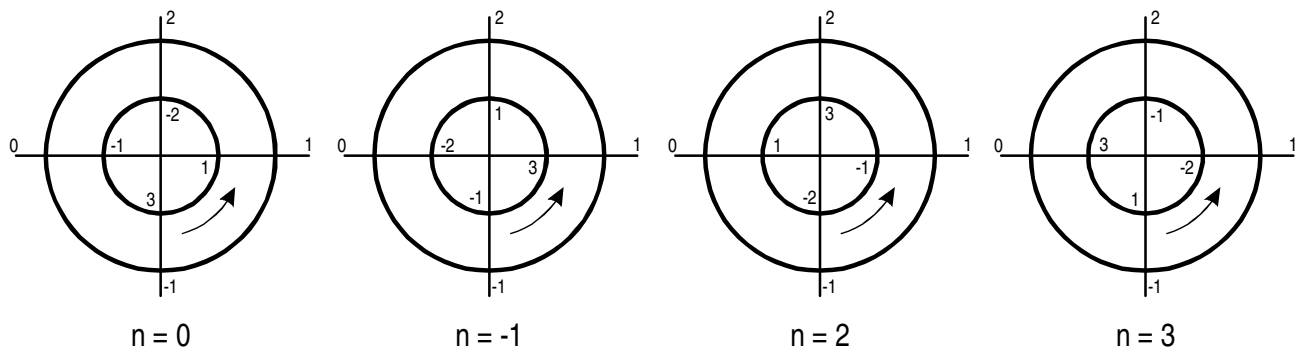


Figura 8-7

¿Existe otra forma de obtener esta $y(n) = x(n) \otimes h(n)$?

Si, usando técnicas lineales.

Nota: Veremos (en cuanto estudiemos transformadas) que este tipo de convolución es la consecuencia de operaciones (producto) entre transformadas, es decir que “*naturalmente*” esta convolución circular surge cuando las señales son periódicas o de muy larga duración teniendo que tomar intervalos de longitud de N elementos y realizar la convolución lineal que es la salida de los sistemas LIT.

La convolución circular se indica $x_1(n) \Theta x_2(n)$ o $x_1(n) \otimes x_2(n)$, en el interior del círculo se suele colocar la longitud N del período.

Si no poseen el mismo período sino un múltiplo de N : $N = \text{máx} \cdot c \cdot m\{N_1, N_2\}$, en este caso cada período se rellena con ceros hasta la longitud N .

8.4 Convolución periódica por medio de la matriz circulante

La convolución periódica puede expresarse mediante el producto de matrices.

Se plantea una matriz de $N \times N$ cuyas columnas son $x(n)$ desplazadas cíclicamente, esto es la matriz circulante, que es una matriz donde la diagonal es constante o de Toeplitz.

Se multiplica por el vector columna de $h(n)$ que determina la salida $y(n)$ como vector columna también.

Ejemplo:

Sea $x(n)=[1,0,2]$ y $h(n)=[1,2,3]$ entonces la $y(n)=x(n) \odot h(n)$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

8.5 Convolución lineal (regular) usando convolución circular

Se puede realizar la convolución lineal de dos sucesiones mediante la técnica de relleno de ceros, pues la longitud de $y(n)=x(n)*h(n)$ es $N_y=N_x+N_h-1$, entonces se rellenan con ceros a las sucesiones $x(n)$ y a la $h(n)$ tal que su longitud sea N_y y se realiza la convolución circular.

Ejemplo:

Sea $x(n)=[2,5,0,4]$ y $h(n)=[4,1,3]$

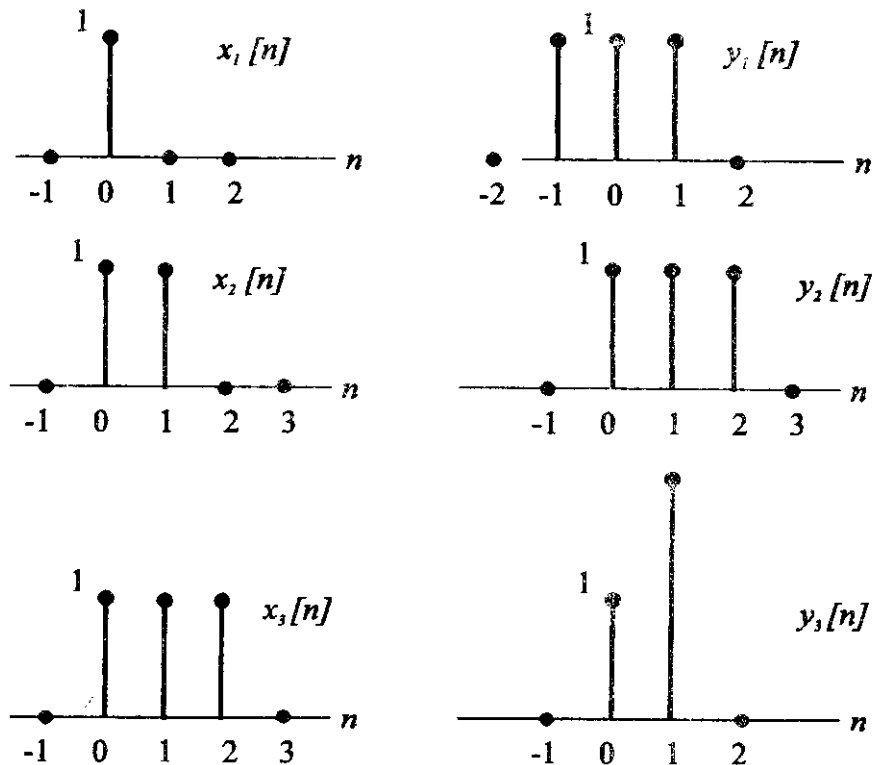
$x_z=[2,5,0,4,0,0]$ y $h_z=[4,1,3,0,0,0]$ y realizando la matriz circulante:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 11 \\ 31 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

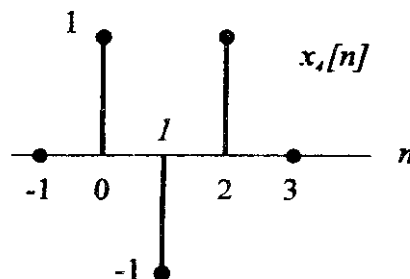
Problemas

Problema 1

Este es un problema, donde se usa simplemente la superposición.



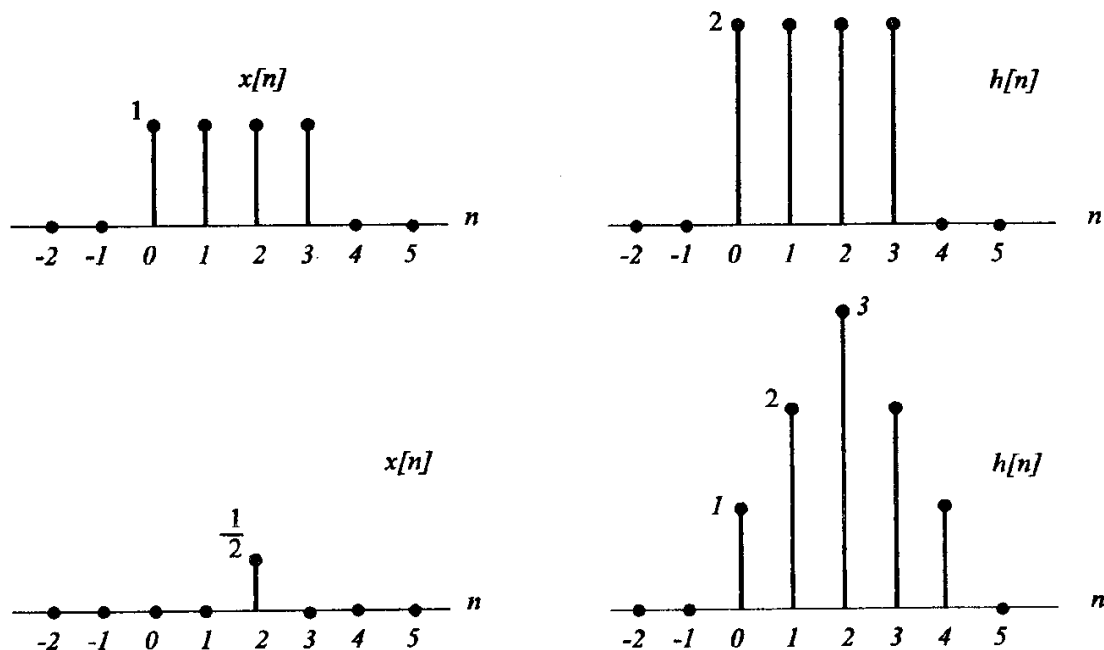
Determine la respuesta $y_4[n]$ donde la entrada es la mostrada en la siguiente figura:



- Exprese $x_4[n]$ como una combinación lineal de $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$.
- Determine la respuesta $y[n]$ donde la entrada es la mostrada.

Problema 2

Determine la convolución discreta de $x[n]$ y $h[n]$ para los siguientes casos:



Problema 3

Considerando el SL discreto, que tiene la respuesta a la $\delta[n]$ de $h[n]$ y la entrada $x[n]$.

a) Grafique la respuesta de ese sistema si:

$$x[n] = \delta[n - n_0] \text{ para algún } n_0 > 0 \text{ y}$$

$$h[n] = (1/2)^n u[n]$$

b) Evalúe y grafique la salida del sistema:

$$h[n] = (1/2)^n u[n] \text{ y } x[n] = u[n]$$

c) Considere invertir el orden de $h[n]$ y $x[n]$, tal que:

$$h[n] = u[n]$$

$$x[n] = (1/2)^n u[n]$$

Evalúe $y[n]$ y grafique.

Problema 4

Calcule y grafique las sumas de convolución $y[n] = x[n] * h[n]$

a) $x[n] = \alpha^n u[n]$

b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

$$h[n] = \beta^n u[n]$$

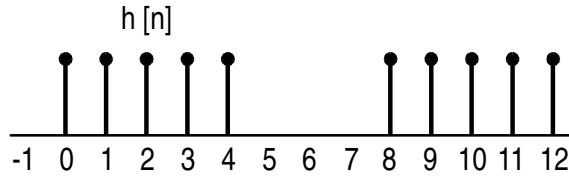
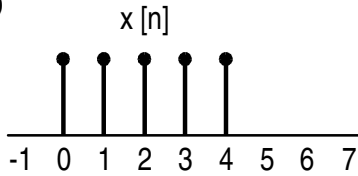
c) $x[n] = 2^n u[-n]$

d) $x[n] = (-1)^n \{u[-n] - u[-n-8]\}$

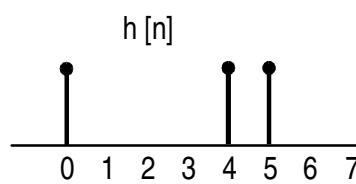
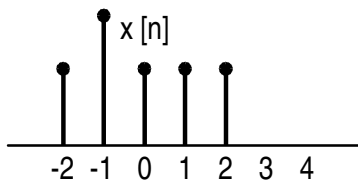
$$h[n] = u[n]$$

$$h[n] = u[n] - u[n-8]$$

e)



f)

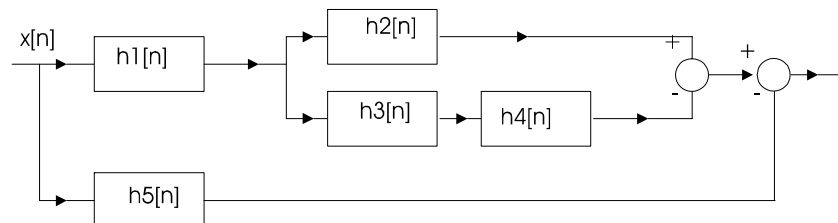


g) $x[n] = u[n] - u[-n]$

h) $x(n) = \begin{cases} (1/2)^n & \text{si } n \geq 0 \\ 4^n & \text{si } n < 0 \end{cases}$

Problema 5

En el sistema descrito exprese $h[n]$ en términos de $h_1[n]$; $h_2[n]$; $h_3[n]$; $h_4[n]$ y $h_5[n]$



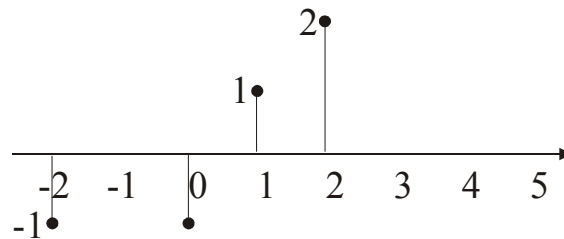
b) Determine $h[n]$ donde:

$$h_1[n] = 4 (1/2)^n \{u[n] - u[n-3]\}$$

$$h_2[n] = h_3[n] = (n+1) u[n]$$

$$h_4[n] = \delta[n-1]$$

$$h_5[n] = \delta[n] - 4 \delta[n-3]$$

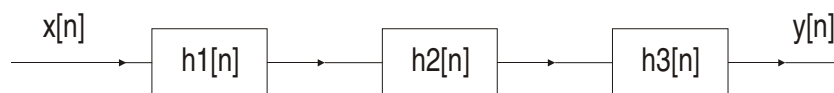


c) Bosqueje la respuesta de el sistema de la parte b) si $x[n]$ es la mostrada.

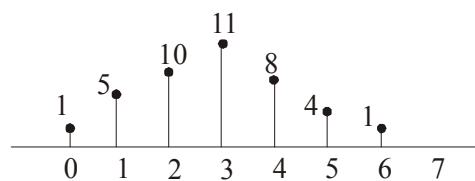
Problema 6

Considere la conexión en cascada de sistemas causales. La respuesta a un impulso $h_2[n]$ está dado por :

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2]$$



La respuesta del sistema al impulso es:



a) Descubra $h_1[n]$

b) Determine la respuesta de todo el sistema a una entrada :

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Problema 7

La siguiente lista son respuestas de sistemas a un impulso.

Determine en cada caso si es estable y/o causal.

- a) $h[n] = (1/2)^n u[n]$
- b) $h[n] = (0,99)^n u[-n]$
- c) $h[n] = (-1/2)^n u[n] + (1,01)^n u[n-1]$
- d) $h[n] = n (1/2)^n u[n]$
- e) $h(t) = e^{-3t} u(t-1)$
- f) $h(t) = e^t u(-1-t)$

Problema 8

Un SLIT posee una relación entrada-salida caracterizada por:

$$y[n] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-3] - 3x[n-4]$$

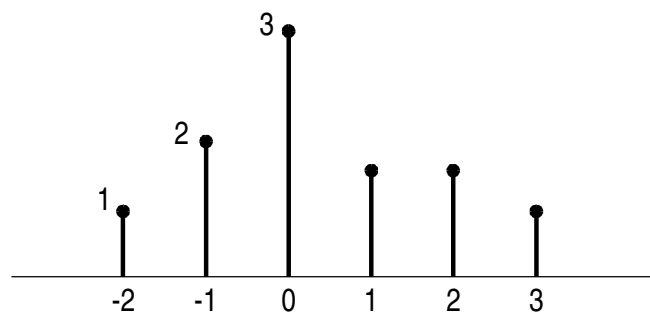
Determine y grafique la respuesta del sistema al impulso ($h[n]$).-

Problema 9

Considere un SLIT descrito por:

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

Descubra la respuesta a la entrada $x[n]$ dibujada resolviendo la ecuación recursivamente:



Problema 10

Considere la ecuación de diferencias:

$$y[n] - 1/2 y[n-1] = x[n]$$

con $x[n] = K (\cos(\Omega_o n)) u[n]$; K, Ω_o son constantes

Asuma que la solución $y[n]$ consiste en una suma de la solución particular $y_p[n]$ para $n \geq 0$ y la homogénea $y_h[n]$ que satisface la ecuación:

$$y_h[n] - 1/2 y_h[n-1] = 0$$

a) asumiendo que sea:

$$y_h[n] = A z_o^n, \text{ que valores toma } z_o ?$$

b) Asumiendo que para $n \geq 0$

$$y_p[n] = B \cos(\Omega_o n + \theta)$$

que valores de B y de θ corresponden ?

c) Suponga la condición inicial $y(0) = 0$ verifique la ecuación dada. Muestre que el sistema no es causal por comparación de la respuesta del sistema a las siguientes entradas:

$x_1(n)=0$ para todo n .

$$x_2(n)=\begin{cases} 0 & n < -2 \\ 1 & n \geq -2 \end{cases}$$

Problema 11

Resuelva las siguientes ecuaciones de diferencias homogéneas con condiciones iniciales:

$$1) y[n] + (3/4) y[n-1] + (1/8) y[n-2] = 0 \quad y[0] = 1 ; y[-1] = -6$$

$$2) y[n] - 2 y[n-1] + y[n-2] = 0 \quad y[0] = 1 ; y[1] = 0$$

$$3) \text{ idem ejercicio anterior con } y[0] = 1 ; y[1] = 21$$

Problema 12

a) Considere el sistema descrito por:

$$y[n] - (1/2) y[n-1] = x[n]$$

asuma que $x[n] = \delta[n]$, cuanto vale $y[0]$?

Que ecuación dada para $h[n]$ satisface para $n \geq 1$ y con esa condición inicial ?

Resuelva la ecuación y obtenga la expresión de $h[n]$.

b) Considere nuevamente el SLIT descrito por :

$$1) y[n] - y[n-2] = x[n]$$

$$2) y[n] - y[n-2] = 2 x[n] - 3 x[n-4]$$

Encuentre $h[n]$ para cada uno de ellos.

Problema 13

Realice la convolución periódica de

$$x_p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{período } N_0 = 6$$

$$h_p(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \text{período } N_0 = 6$$

Problema 14

a) Dada las siguientes señales periódicas, determine $y(n)=x(n) \otimes h(n)$

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ de periodo } N=6,$$

$$x(n) = [1, 2, 0, 1] \quad ; \quad h(n) = [2, 2, 2, 0]$$

$$x(n) = [-3, -2, -1, 0, 1] \quad ; \quad h(n) = [4, 3, 2] \quad (\text{complete con ceros})$$

b)

Dada las siguientes señales periódicas, determine $y(n) = x(n) \otimes h(n)$

a) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ de periodo $N=6$,

b) $x(n) = [1, 2, 0, 1] \quad ; \quad h(n) = [2, 2, 2, 0]$

c) $x(n) = [-3, -2, -1, 0, 1] \quad ; \quad h(n) = [4, 3, 2] \quad (\text{complete con ceros})$

Serie y Transformada de Fourier

9.1. Análisis de SLIT en tiempo discreto

Veamos un *SLIT* y su comportamiento



Figura 9-1

Si entra $\delta(n) \longrightarrow h(n)$ que es llamado ponderante del *SLIT*, además si entra $x(n)$ sale

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad \text{suma de convolución.}$$

Se puede realizar un cambio de variables de $n-k=m$ con $k=n-m$ y resulta:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) h(m)$$

o sea

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

Por ejemplo, si la entrada fuese $x(n) = z^n$ con $z \in \mathbb{C}$ resulta la salida

$$y_{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k)} z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k)} z^{-k}$$

$$y_{(n)} = z^n \cdot H_{(z)}$$

Donde $H_{(z)}$ es un número (del tiempo n) tal que $H_{(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{(k)} z^{-k}$

Aparece el autovalor $H_{(z)}$ y la autofunción z^n y se repite esta señal de entrada a la salida.

En el *SLIT* si $x_{(n)} = a z_0^n + b z_1^{n+1} + c z_2^{n-2}$

resulta

$$y_{(n)} = a H_{(z_0)} z_0^n + b z_1 H_{(z_1)} z_1^n + c z_2^{-2} H_{(z_2)} z_2^n$$

o sea combinación lineal de funciones de z^n se repiten a la salida, afectados de $H_{(z_k)}$.

Lo que se pretende, es expresar $x_{(n)}$ como una combinación lineal de exponenciales de la forma z^n tal que nos preocupamos sólo por conocer los nuevos coeficientes $H_{(z_k)}$ de la combinación de salida.

Estudiemos la familia de funciones $\phi_k(n) = e^{j\Omega_0 k n}$

donde $\Omega_0 = q \cdot 2\pi$ y $k \in \mathbb{Z}$; $q \in \mathbb{Q}$ y estudiemos sus cualidades, primero si es periódica

$$\phi_k(n + N_0) = e^{j\Omega_0 k n} e^{j\Omega_0 k N_0}$$

bastará que $e^{j\Omega_0 k N_0} = 1$ o lo que significa $\Omega_0 k N_0 = 2\pi \ell$ con $\ell \in \mathbb{Z}$

Como condicionamos a $\Omega_0 = q \cdot 2\pi$ resulta: $N_0 = \frac{\ell}{kq}$

para cada valor de $k \in \mathbb{Z}$ es posible encontrar en $\ell \in \mathbb{Z}$ de forma que $N_0 \in \mathbb{N}$ pero existe un N_0 tal que es el período mayor para todos los $\phi_k(n)$ pues las otras son submúltiplos o armónicas de N_0 . Luego N_0 contiene a los períodos de todas las señales del conjunto $\phi_k(n)$

Se denomina a $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ frecuencia digital

Si ahora tomamos la familia $\phi_k(n)$ como $\phi_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N_0} k n}$ y evolucionamos el tiempo n vemos que

$$n = 0 \quad \phi_k(0) = 1$$

$$n = 1 \quad \phi_k(1) = e^{j\frac{2\pi}{N_0} k}$$

$$n = 2 \quad \phi_k(2) = e^{j\frac{2\pi}{N_0} k \cdot 2}$$

\vdots

$$n = N_0 - 1 \quad \phi_k(N_0 - 1) = e^{j\frac{2\pi}{N_0} k \cdot (N_0 - 1)} = e^{j2\pi k} e^{-j\frac{2\pi}{N_0} k}$$

$$n = N_0 \quad \phi_k(N_0) = e^{j2\pi k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 n &= N_0 + 1 & \phi_k(N_0 + 1) &= e^{j2\pi k} e^{j\frac{2\pi}{N_0}k} = \phi_k(1) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Los valores de $\phi_k(n) = \phi_{k+rN_0}(n)$; $r \in \mathbb{Z}$ se repiten cada N_0 pues dijimos que era periódica de período N_0 . Luego solo disponemos de N_0 señales $\phi_k(n)$ distintas y si las queremos usar como base, estamos frente a una base finita de N_0 funciones:

$$\phi_k(n) = \left\{ 1, e^{j\frac{2\pi}{N_0}n}, e^{j\frac{2\pi}{N_0}2n}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{N_0}(N_0-1)n} \right\}$$

¿Serán estas N_0 señales ortogonales?

