Investigación de Operativa

Modelos y Simulación

Universidad Católica de Córdoba

1417749@ucc.edu.ar

Ing. Sergio H. Rosa

Curso 2020

Definición

La IO es aplicación del método científico a la toma de decisiones ejecutivas con un enfoque sistémico, que consiste en:

- ✓ El arte de modelar situaciones complejas;
- ✓ La ciencia de desarrollar técnicas de solución para resolver dichos modelos y
- ✓ La capacidad de comunicar efectivamente los resultados.

Metodología

1. Planteo del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Generación de una solución.
4. Validación de la solución.
5. Implementación.
6. Evaluación de los resultados.

Unidad 1: Programación Lineal

Modelo Matemático General de PL

- Forma canónica (explícita)

$$\text{Maximizar } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n$$

Sujetas las x_j a:

$$\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_m
\end{array}$$

$$\forall\, x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ejemplo

Concepto	Productos		Disponibilidad (mensual)
	I	II	
Materia prima	2	5	2.000
Hs Mano de obra	1	1	500
Hs máquina	2	1	800
Ingreso	70	40	

Ejemplo

1. **Variables de decisión:**

   x_1 = cantidad de producto I a producir por mes

   x_2 = cantidad de producto II a producir por mes

2. **Objetivo:**

   Maximizar el ingreso

3. **Restricciones:**

   - Disponibilidad de materia prima.
   - Disponibilidad de horas de mano de obra.
   - Disponibilidad horas máquinas.

4. **Condición de no negatividad:**

Ejemplo: modelo

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\text{Máx. (Z)} = & 70\,x_1 & + & 40\,x_2 & & \\
\text{S a} & 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & <= & 2.000 \\
 & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 500 \\
 & 2\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 800 \\
 & x_1 & ; & x_2 & >= & 0
\end{array}
$$

Resolución de un problema

¿Qué significa Resolver?

Encontrar los valores de las variables que cumplan con "todas" las restricciones y maximicen (minimicen) a la función objetivo.

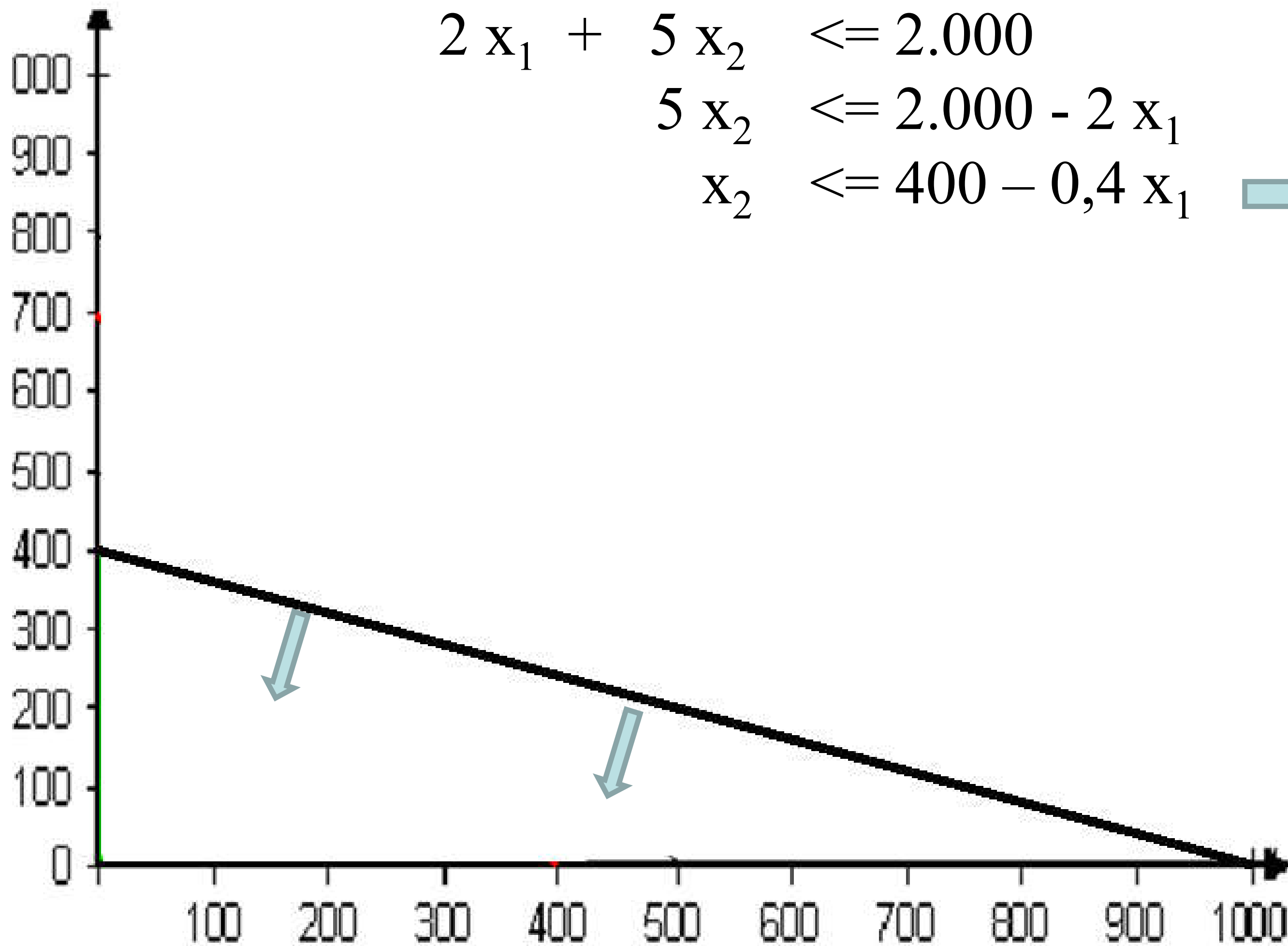
¿Cómo podemos hacerlo?

