

Programación lineal: Interpretación del Informe de sensibilidad de Solver

PERFIL DEL CAPÍTULO

- 5.1 Introducción
- 5.2 Forma de restricción de igualdad
- 5.3 Análisis de sensibilidad del modelo de PL de PROTRAC
- 5.4 La producción de Crawler Tread: diálogo con la gerencia (análisis de sensibilidad en acción)
- 5.5 Sinopsis de las cifras de salida de la solución
- 5.6 Interpretación del informe de sensibilidad para los modelos alternativos en hojas de cálculo electrónicas

5.7 Resumen

TÉRMINOS CLAVE

EJERCICIOS DE REPASO

PROBLEMAS

CASO PRÁCTICO: Preguntas relacionadas con el caso Red Brand Canners

CASO PRÁCTICO: Crawler Tread y un nuevo enfoque

CASO PRÁCTICO: Saw Mill River Feed y Grain Company

CASO PRÁCTICO: Kiwi Computer
REFERENCIAS

CÁPSULA DE APLICACIÓN

Planeación de productos en una planta química de China

La Dalian Dyestuff Plant, una de las fábricas de tintas químicas más grandes de China, cuenta con 11 talleres que producen casi 100 tipos distintos de tinturas y otros productos químicos. Dichos productos se venden en los mercados nacionales y extranjeros. Algunos de ellos son productos finales y otros son semiterminados. Por ejemplo, la sosa es un producto cuya fabricación requiere el uso de una tecnología basada en la reacción electrolítica, que genera cloro como subproducto. Para evitar la contaminación del aire, el cloro tiene que ser eliminado o utilizado apropiadamente como materia prima en la elaboración de otros productos.

Con la reforma económica que se está implantando en China, el gobierno, que solía controlar 100% de los productos fabricados en la planta Dalian, sólo controla hoy 20% de esa producción. Este

cambio significa que los gerentes de la planta tienen que decidir ahora qué productos van a fabricar y en qué cantidades. Esto implica un reto especial porque la economía crece y cambia con gran rapidez.

En la Dalian Dyestuff Plant se implantó el uso de un modelo de optimización basado en PL. El objetivo es maximizar las ganancias de la compañía en un periodo de un año. El sistema incluye subsistemas para planeación de la producción, contabilidad y finanzas, inventario y servicios de información. Los resultados de estas operaciones indican que gracias a ese sistema se logró un aumento de por lo menos 4 millones de RMB (cerca de medio millón de dólares estadounidenses) en las ganancias anuales, que significó para la empresa un incremento del 10% en sus ganancias. (Véase Yang.)

5.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 4 dijimos que en un modelo de programación lineal hay muchas cosas más interesantes que el simple hecho de encontrar la solución. Anteriormente señalamos que el proceso para analizar un modelo de optimización usando diferentes valores para los parámetros se conoce como *análisis de sensibilidad*, y más tarde estudiamos en parte los conceptos de geometría que intervienen en un análisis de sensibilidad de PL. En este capítulo nos ocuparemos en detalle de cómo se puede utilizar en la práctica toda la riqueza de información contenida en el análisis de un modelo de PL realizado con Solver. Esto puede ser un problema importante, e incluso cotidiano, para los gerentes del mundo real: el problema de usar correctamente el análisis en hojas de cálculo electrónicas. Nuestra exposición culminará en la sección 5.4, con una situación realista en la cual intervienen un gerente y un constructor de modelos.

5.2 FORMA DE RESTRICCIÓN DE IGUALDAD

Para la optimización de programas lineales, Solver usa el método símplex, que fue diseñado para abordar los modelos que incluyen solamente restricciones de igualdad. Para convertir un modelo de PL con restricciones de desigualdad en uno con restricciones de igualdad, Solver agrega internamente nuevas variables a su representación del modelo PL, las cuales se denominan variables de holgura y de excedente. Como ilustración, recordemos el modelo de PL de PROTRAC

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max} & 5000E + 4000F & & \\
 \text{s.a.} & E + F & \geq & 5 \\
 & E - 3F & \leq & 0 \\
 & 10E + 15F & \leq & 150 \\
 & 20E + 10F & \leq & 160 \\
 & 30E + 10F & \geq & 135 \\
 & E, F & \geq & 0
 \end{array} \tag{5.1}$$

Este modelo de PL tiene dos variables de decisión y cinco restricciones (pasando por alto las restricciones de no negatividad), dos de ellas del tipo “mayor o igual” \geq y otras tres del tipo “menor o igual” \leq . Para convertir este modelo en un modelo equivalente en *forma de restricciones de igualdad*, el Solver agrega variables de holgura a la segunda, tercera y cuarta restricciones (que son las restricciones \leq) y sustrae variables de excedentes de la primera y la quinta restricciones (las restricciones \geq). Denotando por s_1, s_2, s_3, s_4 y s_5 a las cinco nuevas variables, obtenemos el modelo en la forma en que puede ser optimizado por Solver.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max} & 5000E + 4000F & & \\
 \text{s.a.} & E + F - s_1 & = & 5 \\
 & E - 3F + s_2 & = & 0 \\
 & 10E + 15F + s_3 & = & 150 \\
 & 20E + 10F + s_4 & = & 160 \\
 & 30E + 10F - s_5 & = & 135 \\
 & E, F, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 & \geq & 0
 \end{array} \tag{5.2}$$

Observe que las restricciones de no negatividad agregadas por las nuevas variables obligan a éstas a asumir algún valor positivo o cero. De esta manera, las variables de holgura/excedente representan la cantidad adicional que deberá ser agregada/sustraída en el miembro izquierdo para que las desigualdades puedan convertirse en igualdades.

La exposición anterior demuestra dos puntos importantes:

- Cualquier restricción del tipo “menor o igual”, \leq , puede convertirse en una igualdad, agregando al miembro izquierdo una nueva variable de holgura no negativa.
- Cualquier restricción del tipo “mayor o igual”, \geq , puede ser convertida en una igualdad, sustrayendo del lado izquierdo una nueva variable de excedente no negativa.

Esta forma interna del modelo tiene todavía cinco restricciones, pero el número de variables de decisión utilizadas internamente por Solver se ha elevado a siete, en lugar de dos, por la adición de las variables de holgura y de excedente. Observe que dichas variables no aparecen explícitamente en la función objetivo de Solver. Sin embargo, dado que

$$5000E + 4000F = 5000E + 4000F + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 + 0s_5$$

resulta aceptable pensar que las variables de excedente y de holgura han sido incluidas en la función objetivo, pero con coeficiente cero.

VALORES ÓPTIMOS DE LAS VARIABLES DE HOLGURA Y DE EXCEDENTE

En el capítulo 4 usamos el método de solución gráfica para demostrar que $E^* = 4.5$ y $F^* = 7$ es la solución al modelo de PL de PROTRAC (5.1). Esto significa que los valores óptimos de las demás variables (de holgura y de excedente) del modelo con restricciones de igualdad (5.2) están dados por

$$\begin{aligned} s_1^* &= (E^* + F^*) - 5 = 11.5 - 5 = 6.5 \\ s_2^* &= 0 - (E^* - 3F^*) = 0 - (4.5 - 21) = 16.5 \\ s_3^* &= 150 - (10E^* + 15F^*) = 150 - (45 + 105) = 0 \\ s_4^* &= 160 - (20E^* + 10F^*) = 160 - (90 + 70) = 0 \\ s_5^* &= (30E^* + 10F^*) - 135 = (135 + 70) - 135 = 70 \end{aligned}$$

En este punto sería oportuno que repasara usted lo referente a restricciones activas e inactivas, en el capítulo 4. Recordemos lo que se dijo en ese lugar: Una restricción *activa* o *satisfecha en su valor límite o de frontera* es aquella en la que, *en condiciones de optimalidad*, el miembro izquierdo es igual al derecho. Desde el punto de vista geométrico, una restricción activa es aquella en la que se encuentra la solución óptima. Ya vimos que, en el modelo de PL de PROTRAC, las restricciones activas son la tercera y la cuarta. El cálculo anterior demuestra que sus variables de holgura (s_3^* y s_4^*) tienen valor de cero. Por otra parte, la primera, segunda y quinta restricciones son inactivas y sus variables de holgura/excedente son positivas. Por consiguiente, podemos hacer estas generalizaciones:

- Las restricciones activas son aquellas para las cuales los valores óptimos de las correspondientes variables de holgura o de excedente son cero.
- Las restricciones inactivas son aquellas para las cuales los valores óptimos de las correspondientes variables de holgura o de excedente son positivos.

En particular, en condiciones óptimas, cuando una restricción tiene con valor de cero a su variable de holgura o de excedente,¹ eso significa, en términos geométricos, que la solución del modelo se aloja en esa restricción. Un rápido vistazo a la geometría de nuestro nuevo modelo nos revelará también una propiedad importante para interpretar correctamente la información contenida en el Informe de sensibilidad de Solver. Dicha propiedad está relacionada con el número de variables positivas que existen en cualquiera de los vértices (y sobre todo en un vértice óptimo) del conjunto de restricciones.

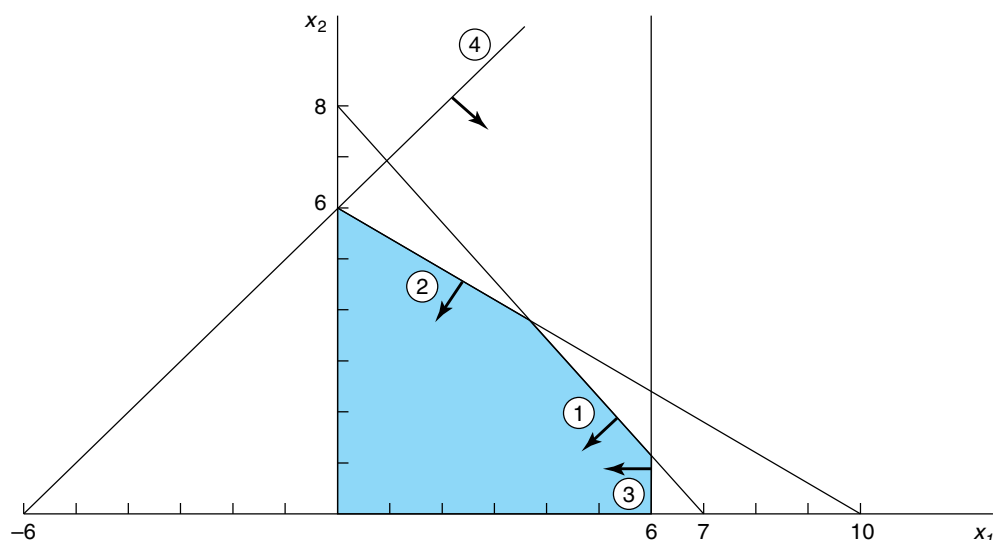
Hemos visto que todas las variables (variables de decisión, de holgura y de excedente) tienen que ser no negativas (es decir, positivas o cero). También demostramos que en cualquier vértice del conjunto de restricciones (y en particular en un vértice óptimo), el número máximo de variables positivas (*mayores que cero*), incluyendo las variables de decisión, las de holgura y las de excedente, es cuando mucho igual al número de restricciones del modelo (sin contar las restricciones de no negatividad).

Para ilustrar esta propiedad de “recuento”, considere el modelo ilustrado en (5.3).

¹De acuerdo con la terminología del capítulo 4, dijimos simplemente que una restricción de ese tipo carece de holgura o de excedente, sin introducir el concepto de una variable precisamente de holgura o de excedente.

FIGURA 5.1

Conjunto de restricciones para el modelo con restricciones de desigualdad (5.3)



$$\begin{array}{llll}
 \text{Max } x_1 + x_2 & & & \\
 \text{s.a. } 8x_1 + 7x_2 & \leq 56 & \textcircled{1} & \\
 -6x_1 - 10x_2 & \geq -60 & \textcircled{2} & \\
 x_1 & \leq 6 & \textcircled{3} & \\
 -x_1 + x_2 & \leq 6 & \textcircled{4} & \\
 x_1, x_2 & \geq 0 & &
 \end{array} \quad (5.3)$$

El conjunto de restricciones de este modelo aparece graficado en la figura 5.1, donde las restricciones apropiadas han sido rotuladas del ① al ④.

Veamos ahora la forma con restricciones de igualdad para el mismo modelo. Es

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max } x_1 + x_2 & & & \\
 \text{s.a. } 8x_1 + 7x_2 + s_1 & = 56 & \textcircled{1} & \\
 -6x_1 - 10x_2 - s_2 & = -60 & \textcircled{2} & \\
 x_1 + s_3 & = 6 & \textcircled{3} & \\
 -x_1 + x_2 + s_4 & = 6 & \textcircled{4} & \\
 x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 & \text{todas no negativas} & &
 \end{array} \quad (5.4)$$

En el modelo original había cuatro restricciones y dos variables. La forma con restricciones de igualdad tiene el mismo número de restricciones, pero con seis variables. Es importante señalar que, cuando nos referimos al número de variables en el modelo de restricciones de igualdad, *contamos tanto las variables de holgura y de excedente como las variables de decisión*. Considerando que en (5.4) figuran dos variables de decisión y cuatro variables de holgura/excedente, en esta forma del modelo existen seis variables. Además, cuando nos referimos al número de restricciones *no contamos las condiciones de no negatividad*.

Nuestra representación geométrica de (5.4) es casi igual a la de (5.3), con la única diferencia de que cada restricción está rotulada con su respectiva variable de holgura o de excedente. Esto se ilustra en la figura 5.2, donde por comodidad hemos rotulado los cinco vértices (usando números romanos) e identificamos también algunos otros puntos que serán de nuestro interés.

El hecho de rotular las restricciones con las variables de holgura y de excedente le permite a usted hacer las siguientes observaciones “visuales”:

1. En cualquier punto interior de la región factible, todas las variables son positivas. Esto se ilustra con el punto P_0 en la figura 5.2. En este punto debe leer directamente $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. Usando los valores y las restricciones de (5.4), podrá calcular físicamente los valores de s_1 , s_2 , s_3 y s_4 en P_0 y verá que también esos valores son positivos. Sin embargo, no es necesario que

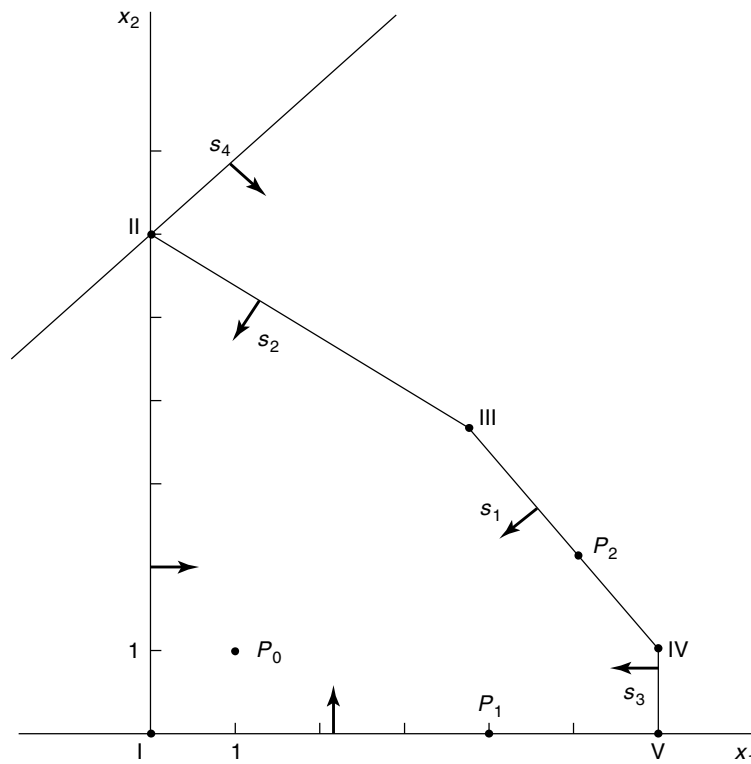


FIGURA 5.2
 Conjunto de restricciones
 para el modelo de PL (5.4) en
 la forma con restricciones de
 igualdad

realice esas operaciones algebraicas, pues la figura nos muestra en forma inmediata que todas las holguras y los excedentes son positivos en P_0 .