La **definición extendida de ortogonalidad** para señales de tiempo discreto es:

$$\sum_{n=-N}^N x_1(n) \cdot x_2^*(n) = 0 \text{ en el intervalo } n \in [-N, N] \text{ o sea de longitud } L = 2N + 1$$

Si fuese real $x_1(n)$ y $x_2(n)$ en un intervalo de longitud $L = N_0$ podemos poner

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_1(n) \cdot x_2(n) = \langle x_1(n), x_2(n) \rangle$$

Investiguemos si $\phi_k(n)$ es una base ortogonal, para lo cual tomamos la señal *enésima* y la señal *elésima*

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}kn} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N_0}\ell n} = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}(k-\ell)n}$$

Si $k \neq \ell$ entonces $k - \ell = p \in \mathbb{Z}$ y resulta que $e^{j\frac{2\pi}{N_0}pn}$ con $p \in \mathbb{Z}$

$$\text{es una suma geométrica } \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j\frac{2\pi}{N_0}pn} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N_0}p \cdot N_0}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N_0}p}} = 0$$

pues $e^{j2\pi p} = 1$ si $p \in \mathbb{Z}$

$$\text{Si } k = \ell; \quad \sum_{n=0}^{N_0-1} 1 = N_0$$

Luego, el producto escalar de dos bases distintas es nulo, son ortogonales, y de una base por si misma es N_0 , (existen no nulas).

Demostrada que $\phi_k(n)$ es una base de N_0 elementos entonces en el intervalo N_0 se puede representar una señal como combinación lineal de estas bases.

9.2. Serie de Fourier en tiempo discreto

Si $x(n) = x(n + N_0) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad N_0 \in \mathbb{N}$

y si

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x(n)| = M \quad \text{con } M \in \mathbb{R} \text{ converge. Entonces}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n} \quad \text{Expresión de la síntesis en serie de Fourier}$$

a_k en general es complejo $a_k = A_k - j B_k$ con $A_k, B_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, se denomina **coeficiente de la serie de Fourier**.

Ejemplo

$$x_{(n)} = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{N_0} n + 5\right) \quad \text{con } N_0 \in \mathbb{N}$$

¿Es periódica?

Lo será si $x_{(n+N_0)} = 3 \cos\left[\frac{2\pi}{N_0} n + \frac{2\pi}{N_0} N_0 + 5\right]$; si lo es y el período es N_0 .

Por Euler escribimos $x_{[n]} = \frac{3}{2} \left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N_0} n + 5\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N_0} n + 5\right)} \right]$

$$x_{[n]} = \frac{3}{2} e^{j5} e^{j \frac{2\pi}{N_0} n} + \frac{3}{2} e^{-j5} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} n}$$

Comparando con la expresión de $x_{(n)} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n}$

observemos que

$$a_1 = \frac{3}{2} e^{j5} \quad a_{-1} = \frac{3}{2} e^{-j5}$$

“*Parece*” que fueran únicos valores, pero en tiempo discreto hay que tener cuidado con la periodicidad, determinamos ahora los valores de los coeficientes de Fourier, veamos si multiplicamos por $e^{-j \frac{2\pi}{N_0} \ell n}$ la expresión de la síntesis:

$$x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} \ell n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} (k-\ell) n}$$

Si sumamos n a lo largo de N_0 resulta

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} \ell n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j \frac{2\pi}{N_0} (h-\ell)n}$$

como vimos al estudiar la familia $\phi_k(n)$:

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} e^{j \frac{2\pi}{N_0} (k-\ell)n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ N_0 & \text{si } k = \ell \end{cases}$$

Al barrer k a lo largo de N_0 el único valor de la suma que no es nulo es cuando $k = \ell$, o sea nos quedamos con un solo sumando no nulo y además vale N_0

$$\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k n} = a_k \cdot N_0, \text{ luego}$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k n}$$

La variable en esta sucesión es k , veamos si es una sucesión periódica, es decir

$$a_{k+k_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{(n)} e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k n} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k_0 n}, \text{ con } k_0 \in \mathbb{Z}$$

para que $e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k_0 n} = 1$ debe ser $k_0 = N_0$

Luego: a_k **es periódica!!** y de período N_0 , esto nos permite afirmar que

$$x_{(n)} = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{N_0} n + 5\right)$$

en realidad posee infinitos coeficientes de la serie que son

$$a_1 = a_{N_0+1} = a_{2N_0+1} = a_{\ell N_0+1} = \dots = \frac{3}{2} e^{j5}$$

$$a_{-1} = a_{-N_0+1} = \dots = \frac{3}{2} e^{-j5}$$

Si graficamos los $|a_k|$ resulta, si $N_0 = 4$

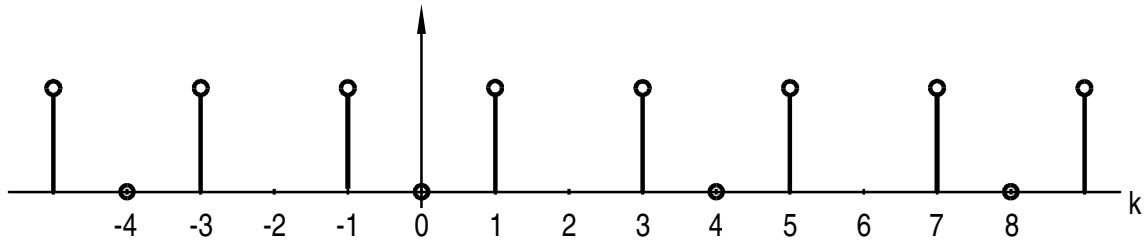


Figura 9-2

En general $a_k = a_{k+N_0 \cdot r}$ con $r \in \mathbb{Z}$

Esto hace que se estudie generalmente a_k en un período N_0 pero se debe comprender que es una sucesión periódica, y que posee infinitos coeficientes.

Otro Ejemplo

$x_{(n)}$ es un tren de pulsos “cuadrado” de período $N_0 = 6$ de la forma

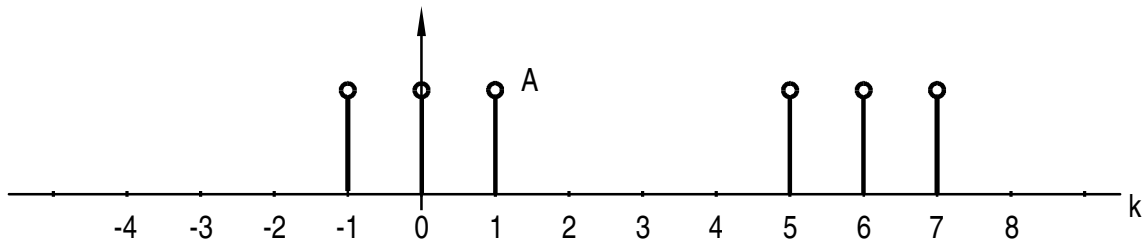


Figura 9-3

La amplitud es A se puede representar como:

$$x_{(n)} = \begin{cases} A & \text{si } -1 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{si } -\frac{N_0}{2} \leq n \leq \frac{N_0}{2} \end{cases} \text{ es periódica de periodo } N_0$$

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-1}^1 A e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k n}$$

$$a_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-1}^1 A = A \frac{3}{6} = \frac{A}{2}$$

$$a_k = \frac{A}{N_0} \left[e^{j \frac{2\pi}{N_0} k} + 1 + e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k} \right] =$$

$$a_k = \frac{2A}{N_0} \left[\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{N_0} k \right] = \frac{A}{3} \left[\frac{1}{2} + \cos \left(\frac{\pi}{3} k \right) \right]$$

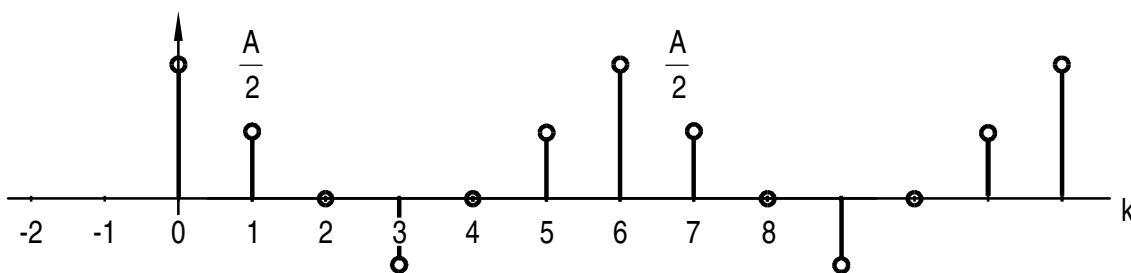


Figura 9-4

$$k = 1 \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} k\right) = 0,5$$

$$k = 2 \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} k\right) = -0,5$$

$$k = 3 \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} k\right) = -1$$

a_k es periódica de período N_0

9.3. Transformada de Fourier de una señal de energía

Consideremos ahora que $x[n]$ no es periódica y cumple que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = M$ con $M \in \mathbb{R}$ o sea converge con lo que converge la energía $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$.

Para repetir el mismo razonamiento que se usó para la transformada en tiempo continuo, vamos a definir la periódica proyectada de $x(n)$ donde $x(n)$ es un período de $x_{N_0}(n)$, y donde el próximo período se produce nunca, o sea cuando $N_0 \rightarrow \infty$

$$x(n) = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_{N_0}(n)$$

pero $x_{N_0}(n)$ es periódica y cumple con Dirichlet, luego

$$a_k N_0 = \sum_{n=-\frac{N_0}{2}}^{\frac{N_0}{2}} x_{N_0}(n) e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n}$$

Si tomamos el límite para $N_0 \rightarrow \infty$ resulta que $\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \Omega_0 k = \Omega$, pues el “salto” de frecuencia

$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \rightarrow d\Omega \rightarrow 0$, pues $N_0 \rightarrow \infty$, y se está sumando punto a punto.

Tomando límite

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} a_k N_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\Omega_0 n} = X(\Omega)$$

es función de $x(n)$ y de Ω , se denomina **transformada de Fourier** de una señal de tiempo discreto de energía.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Si ahora volvemos a nuestra señal periódica $x_{N_0}(n)$

$$x_{N_0}(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n} = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} N_0 a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n} \frac{1}{N_0}$$

tomamos límite cuando $N_0 \rightarrow \infty$, será

$$\lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{N_0} k = \Omega \text{ y } \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{N_0} = \frac{d\Omega}{2\pi}$$

El límite de una suma de funciones muy próximas entre sí, o sea suma punto a punto es la integral, respecto a los límites. Si $k=0$ será $\Omega=0$, si $k=N_0$, ($N_0 \rightarrow \infty$) entonces, $\Omega=2\pi$ por la periodicidad de a_k y de $X(\Omega)$ resulta

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Llegamos así al par de transformada y antitransformada

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Muchos textos definen esta serie y luego la trabajan sobre $x(n)$. Una de las propiedades más importante es la periodicidad de $X(\Omega)$, sea:

$$X(\Omega + \Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} e^{-j\Omega_0 n}$$

bastará que $e^{-j\Omega_0 n} = 1$ lo que implica

$$\Omega_0 n = 2\pi \ell \text{ con } \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\Omega_0 = 2\pi q \text{ con } q \in \mathbb{Q}$$

si $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ se cumple que es periódica, dada esta periodicidad de periodo 2π se puede escribir:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Ejemplo

$$x(n) = a^n u(n) \quad \text{con } |a| < 1$$

Es una señal de energía, pues

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n < \infty \quad \text{si } |a| < 1$$

Luego

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

Si $|a e^{j\Omega}| < 1$ lo cual se cumple si $|a| < 1$

Si graficamos

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - a \cos \Omega + j a \sin \Omega}$$

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \Omega)^2 + a^2 \sin^2 \Omega}}$$

$$\angle X(\Omega) = \tan^{-1} \frac{a \sin \Omega}{1 - a \cos \Omega}$$

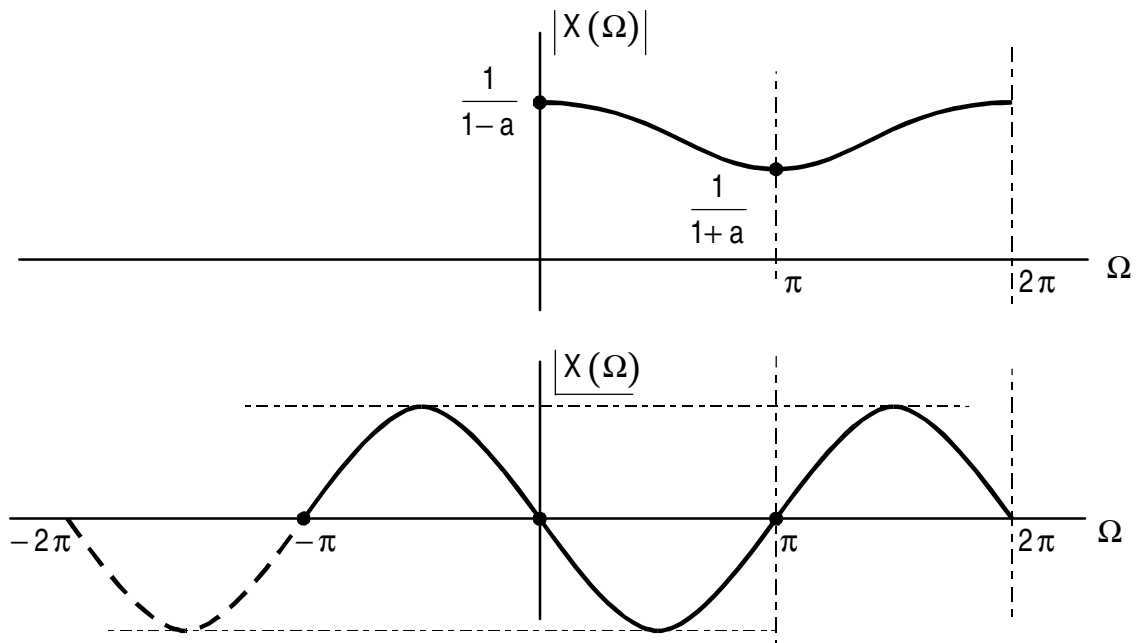


Figura 9-5

Resumen

Si $x(n) = x(n + N_0) \quad \forall n$ y se cumple que: $\sum_{n=\langle N_0 \rangle} x^2(n) < \infty$

entonces $x(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j \frac{2\pi}{N_0} k n}$ con $a_k = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N_0} k n} = A_k - j B_k$

Si $x(n)$ es de energía, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) < \infty$ entonces

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \text{ con}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \text{ espectro de densidad de frecuencia digital o discreta.}$$

9.4. Transformada de una señal periódica de tiempo discreto

Veamos ahora si podemos tratar a las señales periódicas con espectros de densidad de frecuencia a fin que podamos operar con señales periódicas y no periódicas. Para obtener la transformada de una señal periódica proponemos partir de una señal $Y(\Omega)$, que debe ser periódica, de la forma:

$$Y(\Omega) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m)$$

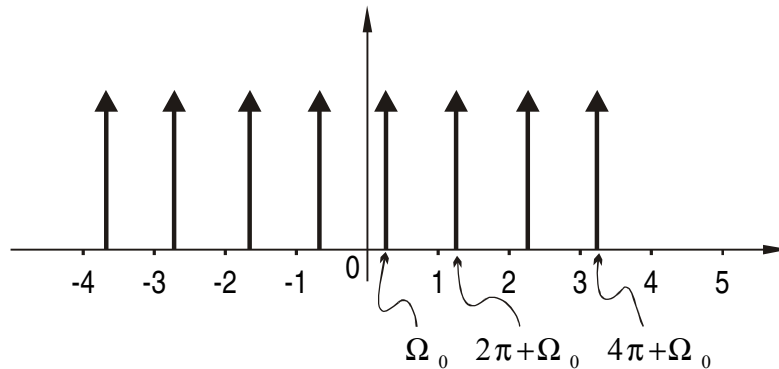


Figura 9-6

Como es una señal periódica en Ω se la puede considerar como un espectro de densidad de frecuencia, que como condición es que $X(\Omega) = X(\Omega + \Omega_0)$; $\forall \Omega$ con $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ o sea “periódica”.

Esto es un tren de frecuencia, con período de 2π . Si queremos conocer el $y(n)$ tomamos la integral sobre un período $\langle 2\pi \rangle$ cualquiera y

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} Y(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - \Omega_0 k) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$y(n) = e^{j\Omega_0 k n}$$

Luego si

$$x(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k e^{j\Omega_0 k n}$$

transformando esta suma:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=\langle N_0 \rangle} a_k \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi m)$$

Esto significa que a_k valores en un período, para N_0 valores de k distintos, y es luego extendida a ser periódica entonces repite a_k veces, cada N_0 .

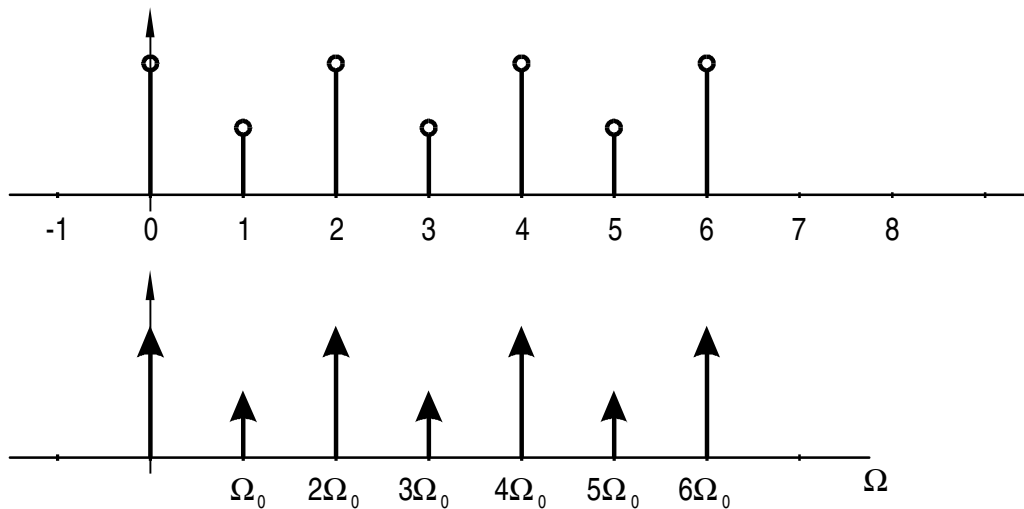


Figura 9-7

Como existen solo N_0 valores de a_k distintos que se repiten, podemos poner compactando la expresión anterior como:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - \Omega_0 k) \quad \forall \Omega$$

periódica de período 2π (no es necesario decirlo pues a_k es periódica).