Resolviendo el sistema de inecuaciones de restricción y luego con la función objetivo identificar el óptimo.

Solución gráfica

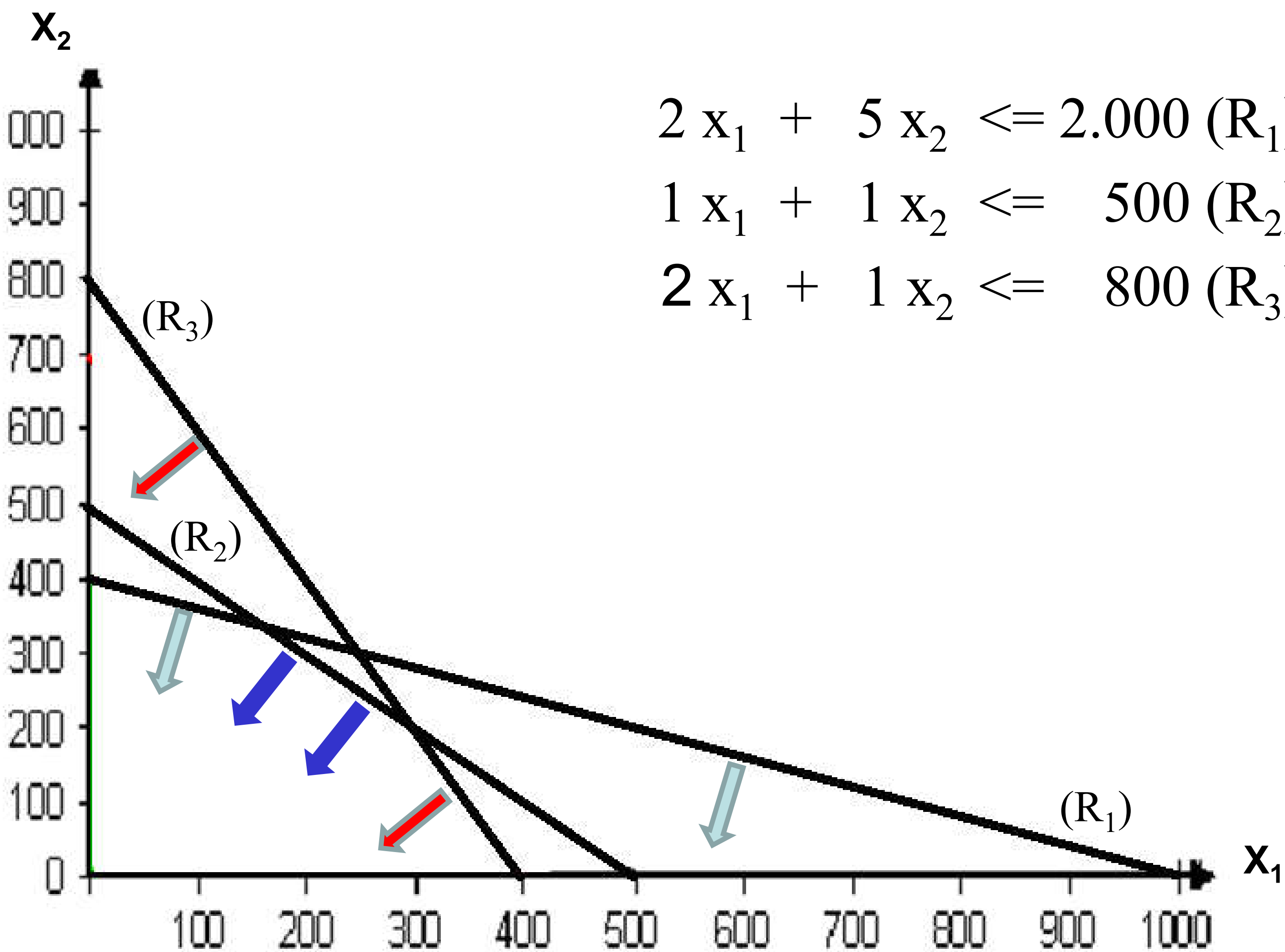
$$2\,x_1 + 5\,x_2 \quad <= 2.000$$
$$5\,x_2 \quad <= 2.000 - 2\,x_1$$
$$x_2 \quad <= 400 - 0{,}4\,x_1$$