2. En cualquier punto del borde o frontera, por lo menos una variable será 0. Esto se ilustra en los puntos P_1 y P_2 . En P_1 verá usted que $x_2 = 0$; todas las demás variables son positivas. En forma similar, en P_2 , que se encuentra sobre la recta de la primera restricción, solamente s_1 es cero. Algunos puntos de interés especial en dicho borde o frontera son los vértices de la región factible. Por ejemplo, dado que el vértice rotulado como III se aloja en las rectas de la primera y segunda restricciones, las dos variables s_1 y s_2 tienen valor de cero en este vértice, y todas las demás variables son positivas. Estos ejemplos muestran que las variables iguales a cero en el borde o frontera pueden ser tanto variables de decisión como variables de holgura o de excedente. El vértice V, por ejemplo, muestra que una variable de decisión (x_2) y una variable de holgura (s_3) pueden simultáneamente ser cero sobre el borde o frontera.

VARIABLES POSITIVAS Y SOLUCIONES UBICADAS EN VÉRTICES

Teniendo como base estas observaciones, ahora podemos ilustrar el resultado principal de esta sección contando las variables positivas en cada uno de los cinco vértices del conjunto de restricciones. La tabla 5.1 muestra el resultado.

Lo que aparece en esa tabla es, sencillamente, *cuáles* de las variables son positivas en cada vértice y, además, *cuántas* de esas variables son positivas. Recuerde que en el modelo (5.4) hay cuatro restricciones. Por tanto, la tabla ilustra un principio general importante:

Para cualquier modelo de PL con restricciones de igualdad, el número de variables positivas en cualquier vértice es menor o igual que el número de restricciones.

Este resultado tiene una consecuencia importante para la solución de una PL en Solver. Recordará usted que en el capítulo 4 dijimos que si existe una solución óptima en un modelo de PL, entonces siempre hay una solución óptima en un vértice (también puede haber soluciones óptimas que no estén en vértices). El método símplex empleado por Solver siempre produce un

TABLA 5.1 Recuento de las variables positivas en los vértices

VÉRTICE	VARIABLES NULAS	VARIABLES POSITIVAS	RECuento POSITIVO
I	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4	4
II	x_1, s_2, s_4	x_2, s_1, s_3	3
III	s_1, s_2	x_1, x_2, s_3, s_4	4
IV	s_1, s_3	x_1, x_2, s_2, s_4	4
V	x_2, s_3	x_1, s_1, s_2, s_4	4

vértice óptimo (suponiendo, por supuesto, que el modelo sea factible y acotado). Además, el método símplex resuelve un modelo con restricciones de igualdad y, para ese tipo de modelos, de acuerdo con la conclusión antes expuesta: el número de variables positivas en *cualquier* vértice (y por lo tanto en un vértice óptimo) es menor que o igual al número de restricciones. En consecuencia, ahora podemos ver una razón por la cual resulta interesante la propiedad anterior de recuento:

La solución de Solver para un modelo de PL siempre tiene como máximo m variables positivas, donde m es el número de restricciones.

Un uso práctico de esta última conclusión es la siguiente:

Cuando la solución de Solver tiene menos de m variables positivas, se dice que la solución es *degenerada*, y en este caso se debe tener especial cuidado al interpretar el Informe de sensibilidad de Solver.

DEGENERACIÓN Y NO DEGENERACIÓN

En virtud de que las ramificaciones de la característica de degeneración son dignas de mención, detengámonos un poco para definir formalmente este concepto. Un vértice como el II de la figura 5.2, en el cual el número de variables positivas es *menor que* el número de restricciones, se conoce como vértice degenerado.² Todos los vértices restantes, I, III, IV y V, en los cuales el número de variables positivas es exactamente igual al número de restricciones, se conocen como vértices no degenerados. Si la solución óptima para un PL tiene menos de m variables positivas, se dice que se trata de una **solución degenerada**, porque se presenta en un vértice degenerado. En forma análoga, una solución que tiene exactamente m variables positivas se conoce como **solución no degenerada**.

Ahora nos hemos familiarizado con el modelo de PL optimizado por Solver, es decir, el modelo con restricciones de igualdad. Hemos visto una propiedad importante de este modelo: cualquier solución óptima producida por Solver tendrá a lo sumo m variables positivas (si tiene exactamente m , significa que es no degenerada), donde m es el número de restricciones del modelo; y también hemos aprendido que la interpretación correcta del Informe de sensibilidad de Solver requiere conocer si la solución óptima es degenerada o no. Examinemos ahora el Informe de sensibilidad de Solver.

²El origen de la frase *vértice degenerado* procede de aspectos técnicos del método símplex. Su presencia no implica la existencia de alguna característica insólita o inconveniente en el modelo mismo. Por otra parte, la connotación emotiva de este término es un recurso útil para recordar el significado de la degeneración: en el caso de un vértice, la degeneración es lo que pasa cuando se acumulan en él demasiadas restricciones, apiladas unas sobre otras.

En esta sección continuaremos el análisis del modelo de PL de PROTRAC. Para facilitar las referencias, vamos a reproducir aquí el modelo, junto con el análisis gráfico presentado inicialmente en la figura 4.11.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max} & 5000E + 4000F & & \text{(contribución máxima a las ganancias)} \\
 \text{s.a.} & E + F & \geq & 5 \quad \text{(requisito de producción mínima) } \textcircled{1} \\
 & E - 3F & \leq & 0 \quad \text{(balance de la posición en el mercado) } \textcircled{2} \\
 & 10E + 15F & \leq & 150 \quad \text{(capacidad en el departamento A) } \textcircled{3} \quad (5.5) \\
 & 20E + 10F & \leq & 160 \quad \text{(capacidad en el departamento B) } \textcircled{4} \\
 & 30E + 10F & \geq & 135 \quad \text{(horas de trabajo empleadas en las pruebas) } \textcircled{5} \\
 & E, F & \geq & 0
 \end{array}$$

Como ya hemos visto, la solución óptima es $E^* = 4.5$, $F^* = 7$. En el capítulo 4 empleamos el término *VO* para referirnos al valor óptimo de la función objetivo. Recuerde que, para el modelo de PL (5.5), tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{VO} = \text{ganancia máxima} &= 5000E^* + 4000F^* \\
 &= 5000(4.5) + 4000(7) = 50,500
 \end{aligned}$$

como muestra la figura 5.3. También hemos visto (véase capítulo 4) que las dos restricciones de capacidad sobre las horas de trabajo disponibles en los departamentos A y B son activas en condiciones de optimalidad.

Las tres restricciones restantes son inactivas. Recuerde usted también que, en condiciones óptimas, el número de variables positivas siempre será menor o igual que el número de restricciones activas o satisfechas en su valor límite o de frontera. Si el número de variables positivas es menor que el número de restricciones activas, entonces la solución es degenerada.

LA SOLUCIÓN

El modelo de PL de PROTRAC optimizado con Solver en el capítulo 3 se ilustra en la figura 5.4, junto con el Informe de sensibilidad de Solver para la solución.

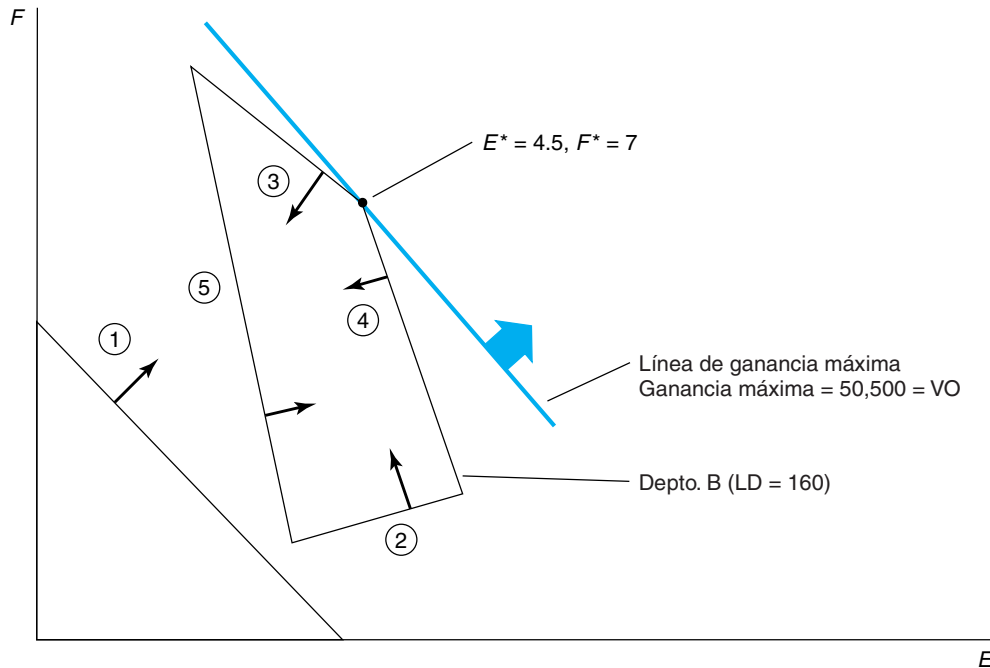


FIGURA 5.3

Otra vez el modelo de PL de PROTRAC

	A	B	C	D	E	F	G
1	Plan de producción de Protrac						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	4.5	7	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	\$5,000	\$4,000	\$50,500			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI	LD	Holgura	
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	160	≤	160	0
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-16.5	≤	0	16.5
9	Horas de pruebas	30	10	205	≥	135	70
10	Total de unidades	1	1	11.5	≥	5	6.5

Informe de sensibilidad en Microsoft Excel 8.0

Variables ajustables

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coefficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Cantidad de producción E-9	4.5	0	5000	3000	2333.33
\$C\$3	Cantidad de producción F-9	7	0	4000	1500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	LD de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$D\$6	Depto. A, LI total	150	150	150	90	47.14
\$D\$7	Depto. B, LI total	160	175	160	73.33	40
\$D\$8	Requerimiento de mezcla, LI total	16.5	0	0	1E+30	16.5
\$D\$9	Horas de pruebas, LI total	205	0	135	70	11+30
\$D\$10	Unidades totales, LI total	11.5	0	5	6.5	1E+30

Incremento y decremento permitidos en la rentabilidad de F sin cambiar ni E^* ni F^*

Refleja el margen válido para el precio sombra de 175

Ganancia extra que se obtendría si se dispusiera de una hora adicional de trabajo en el departamento B

FIGURA 5.4

Solución e Informe de sensibilidad de Solver para el modelo de PL de PROTRAC

SUGERENCIA: Para cada celda del LI de una restricción, Solver explora hacia la izquierda de la hoja de cálculo del modelo hasta que logra encontrar un rótulo, si lo hay. A continuación, explora también arriba de la celda del LI en la hoja de cálculo del modelo hasta que encuentra un rótulo, si lo hay. Los dos rótulos, si se encuentran presentes, son enlazados por Solver para formar el rótulo correspondiente a esa restricción en el Informe de sensibilidad. Este mismo procedimiento se realiza para rotular las celdas que contienen variables de decisión en el Informe de sensibilidad. Así, la elección apropiada de rótulos en la hoja de cálculo del modelo puede ayudar a obtener finalmente un conjunto de rótulos que se documenten por sí mismos en dicho informe.

Haremos aquí las siguientes observaciones:

1. La contribución óptima a las ganancias es \$50,500.
2. Los valores óptimos de las variables de decisión son $E^* = 4.5$, $F^* = 7$.
3. La columna "Holgura" presenta los valores de las variables de holgura o de exceso. En el análisis geométrico (figura 5.3), comprobamos que las restricciones de los departamentos A y B son activas. Todas las demás son restricciones inactivas. En la hoja de cálculo del modelo, podrá usted observar que esto se expresa como valores de holgura cero en las celdas G6 y G7, y valores positivos de holgura o de excedente en las tres restricciones restantes (celdas G8: G10).
4. La solución es no degenerada. En la figura 5.3, sólo dos rectas de restricción tienen su intersección en el vértice óptimo, y existen dos valores positivos para las variables de decisión en dicha intersección. Ésta es la interpretación geométrica. En el modelo de hoja de cálculo optimizado con Solver, la no degeneración se manifiesta por el hecho de que existen 5 variables positivas (E^* , F^* y las holguras en las celdas G8: G10), lo cual es igual al número de restricciones.

Vamos a exponer ahora el análisis incluido en el Informe de sensibilidad de Solver. Es importante señalar que el análisis de sensibilidad se basa en la proposición de que todos los datos, con excepción de un número, se mantienen fijos en el modelo, y pediremos información sobre la forma como cambia la solución óptima a causa de las modificaciones del único dato que se nos permite modificar. La información de nuestro interés podría ser (1) el efecto sobre el VO (es decir, la máxima ganancia posible) y (2) el efecto sobre la política óptima (es decir, los valores de decisión, E^* , F^*). En la sección 5.4 veremos un escenario realista en el cual se emplea el análisis de sensibilidad. En términos matemáticos, el análisis de sensibilidad corresponde al

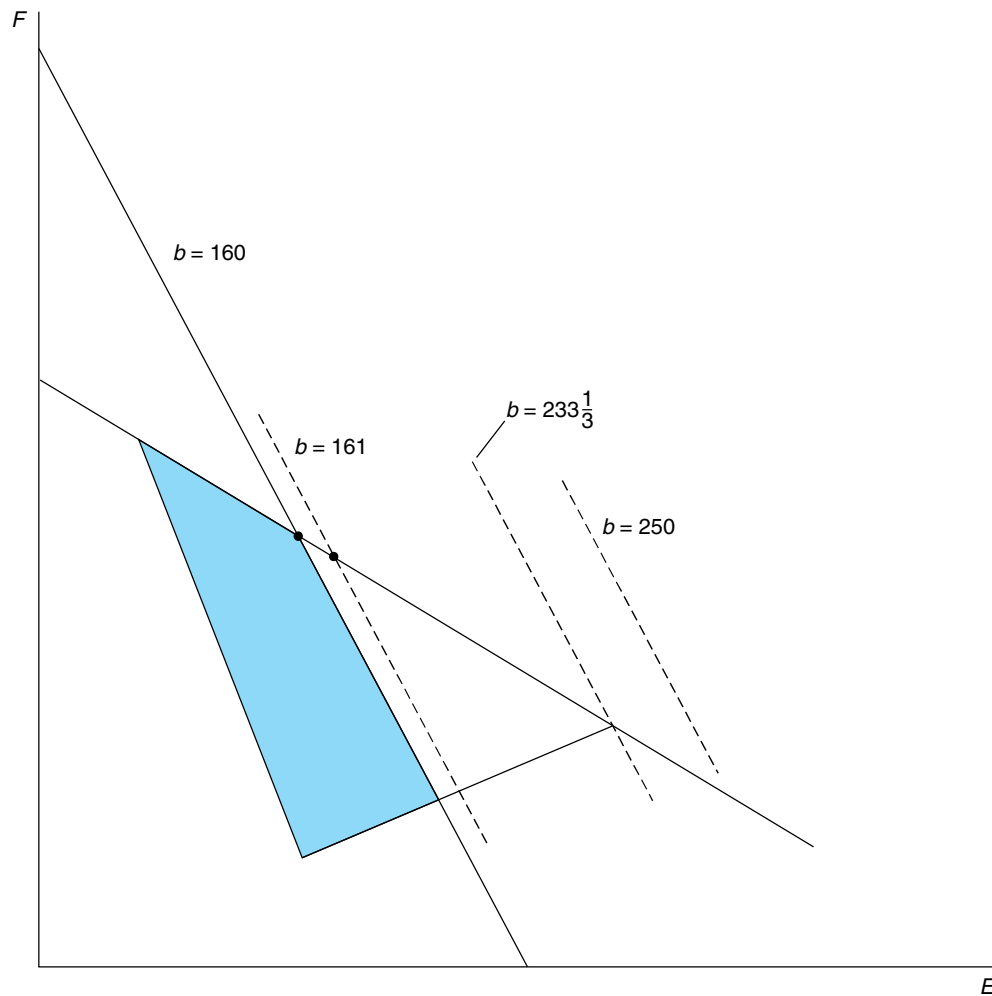


FIGURA 5.5
 Tres nuevos valores de b

concepto de la derivada parcial, donde todas las variables se mantienen constantes, con excepción de una. Esto se conoce también, en economía, como *análisis marginal*.