Por Ejemplo

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} n\right)$$

es periódica de período $N_0 = 5$, expresada por Euler

$$x(n) = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi}{5} n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi}{5} n}$$

corresponde en N_0 dos valores de a_k que son

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

la expresión de $X(\Omega)$ surge de la aplicación de la forma general

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{5} k\right)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \left[\frac{1}{2} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\Omega + \frac{2\pi}{5}\right) \right]$$

y es periódica de período 2π o sea

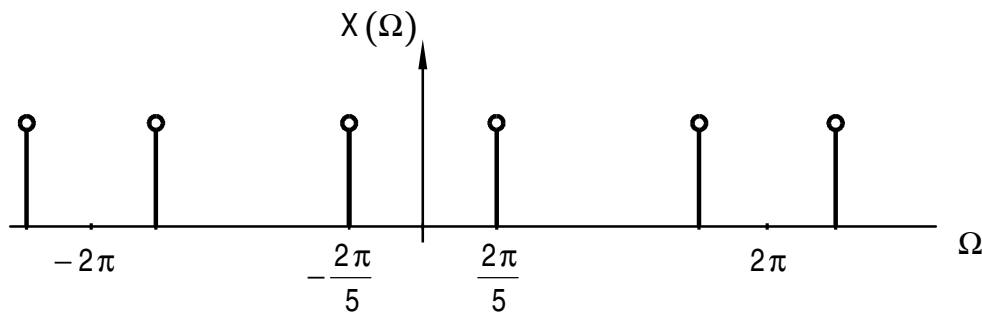


Figura 9-8

Otro Ejemplo

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$$

Es un tren de pulsos periódica de período N . Se desea conocer el espectro de densidad $X(\Omega)$ para lo cual la operativa es calcular a_k y luego formar la expresión de $X(\Omega)$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \delta(n - kN) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

como en N solo existe un pulso, como la suma se limita entre $-\frac{N}{2}$ y $\frac{N}{2}$ resulta

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \delta(n) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N}$$

o sea para todo k vale $\frac{1}{N}$ y es periódica cada N

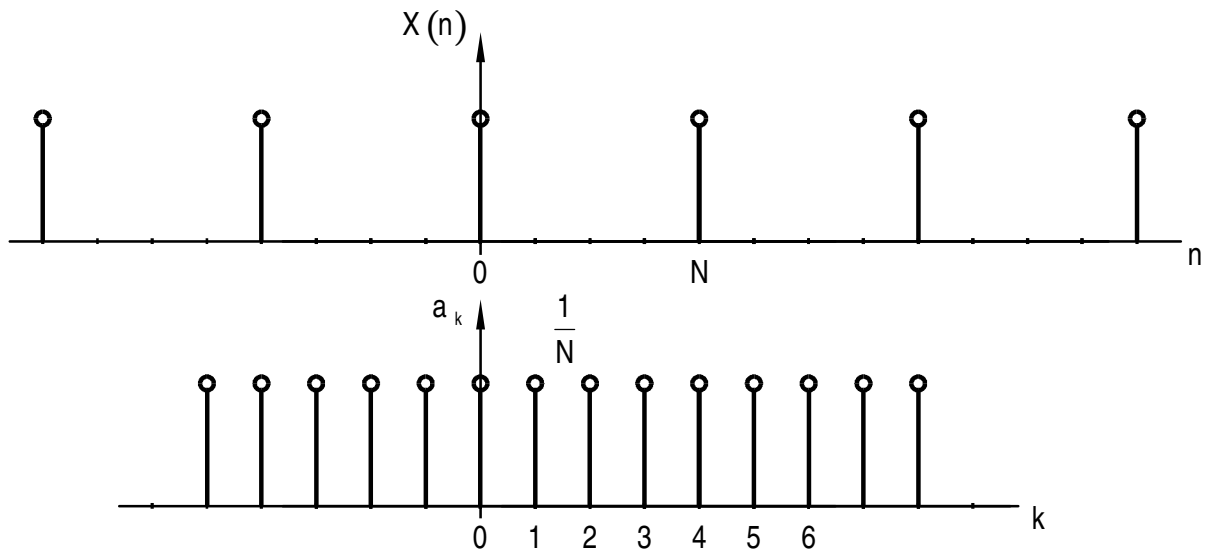


Figura 9-9

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \delta(\Omega - \Omega_0 k) \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

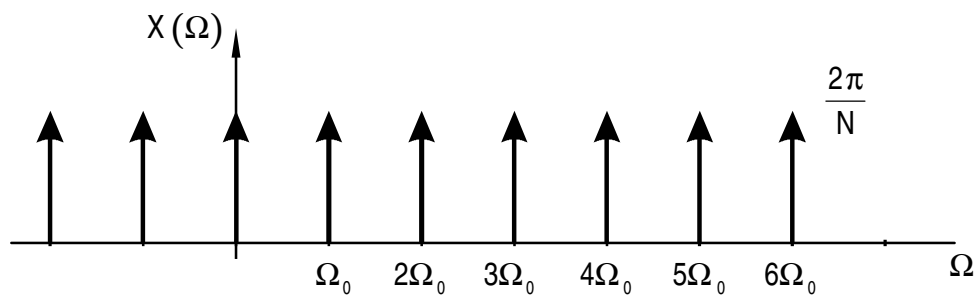


Figura 9-10

9.5. Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

9.5.1. Periodicidad

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \quad \text{es periódica con período } 2\pi$$

9.5.2. Linealidad

$$x_1(n) \longrightarrow X_1(\Omega)$$

$$x_2(n) \longrightarrow X_2(\Omega)$$

$$\text{con } a, b \in \mathbb{R}; \quad a x_1(n) + b x_2(n) \longrightarrow a X_1(\Omega) + b X_2(\Omega)$$

9.5.3. Desplazamiento en el tiempo

Si

$$x(n) \longrightarrow X(\Omega)$$

$$x(n - n_0) \longrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

9.5.4. Desplazamiento en dominio de la frecuencia

$$e^{j\Omega_0 n} x(n) \longrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

Nota: las demostraciones son semejantes a las realizadas en tiempo continuo, quedan a cargo del alumno.

9.5.5. Convolución

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega), \quad \text{veamos su demostración:}$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) h(n-k) \right] e^{-j\Omega n}$$

cambiando el orden de las sumas

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k) e^{-j\Omega n}$$

si multiplicamos por $e^{-j\Omega k}$ $e^{j\Omega k} = 1$ resulta

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k) e^{-j\Omega(n-k)} \cdot e^{-j\Omega k}$$

si consideramos el cambio, $n-k = m$ resulta

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\Omega k} = H(\Omega) \cdot X(\Omega)$$

Problemas

Series y transformadas de Fourier de tiempo discreto

Problema 1

Considere el sistema de tiempo discreto con respuesta al impulso:

$$h(n) = (1/2)^n u(n)$$

Determine la respuesta para cada una de las siguientes entradas

- a) $x[n] = (-1)^n e^{j\pi n} \quad \forall n$
- b) $x[n] = e^{j(n\pi/4)} \quad \forall n$
- c) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \quad \forall n$

Problema 2

Considere las dos secuencias periódicas:

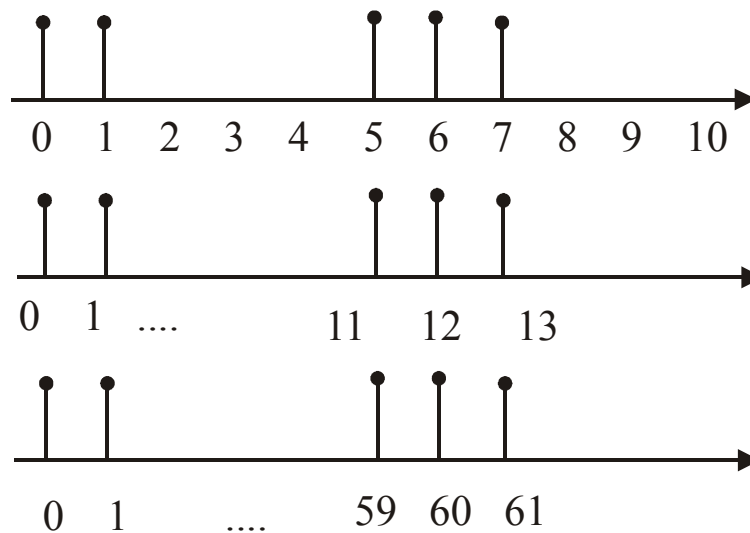
$$x_1[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$$

$$x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{20\pi n}{12} + \frac{\pi}{2}\right)$$

- a) Determine el periodo de $x_1[n]$ y de $x_2[n]$.
- b) Determine la secuencia de la serie de Fourier de coeficientes a_{1k} para $x_1[n]$ y a_{2k} para $x_2[n]$.
- c) En cada caso, la secuencia de la serie de Fourier es periódica. Determine el periodo de la secuencia a_{1k} y de la secuencia a_{2k} .

Problema 3

Determine la serie de Fourier para las tres secuencias mostradas.

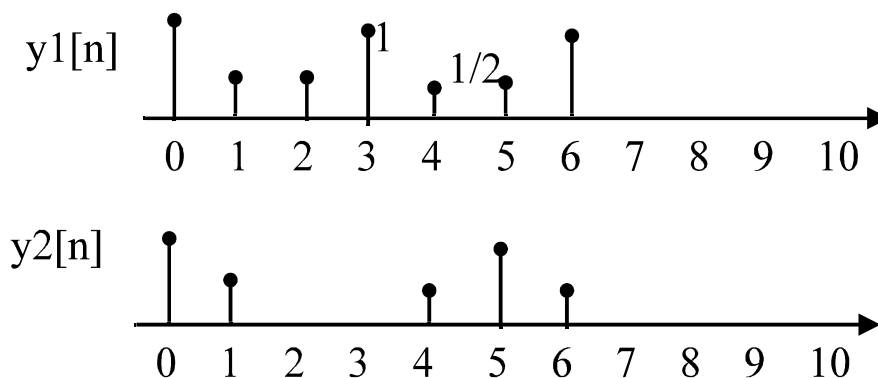


Problema 4

a) Determine y grafique la Transformada de Fourier de la siguiente secuencia:



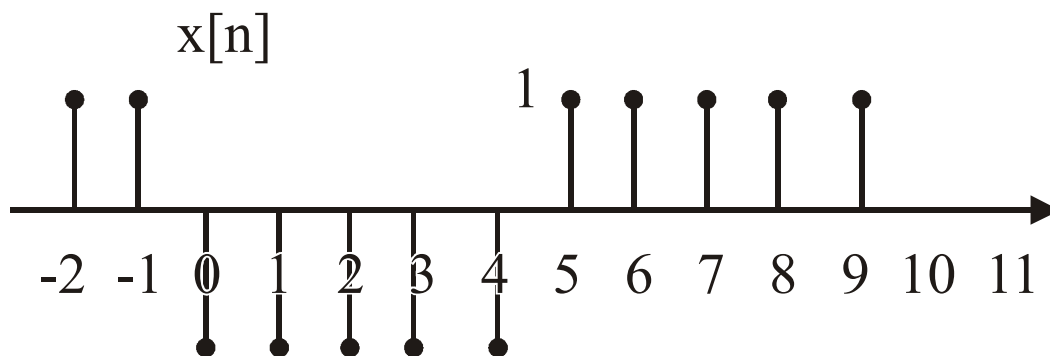
b) Usando su resultado en la parte a) determine la serie de Fourier de tiempo discreto de las dos secuencias periódicas.



Problema 5

La figura muestra una señal periódica real $x[n]$. Usando la propiedad de las series de Fourier y con el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier determine si las siguientes expresiones son o no verdaderas:

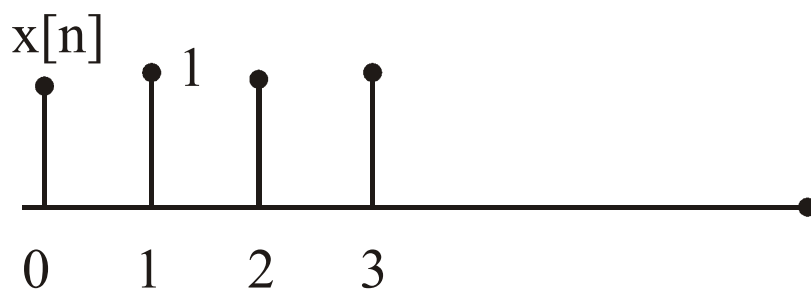
- a) $a_k = a_{k+10} \quad \forall k$
- b) $a_k = a_{-k} \quad \forall k$
- c) $a_k = e^{jk(2\pi/5)} \quad \text{es real } \forall k$
- d) $a_0 = 0$



Problema 6

Calcule la transformada de Fourier de tiempo discreto de las siguientes señales:

- $x[n] = (1/4)^n u[n]$
- $x[n] = (a \sen \Omega_0 n) u[n] \quad |a| < 1$
- $x[n] = \text{según la figura}$



- $x[n] = (1/4)^n u[n + 2]$

Problema 7

- Considere la ecuación de diferencia lineal a coeficientes constantes.

$$y[n] - 1/2 y[n - 1] = x[n]$$

que describe un S L I T inicialmente relajado. Cuál es la función del sistema que describe $Y(\Omega)$ en términos de $X(\Omega)$?

- Usando la transformada, evalúe $y[n]$ si $x[n]$ es:

- $\delta[n]$
- $\delta[n - n_0]$
- $(3/4)^n u[n]$

Problema 8

- Considere el sistema con respuesta al impulso:

$$h[n] = ((1/2)^n \cos(\pi n/2) u[n])$$

Determine la función de transferencia $H(\Omega)$.

- b) Suponga que $x[n] = \cos(\pi n/2)$. Determine la salida $y[n]$ usando la función de transferencia $H(\Omega)$ encontrada en a).

Problema 9

Un S L I T particular es descrito por la ecuación de diferencia:

$$y[n] + 1/4 y[n-1] - 1/8 y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

- a) Descubra la respuesta al impulso del sistema.
- b) Evalúe la magnitud y fase de la respuesta en frecuencia en $\Omega = 0$; $\Omega = \pi/4$; $\Omega = -\pi/4$ y $\Omega = 9\pi/4$.

Problema 10

$x[n]$ es de duración finita de longitud N tal que $x[n] = 0$; $n < 0$ y $n > N-1$. La Transformada de Fourier de tiempo discreto de $x[n]$ es denotada por $X(\Omega)$. Generamos la señal periódica $y[n]$ por replicado periódico de $x[n]$, esto es:

$$y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+N)$$

- a) Escriba la expresión en términos de $x[n]$ para la serie de Fourier de coeficientes a_k de $y[n]$.
- b) Escriba una expresión relacionando los coeficientes de $y[n]$ con la transformada de Fourier de $x[n]$.

Problema 11

- a) Cuatro diferentes expresiones fueron estudiadas:

- 1) Serie de Fourier de tiempo continuo.
- 2) Serie de Fourier de tiempo discreto.
- 3) Transformada de Fourier de tiempo continuo.
- 4) Transformada de Fourier de tiempo discreto.

En la siguiente tabla, complete la columna según los datos de la izquierda.

Descripción de la señal		Transformada	
Tiempo continuo	Duración infinita	Periódica	
Tiempo continuo	Duración infinita	Aperiódica	

Tiempo continuo	Duración finita	Aperiódica	
Tiempo discreto	Duración infinita,	Periódica	
Tiempo discreto	Duración infinita	Aperiódica	
Tiempo discreto	Duración finita	Aperiódica	

- b) Cuáles de las transformadas de la tabla anterior posee la propiedad de dualidad
- c) Cuáles de las transformadas son periódicas?.

Problema 12

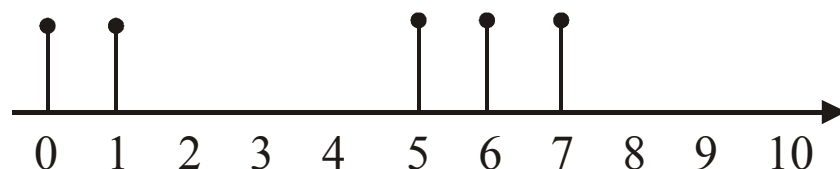
Determine los coeficientes de la serie de Fourier de cada señal periódica dada; de tiempo discreto:

- a) $x[n] = \text{sen} [\pi(n-1)/4]$
- b) $x[n] = \cos (2\pi n/4) + \text{sen} (2\pi n/7)$
- c) $x[n] = \cos (\pi n/4 - \pi/3)$
- d) $x[n] = \text{es periódica de } N = 6 \text{ y } x[n] = (1/2)^n ; -2 \leq n \leq 3$
- e) $x[n] = \text{sen} (2\pi n/3) \cos (\pi n/2)$
- f) $x[n] = \text{periódica de } N = 4 \text{ y } x[n] = 1 - \text{sen} (\pi n/4) ; 0 \leq n \leq 3$

Problema 13

En cada una de las siguientes partes se especifican los coeficientes de la serie de Fourier de las señales periódicas de periodo $N_o = 8$; determine $x[n]$ en cada caso:

- a) $a_k = \cos(k\pi/4) + \text{sen}(3k\pi/4)$
- b) $a_k = \begin{cases} \text{sen}(k\pi/6) & 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$
- c) a_k es según la figura:



Problema 14

Sea $x[n]$ una secuencia periódica con periodo N , y la

$$\text{serie de } x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

a) Los coeficientes de Fourier para cada una de las siguientes señales pueden expresarse en término de a_k ; determine la expresión que corresponda:

i) $x[n-n_o]$

ii) $x[n] - x[n-1]$

iii) $x[n] - x[n - N/2]$ *asuma que N es par*

iv) $x[n] - x[n + N/2]$ *asuma que N es par y note que la señal es periódica de periodo $N/2$*

v) $x^*[-n]$

vi) $x_{<m>}(n) = \begin{cases} x(n/m) & \text{si } n \text{ es múltiplo de } m \\ 0 & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } m \end{cases}$

$x_{<m>}(n)$ es periódica con periodo de mN

vii) $(-1)^n x[n]$ *asuma que N es par*

viii) $(-1)^n x[n]$ *asuma que N es impar, note que la señal es periódica de periodo $2N$*

ix) $y(n) = \begin{cases} x(n) & n \text{ es par} \\ 0 & n \text{ es impar} \end{cases}$

(examine los casos para N par y N impar respectivamente)

b) Suponga que N es par y que $x[n]$ satisface la ecuación siguiente:

$$x[n] = -x[n + N/2] \text{ para todo } n$$

(muestre que $a_k = 0$ para todo valor de k par)

c) suponga que N es divisible por 4. Muestre que si

$$x[n] = -x[n + N/4] \text{ para todo } n$$

es $a_k = 0$ para todo valor de k que es múltiplo de 4

Problema 15

Considerando la ortogonalidad de funciones, para aquellas de tiempo discreto, se generaliza diciendo que dos señales $\phi_k[n]$ y $\phi_m[n]$ son ortogonales sobre el intervalo (N_1, N_2) si:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \phi_k(n) \cdot \phi_m^*(n) = \begin{cases} A_k & \text{si } k=m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

además si $A_k = A_m = 1$ las señales son ortonormales

a) considere la señal

$$\phi_k[n] = \delta[n-k] \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

muestre que las señales son ortonormales en el intervalo $(-N, N)$

b) muestre que las señales:

$$\phi_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n}; k=0, 1, \dots, N-1 \text{ son ortogonales sobre todo intervalo de longitud } N.$$

Problema 16

a) sea $x[n]$ e $y[n]$ señales periódicas con:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Deduzca la propiedad de la modulación para señales de tiempo discreto, y muestre que:

$$x(n)y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad \text{donde:}$$

$$c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cdot b_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k-l} \cdot b_l$$

b) utilizando el resultado de la parte a) descubra la representación en serie de Fourier de las siguientes señales, donde $x[n]$ está dado por la expresión [1]

i) $x[n] \cos(6\pi n/N)$

ii) $x(n) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN)$

c) Utilizando el resultado de la parte a) muestre que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{-l}$$

y con esta expresión derive la relación de Parseval para señales de tiempo discreto.