$P_1 = (\;0\;,\;400\;)$
$P_2 = (1.000\;,\;0\;)$

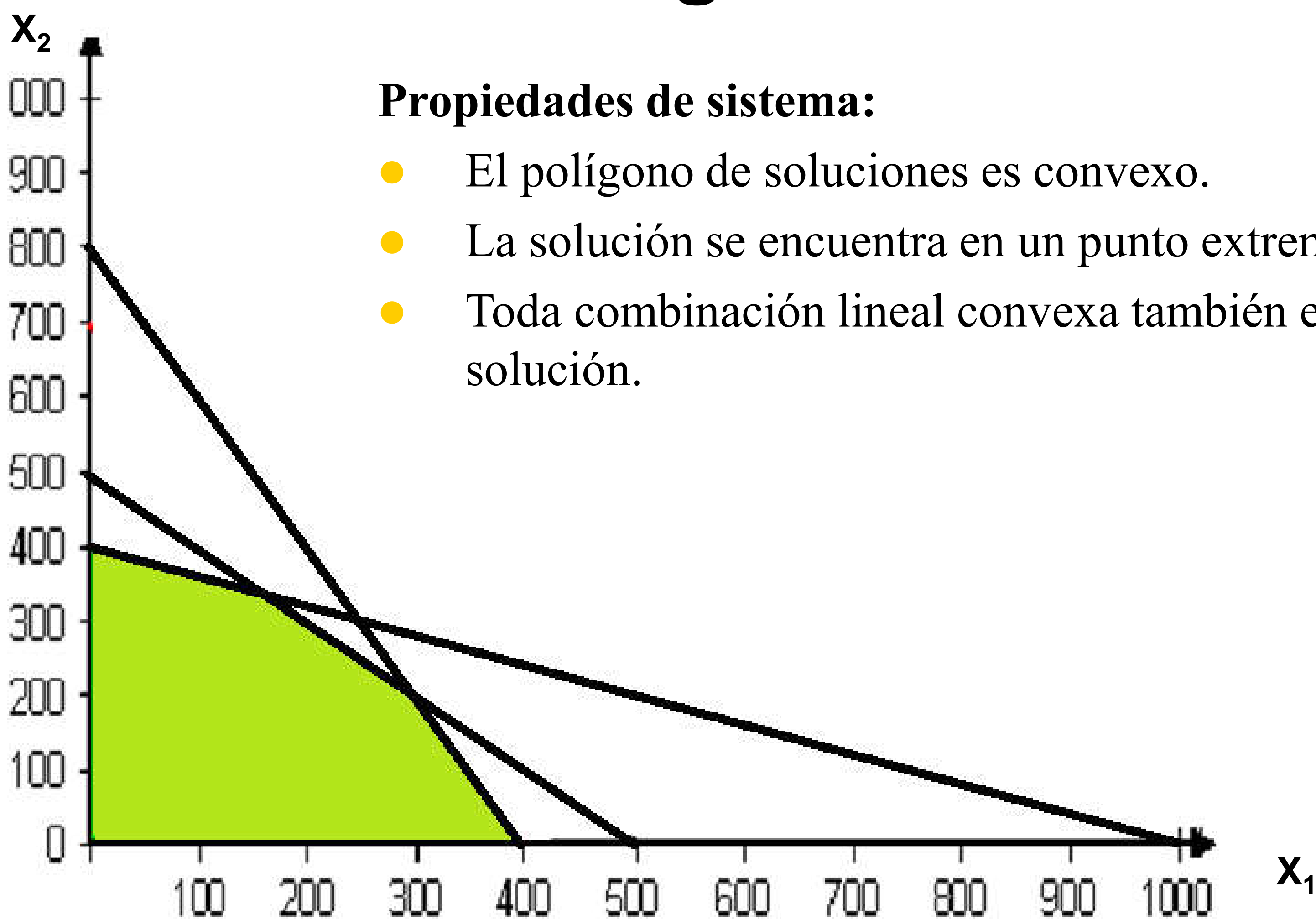


Solución gráfica

$$2\,x_1 \;+\; 5\,x_2 \;<=\; 2.000\ (R_1)$$
$$1\,x_1 \;+\; 1\,x_2 \;<=\; 500\ (R_2)$$
$$2\,x_1 \;+\; 1\,x_2 \;<=\; 800\ (R_3)$$