SENSIBILIDAD DEL LD Y EL PRECIO FIJO

Consideremos primero una situación en la cual mantenemos fijos todos los números, excepto el número de horas de trabajo disponibles en el departamento B. ¿Qué pasaría si dispusiéramos de 161 horas en lugar de 160? ¿Qué efecto tendría esto sobre el VO? Puesto que esta restricción sobre la disponibilidad de horas de trabajo es de la forma \leq si usamos el lenguaje de la sección 4.12 podemos decir que el hecho de aumentar el LD es equivalente a “relajar” la restricción, lo cual significa que ésta se vuelve más fácil de satisfacer. Por eso podríamos esperar con seguridad que el cambio de 160 a 161 no disminuiría el VO. Sin embargo, ¿mejoraría eso realmente el VO? y, en caso afirmativo, ¿en qué medida?

Para empezar, utilizaremos las herramientas que ya hemos adquirido, es decir, las del análisis geométrico, para responder muchas preguntas. A continuación relacionaremos ese análisis con el Informe de sensibilidad de Solver. Hagamos primero que el símbolo b indique el valor del LD sobre la restricción del departamento B. Así, en la figura 5.3, $b = 160$. En la figura 5.5, superponemos la restricción del departamento B para los valores $b = 161$, $b = 233\frac{1}{3}$, y $b = 250$. Por la exposición de la sección 4.11, sabemos que esos tres nuevos valores de b corresponden geoméricamente a traslaciones paralelas (alejándose del origen) de la recta de restricción.

Además, puesto que un aumento de b significa que estamos relajando la restricción, la interpretación geométrica es que el conjunto restringido, si sufre algún cambio, se expandirá. Los nuevos conjuntos de restricciones, junto con las soluciones óptimas correspondientes a la disponibilidad de horas de trabajo en el departamento B, de 161, $233\frac{1}{3}$ y 250, se ilustran en las fi-

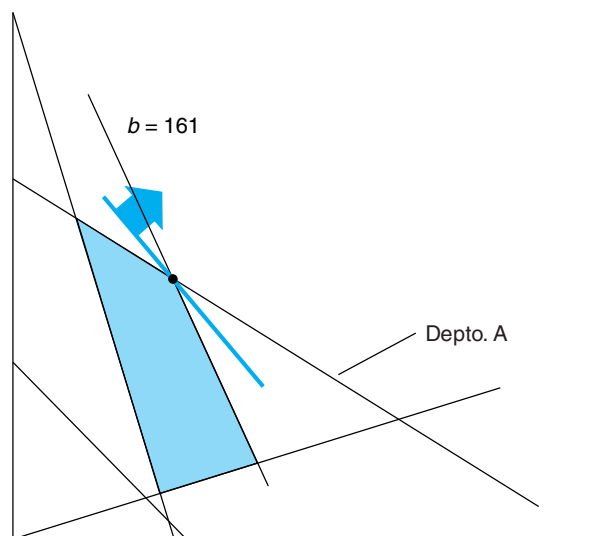


FIGURA 5.6

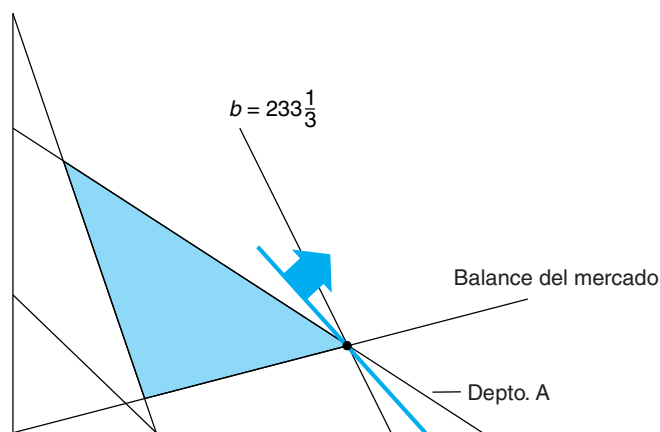
 $b = 161$ 

FIGURA 5.7

 $b = 233 \frac{1}{3}$

guras 5.6, 5.7 y 5.9 respectivamente. Estas figuras revelan algunos hechos interesantes que puede usted verificar directamente modificando el modelo PROTRAC presentado en el capítulo 4, empleando el GLP:

$b = 161$ Cuando $b = 161$ (figura 5.6), las restricciones de los departamentos A y B siguen siendo activas. Esto significa que la nueva solución estará dada por las dos ecuaciones:

$$10E + 15F = 150 \quad \text{y} \quad 20E + 10F = 161$$

Resolviendo, obtenemos $E^* = 4.575$, $F^* = 6.95$.³ La nueva ganancia máxima será entonces

$$VO = 5000E^* + 4000F^* = 5000(4.575) + 4000(6.95) = 50,675$$

Observe que

$$\Delta VO = \text{aumento en las ganancias} = (\text{ganancias cuando } b = 161) - (\text{ganancias cuando } b = 160) = 50,675 - 50,500 = 175$$

³Éste es un punto interesante. Tal vez usted haya supuesto intuitivamente que el hecho de agregar una hora de trabajo al departamento B nos permitiría producir un poco más de E y un poco más de F en cierta mezcla apropiada, pero vemos que eso no sucede en realidad. Nuestra nueva solución muestra que la política óptima produce 0.075 más E, pero 0.05 menos F. La geometría (figura 5.5) nos revela por qué sucede así.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Plan de producción de Protrac						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad de producción	10	3.3333	Ganancias			
4	Margen contrib. unit.	\$5,000	\$4,000	\$63,333			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI	LD	Holgura	
6	Depto. A	10	15	150	≤ 150	0	
7	Depto. B	20	10	233.3333	≤ 233.333	0	
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	-7.64E-14	≤ 0	8E-14	
9	Horas de pruebas	30	10	333.3333	≥ 135	198.33	
10	Total de unidades	1	1	13.3333	≥ 5	8.3333	

La ganancia de 63,333.33 es 175 (233.33 - 160) = 12,833.33, mayor que la ganancia obtenida con $b = 160$

Nuevo valor de b

Tres restricciones activas en lugar de dos, por consiguiente una solución óptima degenerada.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Cantidad producción E-9	10	0	5000	3000	2333.333
\$C\$3	Cantidad producción F-9	3.333	0	4000	3500	1500

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$D\$6	Depto. A, Total LI	150	150	150	200	0
\$D\$7	Depto. B, Total LI	233.333	175	233.333	0	-113.333
\$D\$8	Requerimiento mezcla Total LI	-7.6E-14	0	0	1E+30	0
\$D\$9	Horas de pruebas Total LI	333.333	0	135	198.333	1E+30
\$D\$10	Total unidades, Total LI	13.333	0	5	8.333	1E+30

El incremento permisible es ahora de cero

El mismo precio sombra para $b=160$

FIGURA 5.8

Solución de Solver e Informe de sensibilidad para $b = 233.333$

Como puede apreciarse en la figura 5.4, el valor de 175 también es el **precio sombra** correspondiente a la restricción del departamento B. Lo que acabamos de ilustrar es que, en el Informe de sensibilidad, el precio sombra⁴ para la restricción del departamento B muestra la cantidad en que cambia el valor objetivo óptimo cuando aumenta en una unidad el LD de dicha restricción, manteniendo iguales los demás datos.

En general, el precio sombra de una restricción dada puede interpretarse como la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de dicha restricción, mientras todos los demás datos permanecen iguales.

$b = 233 \frac{1}{3}$ La figura 5.7 muestra que cuando $b = 233 \frac{1}{3}$, las tres restricciones, es decir el departamento A, el departamento B y el balance del mercado, están activas.

La solución de Solver y el Informe de sensibilidad de este modelo revisado se muestran en la figura 5.8. Esta figura señala valores de holgura cero en las tres restricciones activas. Solamente hay cuatro variables positivas. Por el hecho de que este modelo tiene cinco restricciones

SUGERENCIA: El Informe de sensibilidad no es más que una hoja de trabajo en la que no se muestran las líneas de división. Usted puede alterar su formato con el fin de mejorar su apariencia. Importante: el formato decimal predeterminado de cada precio sombra es igual al formato de la celda del LI de su restricción. Si la celda de LI tiene un formato con ninguna o pocas posiciones decimales, podría aparecer un precio sombra de 0 siendo que, de hecho, se trata de una fracción pequeña, como por ejemplo 0.023. Acostúmbrese a pasar el cursor sobre las entradas del Informe de sensibilidad que muestren un 0, a fin de comprobar si realmente es 0 o es una cifra pequeña que requiera de la especificación de un formato con más posiciones decimales.

⁴Se le llama "precio" porque refleja el precio máximo que usted estaría dispuesto a pagar por una hora adicional de capacidad. Se le llama precio "sombra" porque su valor se mantiene enmascarado o sombreado hasta que se optimiza el modelo y Solver efectúa el análisis de sensibilidad.

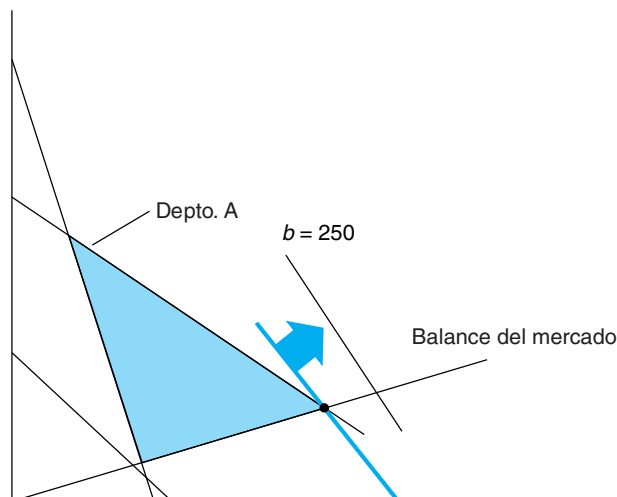


FIGURA 5.9

 $b = 250$

y considerando que la solución óptima sólo tiene cuatro variables positivas, la solución es *degenerada*, de acuerdo con la definición propuesta en la sección 5.2. Obsérvese en la salida que la solución actual es $E^* = 10$, $F^* = 3\frac{1}{3}$. Y además,

$$VO = 5000E^* + 4000F^* = 5000(10) + 4000(3\frac{1}{3}) = 63,333\frac{1}{3}$$

Cuando $b = 233\frac{1}{3}$, el LD de la restricción de mano de obra del departamento B ha aumentado $73\frac{1}{3}$ unidades por encima del valor original de 160. En forma consecuente con la interpretación anterior del precio sombra, que se dio como 175, vemos que el VO ha aumentado en

$$\Delta VO = 63,333\frac{1}{3} - 50,500 = 12,833\frac{1}{3} = (175)(73\frac{1}{3})$$

$b > 233\frac{1}{3}$ Cuando b aumenta a $233\frac{1}{3}$ o más, las figuras 5.7 y 5.9 muestran que la restricción de mano de obra sobre el departamento B se vuelve redundante. Los valores de E^* y F^* y el VO se conservan como en las figuras 5.7 y 5.8. Por ejemplo, en la figura 5.10 aparece la solución de Solver y el Informe de sensibilidad correspondientes a $b = 250$.

Observe que nuevamente se trata de una solución no degenerada y que ahora las restricciones activas (es decir, las que tienen una holgura de 0) son la del departamento A y la de balance del mercado (compárelas con la figura 5.9). Observe también que el precio sombra de la restricción del departamento B ha disminuido de 175 a cero. Este cambio en el precio sombra demuestra que la interpretación de su significado, que dimos anteriormente, deberá restringirse a un rango específico de valores de su LD. El rango de valores de LD dentro de los cuales el precio sombra permanece constante se conoce como **rango permisible del LD**. El rango apropiado aparece en el Informe de sensibilidad bajo la sección titulada “Restricciones”, en las columnas “Incremento permisible” y “Decremento permisible”.

Por tanto, los informes de sensibilidad de Solver que aparecen en las figuras 5.4, 5.8 y 5.10 nos indican que

1. Cuando $b = 160$ (figura 5.4), el precio sombra de 175 es válido para un incremento permisible (de b) de $73\frac{1}{3}$ horas y un decremento permisible de 40 horas. Puesto que $160 - 40 = 120$ y $160 + 73\frac{1}{3} = 233\frac{1}{3}$, vemos que, *para valores de b entre 120 y $233\frac{1}{3}$ horas, el cambio del VO por cada unidad de aumento del LD, conservándose fijos los demás datos, es de 175.*
2. Cuando $b = 233\frac{1}{3}$ (figura 5.8), el precio sombra permanece en 175, pero el incremento permisible es de 0, lo cual significa que el valor de 175 no se aplica a valores de LD mayores que $233\frac{1}{3}$. De hecho, el análisis geométrico muestra que la restricción se vuelve inactiva y redundante cuando $b > 233\frac{1}{3}$. *Los pequeños cambios en el LD de una restricción inactiva no pueden afectar el VO y, por tanto, en el caso de las restricciones inactivas, el precio sombra siempre será cero.*

	A	B	C	D	E	F	G
1	Plan de producción de Protrac						
2	Producto:	E-9	F-9				
3	Cantidad producción	10	3.3333	Ganancia			
4	Margen contrib. unit.	\$5,000	\$4,000	\$63,333			
5	Restricciones	Uso de recursos		Total LI	LD	Holgura	
6	Depto. A	10	15	150	≤	150	0
7	Depto. B	20	10	233.333	≤	250	17
8	Requerimiento de mezcla	1	-3	7.1E-15	≤	0	-7E-15
9	Horas de pruebas	30	10	333.333	≥	135	198.33
10	Total de unidades	1	1	13.3333	≥	5	8.3333

Cuando la restricción del departamento B es redundante, no cambian las ganancias

Esta restricción ahora es redundante, como se aprecia en la figura 5.9

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coefficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Cantidad producción E-9	10	0	5000	1E+30	2333.333
\$C\$3	Cantidad producción F-9	3.333	0	4000	3500	19000

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$D\$6	Depto. A, Total LI	150	422.222	150	10.714	89.25
\$D\$7	Depto. B, Total LI	233.33	0	250	1E+30	16.667
\$D\$8	Requerimiento mezcla Total LI	-7.11E-15	777.778	0	3.75	25.5
\$D\$9	Horas de pruebas Total LI	333.333	0	135	198.333	1E+30
\$D\$10	Total unidades, Total LI	13.3333	0	5	8.333	1E+30

La restricción ahora está inactiva y el precio sombra es cero

El incremento permisible se ha vuelto infinito

FIGURA 5.10

Solución e Informe de Sensibilidad de Solver con $b = 250$

3. Cuando $b = 250$ (figura 5.10) podemos ver que, con la restricción relevante inactiva, el precio sombra es prácticamente cero y el incremento permisible es infinito.⁵ Es decir que, para cualquier aumento posterior de b , la restricción permanecerá inactiva y el precio sombra seguirá conservando el valor de 0. En la figura 5.10, el decremento permisible de 16.66 hará que el valor del LD vuelva a ser $233\frac{1}{3}$. Para valores de b menores que $233\frac{1}{3}$, hemos visto en la figura 5.8 que el precio sombra es 175, y no cero.