Problema 17

Las secuencias triangulares mostradas; donde $x_a[n]$ es periódica con periodo $N=6$ y posee una representación en series de Fourier dada por:

$$x_a[n] = \sum_{k=0}^5 a_k e^{jk(2\pi/6)n}$$

a) descubra y grafique los coeficientes de la serie a_k

b) la secuencia $x_b[n]$ mostrada es periódica con periodo $N=8$ y formada por la $x_a[n]$ con la introducción de ceros entre los triángulos. La representación en serie discreta de $x_b[n]$ viene dado por:

$$x_b[n] = \sum_{k=0}^7 b_k e^{jk(2\pi/8)n}$$

determine y grafique los coeficientes de la serie b_k

- c) la secuencia aperiódica triangular $x_c[n]$ también se muestra en la figura, y corresponde un periodo de la secuencia $x_a[n]$. Determine $X_c(\Omega)$; transformada discreta de Fourier de $x_c[n]$ y grafique el resultado.
- d) Muestre que la serie de Fourier de coeficientes a_k y b_k representan espacios muestreados de $X_c(\Omega)$:

$$a_k = c_1 X_c(k\Omega)$$

$$b_k = c_2 X_c(k\Omega)$$

Problema 18

Considere al SLIT con respuesta al impulso:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

determine la representación en serie de Fourier de la salida $y[n]$ para cada una de las siguientes entradas:

i) $x[n] = \sin(3\pi n/4)$

ii) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$

iii) $x(n)$ es periódica con periodo: 6, con: $x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \pm 1 \\ 0 & \text{si } n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$

Problema 19

Calcule las transformadas de Fourier para cada una de las siguientes señales:

a) $x[n] = (1/4)^n u[n+2]$

b) $2^n u[-n]$

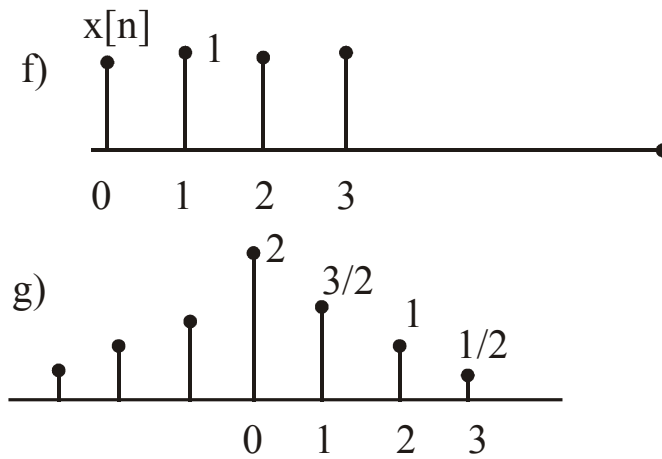
c) $x[n] = [a^n \sin \Omega_0 n] u[n]; |a| < 1$

d) $|a|^n \sin \Omega_0 n; |a| < 1$

e) $\delta[4-2n]$

f) $n (1/2)^{|n|}$

g) $x[n]$ es la dibujada



Problema 20

Las siguientes funciones son transformadas de Fourier de señales de tiempo discreto. Determine la señal correspondiente a cada transformada:

a)
$$X(\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq |\Omega| \leq \omega \\ 1 & \text{si } \omega \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

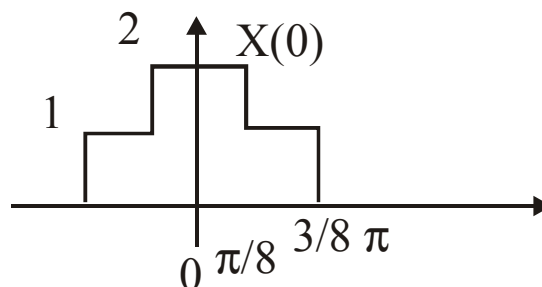
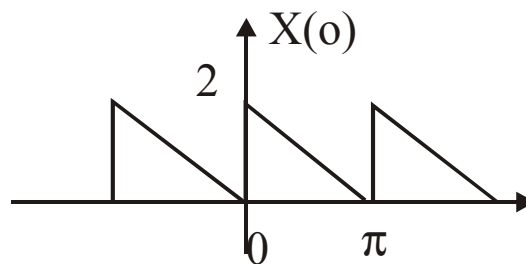
b)
$$X(\Omega) = 1 - 2e^{-j3\Omega} + 4e^{j2\Omega} + 3e^{-j6\Omega}$$

c)
$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\Omega - \pi k/2)$$

d)
$$X(\Omega) = \cos^2 \Omega$$

c)
$$X(\Omega) = \cos(\Omega/2) + j \operatorname{se} \Omega \quad \text{para } -\pi < \Omega < \pi$$

d)
$$X(\Omega) \text{ es el de la figura}$$



Problema 21

a) considere al SLIT con:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right) u[n]$$

Usando las transformadas de Fourier determine la respuesta de cada una de la siguientes entradas:

i) $x[n] = (3/4)^n u[n]$

ii) $x[n] = (n+1) (1/4)^n u[n]$

iii) $x[n] = (-1)^n$

b) suponga que: $h[n] = [(1/2)^n \cos(\pi n/2)] u[n]$

Usando las técnicas de las transformadas de Fourier determine la respuesta de cada una de las señales siguientes:

i) $x[n] = (1/2)^n u[n]$

ii) $x[n] = \cos(\pi n/2)$

Problema 22

a) sea $h[n]$ y $g[n]$ respuestas al impulso de dos sistemas estables discretos en el tiempo, tal que la inversa de cada uno es el otro. Cuál es la relación de la respuesta en frecuencia de ambos sistemas ?.

b) Considere un SLIT causal descrito por las siguientes ecuaciones de diferencias. En cada caso determine la respuesta al impulso del sistema inverso y la ecuación de diferencias que caracteriza al sistema inverso.

i) $y[n] = x[n] - (1/4) x[n-1]$

ii) $y[n] + (1/2) y[n-1] = x[n]$

iii) $y[n] + (1/2) y[n-1] = x[n] - (1/4) x[n-1]$

iv) $y[n] + (5/4)y[n-1] - (1/8)y[n-2] =$
 $= x[n] - (1/4)x[n-1] - (1/8)x[n-2]$

v) $y[n] + (5/4)y[n-1] - (1/8)y[n-2] = x[n] - (1/2)x[n-1]$

c) considere al sistema causal de tiempo discreto descrito por la ecuación de diferencia:

$$y[n] + y[n-1] + (1/4)y[n-2] = x[n-1] - (1/2)x[n-2]$$

Cuál es la inversa de este sistema? Muestre que la inversa no es causal. Descubra ahora el sistema causal LIT del inverso con retardo descrito por la ec. de diferencias.

Problema 23

Sea $x[n]$ y $h[n]$ señales con las siguientes transformadas de Fourier:

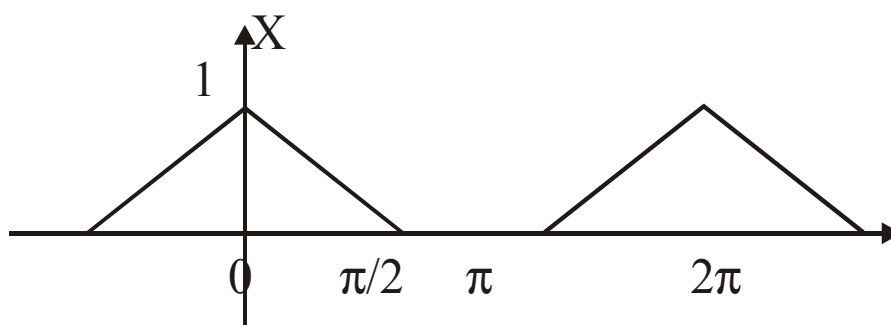
$$X(\Omega) = 3e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega} + 2e^{-j3\Omega}$$

$$H(\Omega) = -e^{j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + e^{j4\Omega}$$

Determine $y[n] = x[n] * h[n]$

Problema 24

a) sea una secuencia de tiempo discreto $x[n]$ con transformada de Fourier como la indicada en el dibujo:



Grafique la transformada de Fourier de $z[n] = x[n] p[n]$

para cada una de las $p[n]$ indicadas a continuación:

i) $p[n] = \cos \pi n$

ii) $p[n] = \cos(\pi n/2)$

iii) $p[n] = \sin(\pi n/2)$

iv) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-2k)$

b) suponga que la señal $z[n]$ para la parte a) es aplicada a un SLIT con respuesta al impulso

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n}$$

Determine la salida $y[n]$ para cada caso de $p[n]$ del punto a)

Problema 26

Considere al sistema causal LIT descrito por:

$$y[n] + (1/2)y[n-1] = x[n]$$

a) determine la respuesta en frecuencia del sistema $H(\Omega)$

b) Cuál es la respuesta de este sistema para las siguientes entradas ?

i) $x[n] = (1/2)^n u[n]$

ii) $x[n] = (-1/2)^n u[n]$

iii) $x[n] = \delta[n] + (1/2) \delta[n-1]$

c) Calcule las respuestas a las entradas con las siguientes transformadas:

i) $X(\Omega) = \frac{1 - (1/4)e^{-j\Omega}}{1 + (1/2)e^{-j\Omega}}$

ii) $X(\Omega) = \frac{1 + (1/2)e^{-j\Omega}}{1 - (1/4)e^{-j\Omega}}$

10

La Transformada z

10.1. Definición de transformada z

Uno de los problemas de la transformada de Fourier de tiempo discreto es satisfacer la condición de Dirichlet que exige la convergencia de la serie ampliada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) < \infty$

Esto no se cumple en señales muy simples por ejemplo $u(n)$, entonces debe obtenerse la transformada con el uso de límites.

Si se multiplica $x(n)$ por una señal, factor de convergencia r^{-n} con $|r| > 1$ y para $n \geq 0$ podemos garantizar que $\sum_{n=0}^{\infty} [r^{-n} x(n)]^2$ converge y aplicar así Fourier sobre una gran cantidad de señales y sistemas

En sentido amplio, matemático más que técnico se define la transformada bilateral z como

$$F\{r^{-n} x(n)\} \triangleq Z\{x(n)\}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} e^{-j\Omega n}$$

y si llamamos a $z = re^{j\Omega}$ entonces:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

se llama a esta transformada *zeta*.

Ejemplo

Sea $x(n) = \delta(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

Otro Caso

$$x(n) = e^{-an} u(n)$$

es una señal causal si $a > 0$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^a z)^{-n}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-a}}$$

Observamos que la serie geométrica converge si su razón

$$\left| (e^a z)^{-1} \right| < 1 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{|e^a z|} < 1$$

lo cual exige que $|z| > e^{-a}$ ó $r > e^{-a}$, ya que $|z| = r$, como r puede tomar cualquier valor se trata de una región externa al círculo de radio r :

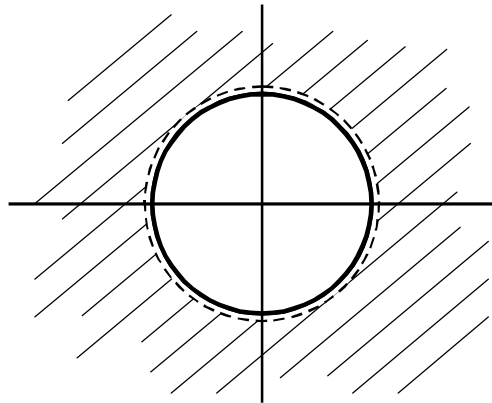


Figura 10-1

y se denomina la región de convergencia (RDC) de la transformada z .

Comparemos con este otro caso $x(n) = -e^{-an} u(-n-1)$ con $a > 0$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (e^{-a} z^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (e^a z)^n$$

Si $|e^a z| < 1$ entonces como $\sum_{n=1}^{\infty} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}$

$$X(z) = -\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} (e^a z)^n \right) = -\left(-1 + \frac{1}{1 - e^a z} \right) = -\left(\frac{\cancel{1} + e^a z \cancel{1}}{1 - e^a z} \right) = \frac{e^a z}{e^a z - 1} = \frac{z}{z - e^{-a}}$$

¡La misma que le caso anterior! ¿Hay ambigüedad en z ?

No, lo que sucede es que es otra la RDC pues ahora $|z| < e^{-a}$ o $r < e^{-a}$, interior al círculo de radio r .

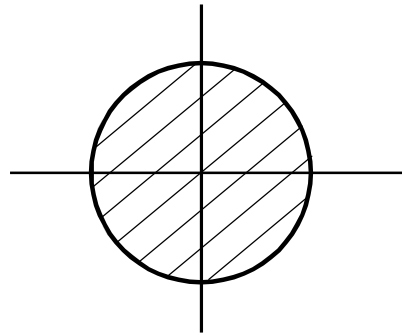


Figura 10-2

y el dominio define otra función de z . Luego las RDC definen distintas transformadas. Así

$$x(n) = a^n u(n) \longrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{con} \quad r > a$$

$$y(n) = -a u(-n-1) \longrightarrow Y(z) = \frac{z}{z-a} \quad \text{con} \quad r < a$$

10.1.1. Región de convergencia de la Transformada Z

En general $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ podemos expresarla en forma causal más una forma anticausal, así

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_-(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_+(n) z^{-n}$$

Para que exista $X(z)$ deben ser estas serie convergentes ambas y lo son si

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |x_-(n) r^{-n}| < \infty \quad \text{y si} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |x_+(n) r^{-n}| < \infty$$

Si

$$|x_-(n)| < M R_-^n \quad \text{y} \quad |x_+(n)| < N R_+^n$$

con M, N, R_+, R_- números reales resulta

$$X(z) \leq M \sum_{m=1}^{\infty} R_-^{-m} r^m + N \sum_{n=0}^{\infty} R_+^n r^{-n}$$

o sea $X(z)$ converge si

$$\left| \frac{r}{R_-} \right| < 1 \quad \text{y si} \quad \left| \frac{R_+}{r} \right| < 1$$

para que convergentes series, luego $R_+ < r < R_-$ o sea la región de convergencia en general es un anillo

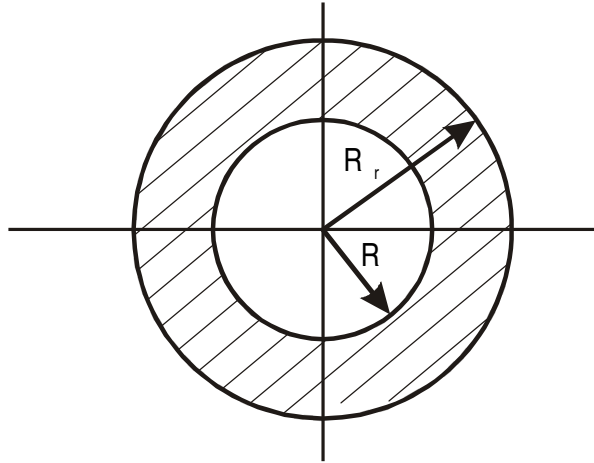


Figura 10-3

Si la RDC contiene a la circunferencia de radio unitario o sea $r = 1$ entonces se puede obtener la transformada de Fourier de tiempo discreto como:

$$X(z) \Big|_{\substack{z=e^{j\Omega} \\ r=1}} = X(\Omega) \quad \text{ya que } z = r e^{j\Omega} \text{ y se hace } r = 1$$

10.2. Propiedades de la Transformada Z

10.2.1. Lineal

Se trata de una transformada de Fourier y posee las mismas propiedades.

10.2.2. Desplazamiento temporal

Esta propiedad hay que analizarla en el marco de transformada bilateral o unilateral ya que cambian. Recordar que en ingeniería las señales son en gran cantidad causales o sea $x(n) = 0$ si $n < 0$ lo que conduce a la transformada unilateral derecha.

Caso bilateral

Si $x(n) \longrightarrow X(z)$

$$x(n + n_0) \longrightarrow \tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + n_0) z^{-n}$$

Si multiplicamos por $z^{-n_0} \cdot z^{n_0} = 1$ la expresión resulta

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n + n_0) z^{-(n+n_0)} \cdot z^{n_0}$$

cambiando la variable:

$$\tilde{X}(z) = z^{n_0} X(z)$$

Esto es válido para n_0 positivo o negativo siempre que $n_0 \in \mathbb{Z}$

Caso Unilateral

Esto es para señales causales donde

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

es decir se establece que $x(n)=0$ si $n < 0$ por ello la propiedad depende si n_0 es positivo o negativo

Caso I $n_0 > 0$

$$x(n+n_0) \longrightarrow \tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+n_0) z^{-n}$$

Cambiando la variable si $m = n + n_0$; $n = m - n_0$ si $n=0$ hace que $m=n_0$,

$$\tilde{X}(z) = \sum_{m=n_0}^{\infty} x(m) z^{-(m-n_0)} = z^{n_0} \sum_{m=n_0}^{\infty} x(m) z^{-m} = z^{n_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m) z^{-m} \right]$$

Luego

$$\tilde{X}(z) = z^{n_0} X(z) - z^{n_0} \sum_{m=0}^{n_0-1} x(m) z^{-m}$$

Así si

$$x(n) \longrightarrow X(z)$$

$$x(n+1) \longrightarrow z X(z) - z x(0)$$

$$x(n+2) \longrightarrow z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$$

y así sucesivamente.

Nota: Observemos el parecido con la propiedad de derivada en *Laplace* pero no igual

$$\left(\frac{dx}{dt} \rightarrow s X(s) - x(0) \right).$$

Caso II $n_0 < 0$

$$x(n-n_0) \longrightarrow \tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-n_0) z^{-n}$$

si $m = n - n_0$, entonces $n = m + n_0$, y además cuando $n=0$ hace $m=-n_0$, reemplazando:

$$\text{Luego } \tilde{X}(z) = \sum_{m=-n_0}^{\infty} x(m) z^{-(m+n_0)}$$

$$\tilde{X}(z) = z^{-n_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} x(m) z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m} \right] \text{ ó:}$$

$$\tilde{X}(z) = z^{-n_0} X(z) + z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m}$$

Si es causal es decir $x(m) = 0$, si $m < 0$ la segunda suma es nula y resulta

$$\tilde{X}(z) = z^{-n_0} X(z)$$

Así si

$$x(n) \longrightarrow X(z)$$

$$x(n-1) \longrightarrow z^{-1} X(z)$$

$$x(n-2) \longrightarrow z^{-2} X(z)$$

etc...

Nota: Si $x_{(n)}$ es causal hay que considerar al segun sumando de $\tilde{X}(z)$

10.2.3. Resumen: Regiones de convergencia de la Transformada z

En general la *RDC* es un anillo centrado en el origen del plano z .

La *RDC* no contiene a ningún polo de $X(z)$.

Si $x(n)$ es de duración finita, la *RDC* es todo el plano z .

Si $x(n)$ es una secuencia hacia la derecha, o sea para $n_0 > 0$ $x(n) = 0 \quad \forall n < n_0$. Y si en un punto de la circunferencia de radio r_0 esta en la *RDC* entonces todas las z para las cuales $|z| > r_0$ está en la *RDC*. Externa al polo más alejado del origen.

Si $x(n)$ es una secuencia hacia la izquierda y si la circunferencia de radio r_0 está en la *RDC* entonces todos los valores z para el cual $0 < |z| < r_0$ estará en la *RDC* (interna al polo más próximo al origen sin considerar el origen).

Si $x(n)$ es bilateral, entonces si r_0 es el radio de una circunferencia contenida en la *RDC* entonces la *RDC* es una anillo que incluye a la circunferencia $|z| = r_0$

10.3. Transformada z inversa

Para obtener la expresión inversa, podemos partir de la definición de transformada z y aplicar la inversión de Fourier.

$$\text{Si } X(z) \triangleq F\{r^{-n} x(n)\}$$

$$r^{-n} x(n) = F^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{X}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$z = r e^{j\Omega} \quad \tilde{X}(\Omega) \equiv X(z)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} \tilde{X}(\Omega) (r e^{j\Omega}) d\Omega$$

Si

$$\Omega = 0 \quad z = r$$

Si

$$\Omega = 2\pi \quad z = r$$

De forma que si Ω recorre de 0 a 2π , entonces z recorre la circunferencia de radio r , esta integral es una integral de línea cerrada.

Además si $z = r e^{j\Omega}$

$$dz = j r e^{j\Omega} d\Omega = j z d\Omega$$

podemos componer la integral como

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_r X(z) z^{n-1} dz$$

El hecho que sea una integral cerrada en sentido positivo, sobre una circunferencia arbitraria de radio r contenida en la RDC permite resolver esta integral por el método de los residuos que suele denominarse de la “*integral de inversión*”.

Comencemos con este método

10.3.1. Método de la integral de inversión

Utilizando la teoría de la variable compleja, una demostración más rigurosa recomendando la lectura de *Análisis Matemático III* partiendo de la Serie de Laurent y aplicando el Teorema de Cauchy – Goursat, y el Teorema de los Residuos.

Si

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

entonces

$$x(n) = \sum_{\substack{\text{para polos de} \\ X(z) \cdot z^{n-1}}} \text{residuos de } X(z) \cdot z^{n-1}$$

donde

$$(\text{residuo}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m X(z) z^{n-1} \right]_{z=a}$$

Si fuese de multiplicidad $m = 1$ o sea simple: $(\text{residuo}) = (z-a) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=a}$

Este método se aplica para el cálculo de la anti-transformada unilateral derecha y se obtiene $x(n) \cdot u(n)$ para la unilateral izquierda, reemplazar $x(n) u(n)$ por $-x(n) u(-n-1)$

Por Ejemplo

$$\text{Sea } X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \quad r > 2$$

$$r_1 = (z-1) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=1} = \frac{z^n}{z-2} \Big|_{z=1} = -1$$

$$r_2 = (z-2) X(z) z^{n-1} \Big|_{z=2} = \frac{z^n}{z-1} \Big|_{z=2} = 2^n$$

Luego

$$x(n) = [-1 + 2^n] u(n)$$

Otros métodos son:

10.3.2. Transformada z inversa de secuencia finitas

Esto es usado cuando $X(z)$ corresponde a $x(n)$ de longitud finita y entonces posee forma polinomial que revela la secuencia $x(n)$

Por Ejemplo

Sea

$$X(z) = 3z^{-1} + 5z^{-3} + 2z^{-4}$$

entonces

$$x(n) = 3\delta(n-1) + 5\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$$

o en forma extensiva para $n \geq 0$

$$x(n) = \{0, 3, 0, 5, 2\}$$

10.3.3. Por medio de la división larga

Se presenta a $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ y se realiza la división larga

Si es unilateral derecha, se colocan $N(z)$ y $D(z)$ en orden ascendente de potencias de z y se obtiene una serie de potencias decrecientes de z .

Si es unilateral izquierda se colocan $N(z)$ y $D(z)$ en orden descendente de potencias de z . Se obtiene una serie de potencias en orden ascendente de potencias de z .

Por Ejemplo

Sea

$$X(z) = \frac{z-4}{1-z+z^2} \quad \text{si } x(n) = 0 \quad n < 0$$

o sea la unilateral derecha.

$$\begin{array}{r} z-4 \quad | \quad z^2 - z + 1 \\ z^{-1} - 3z^{-2} - 4z^{-3} \dots \end{array}$$

$$X(z) = z^{-1} - 3z^{-2} - 4z^{-3} \dots$$

$$X(n) = \delta(n-1) - 3\delta(n-2) - 4\delta(n-3) \dots$$

$$x(n) = \{0, 1, -3, -4, \dots\}$$

Si buscamos la unilateral izquierda es

$$\begin{array}{r} -4+z \quad | \quad 1-z+z^2 \\ -4-3z+z^2 \dots \end{array}$$

$$X(z) = -4 - 3z + z^2 \dots \quad x(n) = -4\delta(n) - 3\delta(n+1) + \delta(n+2)$$

$$X(n) = \{\dots, 1, -3, -4\}$$

Estos métodos no útiles para obtener normalmente y en forma rápida a $x(n)$, se pueden por supuesto realizar con computación, pero no se usan para hacerlo así, más bien se prefiere el de la integral de inversión.