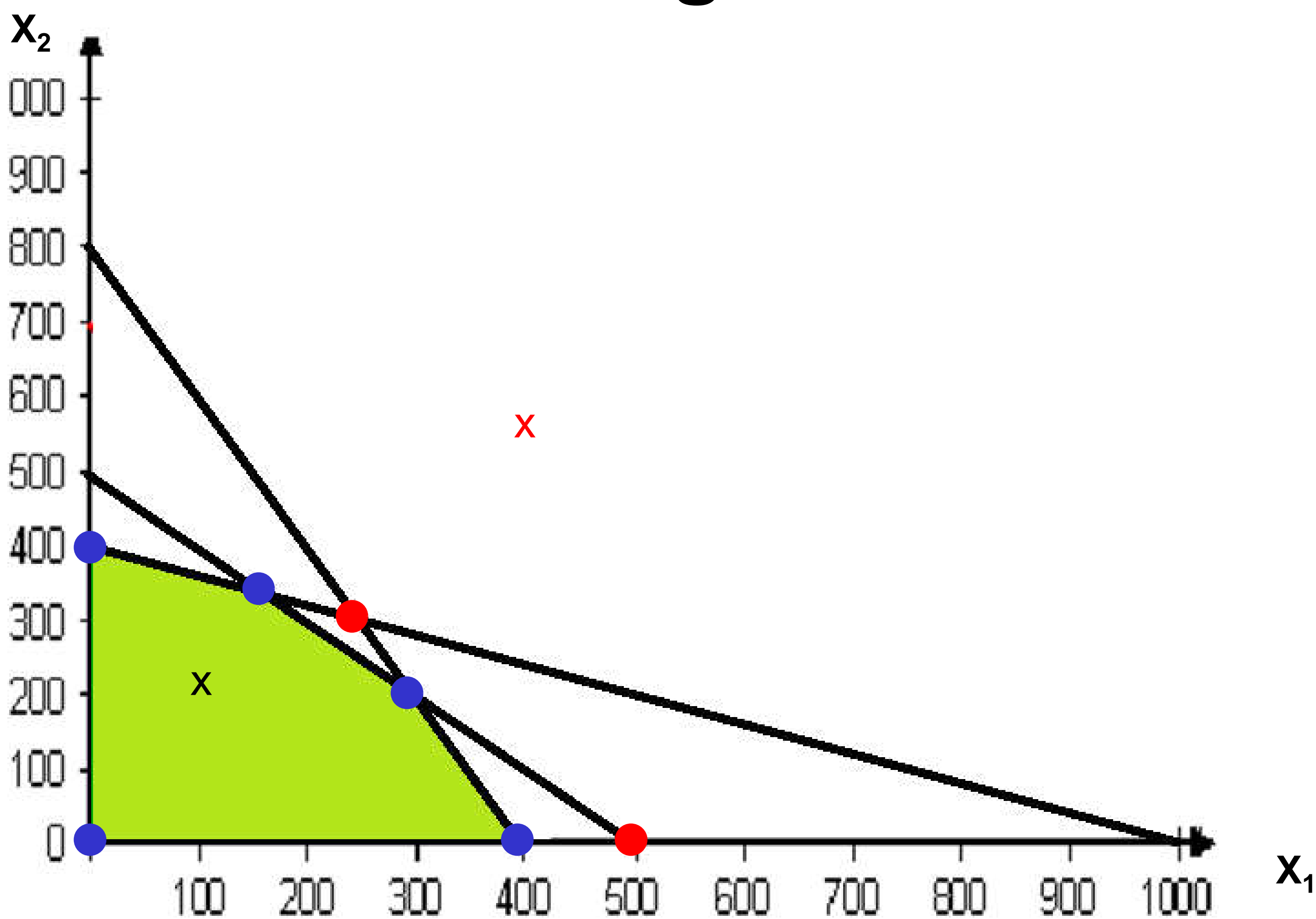
Solución gráfica