En resumen,

1. El precio sombra de una restricción cualquiera se puede interpretar como la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de dicha restricción (es decir, el cambio por aumento unitario del LD), mientras los demás datos permanecen sin cambio.⁶ La interpretación del precio sombra solamente es válida dentro de cierto rango del LD dado. Dicho rango se especifica en las columnas tituladas Incremento permisible y Decremento permisible, en la sección de Restricciones del Informe de sensibilidad. Se trata de un rango en el cual el precio sombra permanece constante. Sin embargo, fuera de este rango permisible, el precio sombra puede cambiar a otro valor.
2. De acuerdo con la interpretación anterior, el precio sombra de una restricción inactiva siempre será cero. Si una restricción es inactiva, significa que dicha restricción tiene holgura o excedente (es decir, que no está satisfecha en su valor límite o frontera).
3. Nótese que la información de sensibilidad del LD ofrecida por el Informe de sensibilidad no nos dice cómo cambia la decisión óptima E^* , F^* ; simplemente explica el modo en que cambiará el VO a medida que cambia el LD.

⁵El número más grande que puede representar Excel es 1E+30, es decir, un 1 seguido de 30 ceros. Para efectos prácticos, esta cifra se considera infinitamente grande según la escala numérica manejada en el modelo de PL original de PROTRAC.

⁶El Informe de sensibilidad no es aplicable cuando se modifica más de un parámetro.

4. Cuando encontramos una solución degenerada, algunos de los precios sombra tienen un incremento o decremento permisible de cero. En este caso sólo obtenemos del Informe de sensibilidad una cantidad limitada de información. De hecho, únicamente sabemos acerca del efecto que causan los cambios unilaterales en el LD sobre el VO.

SENSIBILIDAD DE COEFICIENTES DE FUNCIÓN OBJETIVO Y SOLUCIONES ÓPTIMAS ALTERNATIVAS

Considere el incremento del coeficiente de F en la función objetivo; es decir, aumente su ganancia por unidad manteniendo fijo el coeficiente de E . Ya hemos visto (en la figura 4.20) que los contornos de la función objetivo se vuelven más planos (es decir, con una pendiente menos negativa) a medida que dicho coeficiente va aumentando. La figura 5.3 muestra que la solución óptima se queda en el vértice $E^* = 4.5$, $F^* = 7$ hasta que el coeficiente de F aumenta lo suficiente para que los contornos de la función objetivo queden paralelos a la restricción ③. Cuando los contornos de la función objetivo son paralelos a la restricción ③, hay *dos* soluciones óptimas en vértices: el vértice actual ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) y el vértice determinado por la intersección de las restricciones ③ y ⑤. En general, se emplea el término **soluciones óptimas alternativas** en las situaciones como ésta, donde tenemos más de un conjunto de variables de decisión que arrojan el mismo valor óptimo para la función objetivo.

Si el coeficiente de F continúa aumentando, la solución actual ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) ya no será óptima y el punto determinado por la intersección de las restricciones ③ y ⑤ será el que represente la única solución óptima. El incremento permisible del coeficiente de F , por tanto, es determinado por el aumento del coeficiente que hace que los contornos de la función objetivo sean paralelos a la restricción ③. Aquí podríamos preguntar: ¿Cuándo sucede esto?

Los contornos de la función objetivo son paralelos a la restricción ③ cuando las pendientes de las dos rectas tienen el mismo valor, lo cual significa que los coeficientes satisfacen la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{coeficiente de } E \text{ en } ③}{\text{coeficiente de } F \text{ en } ③} = \frac{\text{coeficiente de } E \text{ en objetivo}}{\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo}}$$

Por tanto

$$\frac{10}{15} = \frac{5000}{\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo}}$$

y, por tanto

$$\text{coeficiente de } F \text{ en objetivo} = (5000) (15/10) = 7500$$

El coeficiente actual de F en la función objetivo es 4,000. Se vuelve paralelo a ③; es decir, se presentan soluciones óptimas alternativas si este valor sube hasta 7,500. Luego, la solución óptima actual permanece válida siempre y cuando el aumento del coeficiente de F sea $\leq 3,500$. *A esto se le llama incremento permisible del coeficiente de F* y es el valor mostrado en la figura 5.4. Esta combinación de álgebra y geometría explica tanto el significado como el valor de esta entrada del informe.

En general, los **rangos de coeficientes objetivo** indican los rangos en los cuales no ocurrirá ningún cambio en la solución óptima. Es más, observando cómo el cambio de los coeficientes afecta la pendiente de la función objetivo, podemos hacer las siguientes generalizaciones importantes:

Al cambiar los coeficientes de la función objetivo cambia la pendiente de los contornos de dicha función. Este cambio de la pendiente puede afectar o no la solución y el valor óptimo de la función objetivo.

Recuerde ahora que, a medida que se incrementó el coeficiente de F (conservando sin cambio alguno el coeficiente de E), llegó un momento en el cual obtuvimos una nueva solución con la que aumentó el valor óptimo de F . Este resultado va de acuerdo con nuestra intuición, pues el aumento de rentabilidad de F no provocaría que usted produzca F a un nivel menor. Este caso ilustra un concepto general:

En los modelos Max, el aumento de las ganancias de una actividad y la conservación sin cambio de los demás datos no pueden reducir el nivel óptimo de dicha actividad.

La situación para el caso de un modelo de minimización de costos es simplemente la inversa. Puesto que queremos minimizar el costo total, ciertamente no podríamos esperar que el aumento del costo de una actividad, mientras se conservan sin cambios los demás datos, condujera a un nivel óptimo mayor de tal actividad. Este caso ilustra otro concepto general:

En los modelos Min, el aumento del costo de una actividad mientras se conservan inalterados los demás datos no puede aumentar el nivel óptimo de dicha actividad.

Significado de los rangos de coeficientes objetivo Ahora podemos resumir los puntos importantes que conciernen a los rangos de coeficientes objetivo del Informe de sensibilidad. Al interpretar esta parte del informe, usted debe tener cuidado de distinguir las soluciones no degeneradas de las degeneradas.

En las soluciones no degeneradas:

1. Las columnas Incremento permisible y Decremento permisible de la parte de Celdas cambiantes del informe deben decirle cuánto puede aumentar o disminuir el coeficiente de una variable dada en la función objetivo, sin alterar la solución óptima, suponiendo que todos los demás datos se mantienen fijos. Queda claro que, a medida que varían las ganancias dentro de este rango, los valores de VO están dados por

$$VO = 5000E^* + [(ganancia\ de\ F) \cdot F^*]$$

Para ilustrar el caso, imagine que al coeficiente de F se le asigna el valor 6,000, que cae dentro del rango permisible indicado en la figura 5.4. Por tanto, la solución permanece en ($E^* = 4.5$, $F^* = 7$) y también

$$VO = 5000E^* + 6000F^* = 5000(4.5) + 6000(7) = 64,500$$

2. Cuando cambie un coeficiente en una cantidad menor de lo permisible, la solución óptima actual permanece como la única solución óptima para el modelo.
3. Cuando aumente un coeficiente en particular en la cantidad permisible, en el caso de los modelos Max, habrá otro vértice como solución óptima alternativa con un valor óptimo mayor para la variable identificada. (Para el caso de los modelos Min, el aumento de un coeficiente en la cantidad permisible producirá un vértice óptimo alternativo con un valor óptimo menor para la variable identificada.)
4. Cuando disminuya el coeficiente de una variable dentro de la cantidad permisible, existirá una solución de vértice óptima alternativa en la cual la variable identificada tendrá un valor óptimo menor (en el caso de los modelos Max) y mayor (en el caso de los modelos Min).

Otro hecho interesante se aplica a las soluciones *no degeneradas*. Cuando vea, para algún coeficiente objetivo del Informe de sensibilidad, una entrada de cero bajo las columnas de Incremento o Decremento permisible, sabrá que existe cuando menos una solución de vértice óptima alternativa para tal modelo. Más aún, cuando haya un óptimo alternativo, aparecerá dicha señal. Este principio se ilustra en la figura 5.11, que es un ejemplo hipotético de PL de maximización con dos variables de decisión y tres restricciones de desigualdad. El contorno de la función objetivo es paralelo a la segunda restricción (rotulada con ②) y, empleando la técnica grá-

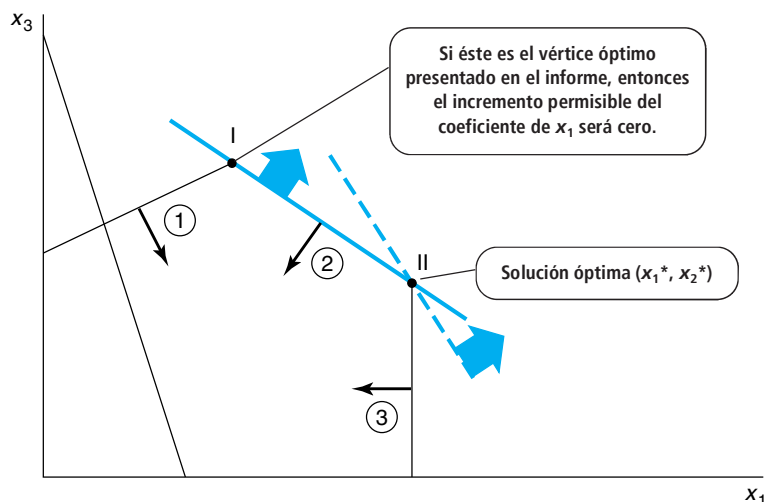


FIGURA 5.11

Ejemplo de óptimos
alternativos

fica de solución, puede ver que los vértices rotulados con I y II son los óptimos alternativos de este modelo. Solver, debido al método símplex, del cual se vale para optimizar el modelo de PL, sólo determinará como solución óptima uno de estos dos vértices y el Informe de sensibilidad sólo se aplicará a tal vértice.⁷ Supongamos que el vértice I es la solución encontrada por Solver. La geometría de la figura 5.11 indica que cualquier incremento del coeficiente de x_1 cambiará el contorno de la función objetivo a una inclinación parecida a la de la línea punteada y que el vértice II se vuelve la única solución óptima. El Informe de sensibilidad de Solver acerca de la solución del vértice I tendría, como señal de este fenómeno, un valor de cero en la columna de Incremento permisible para los cambios del coeficiente objetivo de x_1 .

Consideremos ahora el caso de un Informe de sensibilidad que muestra una *solución óptima degenerada*. En este caso, deben hacerse dos advertencias.

En el caso de una solución degenerada

1. Deben ignorarse las señales descritas antes para los óptimos alternativos.
2. Siempre y cuando un coeficiente de la función objetivo varíe dentro del rango indicado, la solución óptima no cambiará. Este hecho también fue válido en el caso no degenerado. Sin embargo, en este último caso, se obtuvieron óptimos alternativos cuando el coeficiente se modificó hasta el límite de su rango; y después, a medida que se siguió avanzando por esta dirección de cambio, se perdió la solución óptima original. En la situación degenerada, este resultado ya está garantizado. Lo único que podemos decir es que el coeficiente de una función objetivo debe cambiar en una cantidad *cundo menos igual, y posiblemente mayor que*, las cantidades permisibles indicadas, para que se pueda producir una nueva solución óptima.

COSTOS REDUCIDOS

Hemos explicado todo lo que hay en el Informe de sensibilidad, excepto las entradas bajo la columna de “Costo reducido”. Las siguientes observaciones se relacionan con dichas entradas. Ésta es otra situación en la cual, a fin de realizar una interpretación correcta, es necesario determinar primero si la solución es no degenerada.

⁷Cuando existen óptimos alternativos en un modelo de PL, con frecuencia sucede que las diferencias imperceptibles en la precisión aritmética de la unidad central de proceso provocan que Solver, al ser ejecutado en ciertos modelos de computadora, encuentre una solución de vértice óptimo alternativo, mientras que la misma hoja de trabajo procesada por Solver en otra máquina encontrará una solución de vértice óptimo alternativo diferente. Por ejemplo, Excel-Solver utilizado en una Macintosh y Excel-Solver en una PC con Windows, procesando la misma hoja de trabajo, pueden converger en soluciones de vértices óptimos alternativos diferentes.

1. En las soluciones *no degeneradas*, el costo reducido de cualquier variable de decisión en particular se define como *cuánto tendría que cambiar el coeficiente de dicha variable, en la función objetivo, para tener un valor óptimo positivo*. Por tanto, si una variable ya es positiva en la optimalidad, su costo reducido es cero (como sucede con ambas variables de decisión de las figuras 5.4, 5.8 y 5.10). Si el valor óptimo de una variable es cero, entonces, según la definición de costo reducido, usted puede ver que dicho costo es el incremento o el decremento permisible que corresponde a dicha variable (uno de estos valores será infinito y el otro corresponderá al costo reducido). Por ejemplo, suponga que cambiamos los datos del modelo *E* y *F* de PROTRAC, de tal manera que el valor óptimo $E^* = 0$. En consecuencia, el costo reducido de *E* es la cantidad en la cual tendría que *aumentar* su margen de contribución (el coeficiente de *E* en la función objetivo) a fin de tener una solución óptima con $E^* > 0$. Ésta es precisamente la entrada que, como lo podrá usted ver, corresponde a *E* en la columna de Incremento permisible. En este caso, para cualquier disminución del coeficiente de *E* (lo cual provocaría que *E* produjera menos ganancias), el valor E^* se mantendría en cero. Por consiguiente, la entrada de Decremento permisible sería infinita en este caso.

2. Puede darse otra interpretación equivalente al costo reducido de una solución no degenerada. En las soluciones no degeneradas, el costo reducido de una variable de decisión (cuyo valor óptimo actual es cero) es la razón (por cantidad unitaria) a la cual se afecta el valor objetivo a medida que “se fuerza” la variable hacia una solución óptima. En el ejemplo anterior, con $E^* = 0$, el VO disminuiría si nos viéramos obligados a encontrar una solución óptima con la restricción adicional $E = 1$. (Para comprobar cómo *disminuye* el VO, basta que observe usted que el valor óptimo de *E* es cero en el modelo actual. Por consiguiente, si hacemos que *E* sea 1, lo único que podemos obtener es una retribución menor.) Esta *razón de disminución*, a medida que se fuerza inicialmente E^* para que tenga un valor positivo, estaría expresada por el costo reducido de *E*.

Recuerde que el precio sombra de una restricción da la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD de tal restricción. En virtud de que en este ejemplo $E^* = 0$, ocurre que la restricción de no negatividad de *E* está activa. Si se obliga a *E* a ser positivo, el resultado equivale a elevar el LD de su restricción de no negatividad. Por tanto, esta interpretación equivalente se articula con facilidad: para los modelos que tengan restricciones de no negatividad, el costo reducido es simplemente el precio sombra de la restricción de no negatividad de una variable de decisión. En la sección 5.4 aparecen otros ejemplos de ambas interpretaciones.

3. Considere ahora una *solución degenerada* con una variable de decisión cuyo valor óptimo es cero. El coeficiente de la variable en la función objetivo debe cambiar *por lo menos, y posiblemente más que*, el costo reducido para que haya una solución óptima, apareciendo tal variable con un nivel positivo.

Con esto completamos nuestra búsqueda sobre el significado de las distintas entradas del Informe de sensibilidad de Solver. A pesar de que nuestro estudio ha sido introductorio, si usted ya ha dominado el material expuesto a partir del capítulo 3 y hasta este punto, ahora será capaz de aplicar la PL a situaciones prácticas, formular modelos, optimizarlos con Solver e interpretar correctamente el Informe de sensibilidad de Solver.⁸ Nuestra intención en la sección 5.4 es familiarizarlo más con la interpretación de modelos, mostrándole cómo se podría emplear el Informe de sensibilidad en un escenario realista. El enfoque es gerencial, con énfasis en la información de sensibilidad y su utilidad. En la sección 5.5 presentamos una sinopsis de cómo se debe interpretar el Informe de sensibilidad. Por último, en la sección 5.6 contaremos una historia que le prevendrá sobre las trampas del análisis de sensibilidad.