10.3.4. Método de expansión en fracciones conocidas o simples

Sabiendo por la tabla que

$$\frac{z}{z-a} \longrightarrow a^n u(n)$$

$$\frac{z}{(z-a)^{N+1}}, N > 1 \longrightarrow \frac{n!}{(n-N)! N!} a^{n-N} \cdot u(n)$$

Si es anticausal (izquierda) la $x(n)$ se obtiene haciendo $-x(n) \cdot u(-n-1)$ a las causales.

Se puede expandir en fracciones conocidas, tomando la precaución de hacerlo sobre $\frac{X(z)}{z}$ y una vez desarrollada en la suma de fracciones simples, multiplicamos con z ambos miembros a fin de poder aplicar la tabla.

Si

$$X(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z - \frac{1}{4}} + \frac{k_2}{z - \frac{1}{2}}$$

Estas constantes de la expansión también llamadas residuos.

Luego

$$X(z) = k_0 + k_1 \frac{z}{z - \frac{1}{4}} + k_2 \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$x(n) = k_0 \delta(n) + k_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + k_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

si es unilateral derecha, RDC : $r > \frac{1}{2}$

$$x(n) = -k_0 \delta(n) - k_1 \left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1) - k_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

unilateral izquierda, RDC : $r < \frac{1}{4}$

10.3.5. La RDC en la Inversión

En general en las fórmulas de inversión se parte de las secuencias laterales derecha y la RDC es acorde a esta presunción. Sino se especifica nada se trata de la señal lateral derecha o sea causal. Si se especifica la RDC habrá que aplicar la ley de $x(n) u(n)$ por $-x(n) u(-n-1)$ o el acomodo en las divisiones largas.

Problemas

Problema 1

Un S L I T tiene una respuesta al impulso $h[n]$ para lo cual la transformada z es:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}} \quad |z| > 1/2$$

- a) Mapee los polos y ceros de $H(z)$.
- b) Usando el hecho que señales de la forma z^n son autofunciones del S L I T, determine la salida del sistema para todo n si la entrada $x[n]$ es:

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 3 \cdot (2)^n$$

Problema 2

Considere la secuencia $x[n] = 2^n u[n]$.

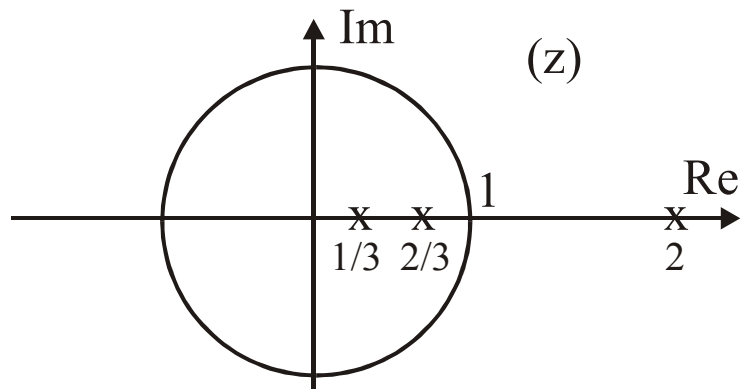
- a) Si $x[n]$ es absolutamente sumable, la T de F de $x[n]$ converge?.
- b) Para qué valores de r la T de F de la secuencia $r^n \cdot x[n]$ converge?.
- c) Determine la transformada z , de $x[n]$ incluyendo la RDC.
- d) $X(z)$ para $z = 3 e^{j\Omega}$ puede obtenerse de como la T de F de la secuencia $x_1[n]$, esto es:

$$\begin{aligned} 2^n u[n] &\rightarrow X(z) \\ x_1[n] &\rightarrow X(3 e^{j\Omega}) = X_1(e^{j\Omega}) \end{aligned}$$

Determine $x_1[n]$.

Problema 3

Muestre sobre la siguiente figura del mapeo de polos y ceros de $X(z)$.



como puede ser la RDC para cada estamento:

- a) $x[n]$ es definida hacia la derecha.
- b) T de F de $x[n]$ converge.
- c) T de F de $x[n]$ no converge.
- d) $x[n]$ es definida hacia la izquierda.

Problema 4

a) Determine la transformada z de las siguientes dos señales:

1) $x_1[n] = (1/2)^n u[n]$

2) $x_2[n] = -(1/2)^n u[-n-1]$

b) Grafique el mapeo de polos y ceros y la RDC de cada una.

c) Repita a) y b) para las siguientes señales:

1) $x_3[n] = 2 u[n]$

2) $x_4[n] = -(2)^n u[-n-1]$

d) Para cada una de las cuatro señales en cuales la T de F converge?.

Problema 5

Determine la transformada z para cada una de las siguientes funciones. Dibuje el mapeo de polos y ceros, indicando la región de convergencia. Indique si la Transformada de Fourier Discreta existe o no.

- a) $\delta[n]$
- b) $\delta[n-1]$
- c) $\delta[n+1]$
- d) $(1/2)^n u[n]$
- e) $-(1/2)^n u[-n]$

- f) $(1/2)^n u[-n]$
 g) $\{(1/2)^n + (1/4)^n\} u[n]$
 h) $(1/2)^{n-1} u[n-1]$

Problema 6

Determine la transformada z para cada una de las siguientes funciones. Exprese todas las sumas en forma cerrada.

Dibuje el mapeo de polos y ceros, indicando la región de convergencia. Indique si la Transformada de Fourier Discreta existe o no.

- a) $(1/2)^n \{u[n] - u[n-10]\}$
 b) $(1/2)^{n/}$
 c) $7 (1/3)^n \{ \cos[2\pi n/6 + \pi/4] \} u[n]$
 $0 \quad \text{si } n < 0$
 d) $x[n] = 1 \quad \text{si } 0 \leq n \leq 9$
 $0 \quad \text{si } 9 < n$

Problema 7

Determine la transformada z incluyendo la RDC de las siguientes secuencias.

También mapee los polos y ceros indicando la RDC en su gráfico.

- a) $(1/3)^n u[n]$
 b) $\delta[n + 1]$

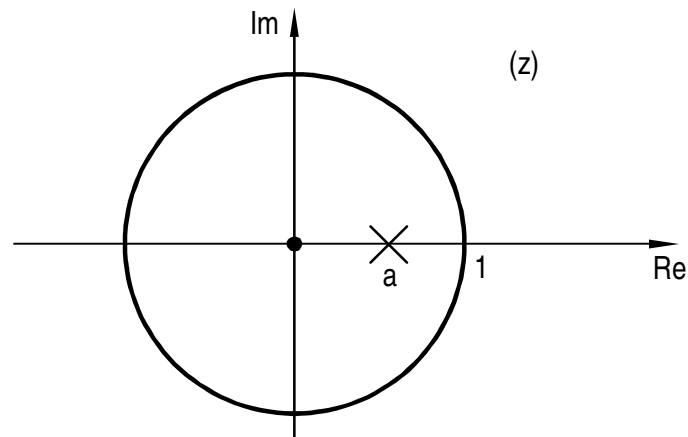
Problema 8

Para cada una de las siguientes transformadas Z determine la transformada Z inversa.

- a) $X(z) = \frac{1}{1 + 1/2 \cdot z^{-1}} \quad |z| > 1/2$
 b) $X(z) = \frac{1 - 1/2 \cdot z^{-1}}{1 - 1/4 \cdot z^{-1}} \quad |z| > 1/2$
 c) $X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} \quad |z| > |1/a|$

Problema 9

Considere el mapeo de polos - ceros de $H(z)$ donde $H(a/2) = 1$.



- Grafique $|H(e^{j\Omega})|$ para un cero en el origen ($z=0$) y para dos ceros en el origen (multiplicidad dos). ¿Afecta el $|H(\Omega)|$?
- Como afecta el número de ceros a $\angle H(e^{j\Omega})$? Si es así explique
- Descubra la región del plano donde $|H(z)| = 1$.

Problema 10

Determine para cada una de las siguientes funciones utilizando el método indicado la secuencia correspondiente; en dominio de n :

- a) Por expansión en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - (5/2)z^{-1} + z^{-2}}$$

$x[n]$ es de valor absoluto sumable

- b) Por expansión en fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{3}{z - 1/4 - (1/8)z^{-1}}$$

$x[n]$ es de valor absoluto sumable

Problema 11

Para cada una de las siguientes transformadas en z determine la transformada inversa usando los métodos de expansión en fracciones parciales y por suma de los residuos.

$$a) \quad X(z) = \frac{1}{1 + (1/2)z^{-1}} \quad |z| > 2$$

$$b) \quad \text{Idem al a) con: } |z| < 1/2$$

$$c) \quad X(z) = \frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 + (3/4)z^{-1} + (1/3)z^{-2}} \quad |z| > 1/2$$

$$d) \quad X(z) = \frac{1 - (1/2)z^{-1}}{1 - (1/4)z^{-1}} \quad |z| > 1/2$$

Problema 12

Un SLIT causal esta descripto por la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

- Obtenga la función de transferencia del sistema $H(z) = Y(z)/X(z)$. Grafique el mapeo de polos y ceros de $H(z)$ con indicación de la región de convergencia.
- Encuentre la respuesta al escalón unitario de este sistema.
- Si el sistema es inestable, entonces encuentre la respuesta estable (no causal) escalón unitario que satisfaga la ecuación de diferencias.

Problema 13

Considere al SLIT con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n]$ dadas por:

$$h[n] = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{si es otro } n \end{cases}$$

- Determine la salida $y[n]$ evaluando la convolución discreta de $x[n]$ y $h[n]$.
- Determine la salida $y[n]$ por cálculo de la transformada inversa de z del producto de las transformadas de entrada y respuesta al impulso.

Para cada una de las siguientes ecuaciones de diferencias, con sus entradas y condiciones iniciales asociadas, determine la respuesta $y[n]$ usando la transformada **z unilateral**.

$$a) \quad y[n] + 3y[n-1] = x[n]; \quad x[n] = (1/2)u[n] \\ y[-1] = 1$$

$$b) \quad y[n] - (1/2)y[n-1] = x[n] - (1/2)x[n-1]$$

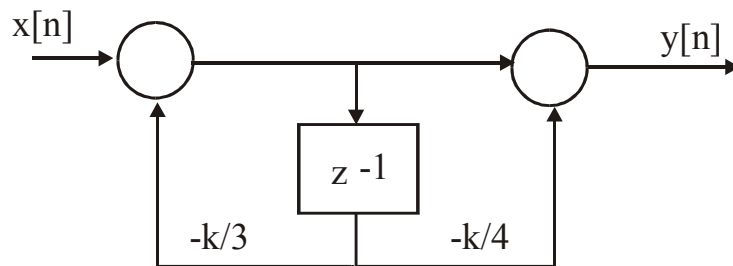
$$x[n] = u[n] ; y[-1] = 0$$

$$c) y[n] - (1/2) y[n-1] = x[n] - (1/2) x[n-1]$$

$$x[n] = u[n] ; y[-1] = 1$$

Problema 14

Considere al filtro cuya estructura se muestra:



- Descubra $H(z)$ para este filtro causal. Grafique el mapeo de polos y ceros con indicación de la región de convergencia.
- Para que valores de k el sistema es estable ?
- Determine $y[n]$ si $k = 1$ y $x[n] = (2/3)^n$ para todo n .

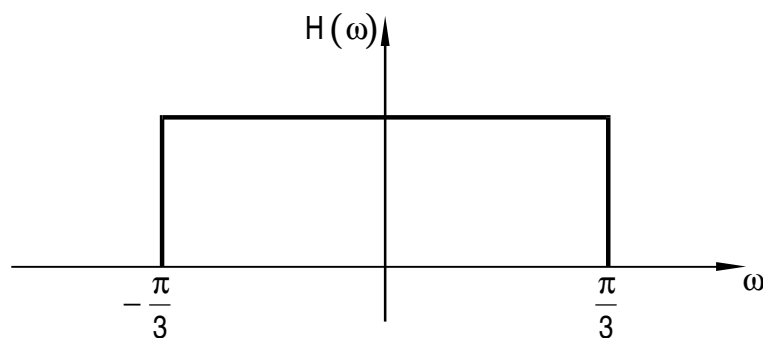
11

Aplicaciones

11.1. Filtros

Problema 1

Considere el filtro pasabajos con respuesta en frecuencia real $H(\omega)$ como la mostrada en la figura



a)Cuál de las siguientes propiedades posee la respuesta al impulso $h(t)$?.

- 1) Real.
- 2) Compleja.
- 3) Par.
- 4) Impar.
- 5) Causal.
- 6) No causal.

b) Considere la entrada al filtro:

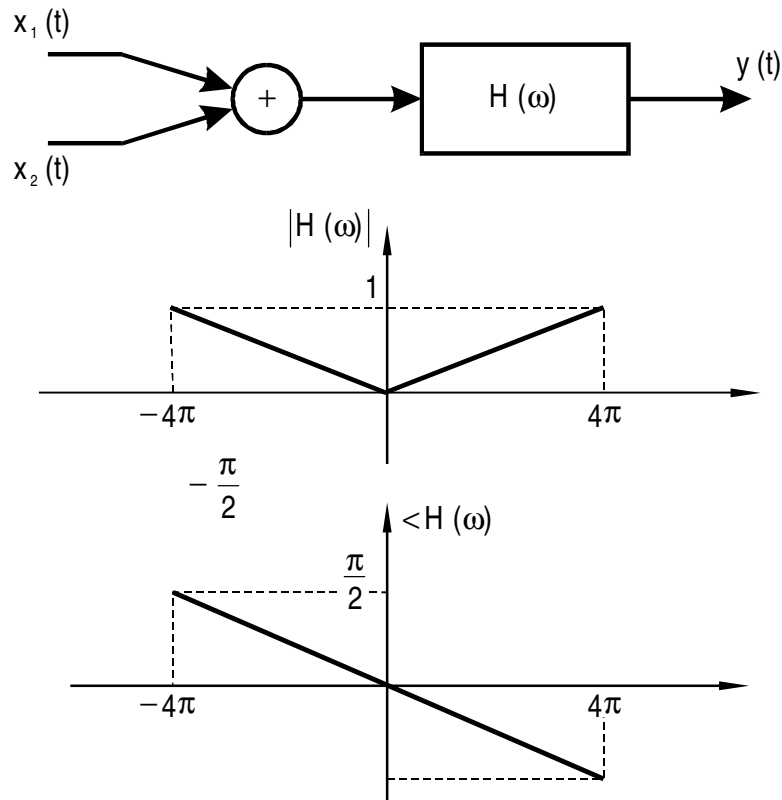
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 9n)$$

Grafique y escriba la Transformada de Fourier de la salida $y(t)$.

c) Determine la salida del filtro para la entrada considerada en la parte b).

Problema 2

Considere el sistema mostrado en la figura donde la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ tiene magnitud y fase mostrada.



Si $x_1(t) = \sin[\omega_1 t + (\pi/4)]$ y $x_2(t) = 2 \cos[\omega_2 t - (\pi/3)]$

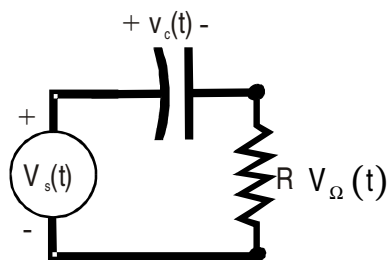
Donde

$$\omega_1 = \omega \text{ y } \omega_2 = 2\pi$$

escriba la expresión para $y(t)$.

Problema 3

Considere el circuito de primer orden RC mostrado:



a) Determine $H_I(\omega)$, como función de transferencia desde v_s a v_c , como la mostrada en la figura. Grafique la magnitud y fase de $H_I(\omega)$.

b) Calcule $H_2(\omega)$, la función de transferencia desde $v_s(t)$ a $v_r(t)$. Grafique la magnitud y fase de $H_2(\omega)$.

c) ¿Cuál es la frecuencia de corte para $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$?

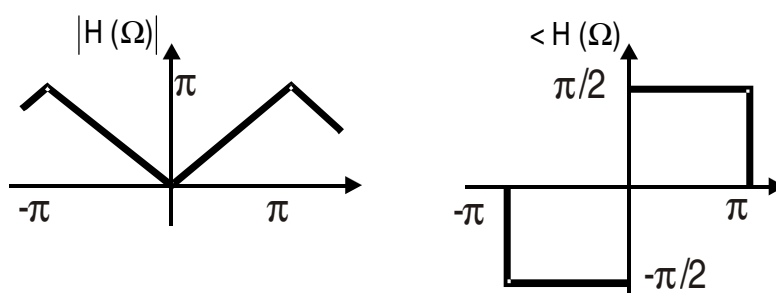
Para este problema la frecuencia de corte es definida como la frecuencia a la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del valor de máxima.

Problema 4

En la figura se muestra la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ de un diferenciador discreto.

Determine la señal $y[n]$ como la función de Ω si la entrada $x[n]$ es:

$$x[n] = \cos(\Omega_0 n + \theta)$$



Problema 5

Considere los siguientes sistemas L.I.T.

Sistema 1

$$y_{1[n]} = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

Sistema 2

$$y_{2[n]} = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}$$

a) Por medio del cálculo de las respectivas funciones determine lo siguiente:

- 1) El sistema 1 es filtro pasabajo, pasabanda o pasaalto?.
- 2) El sistema 2 es filtro pasabajo, pasabanda o pasaalto?.

Escriba su razonamiento.

b) Calcule la respuesta en frecuencia $H_1(\Omega)$ y $H_2(\Omega)$ para el sistema 1 y 2 y grafique las magnitudes para el rango de Ω desde -2π a 2π .

Problema 6

a) Sea:

$$y_I[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x[n-k]$$

Determine la respuesta al impulso $h_1[n]$

b) Si $H_1(\Omega)$ está dado por:

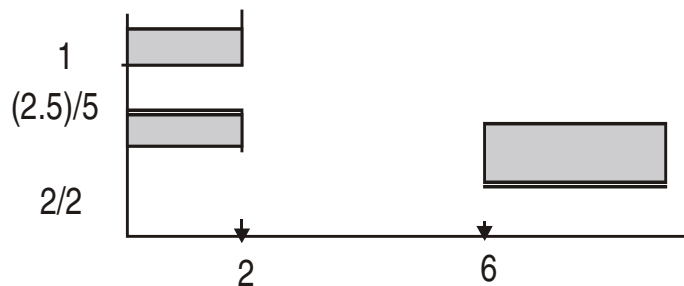
$$H_1(\Omega) = \frac{1}{2N+1} \left[\frac{\sin\left(\Omega \frac{2N+1}{2}\right)}{\sin \frac{\Omega}{2}} \right]$$

Determine $H_2(\Omega)$.

c) Grafique $|H_1(\Omega)|$ en una escala lineal, indicando donde $H_1(\Omega)$ o es igual a 1 o a 0.

Problema 7

Vamos a designar un filtro no ideal con las especificaciones indicadas en la figura. Nosotros requerimos que $H(0) = 1$ y restringimos el diseño del filtro con función de transferencia de la forma:



$$H(\omega) = \frac{k}{a + j\omega}$$

a) Descubra k tal que $H(0) = 1$.

b) Descubra el rango de valores de " a " tal que el filtro resultante cumpla con las especificaciones de la figura.

11.2. Muestreo

Problema 1

La secuencia $x[n] = (-1)^n$ es obtenida por muestreo de una señal senoidal continua $x(t) = \cos \omega_0 t$ con 1ms de intervalo, esto es:

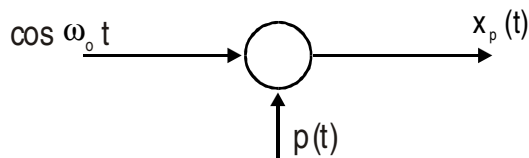
$$\cos \omega_0 T_n = (-1) \quad T = 10^{-3} s$$

Determine tres valores posibles distintos de ω_0 .

Problema 2

Considere $X_p(\omega)$ para $-9\pi < \omega < 9\pi$ para los siguientes valores de ω_0 :

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $\omega_0 = \pi$ | 3) $\omega_0 = 3\pi$ |
| 2) $\omega_0 = 2\pi$ | 4) $\omega_0 = 5\pi$ |

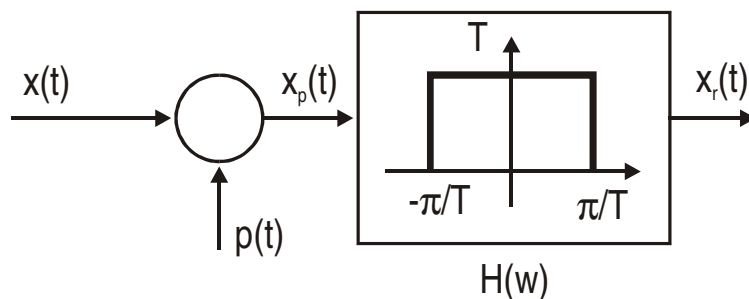


$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad T = 1/3$$

b) ¿Para cuáles de los valores de ω_0 anteriores la función $x_p(t)$ no altera?

Problema 3

En el sistema de la figura, $x(t)$ es muestreada con un tren de impulsos periódicos y reconstruida la señal $x_p(t)$ es obtenida desde las muestras a través de un filtro pasabajos.