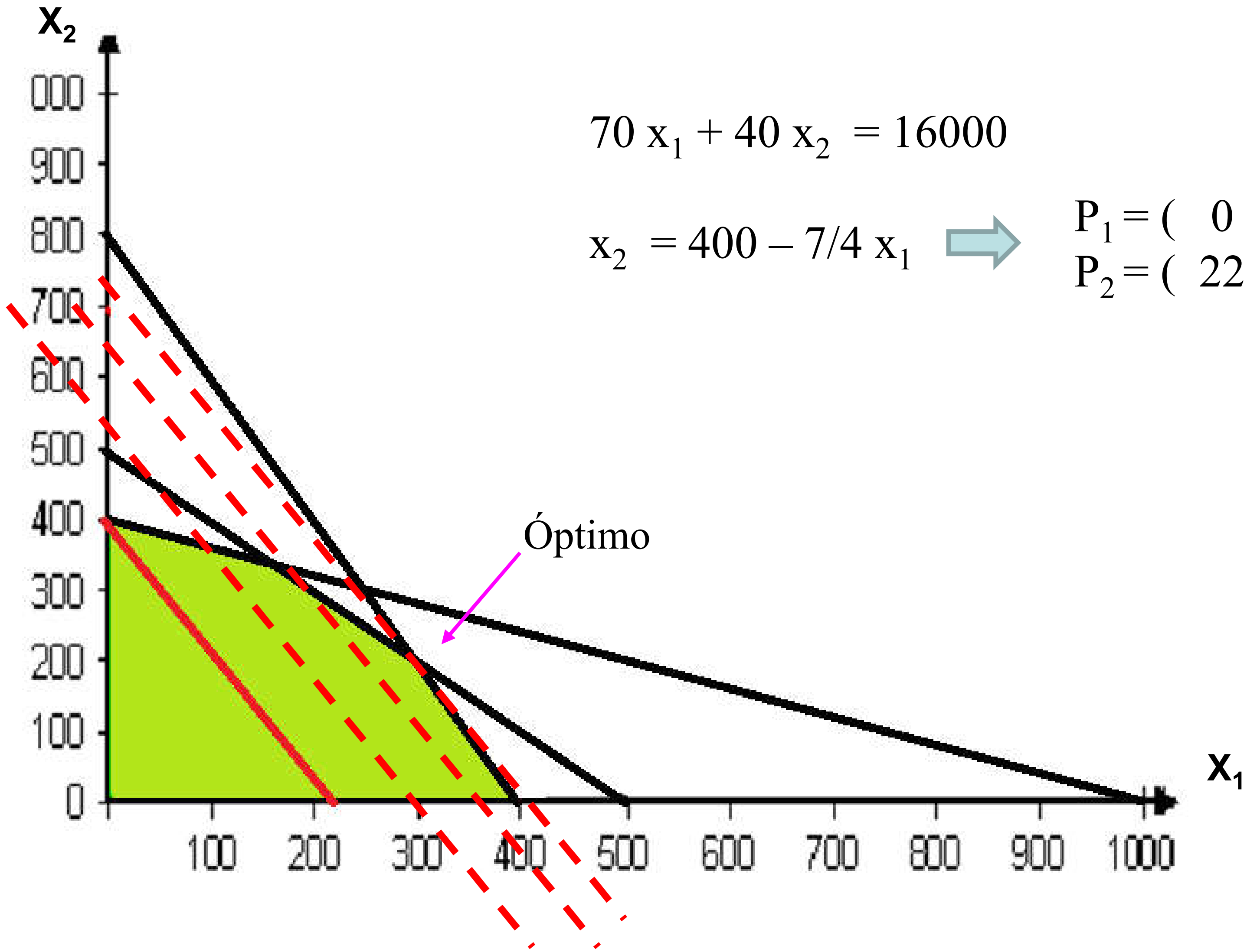
Propiedades de sistema:

- El polígono de soluciones es convexo.
- La solución se encuentra en un punto extremo.
- Toda combinación lineal convexa también es solución.

Solución gráfica



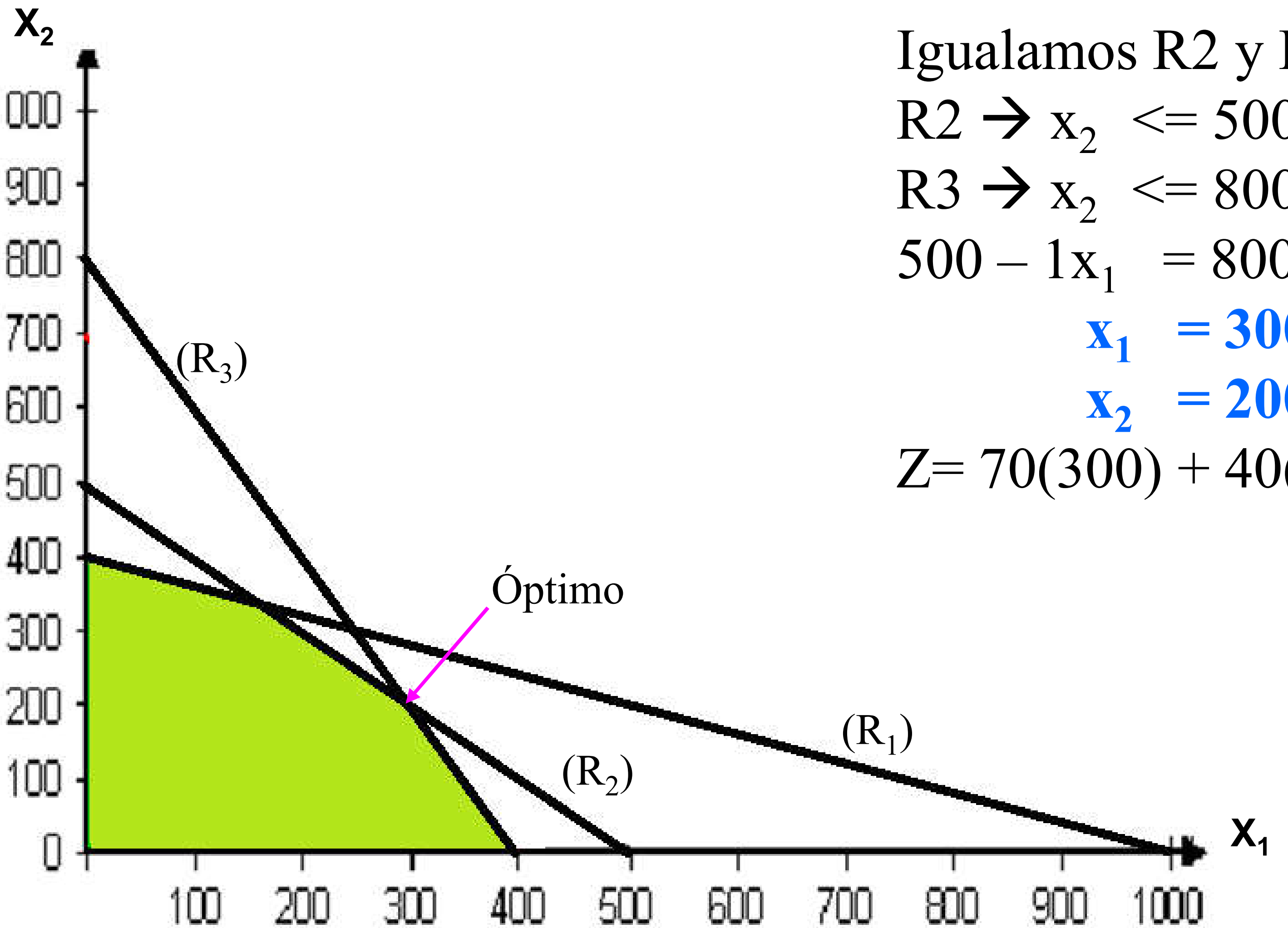
Solución gráfica



$70\ x_1 + 40\ x_2 = 16000$

$x_2 = 400 - 7/4\ x_1$ ⇨ $P_1 = (\ 0\ ,\ 400\ )$
$P_2 = (\ 228\ ,\ 0\ )$

La solución



Igualamos R2 y R3

R2 → $x_2 <= 500 - 1x_1$

R3 → $x_2 <= 800 - 2x_1$

$500 - 1x_1 = 800 - 2x_1$

$\mathbf{x_1 = 300}$

$\mathbf{x_2 = 200}$

Z= 70(300) + 40(200) =**29.000**

Soluciones

Definiciones y conceptos:

- Soluciones.
- Soluciones factibles.
- Soluciones factibles básicas (no degenerada y degenerada).
- Solución factible básica óptima.

Ejemplo 5 de la guía

La *Ser Motors* se dedica a la fabricación de motos de lujo. Fabrica dos tipos de motos M1 y M2. La compañía opina que sus clientes más probables son mujeres y hombres de ingresos altos. Para llegar a estos grupos, Ser Motors lanzó una campaña ambiciosa de publicidad por televisión y decidió comprar comerciales de 1 minuto en dos tipos de programa: series cómicas y partidos de fútbol. Siete millones de mujeres de ingresos altos y dos millones de hombres de ingresos altos ven cada comercial en series cómicas. Dos millones de mujeres de ingresos altos y doce millones de hombres de