5.4

LA PRODUCCIÓN DE CRAWLER TREAD: DIÁLOGO CON LA GERENCIA (ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ACCIÓN)

Este modelo se presentó en la sección 3.10. Recuerde que el mineral de cuatro localidades diferentes se mezcla para fabricar rodamientos para tractores tipo oruga. Cada mineral contiene tres elementos esenciales que, para simplificar, llamaremos A, B y C, los cuales tendrán que aparecer en la mezcla final a ciertos niveles mínimos. PROTRAC paga diferentes precios por tonelada de mineral, según la mina de la cual provengan. La mezcla de costo mínimo se obtiene resolviendo el siguiente modelo de PL, donde T_i = la fracción de tonelada de mineral proveniente de la localidad *i* que hay por tonelada de mezcla.

⁸El Informe de límites de Solver es de importancia práctica limitada y no lo cubriremos.

Wellborn Cabinet, Inc. es dueña de una fábrica de archiveros en Alabama. La fábrica consta de un aserradero, cuatro hornos de secado y una planta de ensamblado de archiveros de madera que dispone de una sierra para cortar los componentes de los archiveros. Wellborn obtiene la madera para la fabricación de los archiveros de dos maneras: (1) comprando troncos para procesarlos en su aserradero y preparar las tablas que utiliza en la planta de ensamblado; (2) comprando tablas previamente aserradas en otra parte. Actualmente 73% de la entrada proviene del aserradero de la compañía.

Tanto los troncos como las tablas se clasifican como #1 y #2; #1 es de mayor calidad y más cara. Aproximadamente dos terceras partes del volumen total de los troncos que había estado comprando eran del #1. Las tablas compradas, que correspondían al 27% de la madera utilizada, se clasificaban en dos tipos: verdes (18%), las cuales tenían que secarse en los hornos de secado de la compañía, y secas (9%). Casi toda la madera seca también correspondía a la clasificación #1.

El costo de la madera representa aproximadamente 45% del costo total del material para la fabricación de archiveros. En esta situación, la administración quería saber si su enfoque de la compra de madera para la planta de ensamble de archiveros era el más económico. Para ayudarle a contestar esta pregunta, el Centro de asistencia técnica de la Universidad de Auburn, en colaboración con la Escuela de silvicultura, analizó la operación de la compañía. Se construyó un modelo de PL de la producción de componentes, incorporándole varias restricciones que incluían las capacidades del aserradero y de los hornos de secado, la salida requerida de componentes y el suministro disponible de materias primas.

La optimización del modelo reveló que la compañía podía minimizar el costo de la producción de componentes comprando únicamente dos tipos de madera: troncos de grado #2 con extremos pequeños con diámetro de 9 a 15 pulgadas (88%, de acuerdo al volumen) y troncos verdes comunes del #2 (12%). Esta política de compras reduciría los costos de materias primas de Wellborn en casi una tercera parte, un ahorro anual de unos \$412,000.

El modelo proporcionó a los administradores mucha más información útil:

- Los precios sombra asociados con la compra de troncos de varios tamaños permitía a la administración efectuar la selección con la mejor relación costo-beneficio de los troncos disponibles en cualquier momento dado.
- Los análisis de sensibilidad revelaron los rangos de precios para los cuales permanecería óptima la solución prescrita por el modelo. En particular, indicaba que reducciones de hasta 20% en el precio de la madera seca de grado #1 no afectarían la política de compras óptima.
- Un valor de holgura de cero para la operación de los hornos de secado indicó que esta operación era un cuello de botella: la capacidad de los hornos de secado era el único factor que limitaba el aumento de la producción. Un aumento de 22% en la capacidad de los hornos de secado permitiría un incremento de 29% en la salida de componentes sin ser necesario efectuar ningún otro cambio. (Véase Carino *et al.*)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } 800T_1 + 400T_2 + 600T_3 + 500T_4 & \text{(costo total)} \\
 \text{s.a. } 10T_1 + 3T_2 + 8T_3 + 2T_4 \geq 5 & \text{(requerimiento de A)} \\
 90T_1 + 150T_2 + 75T_3 + 175T_4 \geq 100 & \text{(requerimiento de B)} \\
 45T_1 + 25T_2 + 20T_3 + 37T_4 \geq 30 & \text{(requerimiento de C)} \\
 T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 1 & \text{(condición de mezcla)} \\
 T_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 &
 \end{array}$$

Estudiemos y analicemos ahora los informes en hoja de cálculo electrónica de la solución de este modelo. Póngase usted en el lugar del gerente responsable de la planeación de la producción futura. Tiene una serie de preguntas que formular. El modelador le responde.

Gerente Antes que nada, ¿cuál es la solución a nuestro modelo de PL?
Ya encontré el óptimo del modelo con Solver, y éste es el resultado (véase la figura 5.12) *Por “solución” entiendo que se refiere a los valores óptimos de las variables de decisión. Usted puede ver que los valores óptimos (celdas B3:E3) son aproximadamente T_1 5 0.26, T_2 5 0.70, T_3 5 0.04, T_4 5 0.00. (Por razones prácticas, en la hoja de trabajo se rotula T_1 como T1, a T_2 como T2, etc., y a partir de aquí emplearemos esas etiquetas.)*

Gerente Muy bien. ¿Cuál sería el costo de una tonelada de esta mezcla?
El VO, que es el valor de la función objetivo, también está identificado. Usted puede observar que el costo mínimo es de \$511.11 (celda F4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Plan de producción de Crawler Tread								
2	Mina	T1	T2	T3	T4				
3	Fracciones de tonelada	0.259	0.704	0.037	0.000	Costo total			
4	Costo/tonelada	\$800	\$400	\$600	\$500	\$511.11			
5	Restricciones	Composición por tonelada				Total	LD	Holgura	
6	A	10	3	8	2	5.00	≥	5	0.00
7	B	90	150	75	175	131.67	≥	100	31.67
8	C	45	25	20	37	30.00	≥	30	0.00
9	Balance	1	1	1	1	1	=	1	0

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Fracciones de tonelada T1	0.259	0.00	800	223.636	120
\$C\$3	Fracciones de tonelada T2	0.7037	0.00	400	66.848	300
\$D\$3	Fracciones de tonelada T3	0.037	0.00	600	85.714	118.269
\$E\$3	Fracciones de tonelada T4	0.000	91.11	500	1E+30	91.11

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho de la restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$F\$6	A Total	5.00	44.44	5	2.375	0.25
\$F\$7	B Total	131.67	0.00	100	31.667	1E+30
\$F\$8	C Total	30.00	4.44	30	0.714	7
\$F\$9	Balance Total	1	155.56	1	0.25	0.043

FIGURA 5.12

Solución e Informe de sensibilidad de Solver para el modelo de Crawler Tread.

Gerente Quisiera conservar mis costos por debajo de \$500 por tonelada. ¿Hay alguna manera de lograr esto?

Es imposible encontrar una mezcla de menor costo que satisfaga las restricciones que usted ha impuesto.

Gerente ¿Se refiere usted a los requerimientos de los elementos esenciales?

Exactamente.

Gerente Bueno, tal vez pueda modificar tales requerimientos. De verdad quisiera mantener mis costos por debajo de \$500 por tonelada.

Entonces ciertamente tendrá que modificar sus requerimientos. Podemos estudiar la forma de hacerlo.

Gerente Muy bien. Pero, para empezar, recuerdo que los requerimientos se expresaron como niveles mínimos de umbral. ¿Hay alguna forma de indicar exactamente la cantidad de cada elemento indispensable que se usa en la mezcla óptima?

Esa información se obtiene de las columnas F e I de la hoja de cálculo electrónica. Las primeras tres restricciones del modelo son los requerimientos de elementos esenciales.

Gerente Veo una columna rotulada como “Holgura”.

Por razones prácticas, la columna se llama “Holgura”, pero en general significa “holgura o excedente”, según el término apropiado en cada caso.

Gerente Bien, el excedente para la restricción A es cero (celda I6) y el requerimiento de A fue de 5 libras. Esto significa que, por tonelada, se producen exactamente 5 libras de A. *Precisamente.*

Gerente Correcto. Y entiendo lo que les sucede a las restricciones B y C. Pero la última restricción del modelo original fue una restricción de igualdad. Esto significa que no tiene una variable de holgura ni de excedente. ¿Estoy bien?

Correcto

Gerente Entonces, ¿por qué hay un valor de holgura de cero en la celda I9? ¿No sugiere esto que hay una variable de holgura o excedente para esa restricción?

Tal vez tenga razón, pero esta sugerencia no ha sido intencional. Para una restricción que originalmente era una igualdad, la entrada en esta celda siempre será cero. Como ha señalado usted correctamente, las cifras de excedentes de este modelo están asociadas sólo con las tres primeras restricciones del modelo original.

Gerente Magnífico. Regresemos ahora a la variable de excedente de la celda I6. Veo que su valor óptimo es cero. ¿Qué relación puede tener esto con la cantidad del elemento esencial A en la mezcla final? Pensé haber vislumbrado la respuesta anteriormente, pero ahora estoy confundido.

Es fácil. En virtud de que el valor óptimo del excedente es cero, la mezcla óptima contiene exactamente 5 libras de A.

Gerente Ya veo. Y, dado que el excedente de la celda I8 es cero, la mezcla óptima debe contener precisamente 30 libras de C. ¿Estoy en lo cierto?

Efectivamente, y también puede determinar qué cantidad de B debe contener.

Gerente Muy bien. Para B tengo que ver la celda I7. Dado que el excedente es de 31.67, debe ser cierto que la restricción no está activa. ¿Y ahora qué sigue?

Bueno, esto significa que, en la mezcla óptima excede en 31.67 el requerimiento mínimo de 100 libras. Es decir, en realidad se incluyen 131.67 libras de B, como se muestra en la celda F7.

Gerente ¿No es extraño este resultado? Podríamos pensar que nuestra mezcla sería más barata si se usara una menor cantidad de B. ¿Por qué tengo que emplear más de 100 libras si únicamente se requieren 100?

Esa es una buena pregunta. Verá, sucede que la combinación de minerales que satisface los requerimientos de A y C con un costo mínimo también contiene más de 100 libras de B. Cualquier combinación de minerales que incluya una cantidad menor de B no tendrá suficiente cantidad de A o de C, o bien, si tiene la cantidad suficiente, costará más de \$511.11 por tonelada. En otras palabras, el obligar a que se incluya menos de la cantidad excedente de B sin dejar de cumplir los requerimientos de A y C le costará más a fin de cuentas. Tal vez tenga que analizar esta aseveración, pero esto es precisamente lo que nos indica la solución del modelo.

Gerente Muy bien. Creo que puedo entender su punto de vista. Entonces, ¿cómo puedo bajar mis costos a \$500 o menos?

Tendrá que hacer más flexibles sus restricciones. Esto significa suavizar los requerimientos de A o de C.

Gerente ¿Por qué no de B?

Porque para poder satisfacer los requerimientos de A y de C con un costo mínimo, ya está incluyendo más de 100 libras de B, lo cual es más que su umbral mínimo. En otras palabras, el requerimiento de B no está activo. Usted podría suavizar este requerimiento asignándole un número más pequeño, por ejemplo 98, y la mezcla óptima seguirá teniendo la misma composición y costo. Por tanto, el hecho de otorgar un número más pequeño a la suavización del requerimiento de B no nos llevará a ninguna parte. Se debe suavizar alguno de los requerimientos activos.

Gerente Quiere decir, alguno de los que tienen un excedente de cero. Precisamente.

Gerente Muy bien. Por tanto tengo que suavizar el requerimiento de A o de C. ¿Pero cuál? ¿Y cuánto?

Podemos basarnos en la información que aparece bajo el encabezado “Precio sombra” del Informe de sensibilidad, para analizar estas preguntas.

Gerente Recuérdele el significado de esta columna.

Significa la razón de cambio del VO a medida que aumentamos el lado derecho. Puesto que estamos interesados en suavizar una restricción \geq , estaremos disminuyendo el lado derecho. Veamos ahora el precio sombra de la restricción A. Es de +44.44. El signo positivo significa que, a medida que aumenta el lado derecho, el costo de VO aumenta o es afectado. Por tanto, conforme se suaviza o disminuye el lado derecho, mejora el VO. A lo que esto nos lleva es a una idea de sentido común: a me-

didada que se suavice el requerimiento de A, disminuirá el costo mínimo. El precio sombra nos dice que disminuye a razón de \$44.44 por cada libra de A suprimida y que aumenta a razón de \$44.44 por cada libra de A que se añade.

Gerente La suavización del requerimiento de A debe significar reducirlo de 5 libras a algo menor. ¿Estoy bien?
Así es.

Gerente Y el precio sombra de +44.44 nos dice que, por cada libra que se reduzca, el costo total bajará \$44.44
Correcto.

Gerente Magnífico. Esto quiere decir que si solamente requiriera 4 libras por tonelada de A, en lugar de 5, el costo bajaría a unos \$466.67, por lo cual estaría por debajo de \$500. ¿Estoy en lo correcto?
No exactamente. Pero ha captado la idea. Usted tiene la razón de cambio correcta, pero esta razón se aplica solamente a un intervalo de valores cercanos al valor original de 5. El intervalo adecuado tal vez no le permita analizar la disminución de una unidad completa; podría hacerlo, por ejemplo, con sólo media unidad.

Gerente Incluso así, si disminuyo el requerimiento a 4.5 libras, ahorraré $(1/2)(44.44)$, que es más de \$22. ¡Aun así, mi costo final sería de menos de \$500!
Es verdad, pero el intervalo permisible tal vez ni siquiera incluya 4.5.

Gerente Obviamente necesitamos saber cuál es ese intervalo.
Así es.

Gerente Ya veo. En la columna de Decremento permisible de la restricción A tenemos 0.25. Esto debe significar que puedo analizar cambios de 5 hasta 4.75. ¿Verdad?
Es verdad.

Gerente Por lo que mi ahorro sería de $0.25(44.44)$, que es \$11.11, y esto me lleva justo a \$500. Pero, ¿qué pasaría si suavizara el requerimiento un poco más, digamos a 4.50? ¿No se reduciría aún más el costo?
Probablemente, pero no le puedo decir cuánto con exactitud, pues la razón de cambio podría ser diferente después de una disminución de 0.25.

Gerente En otras palabras, esto debe significar que podría cambiar el precio sombra.
Exactamente.

Gerente Muy bien. Ahora, sólo para ver si he entendido bien todo esto, permítame analizar el ahorro potencial si suavizo el requerimiento de C.
Adelante.

Gerente El lado derecho original es 30. El Informe de sensibilidad indica un decremento permisible de 7, por lo que puedo bajar a 23. El precio sombra correspondiente es +4.44. Ésta es mi razón de ahorro cuando yo disminuyo a menos de 30 el lado derecho. Por tanto, si disminuyo a 23 el requerimiento, ahorro $7(4.44) = \$31.08$. Esto también me lleva por debajo de \$500. De hecho, si disminuyera el requerimiento en tan sólo 2.5 libras, podría aplicar la misma razón de cambio y, en consecuencia, debería ahorrar $(2.5)(4.44) = \$11.10$; con esto llegaría prácticamente a un costo de \$500. ¿Cómo voy hasta ahora?
Muy bien.

Gerente Perfecto. Veo que podría rebajar el costo por tonelada hasta \$500 si suavizara el requerimiento de A hasta 4.75 libras por tonelada, o bien, el requerimiento de C hasta 27.5 libras por tonelada. Pero ¿si suavizara los dos requerimientos, el de A y el de C un poco menos, pero en forma simultánea? ¿Qué sucedería entonces?
Perdón, pero nuevamente el Informe de sensibilidad no nos proporciona información precisa para responder esta pregunta. La única manera de contestarla sería volver a resolver el modelo varias veces, utilizando lados derechos distintos para A y C.

Gerente Por tanto, cuando aplico el precio sombra a uno de los valores de lado derecho, es importante que mantenga sin cambio alguno los demás.
Eso es correcto.