El muestreo es con periodo $T = 1ms$ y $x(t)$ es una señal senoidal de la forma :

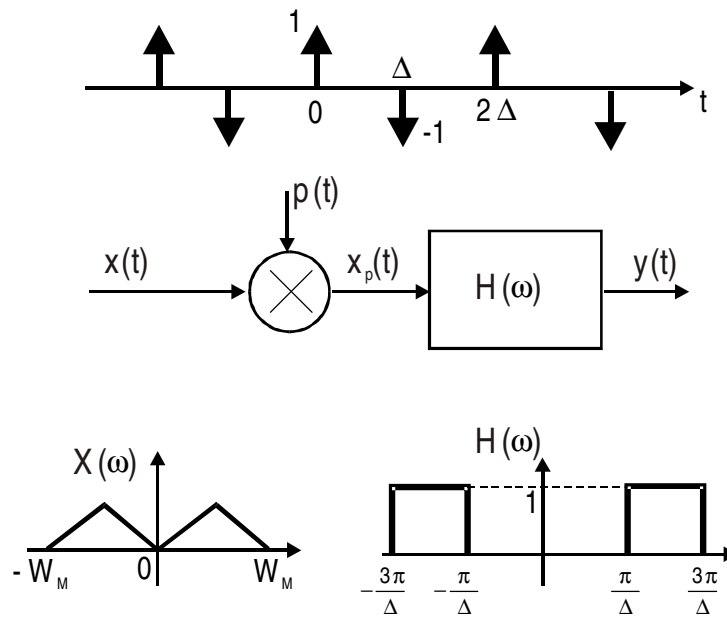
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Para cada uno de las siguientes casos de f_0 y θ determine $x_p(t)$.

- | | |
|---------------------------|------------------|
| a) $f_0 = 250 \text{ Hz}$ | $\theta = \pi/4$ |
| b) $f_0 = 750 \text{ Hz}$ | $\theta = \pi/2$ |
| c) $f_0 = 500 \text{ Hz}$ | $\theta = \pi/2$ |

Problema 4

La figura siguiente muestra un sistema de muestreo de señal con un tren de impulsos de signo alternado. La transformada de Fourier de la entrada es indicada en la figura.

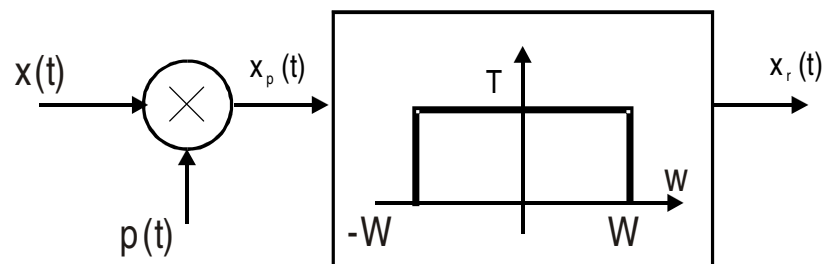


$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- Para $\Delta < \pi/2 W_M$ grafique la transformada de Fourier de $x_p(t)$ y $y(t)$.
- Para $\Delta < \pi/2 W_M$ determine el sistema que recobre $x(t)$ desde $x_p(t)$.
- Para $\Delta < \pi/2 W_M$ determine el sistema que pueda recobrar $x(t)$ desde $y(t)$.
- ¿Cuál es el valor máximo de Δ en relación a W_M para el cual $x(t)$ puede recobrase desde $x_p(t)$ ó $y(t)$.

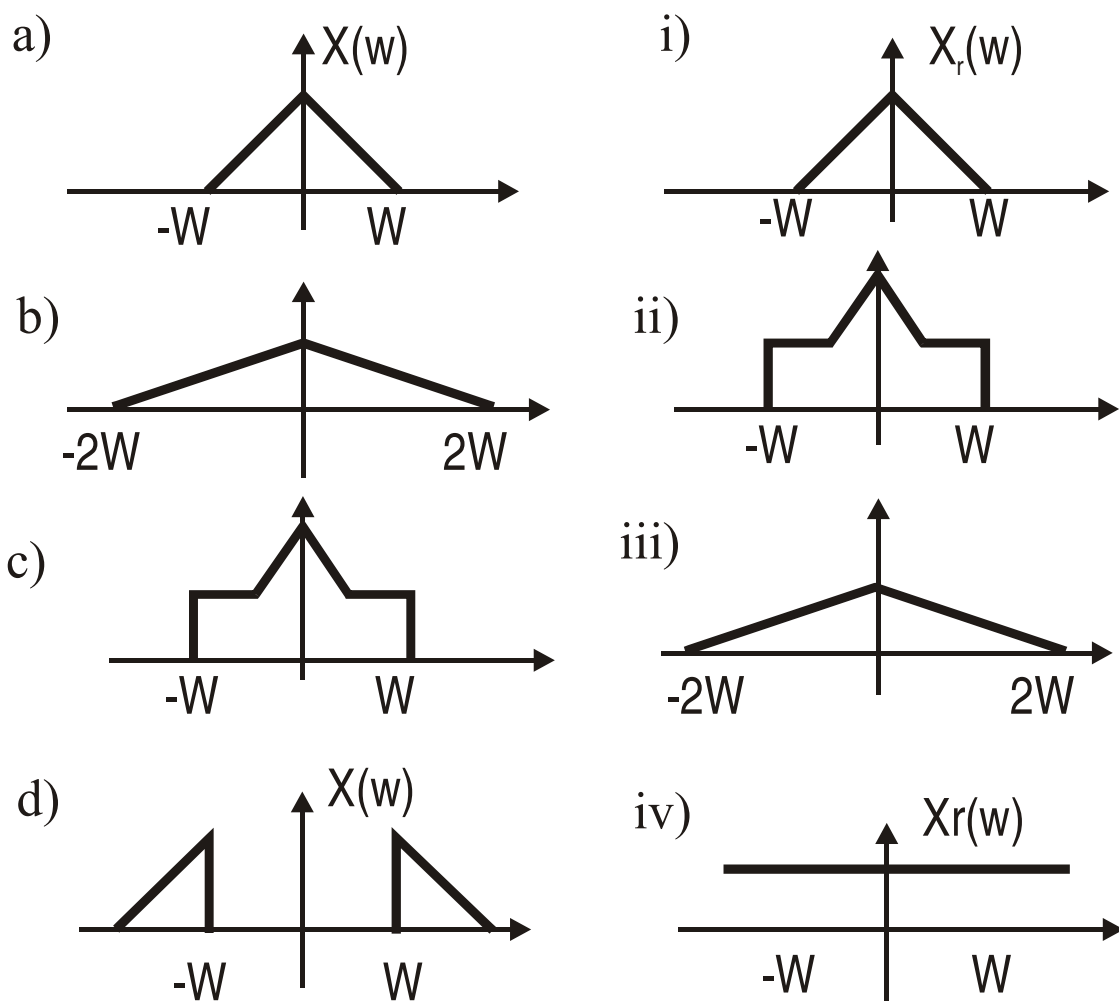
Problema 5

Considere el sistema de la figura:



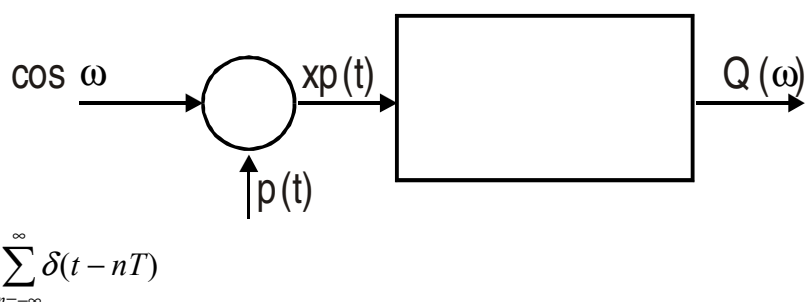
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) ; \quad \omega = \frac{\pi}{2T}$$

Las siguientes figuras contienen las respectivas transformadas de Fourier de $x(t)$ y $x_r(t)$. Para cada espectro de entrada $X(\omega)$ en la figura, identifique el correcto espectro de salida $X_r(\omega)$.

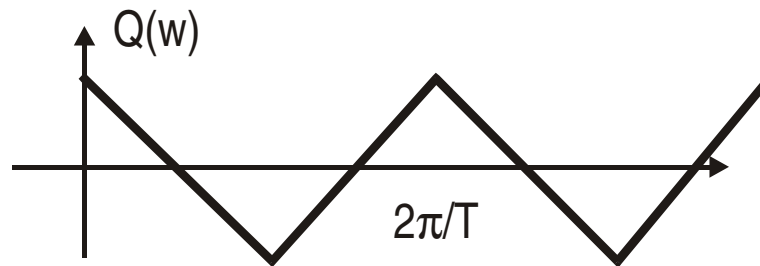
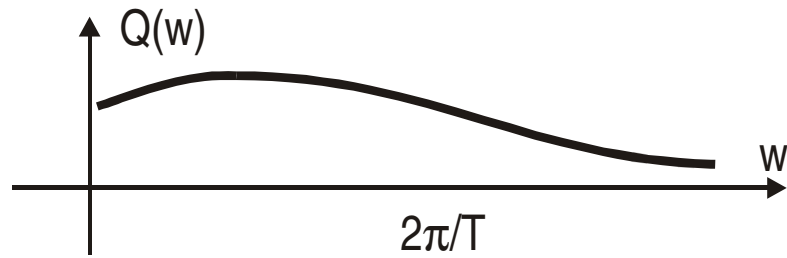


Problema 6

El muestreo de una señal senoidal mediante un tren de impulsos ideal se muestra en la figura.



El resultado del proceso es el evaluado como $Q(\omega)$. Determine con la lectura de los gráficos siguientes cuál es la posible candidata para Q como función de ω .

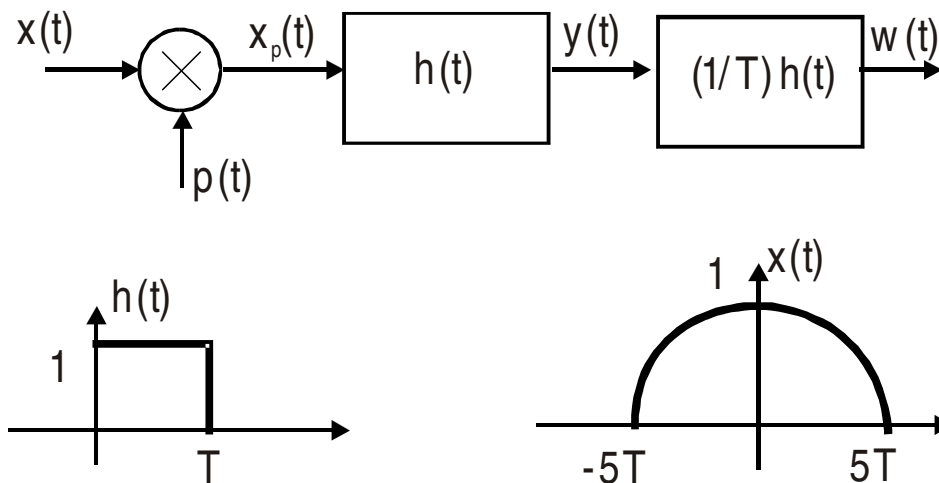


11.3. Interpolación

Problema 1

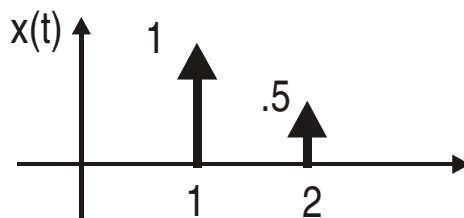
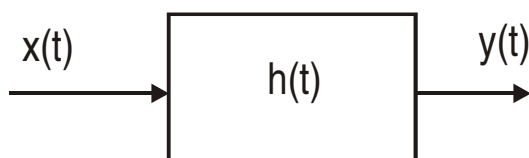
Suponga un sistema como el de la figura donde $x(t)$ es muestreada con un tren de impulsos.

Grafique $x_p(t)$, $y(t)$ y $w(t)$.

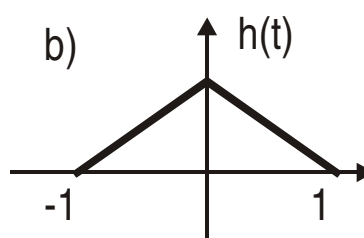
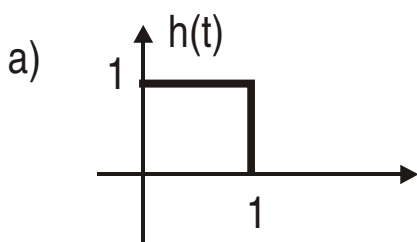


Problema 2

Considere la señal $x(t) = \delta(t-1) + (1/2) \delta(t-2)$, que se interpola usando el sistema de la figura:



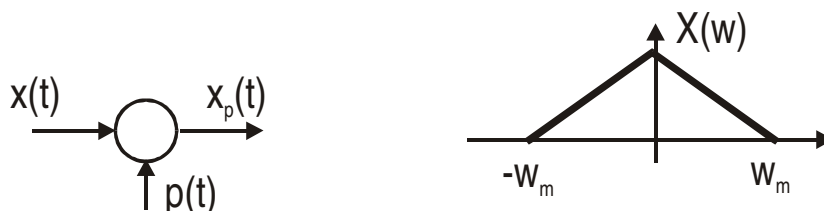
Para los siguientes casos de $h(t)$ grafique $y(t)$:



c) $h_3(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

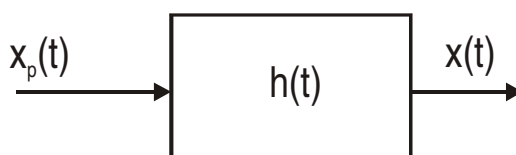
Problema 3

Considere el sistema de la figura, con $P(t)$ un tren de impulsos con periodo T .



a) Grafique $P(\omega)$ y $X_p(\omega)$ asuma que no hay aliasing presente. ¿Cuál es la relación de T frente a las componentes de alta frecuencia de $X(\omega)$ que garantice que no hay aliasing.

b) Considere recuperar $x(t)$ desde $x_p(t)$, asuma que no hay aliasing. Por ejemplo, que $T = 2\pi/4W_M$. Ahora queremos recuperar $x(t)$ por interpolación $x_p(t)$ como se muestra en la figura. ¿Es la especificación de $h(t)$ única, tal que $x(t)$ pueda exactamente recobrase desde $x_p(t)$? ¿Porqué?..



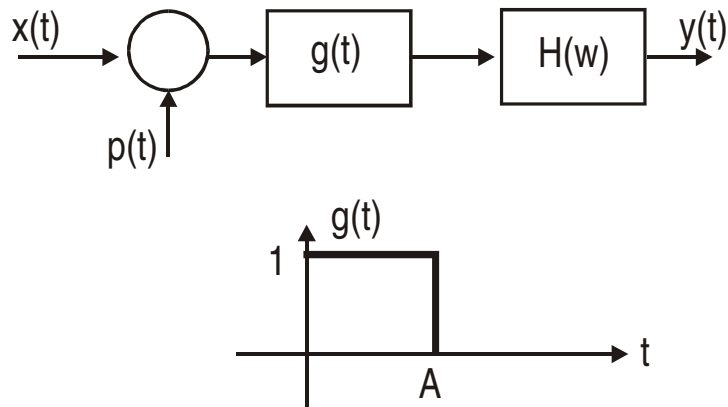
c) Use la integral de convolución, muestre que si es muestreo original de periodo T y si el filtro es un filtro ideal pasabajos con frecuencia de corte ω_c , entonces se recobra la señal $x_r(t)$ como:

$$x_r(t) = \frac{T_{\omega_c}}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{senc} \frac{\omega_c(t-nT)}{\pi}$$

Problema 4

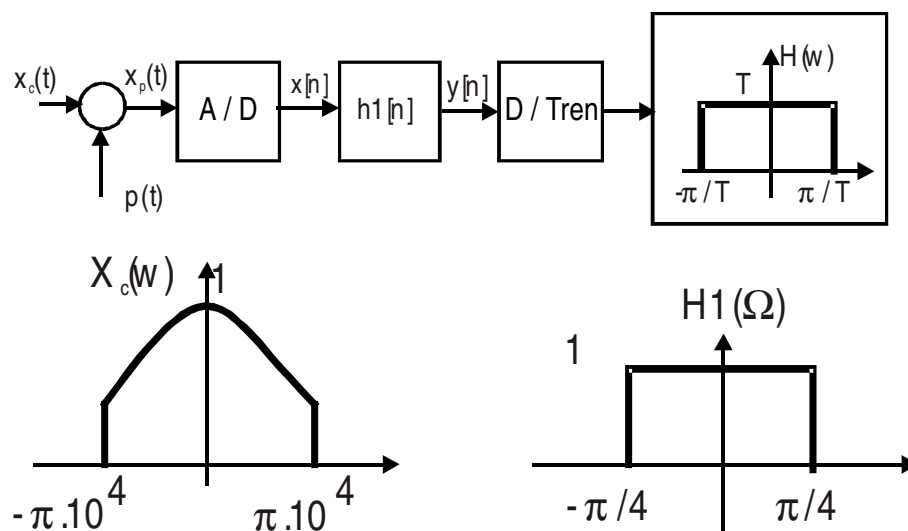
En el sistema de la figura, $p(t)$ es un tren de impulsos con periodo Δ y la respuesta al impulso $g(t)$ es como la indicada. Determine $H(\omega)$ tal que $y(t) = x(t)$.

Asumiendo que no sucede aliasing.



Problema 5

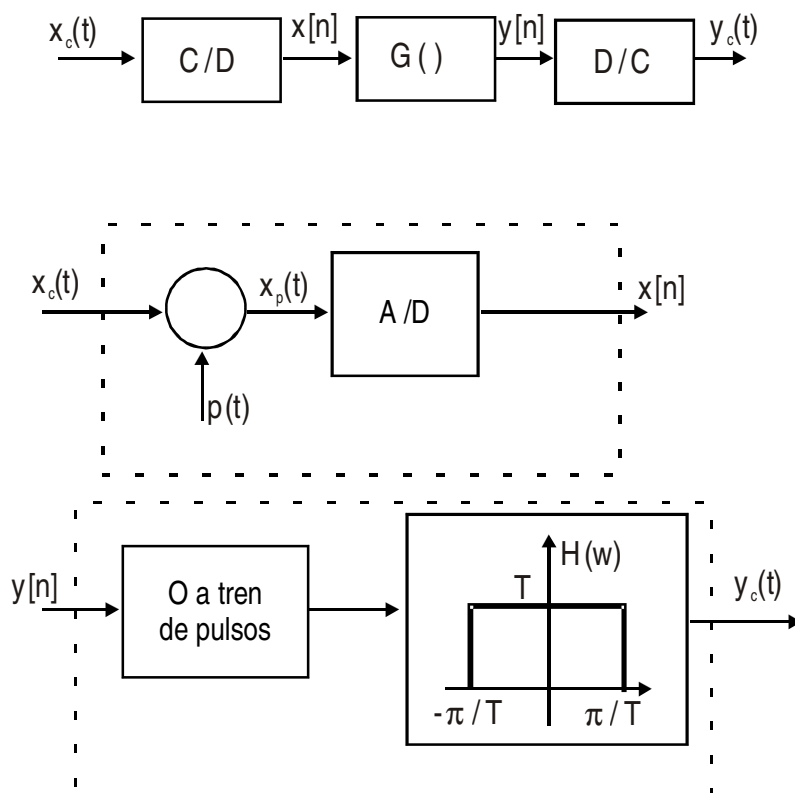
La siguiente figura muestra un sistema de filtrado de una señal continua usando filtro discreto. Si $X_c(\omega)$ y $H_1(\Omega)$ son las mostradas, con $1/T = 20 \text{ KHZ}$, grafique $X_p(\omega)$; $x(n)$; $y(n)$ y $Y_c(\omega)$.



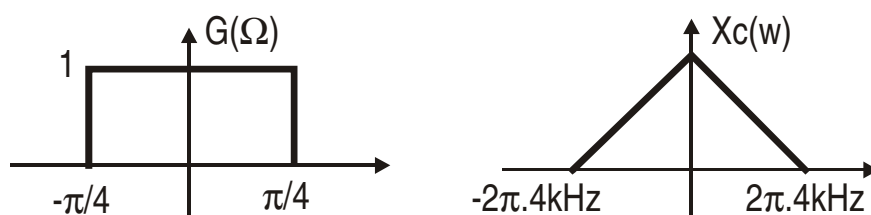
11.3.1. Procesamiento de señales de tiempo continuo en tiempo discreto

Problema 6

Considere el sistema de la figura para un proceso de tiempo discreto usando un muestreador de periodo T , donde el C/D y el D/C corresponden a las operaciones mostradas.