ingresos altos ven cada comercial en partidos de fútbol. Un comercial de 1 minuto en una serie cómica cuesta 30.000 dólares; y un comercial de 1 minuto en un partido de fútbol cuesta 60.000 dólares. Ser Motors quisiera que por lo menos 28 millones de mujeres de ingresos altos y 24 millones de hombres de ingresos altos vieran los comerciales. Análisis de costos le indican que puede comprar hasta 10 minutos de publicidad entre ambos comerciales. Además, no quiere que los comerciales en partidos de fútbol superen el 50% del total. Utilice un modelo de programación lineal para determinar cómo Ser Motors puede alcanzar sus requerimientos publicitarios a un costo mínimo.

Ejemplo 5 de la guía

PLANTEO DEL PROBLEMA:
1) Variables de decisión
Xsc = Cant. comerciales de 1 min. a contratar en series cómicas para la siguinte campaña.
XSf = cant. de comerciales de 1 min. a contratar en series de futbol para la siguiente temporada.

2) Objetivo= Minimizar los costos totales de la próxima campaña.

3) Restricciones
I) Cant. minima de mujeres que vean los comerciales, 28 mill.
II) Cant. minima de hombres que vean los comerciales, 24 mill.
III) Cant. máx. de comerciales a comprar, 10 comerciales.
IV) Los comerciales en series de futbol, no debe superar el 50% del total.

4) Condición de no negatividad.