- Gerente** Bien, déjeme repasar esto. Sé que puedo bajar mi costo por tonelada a \$500 si reduzco el requerimiento de A hasta 4.75 libras por tonelada o el requerimiento de C a 27.5 libras por tonelada. ¿Qué debo hacer?
El modelo no lo puede guiar a ese respecto. Tal vez note que la disminución requerida de A sería de $0.25/5$, o 5% y que, en el caso de C, sería de $2.5/30 = 8\frac{1}{3}\%$. Pero ignoro si tal información es de utilidad. El punto es que usted, como gerente, tiene que determinar cuál de los cambios dañará más las propiedades de la mezcla. Creo que todo se resume a una cuestión de ingeniería.
- Gerente** Sí, creo que tiene razón y ya sé con quién tengo que hablar al respecto.
Bien.
- Gerente** Por cierto, también he notado la columna llamada Incremento permisible. Supongo que se relaciona con los aumentos del lado derecho.
Correcto otra vez.
- Gerente** ¿Podría explicarme el análisis del lado del incremento para ver si entiendo lo mismo que usted?
Tomemos el requerimiento de A. Suponga que quiere constreñir este requerimiento.
- Gerente** En virtud de que estamos tratando con una restricción tipo \geq , hacerla más rígida significaría aumentar el lado derecho, que es la cantidad requerida de A.
Así es. Constreñir un requerimiento nunca puede ayudar al VO e, inclusive, puede causar daños. En este caso, el precio sombra de +44.44 nos dice que habría un efecto por el aumento del lado derecho. Esto significa que el costo aumentará. El incremento permisible de 2.375 nos indica que si aumentamos la cantidad original, 5, en cualquier cantidad hasta llegar a 2.375, el valor del aumento del costo mínimo estará representado por 44.44 veces esa cantidad.
- Gerente** En otras palabras, el mismo precio sombra afecta tanto los aumentos como las disminuciones del lado derecho. Así, el precio sombra es la razón de cambio del valor objetivo a medida que el lado derecho varía a través de todo ese rango permisible.
Correcto. Y la suavización de una restricción siempre significará que el VO no puede ser lastimado y tal vez mejore. Constreñir significa que el VO no puede mejorar y tal vez se vea lastimado.
- Gerente** Inclusive noto que el precio sombra de B es cero, lo cual significa que el cambio del valor de 100 no tiene ningún efecto. Supongo que esto quiere decir que ni siquiera necesitamos una restricción en B. ¿Por qué?
Porque, como mencioné antes, si se satisfacen los requerimientos de A y de C a un costo mínimo, automáticamente se satisface el requerimiento de B.
- Gerente** ¿Entonces tengo razón? ¿Podemos eliminar la restricción de B?
No lo creo. Si alguna vez quiere usted cambiar algunos de los datos y volver a resolver el modelo, la restricción de B podría ser importante. En particular, podemos ver por el incremento permisible de 31.667 que, si el LD excediera 131.667, esta restricción se volvería activa. Así que yo no diría que puede eliminarse del modelo.
- Gerente** ¿Podría ser un poco más explícito, sin emplear demasiada terminología?
Muy bien. Como ejemplo, la semana pasada escuché de boca del señor Shmootz que el costo del mineral de la localidad 2 podría aumentar.
- Gerente** ¿El señor Shmootz?
Así es.
- Gerente** Bueno, debo admitir que tal posibilidad me preocupa. Pero no veo cómo podemos tomar en consideración tal tipo de incertidumbre.
Esto se relaciona con su pregunta. El costo del mineral de la localidad 2 es el coeficiente de T2 en la función objetivo, es decir el 400 de la celda C4. Si este costo aumentara, esperaríamos un aumento de nuestro VO. Si el costo del mineral de la localidad 2 sube lo bastante, inclusive podríamos suponer que se emplearía menos (o nada) en la mezcla óptima. Esto significa que debería emplearse más de las demás, ya que la cantidad total empleada tiene que sumar 1 tonelada. Esto significa que la importancia relativa de las restricciones podría cambiar. Las restricciones previas,

que podían haber sido más constreñidas, tal vez ya no lo sean, y viceversa. Pueden suceder muchas cosas cuando se comienza a jugar con los datos.

Gerente Explíqueme de nuevo lo que quiere decir con restricción constreñida.
Significa una restricción con una holgura óptima o un valor excedente de cero. Tal restricción también se llama activa, obligatoria o efectiva.

Gerente Muy bien. ¿Qué hay sobre las restricciones de igualdad? ¿Se consideran activas u obligatorias?
Sí. Siempre. En esta terminología, aunque la restricción de B actualmente está inactiva, podría volverse activa si cambian los datos del modelo.

Gerente Magnífico. Pero todavía estoy un poco confundido. ¿Qué tiene que ver todo esto con el costo del mineral procedente de la localidad 2?
Veamos el costo del mineral de la localidad 2. Actualmente podemos determinar el rango sobre el cual puede variar este costo sin influir en la mezcla óptima. En particular, vea la parte del Informe de sensibilidad llamada Celdas cambiantes. En la fila correspondiente a T2 hay un elemento llamado Incremento permisible y otro llamado Decremento permisible. Esto nos da el rango dentro del que puede variar el costo de T2.

Gerente ¿Quiere decir sin cambiar la mezcla óptima de producción?
Así es.

Gerente Muy bien. En otras palabras, el costo de T2 ahora es \$400 en nuestro modelo. ¿Lo que usted quiere decir es que el informe dice que podría ser cualquier cosa entre \$100 y \$466.85 y que la mezcla óptima de productos seguirá siendo la misma?
Precisamente.

Gerente No veo cómo podemos saberlo.
Todo está en los cálculos efectuados por Solver.

Gerente Bueno. Si el costo aumenta de \$400 a \$450, no tenemos por qué preocuparnos.
Eso no lo sé. Sabemos que la mezcla óptima de productos se conservará igual. Esto significa que los valores óptimos de todas las variables, incluyendo las holguras, quedan igual. Pero nuestro costo total aumentará en \$50 por la cantidad de T2 que se emplee en la solución actual.

Gerente Ahora entiendo. El VO pasará del valor anterior de \$511.11 al nuevo valor, $511.11 + 50(0.70370) = \$546.30$. Ya veo lo que quiere usted decir. Todo quedará igual, excepto el costo final. ¿Dijo que inclusive los valores de holgura/excedente permanecerán iguales?
Sí. Si todas las variables de decisión se conservaran iguales, podrá observar en las fórmulas de la hoja de cálculo electrónica que las variables de holgura/excedente también tendrían que quedar iguales.

Gerente Esto debe significar que las restricciones que están activas también se quedan iguales.
Así es.

Gerente Ya veo. Por cierto, ¿qué sucede si el costo de T2 aumenta más de la cantidad permisible?
Bueno, debido a que tenemos un modelo Min (de minimización), sé que al aumentar el costo de una entrada no puede aumentar su uso. Por tanto, a medida que aumenta el costo de T2, sé que el valor óptimo de T2 nunca puede aumentar. De hecho, debido a que la solución actual es no degenerada, sé que, cuando el costo de T2 aumenta en más de la cantidad permisible, su valor óptimo con toda seguridad disminuirá.

Gerente Un momento. Vaya más despacio. Usted dijo “solución no degenerada”. Hágame el favor de refrescar mi memoria acerca de esa degeneración.
Claro. Sencillamente solución no degenerada significa que, en la hoja de cálculo electrónica optimizada, la cantidad de variables con un valor óptimo positivo, incluyendo tanto las variables de decisión como las de holgura o excedente, es igual a la cantidad de restricciones. La figura 5.12 muestra que, en la optimalidad, tres variables de decisión y una variable de excedente son positivas. Dado que hay cuatro restricciones en el modelo, tenemos una solución no degenerada. Ésta es una

cuestión técnica, pero es importante para interpretar algunos de los Informes de sensibilidad.

Gerente Muy bien. Correcto. Así pues, si el costo por unidad de mineral procedente de la mina 2 aumenta en más de la cantidad permisible, obtendremos una solución óptima con un valor de T2 más pequeño.

Así es. Y no sólo eso. Los valores óptimos de algunas de las demás variables también pueden cambiar, pero no es posible decir exactamente cuáles ni cuánto. Esto significa que un excedente que era positivo podría volverse cero y, por tanto, una restricción que estaba inactiva podría activarse. Además podría significar que una restricción que antes tenía un excedente de cero ahora podría volverse inactiva en el sentido de que su excedente se ha vuelto positivo. En otras palabras, una vez que el cambio del coeficiente de costo exceda el límite del rango indicado, puede suceder toda clase de cosas.

Gerente Usted está hablando de un cambio de coeficiente de costo que *exceda* el límite permisible. Pero ¿qué sucede si sólo llega al límite?

Entonces, otra vez a causa de que la solución actual es no degenerada, sabemos que habrá soluciones óptimas alternativas, es decir, la solución actual junto con otra nueva en la que se haya suprimido T2.

Gerente Me parece que tenemos una cantidad considerable de información acerca de la influencia de la incertidumbre. Esto me parece asombroso.

Estoy de acuerdo.

Gerente Bien. Muchas gracias. Creo que puedo arreglármelas bastante bien por mi cuenta con el análisis del Informe de sensibilidad. En realidad deberíamos llamarlo análisis de sensibilidad de modelos, ¿no cree usted?

Sí.

Gerente Gracias de nuevo. Estoy asombrado al ver lo mucho que podemos aprender acerca del modelo real, más allá de la solución óptima.

Cierto. Esto es debido a la facilidad que brindan los modelos de PL para calcular la información de sensibilidad. Por cierto, ¿me permite que le haga una pregunta para darme cuenta de qué tanto ha aprendido?

Gerente Claro, adelante.

Ya habrá notado que en la hoja de cálculo electrónica el valor óptimo de T4 es cero.

Gerente Cierto.

En realidad, sé que el mineral de la localidad 4 tiene algunas propiedades deseables, referentes a la tensión, que no han sido incorporadas al modelo.

Gerente Es verdad.

Además, de acuerdo con lo que nos ha dicho el señor Shmootz, tengo entendido que sería razonable renegociar periódicamente el costo de T4.

Gerente ¿Se refiere usted al hecho de que PROTRAC tiene vínculos familiares con la empresa de la localidad 4?

Algo así. Pero mi argumento es éste: ¿Cuánto tendría que disminuir el costo de T4 para que usted estuviera dispuesto a comprar su producto?

Gerente Veamos. El costo actual de T4 es de \$500 por tonelada. Creo que lo que usted me está preguntando es: ¿cuánto tendría que bajar ese costo para que en nuestra política óptima se usara un poco de T4? ¿Es ésa su pregunta?

Así es.

Gerente Muy bien. Para encontrar una respuesta, examino el Informe de sensibilidad y en él observo que, si el costo de T4 disminuye en menos de \$91.11 por tonelada, entonces, de acuerdo a lo que acaba de decirme, el valor óptimo de esta variable permanece sin cambio. Esto significa que se queda en cero. En consecuencia, tomando en cuenta lo que me ha dicho usted acerca de la no degeneración, sé que si el costo de ese material lograra negociarse para que bajara a \$408.89 o menos, habría una solución óptima con T4 positivo. ¿Correcto?

Correcto. ¿Ahora puede usted decirme qué sucede con el valor objetivo óptimo?

- Gerente** Creo que puedo deducirlo. Si el costo disminuyera en no más de \$91.11, no habría cambio alguno en los valores óptimos de alguna de las variables. En la función objetivo únicamente cambiaría el costo de T4. Pero, en virtud de que el valor de T4 permanecería en cero, tampoco cambiaría el VO. Me parece que se quedaría en \$511.11 mientras la reducción del costo fuera menor que \$91.11.
Correcto.
- Gerente** ¿Pero qué sucede si la reducción es exactamente igual a \$91.11? Usted me ha dicho que, en este caso, el valor óptimo de T4 se volverá positivo. ¿Tengo razón?
No totalmente. Habría dos soluciones óptimas de punto extremo o de vértice: la actual y otra que tendría un valor óptimo positivo de T4 y otros valores distintos en algunas de las demás variables. Sin embargo, no sé cómo cambiarían exactamente las demás soluciones.
- Gerente** Muy bien. ¿Pero esto significa que, cuando el costo de T4 disminuye exactamente \$91.11, el costo total baja de pronto a menos de \$511.11?
No, puesto que se trata de óptimos alternativos, el VO es igual a \$511.11 para ambos.
- Gerente** ¿Podemos decir qué cantidad de T4 se utilizará en el óptimo alternativo?
Sospecho que no, si nos atenemos al Informe de sensibilidad. Lo único que sabemos es que esta variable tendrá un valor positivo. Para determinar cuál sería su valor preciso, tendríamos que resolver el modelo con una reducción de apenas poco más que \$91.11 en el costo de T4.
- Gerente** ¿Y cómo sabe usted todo eso?
Por las matemáticas que intervienen en la optimización de modelos de PL. Y recuerde que estos postulados acerca de las soluciones óptimas alternativas dependen de la no degeneración de la solución actual.
- Gerente** ¿Qué sucedería si no se cumple la condición de no degeneración?
Entonces tendríamos lo que se llama una solución degenerada. Todo lo que podríamos decir entonces es que la solución óptima no cambiará si el costo de T4 se mantiene dentro del rango permisible. Es factible que el costo disminuya en más de \$91.11 y que aun así no tengamos una nueva solución óptima. Por tanto, usted podrá observar que, en el caso degenerado, la salida nos da un poco menos de información.
- Gerente** Bien. Por ahora creo que ya sé todo lo que necesito saber sobre lo que está sucediendo. ¿Está usted de acuerdo?
Sí. ¿Paramos aquí?
- Gerente** En realidad, dado que estoy haciéndolo tan bien, tengo que hacerle una última pregunta. ¿Qué hay acerca de la columna llamada Costo reducido?
Sólo es significativa para las variables de decisión cuyo valor óptimo es cero. En este modelo nos dice cuánto del costo unitario de dichas variables puede reducirse antes de que el valor óptimo de ellas se vuelva positivo.
- Gerente** Acabamos de contestar esa pregunta, en relación con T4.
Lo sé.
- Gerente** Pero no utilizamos esta columna. Empleamos la parte que corresponde al decremento permisible del informe. De hecho, veo el mismo valor, 91.11, en ambos lugares.
Es cierto
- Gerente** Entonces, ¿por qué ocuparnos de esta columna de Costo reducido si aparece el mismo valor bajo la columna de Decremento permisible?
Simplemente por razones prácticas. El costo reducido se refiere a las variables cuyo valor óptimo es cero. Usted puede identificar fácilmente estas variables en el Informe de sensibilidad. En la siguiente columna se puede leer en forma inmediata el costo reducido, lo cual es un poco más sencillo que interpretar el incremento o decremento permisible. Por razones prácticas, puede imaginar que estas entradas de costos reducidos corresponden a los precios sombra de las restricciones de no negatividad para la producción de las minas incluidas en el modelo. Eso es todo al respecto.
- Gerente** Gracias. Todo esto ha sido muy ilustrativo.
Ha sido un placer para mí.