El filtro $G(\Omega)$ es un pasabajos. La transformada de Fourier de $x_c(t)$, $X_c(\omega)$ está dada por

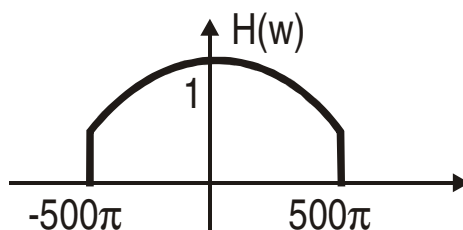


La frecuencia de muestreo es de 8 KHZ. Grafique las siguientes transformadas:

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $X_p(\omega)$ | c) $Y(\Omega)$ |
| b) $X(\Omega)$ | d) $Y_c(\omega)$ |

Problema 7

Considere la respuesta de un sistema de tiempo continuo:



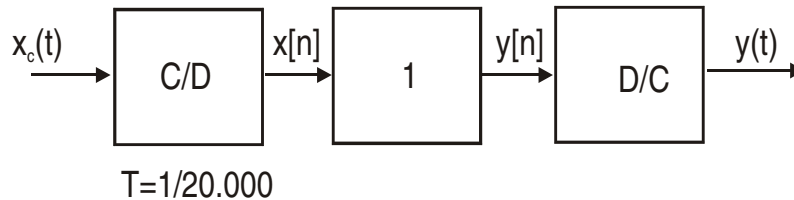
Tratamos de implementar un filtro de tiempo continuo usando un proceso de tiempo discreto.

- a) Cuál es el máximo valor del periodo T que requiere el muestreo.

- b) Qué requerimiento es del filtro discreto $G(\Omega)$ para T encontrado en a)?.
- c) Grafique el sistema total.

Problema 8

El sistema de la siguiente figura es un filtro anti-aliasing.

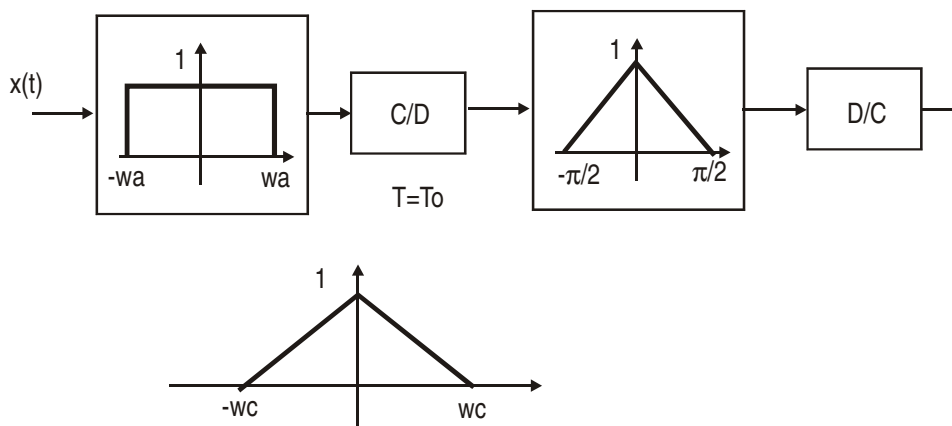


Para las siguientes señales, obtenga un bosquejo de $X_c(w)$, $X(\Omega)$ y $Y_c(w)$.

- a) $x_c(t) = \cos(2\pi.5000t)$
- b) $x_c(t) = \cos(2\pi.27000t)$
- c) $x_c(t) = \cos(2\pi.17000t)$

Problema 9

Suponga que se diseña un filtro pasabanda variable usando la siguiente estructura. Descubra en términos de ω_c , el valor del período de muestreo T_0 y el correspondiente valor de ω_0 tal que el filtro de tiempo continuo tiene respuesta en frecuencia mostrada en la figura.

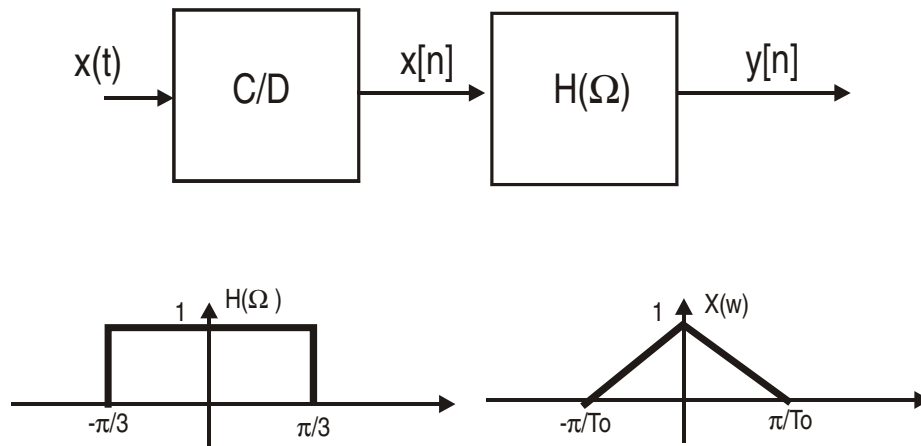


Problema 10

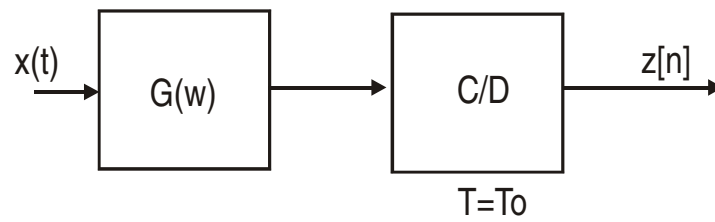
Considere el sistema de la figura.

Sea $H(\Omega)$ como el dado y $X(w)$ también dado en las figuras

- a) Grafique $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$.





b) Supongamos que se reemplaza el sistema de la figura. Descubra $G(\omega)$ tal que $y[n]=z[n]$.



ANEXOS

Anexo 1

 <p>Science Source/Photo Researchers, Inc.</p>	<p>Joseph Fourier (1768-1830), matemático francés nacido en Auxerre y formado en el monasterio de Saint-Benoît-sur-Loire. Enseñó en la Escuela Normal (1795), donde había estudiado, y en la Escuela Politécnica de París desde 1795 hasta 1798, en que se unió a la campaña de Napoleón en Egipto. Después de volver a Francia, en 1802, publicó un importante material sobre las antigüedades egipcias, y fue hasta 1815 prefecto del departamento de Isère. Fue nombrado barón por Napoleón en 1808. En 1816 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias y en 1827 de la Academia Francesa. Su fama proviene de sus trabajos sobre matemáticas y sobre física matemática. En su tratado <i>Teoría analítica del calor</i> (1822), empleó unas series trigonométricas (series de Fourier) mediante las cuales las funciones discontinuas pueden expresarse como la suma de una serie infinita de senos y cosenos. Amplió con éxito estos procedimientos al estudio analítico del calor.</p>
 <p>Science Source/Photo Researchers, Inc.</p>	<p>Pierre Simon Laplace (1749-1827), astrónomo y matemático francés, conocido por haber aplicado con éxito la teoría de la gravitación de Newton a los movimientos planetarios en el Sistema Solar. Nació en Normandía y estudió en la Escuela Militar de Beaumont. En 1767 fue profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París y en 1785 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias Francesa.</p> <p>Laplace realizó su trabajo más importante al desarrollar el análisis matemático del sistema de astronomía gravitacional elaborado por el matemático, físico y astrónomo británico Isaac Newton. Demostró que los movimientos planetarios son estables y que las perturbaciones producidas por la influencia mutua de los planetas o por cuerpos externos, como los cometas, solamente son temporales. Trató de dar una teoría racional del origen del Sistema Solar en su hipótesis nebular de la evolución estelar (véase Cosmología). En <i>Mecánica celeste</i> (5 volúmenes, 1799-1825) Laplace sistematizó toda la obra matemática que se había realizado sobre la gravitación. <i>Exposición del sistema del mundo</i> (1796) contiene un resumen de la historia de la astronomía. También trabajó sobre la teoría de la probabilidad en su <i>Teoría analítica de las probabilidades</i> (1812) y en <i>Ensayo filosófico sobre la probabilidad</i>. (1814).</p>



Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, cuyos trabajos más importantes se centraron en el campo de las matemáticas puras, campo de estudio que ayudó a fundar. Euler nació en Basilea y estudió en la Universidad de Basilea con el matemático suizo Johann Bernoulli, licenciándose a los 16 años. En 1727, por invitación de la emperatriz de Rusia Catalina I, fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1730 y de matemáticas en 1733. En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín a petición del rey de Prusia, Federico el Grande. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque obstaculizado por una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y por una ceguera casi total al final de su vida, Euler produjo numerosas obras matemáticas importantes, así como reseñas matemáticas y científicas.

En su *Introducción al análisis de los infinitos* (1748), Euler realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica. En esta obra trató el desarrollo de series de funciones y formuló la regla por la que sólo las series convergentes infinitas pueden ser evaluadas adecuadamente. También abordó las superficies tridimensionales y demostró que las secciones cónicas se representan mediante la ecuación general de segundo grado en dos dimensiones. Otras obras trataban del cálculo (incluido el cálculo de variaciones), la teoría de números, números imaginarios y álgebra determinada e indeterminada. Euler, aunque principalmente era matemático, realizó también aportaciones a la astronomía, la mecánica, la óptica y la acústica. Entre sus obras se encuentran *Instituciones del cálculo diferencial* (1755), *Instituciones del cálculo integral* (1768-1770) e *Introducción al álgebra* (1770), pero fue el matemático alemán Peter G. L. Dirichlet quien propuso su definición en los términos actuales.

A2

Ancho de banda y duración de las señales de energía

A2.1. Definición de ancho de banda

Según sea el contexto de estudio, se definen distintas formas de ancho de banda. Por costumbre, el ancho de banda en Hz se lo indica con la letra B y en $\frac{rad}{seg}$ con la letra W .

Están vinculados por: $W = 2\pi B$

A2.1.1. Primera definición

Ancho de banda absoluto o de administración permitida. Este concepto se utiliza para limitar en banda de las señales y se define el ancho de banda W como la región fuera de la cual el espectro de frecuencias es cero (o se considera cero) tomando las frecuencias positivas.

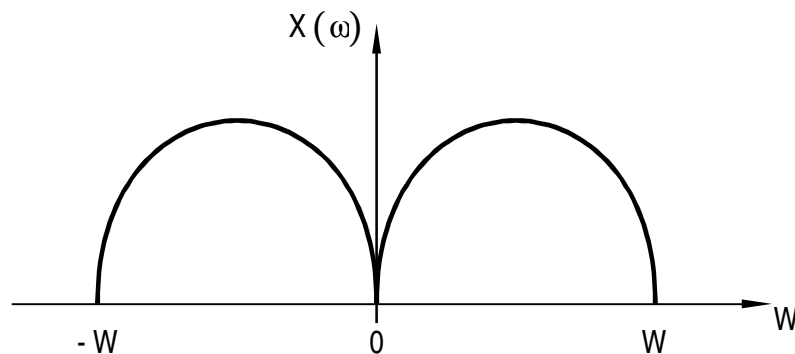


Figura A2-1

Para una señal real, por ejemplo de voz, el espectro se considera hasta W y es nulo (si $\omega > W$) de esta banda. Observamos que es no nulo si $|\omega| \leq W$, esto puede dar lugar a confusión: El ancho de banda en este caso es W pues se toma solo las “frecuencias positivas”. Por ser señal en “banda base” (o señal pasa bajo).

Si existe una señal pasabanda como en figuras A2-1 y A2-2

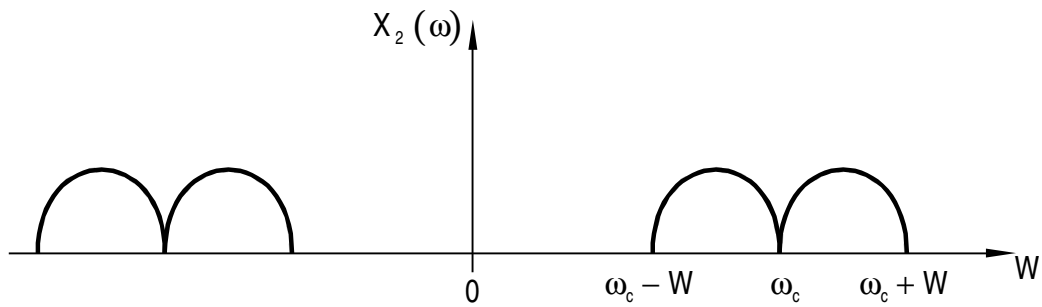


Figura A2-2

el ancho de banda es $2W$, medido siempre sobre las frecuencias positivas.

A2.1.2. Ancho de banda de potencia mitad o a 3 dB

Esto se define para señales de banda base que poseen un máximo de $X(\omega)$ en el origen, y se define como la frecuencia ω_1 que cumple con

$$\omega_1 = W$$

Por Ejemplo

Sea $x(t) = e^{-\frac{t}{T}} \mu(t)$ que le corresponde

$$X(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}$$

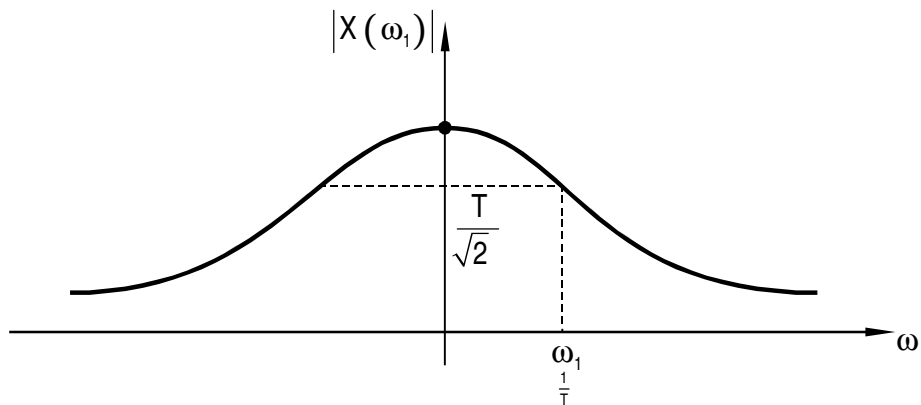


Figura A2-3

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2}}$$

$$\frac{|X(\omega_1)|}{|X(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad |X(\omega_1)| = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

que es menor que $|X(0)|$ el valor de $\omega_1 = W$ es

$$\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + \omega_1^2} = \frac{\sqrt{2}}{T}$$

$$\left(\frac{1}{T}\right)^2 + \omega_1^2 = \frac{2}{T^2}$$

$$\omega_1^2 = \frac{2}{T^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^2}$$

luego

$$\omega_1 = \frac{1}{T}$$

A2.1.3. Ancho de banda equivalente

Este concepto se aplica para señales pasa banda cuyo espectro posee un máximo en el centro de la banda. Se define como el ancho de un espectro rectangular ficticio que tuviera la misma energía que el espectro de la señal, y el alto de este rectángulo es el valor máximo del espectro de la señal.

Si ω_m es la frecuencia del máximo del $|X(\omega)|$ se define esta energía como

$$E_{eq} = \frac{2 B_{eq} |X(\omega_m)|^2}{2\pi}$$

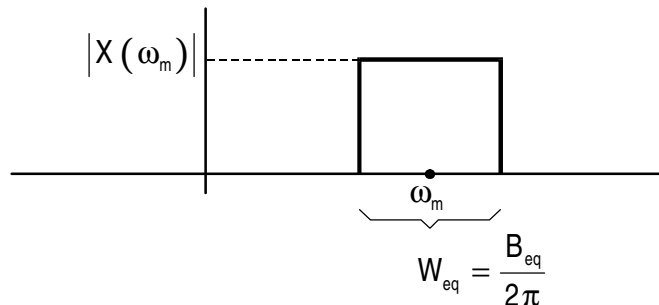


Figura A2-4

Es dos veces porque lo mismo corresponde a frecuencias negativas, que no dibujo. Para una señal $x(t)$ la energía según Parseval es

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Igualando $E_{eq} = E_x$ obtenemos el B_{eq} como

$$B_{eq} = \frac{1}{|X(\omega_m)|^2} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad [Hz]$$

A2.1.4. Ancho de banda entre nudos (cruce por cero o nodos)

Este concepto se aplica a señales de banda ilimitada y se define como la distancia desde 0 al primer nodo de la envolvente del módulo del espectro que contiene el máximo de $|X(\omega)|$ a la frecuencia ω_m .

Por Ejemplo

En la señal $\text{rect}_{T_0}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ el módulo es

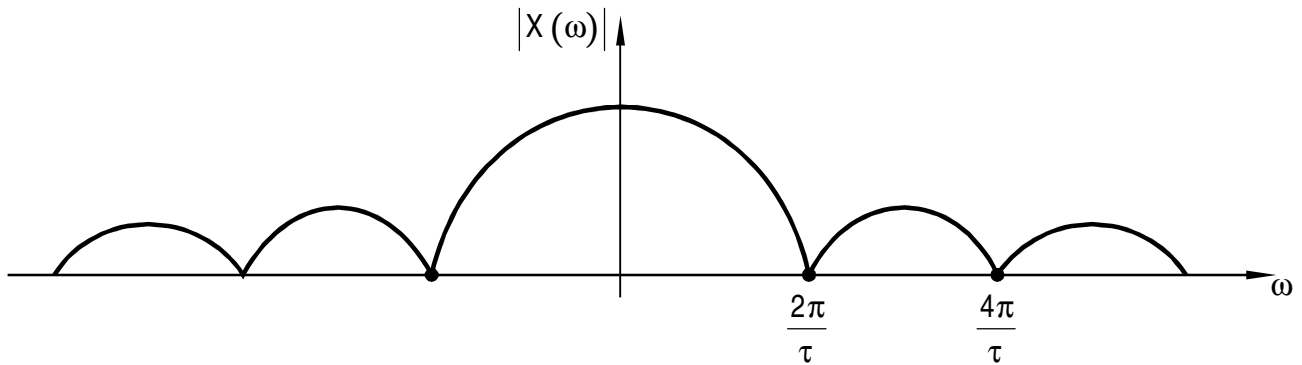


Figura A2-5

El ω_m es cero, y el $W = \frac{2\pi}{\tau}$

A2.1.5. Ancho de banda eficaz (RSM) o de Gabor

Este es un ancho de banda de definición analítica más usado para el estudio de señales con transformaciones en frecuencia. Relaciona la función de momento de $|X(\omega)|^2$ y se define

$$B_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

Se puede caracterizar una señal $x(t)$ en dominio del tiempo, según sea su duración T en forma dual el ancho de banda. La duración de una señal también se puede definir de varias manera, las más usadas son

A2.1.6. Distancia entre ceros

En general la distancia desde el origen al primer cero por la derecha (tiempo positivo)

Así

$$x(t) = \sin(2\pi\omega_0 t) \quad T = \frac{1}{\omega_0} \text{ Tiempo de muestreo}$$

En el que la amplitud de $x(t)$ desciende hasta un valor determinable. Por ejemplo

$$x(t) = e^{-\frac{t}{t_0}} u(t)$$

tiene una duración de $T = t_0$ para que su valor alcance $\frac{1}{e}$

A2.1.7. Radio de Giro

Esto se usa para señales que están concentradas alrededor de $t = 0$ y se define como

$$T = 2 \times \text{radio de giro} = 2 \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}}$$

A2.2. Principio de Incertidumbre

Este principio dice que para cualquier señal $x(t)$ real que tiende a cero más rápido que $\frac{1}{\sqrt{t}}$ para $t \rightarrow \infty$ o sea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \cdot x(t) = 0$$

Y con la duración definida como 2 por radio de giro y con el ancho de banda de Gabor, el producto

$$T \cdot B \geq 1$$

En otras palabras, se evidencia el canje *tiempo – frecuencia* no pueden ser en señales T y B arbitrariamente pequeños. Si se achica la banda, debe aumentar la duración de la señal y viceversa.

La demostración de este principio, Parseval pues de encontrarse en los textos de referencia.