Ejemplo 5 de la guía

EL MODELO:

Min. (Z) = 30Xsc + 60Xsf
S. A. 7Xsc + 2Xsf >= 28 --> Cant. min. de mujeres
2Xsc + 12Xsf >= 24 --> Cant. min. de hombres
Xsc + Xsf <= 10 --> cant. máx. de comerciales
Xsf <= 0,5 (Xsc + Xsf) Max. cant. de com. en series de F.
Xsc, Xsf >= 0

Ejemplo 1

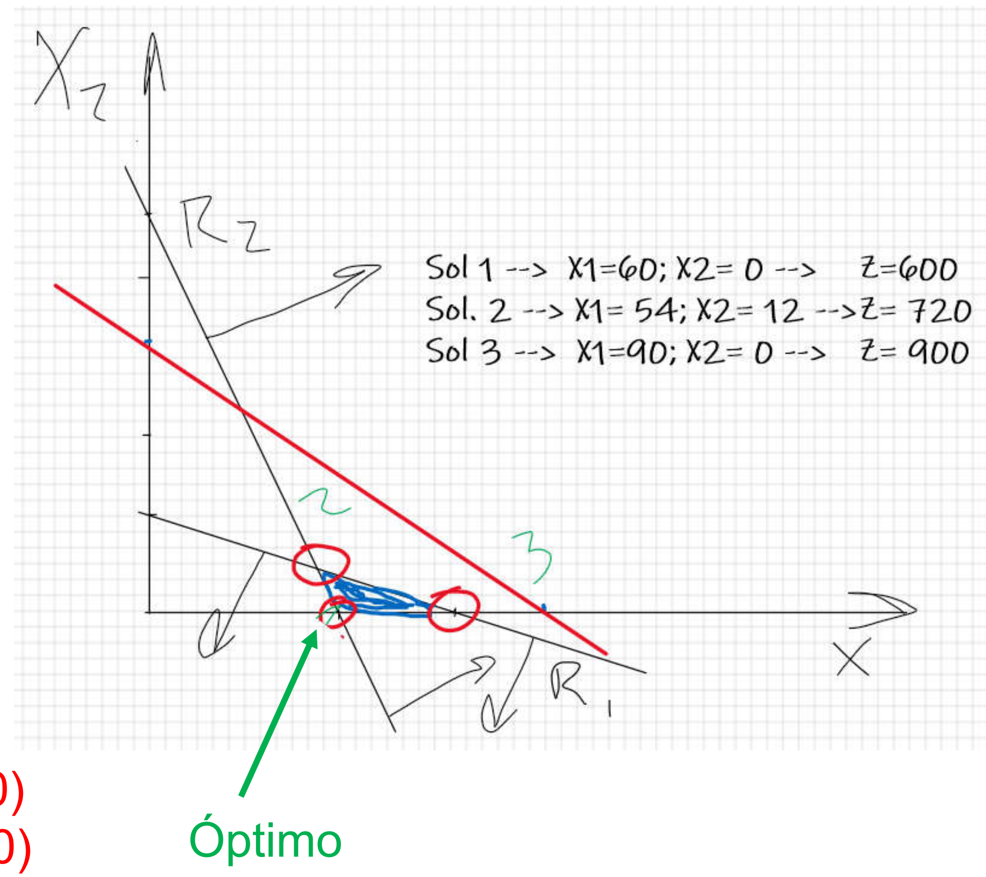
$$
\begin{aligned}
\text{Min } (Z) &= 10X1 + 15X2 \\
\text{S.A.} \quad & 1X1 + 3X2 \leq 90 \\
& 2X1 + 1X2 \geq 120 \\
& X1, \quad X2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solución Ej.1

1X1 + 3X2 <= 90
3X2 <= 90 - 1X1
X2 <= 30 - 1/3X1 --> P1(0, 30)
--> P2(90,0)

2X1 + 1X2>= 120
X2 >= 120 - 2X1 --> P1(0, 120)
--> P2(60, 0)

10X1 + 15X2 = 1200
15X2 = 1200- 10X1
X2 = 80 - 2/3 X1 --> P1 (0, 80)
-- > p2(120 ,0)



Ejemplo

$$\begin{aligned}
\text{Max } (Z) &= 8X1 + 5X2 \\
\text{SA} \quad & 2X1 + 1X2 <= 500 \\
& X1 \quad <= 150 \\
& -3X1 + X2 = 0 \\
& X1,\ X2 >= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 5 de la guía