A3

Tablas Utiles

Tabla 1

Propiedades de la Serie de Fourier a Tiempo Continuo

Propiedad	Señal	Coeficientes Serie de Fourier
	$x(t)$ periodicas $y(t)$ periodo T_o y $\omega_o = 2\pi / T_o$	a_k b_k
linealidad	$a x(t) + b y(t)$	$a.a_k + b.b_k$
desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_o)$	$a_k \exp(-j k \omega_o t_o)$
desplazamiento en frecuencia	$x(t) \exp(j M \omega_o t)$	a_{k-M}
conjugación	$x^*(t)$	a_{-k}^*
inversión en el tiempo	$x(-t)$	a_{-k}
escalamiento en tiempo	$x(at)$ periodica; periodo T / a	a_k
convolución periodica	$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$T a_k b_k$
multiplicación	$x(t).y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
diferenciación	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j k \omega_o a_k$
integración	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ de valor finito y periodica solo $a_o = 0$	$\left(\frac{1}{j k \omega_o} \right) a_k$
simetrías	$x(t)$ real $x(t)$ real y par $x(t)$ real e impar	$a_k = a_{-k}^*$ a_k real y par a_k imaginario puro e impar

Relación de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Tabla 2

Propiedades de la Serie de Fourier a Tiempo Discreto

Propiedad	Señal	Coeficientes Serie de Fourier
	$x[n]$ periódicas $y[n]$ período N ; $\Omega_o = 2\pi / N$	a_k periodicos b_k período N
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$a.a_k + b.b_k$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_o]$	$a_k \exp(-j k \Omega_o n_o)$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n] \exp(j M \Omega_o n)$	a_{k-M}
conjugación	$x^*[n]$	a_{-k}^*
inversión en el tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
escalamiento en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{si } n \text{ es múltiplo de } m \\ 0 & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } m \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_k$ periódico con período mN
convolución periódica	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$N a_k b_k$
multiplicación	$x[n] \cdot y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
primera diferencia	$x[n] - x[n-l]$	$(1 - \exp(-j k \Omega_o)) a_k$
suma	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ de valor finito y periódica sólo si $a_o = 0$	$\left(\frac{1}{(1 - \exp(-j k \Omega_o))} \right) a_k$
simetrías	$x[n]$ real $x[n]$ real y par $x[n]$ real e impar	$a_k = a_{-k}^*$ a_k real y par a_k imaginario puro e impar

Relación de Parseval

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

Tabla 3

Propiedades Transformada de Fourier a Tiempo Continuo

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(\omega)$ $Y(\omega)$
linealidad	$a x(t) + b y(t)$	$a X(\omega) + b Y(\omega)$
desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$\exp(-j\omega t_0) X(\omega)$
desplazamiento en frecuencia	$\exp(j\omega_0 t) x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-\omega)$
escalamiento de tiempo y frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
convolución	$x(t) * y(t)$	$X(\omega) \cdot Y(\omega)$
multiplicación	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(\omega)$
integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
diferenciación en frecuencia	$t x(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$
Simetrías	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \Re[X(\omega)] = \Re[X(-\omega)] \\ \Im[X(\omega)] = -\Im[X(-\omega)] \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$
	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
	$x(t)$ real e impar	$X(\omega)$ imaginario puro
descomposición par-impar $x(t)$ real	$x_e(t) = Ev[x(t)]$ $x_o(t) = Od[x(t)]$	$\Re[X(\omega)]$ $j\Im[X(\omega)]$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Tabla 4

Pares Básicos Transformada de Fourier a Tiempo Continuo

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la Serie de Fourier (si es periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(jk\omega_o t)$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o)$	a_k
$\exp(j\omega_o t)$	$2\pi \delta(\omega - \omega_o)$	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = 0 \quad \text{si } k \neq 1 \end{cases}$
$\cos \omega_o t$	$\pi [\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)]$	$\begin{aligned} a_1 &= a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k &= 0 \quad \text{si } k \neq 1, -1 \end{aligned}$
$\sin \omega_o t$	$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_o) - \delta(\omega + \omega_o)]$	$\begin{aligned} a_1 &= -a_{-1} = \frac{1}{2j} \\ a_k &= 0 \quad \text{si } k \neq 1, -1 \end{aligned}$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_o = 1; \quad a_k = 0 \quad \text{para } k \neq 0$
Onda cuadrada periodica $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t < T_1 \\ 0 & \text{para } t > T_1 \end{cases}$ $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin k\omega_o T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_o)$	$\frac{\omega_o T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_o T_1}{\pi}\right)$
Tren de Impulsos $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T} \quad \text{para todo } k$
Onda cuadrada $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t < T_1 \\ 0 & \text{para } t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$	
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } \omega < W \\ 0 & \text{para } \omega > W \end{cases}$	
$\delta(t)$	1	
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	
$\delta(t - t_o)$	$\exp(-j\omega t_o)$	
$\exp(-at) u(t)$ $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	
$t \exp(-at) u(t)$ $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at) u(t)$ $\Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	

Tabla 5

Propiedades de la Transformada de Fourier a Tiempo Discreto

Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
	$x[n]$ $y[n]$	$X(\Omega)$ $Y(\Omega)$
linealidad	$a x[n] + b y[n]$	$a X(\Omega) + b Y(\Omega)$
desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_o]$	$\exp(j\Omega n_o) X(\Omega)$
desplazamiento en frecuencia	$\exp[j\Omega_o n] x[n]$	$X(\Omega - \Omega_o)$
conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
inversión en tiempo	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
expansión en tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n = mk; \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0 & n \neq mk; \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$X(k\Omega)$
convolución	$x[n] * y[n]$	$X(\Omega) Y(\Omega)$
multiplicación	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$
diferencia en tiempo	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - \exp(-j\Omega)) X(\Omega)$
acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$	$\frac{1}{1 - \exp(-j\Omega)} X(\Omega)$
diferenciación en frecuencia	$n x[n]$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Simetrías	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(\Omega) = X^*(-\Omega) \\ \Re\{X(\Omega)\} = \Re\{X(-\Omega)\} \\ \Im\{X(\Omega)\} = -\Im\{X(-\Omega)\} \\ X(\Omega) = X(-\Omega) \\ \angle X(\Omega) = -\angle X(-\Omega) \end{cases}$
	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
	$x[n]$ real e impar	$X(\Omega)$ imaginario puro
Descomposición par-impar	$x_e[n] = Ev[x[n]]$; $x[n]$ real $x_o[n] = Od[x[n]]$; $x[n]$ real	$\Re\{X(\Omega)\}$ $j\Im\{X(\Omega)\}$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Tabla 6

Pares Básicos de la Transformada de Fourier a Tiempo Discreto

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la Serie de Fourier
$\sum_{k=\langle n \rangle} a_k \exp(jk(2\pi / N)n)$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$\exp(j\Omega_o n)$ $\frac{\Omega_o}{2\pi}$ racional	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = m, m \pm N, \dots \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$
$\cos \Omega_o n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_o - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1/2 & k = \pm m, \pm m \pm N, \dots \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$
$\sin \Omega_o n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_o - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1/2j & k = r, r \pm N, \dots \\ -1/2j & k = -r, -r \pm N, \dots \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$
Onda cuadrada periódica $x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N_1 \\ 0 & n > N_1 \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$k \neq 0, \pm N, \dots$ $a_k = \frac{\sin[(2\pi k / N)(N_1 + 1/2)]}{N \sin[2\pi k / 2N]}$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N} \quad k = 0, \pm N, \dots$
Tren de impulsos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N} \quad \forall k$
$a^n u[n]; \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - a \exp(-j\Omega)}$	
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N_1 \\ 0 & \text{otros} \end{cases}$	$\frac{\sin[\Omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\Omega/2)}$	
$\frac{\sin Wn}{\pi n}; \quad 0 < W < \pi$	$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \Omega \leq W \\ 0 & W < \Omega \leq \pi \end{cases}$ $X(\Omega)$ periódica $\Omega_o = 2\pi$	
$\delta[n]$	1	
$u[n]$	$\frac{1}{1 - \exp(-j\Omega)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - 2\pi k)$	
$\delta[n - n_o]$	$\exp(-j\Omega n_o)$	
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - a \exp(-j\Omega))^2}$	

Tabla 7

Propiedades de la Transformada de Laplace

Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	R.O.C.
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
linealidad	$a x_1(t) + b x_2(t)$	$a X_1(s) + b X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_o)$	$\exp(-st_o) X(s)$	R
Desplazamiento en s	$\exp(s_o t) x(t)$	$X(s - s_o)$	R desplazado en s_o ($s \in ROC$ si $(s - s_o) \in R$)
escalamiento en el tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{t}{a}\right)$	R escalado ($s \in ROC$ si $(s/a) \in R$)
conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s) \cdot X_2(s)$	$R_1 \cap R_2$
diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	R
diferenciación en el dominio de s	$-t x(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

Teorema del valor inicial y final

Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares

de orden superior en $t = 0$, entonces:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Tabla 8

Pares Básicos Transformada de Laplace

Señal	Transformada de Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Todo s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re(s) > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re(s) < 0$
$\exp(-at) u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re(s) > -a$
$-\exp(-at) u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re(s) < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at) u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re(s) > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-at) u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re(s) < -a$
$\delta(t-T)$	$\exp(-sT)$	Todo s
$(\cos \omega_o t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re(s) > 0$
$(\sin \omega_o t) u(t)$	$\frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}$	$\Re(s) > 0$
$(\exp(-at) \cos \omega_o t) u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_o^2}$	$\Re(s) > -a$
$(\exp(-at) \sin \omega_o t) u(t)$	$\frac{\omega_o}{(s+a)^2 + \omega_o^2}$	$\Re(s) > -a$
$u_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \delta(t)$	s^n	Todo s

Tabla 9

Propiedades de la Transformada de Laplace Unilateral

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
linealidad	$a.x_1(t) + b.x_2(t)$	$a.\mathcal{X}_1(s) + b.\mathcal{X}_2(s)$
desplazamiento en s	$x(t)\exp(s_0 t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
escalamiento en tiempo	$x(at); \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
conjugación	$x(t)$	
convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s) \cdot \mathcal{X}_2(s)$
diferenciación en el tiempo	$\frac{dx(t)}{dt}$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
diferenciación en s	$-t x(t)$	$\frac{d\mathcal{X}(s)}{ds}$
integración en el tiempo	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$

Teorema del valor inicial y final

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

Tabla 10

Propiedades de la Transformada z

Propiedad	Señal	Transformada Z	ROC
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	R R_1 R_2
linealidad	$a x_1[n] + b x_2[n]$	$a X_1(z) + b X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n - n_o]$	$z^{-n_o} X(z)$	R
escalamiento en el dominio z	$z_o^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_o}\right)$	$ROC = z_o R$
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$ROC = R^{-1}$ (todos los z^{-1} donde los $z \in R$)
conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \cap \{ z > 0\}$
convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	$R_1 \cap R_2$
acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$R \cap \{ z > 1\}$
diferenciación en el dominio z	$n x[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R

Teorema del Valor Inicial

Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ entonces

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Tabla 11

Pares Básicos Transformada z

señal	Transformada Z	ROC
$\delta[n]$	1	Todo z
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$\delta[n - m]$	z^{-m}	Todo z excepto 0 si $m > 0$ ó ∞ si $m < 0$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z < a $
$[\cos \omega_o n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_o] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_o] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$[\sin \omega_o n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_o] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_o] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$

Tabla 12

Propiedades de la Transformada z Unilateral

Propiedad	Señal	Transformada
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$\mathcal{X}(z)$ $\mathcal{X}_1(z)$ $\mathcal{X}_2(z)$
linealidad	$a.x_1[n] + b.x_2[n]$	$a.\mathcal{X}_1(z) + b.\mathcal{X}_2(z)$
retardo de tiempo	$x[n-1]$	$z^{-1}\mathcal{X}(z) + x[-1]$
avance en el tiempo	$x[n+1]$	$z\mathcal{X}(z) - zx[0]$
escalamiento en z	$z_o^n x[n]$ $a^n x[n]$	$\mathcal{X}(z/z_o)$ $\mathcal{X}(a^{-1}z)$
expansión en el tiempo	$x_k[n] = \begin{cases} x[m] & \text{para } n = km \\ 0 & \text{para } n \neq km \end{cases}$	$\mathcal{X}(z^k)$
convolución $x_1[n], x_2[n]$ nulas para $n < 0$	$x_1[n] * x_2[n]$	$\mathcal{X}_1(z).\mathcal{X}_2(z)$
primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1}).\mathcal{X}(z) - x[-1]$
acumulación	$nx[n]$	$-z \frac{d\mathcal{X}(z)}{dz}$

Teorema del valor inicial

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{X}(z)$$

Tabla 13**Tabla de Derivadas**

1	$y = C$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = C.u$	$y' = C.u'$
4	$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$
5	$y = u.v$	$y' = u.v' + u'.v$
6	$y = u.v...w$	$y' = u'(v...w) + ...v'(u...w) + w'(u...v)$
7	$y = u + w - v$	$y' = u' + w' - v'$
8	$y = e^x$	$y' = e^x$
9	$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$
10	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
11	$y = \ln u$	$y' = \frac{1}{u}u'$
12	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
13	$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
14	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = \cos u.u'$
15	$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
16	$y = \cos u$	$y' = -\operatorname{sen} u.u'$
17	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
18	$y = \tan u$	$y' = \frac{1}{\cos^2 u}u'$
19	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
20	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$
21	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \log_a e$

22	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u} \log_a e \cdot u'$
23	$y = \sec x$	$y' = \frac{\tan x}{\cos x}$
24	$y = c \sec x$	$y' = \frac{c \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$
25	$y = c \operatorname{tg} x$	$y' = -(1 + c \operatorname{tg}^2 x)$
26	$y = \operatorname{arco} \operatorname{sen} x$	$y' = \frac{1}{\pm \sqrt{1-x^2}}$
27	$y = \operatorname{arco} \cos x$	$y' = -\frac{1}{\pm \sqrt{1-x^2}}$
28	$y = \operatorname{arctan} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
29	$y = \operatorname{arcsen} u$	$y' = \frac{1}{\pm \sqrt{1-u^2}} u'$

Tabla 14**Tabla de Integrales Indefinidas. Reglas para una Integración**

1	$\int a dx = a.x$
2	$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$
3	$\int (u \pm v \pm w \pm \dots) dx = \int u dx \pm \int v dx \pm \int w dx \pm \dots$
4	$\int u dv = u.v - \int v du$
5	$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du$
6	$\int F[f(x)] dx = \int F(u) \frac{dx}{du} du = \int \frac{F(u)}{f(x)} du$
7	$\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} \quad r \neq -1 \quad \text{Para } r = -1, \text{ véase 8}$
8	$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad \text{si } u > 0 \quad \text{o } \ln(-u) \quad \text{si } u < 0 \quad = \ln u $
9	$\int e^u du = e^u$
10	$\int a^u du = \int e^{u \ln a} du = \frac{e^{u \ln a}}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a}$
11	$\int \cos u du = \sin u$
12	$\int \sin u du = -\cos u$
13	$\int \tan u du = \ln \sec u = -\ln \cos u $
14	$\int \cot u du = \ln \sin u $
15	$\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u $
16	$\int \csc u du = \ln \csc u - \cot u $
17	$\int \sec^2 u du = \tan u$
18	$\int \csc^2 u du = -\cot u$
19	$\int \tan^2 u du = \tan u - u$
20	$\int \cot^2 u du = -\cot u - u$
21	$\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}$

22	$\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sen 2u}{4}$
23	$\int \sec u \tan u du = \sec u$
24	$\int c \sec u \cot u du = -c \sec u$
25	$\int \sinh u du = \cosh u$
26	$\int \cosh u du = \sinh u$
27	$\int \tanh u du = \ln \cosh u$
28	$\int \coth u du = \ln \sinh u$
29	$\int \operatorname{sech} u du = \sen^{-1}(\tanh u)$
30	$\int c \operatorname{sech} u du = \ln \tanh \frac{u}{2}$
31	$\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u$
32	$\int c \operatorname{sech}^2 u du = -\coth u$
33	$\int \tanh^2 u du = u - \tanh u$
34	$\int \coth^2 u du = u - \coth u$
35	$\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2}$
36	$\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2}$
37	$\int \sec hu \tanh u du = -\sec hu$
38	$\int c \sec hu \coth u du = -c \sec hu$
39	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \tan^{-1} \frac{u}{a}$
40	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{u - a}{u + a} \right)$
41	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a + u}{a - u} \right)$
42	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sen^{-1} \frac{u}{a}$

43	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \text{ o } \sinh^{-1} \frac{u}{a}$
44	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$
45	$\int f^{(n)} g dx = f^{(n-1)} g - f^{(n-2)} g' - f^{(n-3)} g'' \dots (-1)^n \int f g^{(n)} dx$

Nomenclatura

a, b, p, q, r son constantes.

u, v, w son funciones de x .

n es un número natural.

r es un número real

Bibliografía

Soliman Samir – Srinath Mandyam *Señales y Sistemas continuos y discretos*

Ashok Ambarbar *Procesamiento de señales analógicas y digitales*

Oppenheim, A. – Schafer, R. *Discrete-time signal processing.*

Proakis, J. - Manolakis, D. *Tratamiento digital de señales*

Oppenheim A. –Willsky A.S. *Signals and Systems*

Orfanidis S. *Introduction to Signal Processing*

Mitra S. *Digital Signal Processing*

Marple L. *Digital Spectral Analysis*

Papoulis A. *Sistemas Digitales y Analógicos, Transformadas de Fourier , Estimación Espectral*

McClellan, J. – Burrus, S. – Oppenheim, A. – Parks, T. – Schafer, R. *Signal processing using Matlab.*

Hwei P. *Análisis de Fourier*

Irarrázaval P. *Análisis de señales*

Otros Títulos de esta Editorial

MATEMÁTICA

Álgebra y Geometría. Molina-Gigena-Joaquín-Gómez- Vignoli.
Análisis Matemático I. Azpilicueta-Gigena-Joaquín-Molina-Cabrera.
Matemática I para Ciencias Naturales. Vera de Payer - Molina - Gigena - Ludueña Almeida.
Álgebra Lineal. Elizabeth Vera de Payer.
Introducción a la Matemática. Azpilicueta-Gigena-Molina-Gómez. (En preparación)
Análisis Matemático II. Gigena - Binia - Joaquín - Cabrera - Abud 2º Ed. (En preparación)

FÍSICA Y QUÍMICA

Notas de Química General. P. Carranza - S. Faillaci.
Física I. G. V. Morelli. (En preparación)
Física II. Electromagnetismo. G. V. Morelli.
Física III. G. V. Morelli. (En preparación)
Calor y Termodinámica. G. V. Morelli. (En preparación)
Mecánica. G. V. Morelli. (En preparación)
Termodinámica Técnica. F. Arenas (En preparación)

DISEÑO

Representación Gráfica I. O. Maligno y otros.

INGENIERÍA E INFORMÁTICA

Algoritmos y Estructuras de Datos. Valerio Fritelli.
Aprenda Lenguaje ANSI C. J. García.
Aprenda C++. J. García.
Lenguaje C++. K. Barclay.
Aprenda Java. J. García.
Aprenda Visual Basic. J. García.
Sistemas Operativos. Norberto Cura.
Comunicaciones. J. Galoppo - C. Montaña Mansur.
Redes de Información. C. Sánchez-J. Galoppo. 3º Edición.
Introducción a Sistemas de Control. Víctor H. Sauchelli. 4º Edición.
Sistemas Celulares de Comunicaciones Móviles. J. Galoppo.
Métodos Numéricos. Rosendo Gil Montero.
Res. de Prob. con Matlab. Métodos Numéricos. R. Gil Montero.
Res. Prob. con Matlab. Sistemas de Control. V. Garrone.
Guía de Introducción a Matlab. J. García - J. Rodríguez.
Resolución de Problemas con C++. Rosendo Gil Montero.
Comunicaciones de Datos y Redes de Información. Norberto Cura (2 Tomos).
ADSL - Asymmetric Digital Subscriber Line. Norberto Cura.
Economía para Ingenieros. E. Masciarelli. (En preparación).
Problemas Resueltos de Economía. E. Masciarelli.
Gestión de la Calidad. Carlos Boero. 2º Edición.
Organización Industrial. C. Boero.

INGENIERÍA INDUSTRIAL

Gestión de Abastecimiento. Carlos Boero.
Costos Industriales. C. Boero.
Evaluación de Proyectos. C. Boero.
Mantenimiento Industrial. C. Boero.
Introducción a la Logística. C. Boero.
Gestión de Mantenimiento. L. Torres.

Mercadotecnia. M. Gómez - G. Gimenez.
Costos Industriales. F. Antón - O. Giovannini.
Recursos Humanos. M. Gomez - G. Gimenez.
Planificación y Control de la Producción. F. Antón - O. Giovannini.

ELECTRONICA Y COMUNICACIONES

Teoría de las Comunicaciones. Pedro Danizio.
Dispositivos Electrónicos. Carlos Chaer.
Fuentes Conmutadas. Juan Carlos Floriani.
Sistemas de Control No Lineales. V. Sauchelli.
Sistemas de Control Digitales. V. Sauchelli.
Teoría de la Información y Codificación. V. Sauchelli.
Teoría de Señales y Sistemas Lineales. V. Sauchelli.
Teoría Moderna de Filtros con Matlab. Walter Monsberger.
Mediciones Electrónicas. Hugo Grazzini.
Teoría de Señales. E. Vera de Payer.
Análisis Conjunto Tiempo-Frecuencia. E. Vera de Payer.
Elementos de Prog. en C++ para Electrónicos. E. Destéfanis.

AERONAUTICA

El Avión. Calidad del equilibrio, control y estabilidad dinámica. José A. Sirena.
Dinámica de los Gases. J. Tamagno (En preparación).

MECANICA - ELECTRICIDAD

Sistemas de Puesta a Tierra. Juan Carlos Arcioni.
Mediciones en Alta Tensión. Alberto Torresi.
Sobretensiones. Alberto Torresi.

INGENIERIA CIVIL

Introducción a la Teoría de la Elasticidad. Godoy-Pratto-Flores.
Estructuras Metálicas. Gabriel Troglia.
Proyectos, Dirección de Obras y Valuaciones. A. Armesto.
Ejercicios de Sistemas Planos de Alma Llena. Juan Weber
Lluvias de Diseño. G. Caamaño Nelli - C. Dasso.
Proyecto y Arq. de las Instalaciones Eléctricas. R. Levy.
Gestión, regulación y Control de Servicios Públicos. FCEFyN-UNC.
Congreso Internacional de Servicios Públicos. FCEFyN-UNC.

BIOINGENIERIA

Seguridad y Normalización en Instalaciones Eléctricas Hospitalarias. R. Taborda.
Diagnóstico por Imágenes. M. Malamud.

Distribución en Buenos Aires:

Editorial Nueva Librería. Estados Unidos 301. (1101) San Telmo.
Te: 4362 9266 / 4362 6887 Email: nuevalibreria@infovia.com.ar

La presente edición de *Teoría de
Señales* se terminó de imprimir en
Universitas en el mes de marzo de
2004.



Impreso en Argentina



UNIVERSITAS