5.5 SINOPSIS DE LAS CIFRAS DE SALIDA DE LA SOLUCIÓN

Cuando se optimiza un modelo de PL, la hoja de trabajo optimizada y el Informe de sensibilidad de Solver contienen la siguiente información:

1. Se dan valores óptimos para las variables de decisión, las variables de holgura y de excedente, y para la función objetivo. A partir de las cantidades totales de LI, usted puede deducir rápidamente el valor de las funciones de restricción (cantidad de fuentes usadas, niveles de requerimientos satisfechos y demás) correspondientes a una solución óptima. Las restricciones con valor de holgura o excedente igual a cero se llaman *activas*, *efectivas* u *obligatorias*. Las que tienen holgura o excedente positivo se llaman *inactivas* o *no obligatorias*.
2. El precio sombra nos indica la razón de cambio del VO (valor óptimo de la función objetivo) a medida que aumenta el lado derecho (LD) de una restricción. Si el precio sombra es positivo, entonces el VO y el LD se mueven en la misma dirección: los aumentos en el LD hacen que incremente el VO y *viceversa*. Si el precio sombra es negativo, entonces el VO y el LD se mueven en direcciones opuestas: los aumentos del LD hacen que el VO disminuya y *viceversa*. El incremento y el decremento permisibles constituyen un rango de cambios del LD dentro del cual el precio sombra es válido.
3. El incremento y el decremento permisibles de los Coeficientes objetivo le indican los cambios que está permitido hacer a los coeficientes de la función objetivo sin que se modifique la solución óptima (los valores óptimos de las variables). En el caso de una solución *no degenerada*, si el coeficiente de una función objetivo cambia en una cantidad que es *igual* al cambio permisible, entonces habrá una solución de vértice óptimo alternativo que tendrá otros valores para las variables. Si el coeficiente cambia en una cantidad que *excede* el cambio permisible, habrá una nueva solución óptima (suponiendo que no haya degeneración).
4. La salida Costo reducido se aplica a las variables de decisión cuyo valor óptimo es cero. Puede interpretarse como el precio sombra de las restricciones de no negatividad, si las hay, y proporciona la misma información que se deduce de la información de incremento o decremento permisible para estas variables.

5.6 INTERPRETACIÓN DEL INFORME DE SENSIBILIDAD PARA LOS MODELOS ALTERNATIVOS EN HOJAS DE CÁLCULO ELECTRÓNICAS

Las recomendaciones para distribuir los modelos de PL en hojas de cálculo electrónicas que hemos estado usando desde el capítulo 3 son bastante restrictivas. En particular, dan como resultado una distribución que conduce a un modelo “ancho” que emplea muchas columnas cuando se trata de modelos grandes que tienen bastantes variables de decisión. Además, con frecuencia la distribución resultante del modelo no es tan atractiva, desde el punto de vista de la gerencia, como otras configuraciones que aprovechan mejor la distribución por filas y columnas de las hojas de cálculo electrónicas. A partir del siguiente capítulo, que trata sobre las aplicaciones de la construcción de modelos de PL, queremos presentarle estas distribuciones de modelos más atractivas. Como podría imaginar, se paga algún precio para tener una representación de modelos más atractiva: usted deberá tener más cuidado al construir modelos y, en especial, al interpretar el Informe de sensibilidad generado por Solver, con el fin de evitar algunos escollos molestos. Sin embargo, a estas alturas seguramente ya puede desenvolverse con bastante soltura al efectuar los pasos de la formulación de modelos de PL en hojas de cálculo electrónicas y al interpretar el Informe de sensibilidad, y podrá ajustarse a estas nuevas exigencias. Los nuevos escollos en la construcción de modelos y en la interpretación se ilustran muy bien mediante un ejemplo sencillo.

Wayne Foley, quien hace poco fue ascendido a gerente de una nueva sucursal de la Friendly Loan Company, se siente ansioso de complacer a su nuevo jefe demostrándole que puede obtener ganancias prestando su presupuesto anual de \$15 millones. Cada sucursal local de Friendly genera ganancias, gracias al ingreso por intereses de tres tipos de préstamos: préstamos de primera hipoteca sobre bienes inmuebles, con un interés anual de 7%; préstamos para muebles garantizados con accesorios del hogar, con un interés de 12% anual; y préstamos contra firma sin garantía a un interés anual de 15%. Siendo los de mayor riesgo, estos préstamos tienen la tasa de interés más alta.

La oficina matriz de Friendly ha establecido límites para los préstamos como guías para los gerentes de sucursal y a fin de proteger a la compañía contra un exceso de préstamos de alto riesgo. Friendly requiere que cada gerente de sucursal asigne cuando menos el 60% de su presupuesto a préstamos de primera hipoteca y no más del 10% de su presupuesto en los arriesgados préstamos contra firma. Tomando como base estas tasas de interés, las limitaciones propias de la política de crédito y el presupuesto que tiene asignado para préstamos el año próximo, que asciende a \$15 millones, Wayne ha construido el modelo de PL de la figura 5.13, el cual presenta su modelo, las fórmulas, el cuadro de diálogo de Solver y la asignación óptima de su presupuesto destinado a préstamos.

Observe varias características del modelo de Wayne. Primero, la formulación de su hoja de cálculo electrónica es compacta; no hay cálculos innecesarios de los valores de LI y, para simplificar su lectura, las restricciones están adyacentes a las cantidades que afectan. Además, Wayne hábilmente ha hecho que algunas de las celdas efectúen doble trabajo, tanto como valor de LD como símbolo de desigualdad. Por ejemplo, la celda G5 en realidad contiene la cifra de los \$15 millones de presupuesto, como queda claro en la impresión de las fórmulas en la figura 5.13. El “<=” que aparece en G5 forma parte de la especificación del formato de la celda, llamada “maquillaje de formato”. A las celdas de fórmulas, C6 y E6, se les dio un formato parecido. (Vea el apéndice de Excel para conocer más detalles sobre el formato de celdas.) También ha incluido un cálculo lateral para el rendimiento promedio de su cartera de préstamos, en la celda G7 (=F4/G5). Antes de proceder, verifique usted mismo que en el modelo de Wayne se hayan captado correctamente los tres límites administrativos obligatorios sobre las cantidades correspondientes a presupuesto, préstamos contra firma y préstamos de primera hipoteca.

Sin ser sorprendente, la solución que obtiene Solver a partir del modelo de PL de Wayne es la de prestar los \$15 millones, poniendo \$9 en primera hipoteca, \$1.5 en préstamos contra firma y el balance en préstamos contra muebles, con lo que se obtiene una entrada por intereses total de \$1,395,000. El cálculo lateral de Wayne, que aparece en la celda G7, muestra un rendimiento promedio de 9.3% de su cartera de préstamos. Wayne también nota que las tres restricciones del modelo son activas (dos restricciones de política sobre los tipos de préstamos y una restricción de presupuesto).

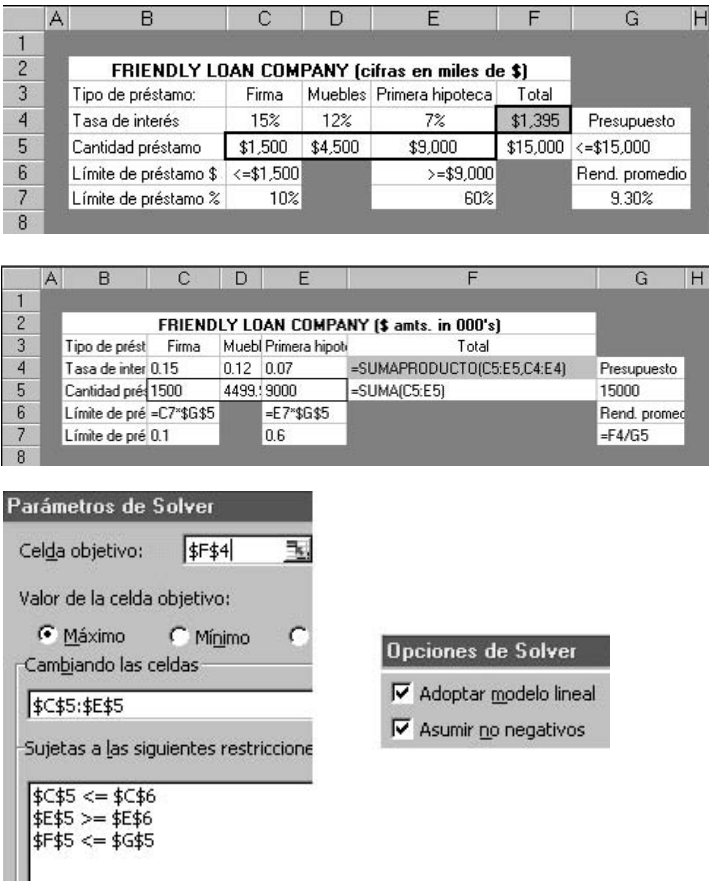


FIGURA 5.13
Modelo de la cartera de
préstamos de Wayne

Ansioso de aplicar sus nuevos conocimientos de construcción de modelos de PL, Wayne revisa el Informe de sensibilidad de Solver (en la figura 5.14) y, viendo que el precio sombra de su restricción de presupuesto es de \$15 millones, de inmediato llama a su jefe para pedirle la asignación de un presupuesto mayor. Sorprendido por la aseveración de Wayne de que puede producir una retribución de 12% sobre cualquier asignación de presupuesto adicional, su jefe comenta que ningún otro gerente de sucursal puede generar más de $9\frac{1}{3}\%$ de retribución global. “Tienen esa opinión porque no tienen conocimientos acerca de la optimización, del análisis marginal ni del poder de los precios sombra”, contesta Wayne. No queriendo mitigar el entusiasmo de su nuevo gerente de sucursal, pródigo de expresiones rimbombantes, el jefe le pregunta a Wayne si puede generar esta retribución de 12% con \$5 millones adicionales. Tras revisar rápidamente la cifra de incremento permisible para la restricción de presupuesto, Wayne le informa a su jefe, muy seguro de sí mismo, que “envíe los \$5 millones y aún más” a la sucursal.

Al colgar el teléfono, Wayne comienza a tener dudas. “Ciertamente hay tres restricciones para mi modelo, enumeradas en el cuadro de diálogo de Solver, además de la necesaria condición de no negatividad. ¿Qué sucedió con las dos restricciones obligatorias sobre los préstamos en el Informe de sensibilidad? En lugar de una, ¿no debería haber tres restricciones, junto con sus precios sombra, en el Informe de sensibilidad?” se pregunta. A medida que su inseguridad se va convirtiendo en temor, decide verificar la información del Informe de sensibilidad de Solver, para lo cual introduce en la celda G5 su nuevo límite de presupuesto, \$20,000. Ejecuta Solver otra vez con este nuevo límite de LD y se produce el resultado de la figura 5.15. El temor se convierte en consternación cuando Wayne se da cuenta de que el rendimiento promedio de la celda G7 para el modelo nuevamente optimizado permanece sin cambio alguno, estacionario en 9.3%. En virtud de que la retribución marginal de los \$5 millones adicionales es de 12%, deduce que la retribución promedio de esta nueva cartera de préstamos debería haber aumentado.

FIGURA 5.14
Informe de sensibilidad del
modelo de préstamos de
Wayne

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad						
Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$C\$5	Cantidad préstamo firma	\$1,500	0.030	15%	1E+30	0.03
\$D\$5	Cantidad préstamo muebles	\$4,500	0.000	12%	0.03	0.05
\$E\$5	Cantidad préstamo primera hipotec	\$9,000	-0.050	7%	0.05	1E+30
Restricciones						
Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$F\$5	Cantidad préstamo Total	\$15,000	0.120	\$15,000	1E+30	4500

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		FRIENDLY LOAN COMPANY (cifras en miles de \$)						
3		Tipo de préstamo:	Firma	Muebles	Primera hipoteca	Total		
4		Tasa de interés	15%	12%	7%	\$1,860	Presupuesto	
5		Cantidad préstamo	\$2,000	\$6,000	\$12,000	\$20,000	<=\$20,000	
6		Límite de préstamo \$	<=\$2,000		>=\$12,000		Rend. promedio	
7		Límite de préstamo %	10%		60%		9.30%	
8								

FIGURA 5.15
Modelo de la cartera de
préstamos de Wayne con un
presupuesto de \$20 millones.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad						
Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$C\$5	Cantidad préstamo firma	\$2,000	0.03	15%	1E+30	0.03
\$D\$5	Cantidad préstamo muebles	\$6,000	0.00	12%	0.03	0.05
\$E\$5	Cantidad préstamo primera hipoteca	\$12,000	-0.05	7%	0.05	1E+30
Restricciones						
Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$F\$5	Cantidad préstamo Total	\$20,000	0.120	\$20,000	1E+30	6000

Sin confiar ya ni en Solver ni en Excel, Wayne toma su calculadora y teclea $(1,860 - 1,395)/5,000$ (la diferencia entre el ingreso total por intereses de las dos soluciones dividida entre la cantidad de incremento del presupuesto), verificando lo que ya sospechaba: que la retribución marginal de los \$5 millones adicionales es en realidad de 9.3% y no de 12%. Viendo con escepticismo el precio sombra de la restricción de presupuesto y la información del rango en el Informe de sensibilidad del nuevo modelo (figura 5.15), Wayne concluye que, inusualmente, Solver le ha mentado dos veces. Cohibido, Wayne toma el teléfono, dispuesto a declararse culpable ante su jefe.

¿Qué sucedió? ¿Están mal escalados los datos, y por eso generan errores en los informes de Solver? De no ser así, ¿será acaso que Solver miente o se equivoca con algunos modelos? Si tampoco sucede así, ¿cómo explicaría usted los precios sombra para el presupuesto de .120 que aparecen en las figuras 5.14 y 5.15, dados los resultados obtenidos por Wayne tras intentar otra vez resolver el modelo? ¿Podría tratarse de una solución degenerada que induce a Wayne a interpretar erróneamente un rango de incremento permisible? ¿Cómo sabría usted si la solución es degenerada o no, simplemente observando el modelo de Wayne? ¿Y qué sucedió con la información del precio sombra para las otras dos restricciones sobre los tipos de préstamo que faltan en el Informe de sensibilidad generado por Solver para Wayne?

Aunque siempre es válido sospechar de ella, en este caso el rango de datos del modelo de Wayne no es lo bastante amplio como para provocar problemas numéricos en Solver, lo cual puede comprobar usted marcando el cuadro Usar escala automática del cuadro de diálogo de Opciones de Solver y resolviendo de nuevo el modelo. Para entender con mayor claridad lo que le sucedió al pobre Wayne, volvamos a formular el modelo valiéndonos de las reglas de formulación recomendadas en el capítulo 3, como se muestra en la figura 5.16, la cual presenta la solución óptima y su Informe de sensibilidad.

Queda claro que las dos formulaciones de PL producen las mismas decisiones óptimas de préstamos y de ingreso total por intereses, como se muestra en las figuras 5.13 y 5.16. Las diferencias se refieren al Informe de sensibilidad del modelo y a su interpretación. Para responder a las demás preguntas anteriores, observe lo siguiente en los resultados del modelo de PL construido según las reglas del capítulo 3. Primero, lo que es evidente de inmediato en la figura 5.16 es la presencia de las tres restricciones en el Informe de sensibilidad, así como sus respectivos precios sombra y sus rangos de cambio en LD. Segundo, en la figura 5.16, el precio sombra de la restricción de presupuesto de Wayne es el valor marginal correcto (9.3%). Tercero, la solución de ambas formulaciones no es degenerada, como se comprueba con la mayor facilidad contando el total de las variables de decisión y las holguras distintas de cero ($= 3$) que hay en la figura 5.16, y también comparando esta cifra con la cantidad de restricciones ($= 3$). Y cuarto, a diferencia del Informe de sensibilidad del modelo de Wayne, la columna de Costo reducido de la figura 5.16 enuncia (correctamente) ceros en las tres variables de decisión, debido a que ninguna de las variables de decisión es cero; es decir, ninguna de sus restricciones de no negatividad está satisfecha en el valor límite o de frontera (activa).

Por supuesto, todo esto implica que el Informe de sensibilidad original, en la figura 5.14, está engañosamente mal (con sus precios sombra y rangos faltantes, sus cifras equivocadas de costos reducidos y su incorrecto precio sombra para el presupuesto) y que la formulación de PL recomendada que aparece en la figura 5.16 está bien. Por otra parte, la distribución del modelo de hoja de cálculo electrónica de Wayne de la figura 5.13 ciertamente es más fácil de entender e interpretar desde el punto de vista de la gerencia que la formulación recomendada de la hoja de cálculo que aparece en la figura 5.16. Parecería que hay que tomar una decisión forzada entre la distribución administrativa agradable y compacta del modelo de PL, que conlleva a resultados de sensibilidad confusos o erróneos, y una distribución rígida del modelo, que arroja resultados de sensibilidad correctos. Paradójicamente, éste no es el caso; ambos modelos están correctos y *ninguno* de los Informes de sensibilidad tiene errores. Es decir, usted puede disfrutar los beneficios de una distribución más atractiva del modelo en la hoja de cálculo electrónica, desde el punto de vista de la gerencia, sin que Solver produzca errores en el Informe de sensibilidad. Pero esto requiere algunos conocimientos adicionales acerca de Solver, que Wayne no poseía. Por eso, para resolver la paradoja, vamos a profundizar un poco más en la operación de Solver.

LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES SIMPLES

El tiempo y los requerimientos de memoria necesarios para que Solver optimice un modelo están determinados principalmente por el tamaño de la matriz de celdas coeficientes que constituyen el LI (lado izquierdo) del conjunto de restricciones; por ejemplo, C7:E9 en la figura 5.16. El tamaño de esta matriz de coeficientes de restricciones es proporcional al producto de la cantidad de variables (columnas) y la cantidad de restricciones (filas). Todo lo que sea posible ha-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		FRIENDLY LOAN COMPANY (cifras en miles de \$)								
3		Tipo de préstamo:	Firma	Muebles	Primera hipoteca	Presupuesto	Total			
4		Tasa de interés	15%	12%	7%		\$1,395			
5		Cantidad préstamo	\$1,500	\$4,500	\$9,000	\$15,000				
6		Restricciones					Total	LD	Holgura	
7		Presupuesto				1	\$15,000	<=\$15,000	0.0	
8		Límite firma	1			-10%	0.0	<=0	0.0	
9		Mínimo primera hipoteca			1	-60%	0.0	>=0	0.0	
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		FRIL								
3		Tipo	Firma	Muebles	Primera	Presupuesto	Total			
4		Tasa	0.15	0.12	0.07		=SUMAPRODUCTO(\$C\$5:\$E\$5,C4:E4)			
5		Cant	1500	4500	9000	=SUMA(C5:E5)				
6		Rest					Total	LD	Holgura	
7		Pres			1		=SUMAPRODUCTO(\$C\$5:\$F\$5,C7:F7)	15000	=H7-G7	
8		Límit	1		-0.1		=SUMAPRODUCTO(\$C\$5:\$F\$5,C8:F8)	0	=H8-G8	
9		Mínim		1	-0.6		=SUMAPRODUCTO(\$C\$5:\$F\$5,C9:F9)	0	=G9-H9	
10										

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$C\$5	Cantidad préstamo Firma	\$1,500	0.00	15%	1E+30	0.03
\$D\$5	Cantidad préstamo Muebles	\$4,500	0.00	12%	0.03	0.05
\$E\$5	Cantidad préstamo Primera hipoteca	\$9,000	0.00	7%	0.05	0.155

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$7	Presupuesto Total	\$15,000	0.093	\$15,000	1E+30	15000
\$G\$8	Límite firma Total	0	0.030	0	4500	1500
\$G\$9	Mínimo primera hipoteca Total	0	-0.050	0	4500	9000

FIGURA 5.16

Modelo de la cartera de préstamos de Wayne, el cual considera las reglas del capítulo 3

cer para reducir cualquiera de estos números tendrá un efecto multiplicador en la reducción del tamaño total de la matriz y, por consiguiente, en la velocidad de la optimización. Solver tiene incorporado un procedimiento avanzado que permite que cualquier límite de restricción superior o inferior impuesto sobre las variables de decisión (además de los límites de no negatividad) sea respetado sin que se le considere como una restricción. Este tratamiento de los límites de las variables de decisión, llamado “límites superiores e inferiores simples”, hace que se mantenga pequeña la matriz de coeficientes, dando como resultado menores tiempos de optimización de Solver y un menor consumo de la memoria de acceso aleatorio (RAM) de la PC. El precio que se paga por emplear esta característica de límites superiores e inferiores simples consiste en la pérdida de un poco de información en el Informe de sensibilidad generado después de la optimización. La única información de sensibilidad disponible acerca de las restricciones con límite superior e inferior son sus precios sombra, pero sin la información referente al rango de aplicación generado para los precios sombra que corresponden a una restricción normal.

En virtud de que, como máximo, en la optimalidad sólo puede ser activa u obligatoria una restricción con límite superior o una con límite inferior para una variable de decisión dada, y puesto que no hay información disponible acerca de los rangos, el resultado es un Informe de sensibilidad compacto si el precio sombra relevante distinto de cero de una restricción con límite superior o inferior simple, si la hay, aparece junto a su variable de decisión asociada. La columna de Costo reducido del Informe de sensibilidad siempre tiene una celda por variable de decisión, así que Solver pone cualquier precio sombra diferente de cero que haya en una restricción con límite superior o inferior en la columna de Costo reducido, junto a la variable de decisión relevante. Por ejemplo, los precios sombra de ambas restricciones sobre el tipo de préstamo se presentan, de la manera convencional, en la figura 5.15, como 3% y -5% en las restricciones

de Firma y Primera hipoteca, respectivamente. Esos valores se presentan para el modelo de Wayne, en la figura 5.14, en la columna de Costo reducido, junto a las variables de decisión de Firma y Primera hipoteca, respectivamente. En virtud de que para cada una de estas variables de decisión se han especificado dos restricciones en el modelo de PL, no resulta claro en forma inmediata cuál es el límite activo que produce la entrada de precio sombra diferente de cero para esa variable, en la columna de Costo reducido del modelo de Wayne.

La cantidad de préstamo contra firma tiene tanto una restricción de límite inferior simple (la restricción de no negatividad “ ≥ 0 ”) como una restricción de límite superior simple (“ $\leq \$1,500$ ”). Sin embargo, ambos límites sobre la decisión de firma no pueden ser obligatorios simultáneamente. Al inspeccionar la situación se observa que el límite superior es obligatorio; así que la cifra 0.03 de la columna de Costo reducido del modelo de Wayne debe ser el precio sombra de la restricción “Firma $\leq \$1,500$ ”. Por tanto, debido a que no está activa, la restricción “Firma ≥ 0 ” debe tener un precio sombra de cero.

De igual manera, hay dos restricciones de límite inferior en la decisión de primera hipoteca (“Primera hipoteca ≥ 0 ” y “Primera hipoteca $\geq 9,000$ ”), las cuales no pueden ser obligatorias. Puesto que la decisión de Primera hipoteca es de \$9,000, la entrada de precio sombra en la columna de Costo reducido del modelo de Wayne deberá corresponder a la restricción activa de límite inferior simple “Primera hipoteca $\geq 9,000$ ”. En consecuencia, puesto que la restricción de “Primera hipoteca ≥ 0 ” no está activa, entonces deberá tener un precio sombra igual a cero.

Por tanto, no se pierde la información del precio sombra cuando se manejan límites superiores e inferiores en las formulaciones de PL si usted ya ha aprendido dónde buscarla y cómo deducir el límite al que se refiere cualquier precio sombra diferente de cero. Puesto que los límites inferiores y superiores simples sobre las decisiones nos llevan a una distribución más atractiva de las hojas de cálculo electrónicas y a tiempos de solución más cortos (notorios en los modelos grandes), es común emplearlos en la formulación de modelos de PL en hoja de cálculo electrónica. Sin embargo, tenga presente que, al usarlos, se generan Informes de sensibilidad que violan la definición estándar de Costo reducido dada en la sección 5.3.

Recuerde que una interpretación del costo reducido para una variable de decisión la representa como el precio sombra de la restricción de no negatividad de tal variable. En cambio, las cifras de costo reducido de los modelos de PL de Solver que contienen límites superiores e inferiores simples son los precios sombra de cualquiera de los límites, si es que existe alguno, obligatorios para dicha variable de decisión. La tabla 5.2 nos ofrece un cuadro más completo de los valores que puede asumir el precio sombra del Costo reducido, en los modelos de Solver, que contengan límites superiores e inferiores simples.

¿Hay alguna manera de deducir la información sobre el rango del LD que aparece en el Informe de sensibilidad de la figura 5.16 en las columnas de Incremento permisible y Decremento permisible, pero que falta cuando se emplean límites superiores e inferiores simples? Desafortunadamente, la respuesta es no. Si fuera posible, Solver siempre presentaría un Informe de sensibilidad como el de la figura 5.16. Si es importante la información del rango del LD para límites superiores e inferiores simples, entonces usted deberá reformular la representación en hoja de cálculo del modelo de PL de la figura 5.13 para evitar que Solver detecte la presencia de límites superiores e inferiores simples, y luego habrá de volver a optimizar el modelo. Solver no recurrirá a su procedimiento de límites superiores e inferiores simples si el límite superior e inferior de las variables de decisión se especifican indirectamente en la hoja de cálculo electrónica. Esta “referencia indirecta” puede lograrse mediante alguna fórmula intermedia, como las fórmulas SUMAPRODUCTO de la figura 5.16, que relacionan cada variable de decisión con su límite por medio de una tercera celda de LI. De otro modo, si Solver detecta referencias a Celdas cambiantes en el cuadro “Sujetas a las siguientes restricciones” del cuadro

TABLA 5.2 Valores de costos reducidos

VALOR DE LA VARIABLE DE DECISIÓN EN LA OPTIMALIDAD	ENTRADA DE COSTO REDUCIDO, MODELO DE MAXIMIZACIÓN	ENTRADA DE COSTO REDUCIDO, MODELO DE MINIMIZACIÓN
Obligatoria en el límite inferior (\geq)	Precio sombra cero o negativo	Precio sombra cero o positivo
Obligatoria en el límite superior (\leq)	Precio sombra cero o positivo	Precio sombra cero o negativo
Ningún límite obligatorio	Precio sombra cero	Precio sombra cero

de diálogo de Parámetros de Solver (excepto las de no negatividad), entonces invocará su procedimiento especial de limitación. Por ejemplo, el modelo de Wayne en la figura 5.13 hace referencia a las celdas cambiantes C5 y E5 en las dos primeras restricciones que aparecen en el cuadro “Sujetas a las siguientes restricciones” del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver, con lo cual se disparó el procedimiento de limitación superior e inferior de Solver.

INTERPRETACIÓN DEL PRECIO SOMBRA

Como dijimos anteriormente, el precio sombra de .120 dado por Solver para la restricción de presupuesto de Wayne *no* es incorrecto; en realidad, lo que metió en problemas a Wayne fue su interpretación de tal precio sombra. Observe que el modelo de Wayne en la figura 5.13 tiene fórmulas del lado derecho para las restricciones de Límite de préstamo para firma y Primera hipoteca en las celdas C6 y D6, respectivamente, lo cual constituye una violación a una de las reglas de formulación de hoja de cálculo electrónicas que hemos recomendado en el capítulo 3. Recuerde que la definición de precio sombra es: el cambio en el VO del PL por unidad de cambio en el valor de LD de una restricción dada *manteniendo constante toda la demás información, inclusive los demás LD*. Por tanto, el precio sombra de .120 consignado en el Informe de sensibilidad de Wayne que aparece en la figura 5.14 tiene que interpretarse en la siguiente forma: conservando el LD del límite de préstamo para los Préstamos contra firma y el LD de los préstamos de Primera hipoteca dentro de sus respectivos límites de \$1,500 y \$9,000, el mejoramiento que se obtiene en el valor de la función objetivo es de .12 por cada dólar adicional de presupuesto.

La conservación de los valores originales de LD de Firma y Primera hipoteca permite que el presupuesto incrementado sólo tenga una opción en el modelo de Wayne: asignarlo como préstamo sobre Muebles, con una retribución de 12%. Por tanto, Solver está reportando correctamente el precio sombra original para el modelo de Wayne. Por supuesto, la conservación de los valores originales para los Préstamos contra firma y Primera hipoteca resulta inconsistente con los resultados de una solución nuevamente optimizada en la que se ajustarán los *tres* LD para reflejar la actualización de los límites de LD implícita en un presupuesto adicional. El error de Wayne fue suponer que las restricciones porcentuales de política de Friendly sobre el presupuesto total se conservarían en su Informe de sensibilidad, pero tal cosa no es cierta en su modelo, gracias a las fórmulas que aparecen en dos de sus LD.

Con la formulación de la PL que presentamos en la figura 5.16 se evita esta interpretación errónea, pues se hace referencia a las cifras totales de préstamo, en lugar de referirse a la cantidad de presupuesto total de las restricciones, y poniendo todas las fórmulas en el LI de las restricciones, dejando como constantes todos los LD. Al dejar del LI de las restricciones las fórmulas relacionadas con préstamos se obliga a Solver a efectuar los ajustes necesarios en los tres LI durante la evaluación de la contribución de un presupuesto aumentado. Este ajuste del LI produce un Informe de sensibilidad que da el precio sombra correcto de .093 en la figura 5.16. Es claro que la formulación de la figura 5.16 refleja el modelo de las restricciones de política que pretendía Wayne.⁹

La conclusión que podemos sacar de este ejemplo es que la aplicación de límites superiores e inferiores sencillos y el empleo de fórmulas para el LD de las formulaciones puede dar como resultado modelos en hoja de cálculo electrónica más compactos y más atractivos desde el punto de vista de la gerencia. Debido a esto, nos valdremos ampliamente de tales formulaciones de modelos en las aplicaciones de Solver durante los tres capítulos siguientes. Recuerde, sin embargo, que con ese tipo de formulaciones tal vez se requiera mayor cuidado para interpretar la información que tiene un importante valor administrativo del Informe de sensibilidad de Solver.

5.7

RESUMEN

En el presente capítulo se hizo énfasis en la interpretación del Informe de sensibilidad generado por Solver de un modelo de PL, según lo que se presentó en las secciones 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6. Hemos destacado la rica información disponible por medio del análisis de sensibilidad de los lados derechos y de los coeficientes de función objetivo. También hemos estudiado el papel que juega la degeneración y las señales que indican óptimos alternativos.

⁹Observe que, en el modelo original de Wayne, si él hubiera interpretado que sus requerimientos de préstamo se aplicarían a la cantidad total prestada (LI), en lugar de a la cantidad de presupuesto (LD), entonces su modelo también habría generado el precio sombra de .093.

En la primera parte de este capítulo (sección 5.2) hemos estudiado los confusos resultados del Informe de sensibilidad generados por Solver cuando se aplican límites superiores e inferiores directamente a las variables de decisión, y los errores en los que se puede caer al interpretar los precios sombra cuando se ponen fórmulas en el LD de las restricciones y cuando algunas de las fórmulas del modelo se basan en el LI contra el LD de las restricciones obligatorias.

Términos clave

Precio sombra. El precio sombra i^a del Informe de sensibilidad de Solver es la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD i^a .

Rango permisible de LD. Rango de valores de LD sobre el que permanece constante el precio sombra.

Rangos de coeficiente objetivo. Da los rangos de los coeficientes de función objetivo a través de los cuales no sucede cambio alguno en la solución óptima.

Solución degenerada. Solución para la cual la cantidad de variables con valor positivo es menor que la cantidad de restricciones activas.

Solución no degenerada. Solución para la cual la cantidad de variables con valores óptimos positivos es igual a la cantidad de restricciones activas.

Soluciones óptimas alternativas. Existencia de más de una solución óptima.

Variable de holgura o de excedente. Se emplea para convertir una restricción de desigualdad en restricción de igualdad.

Ejercicios de repaso

Verdadero-falso

- V F** Si un punto no satisface la restricción \leq , el valor de holgura asociado es negativo.
- V F** La degeneración es importante porque debemos hacer interpretaciones más restrictivas de la salida de Solver cuando la solución óptima es degenerada.
- V F** El precio sombra de una restricción dada es la razón de cambio del VO a medida que aumenta el LD.
- V F** El precio sombra de la i^a restricción es una función lineal no constante de b_i sobre el rango, dada por el incremento y el decremento permisible.
- V F** Las variables de holgura con valores positivos en la optimalidad indican restricciones redundantes.
- V F** Una restricción \leq con una holgura óptima positiva siempre tendrá un incremento permisible infinito para el LD.

Las siguientes preguntas (7-8) se refieren a la salida de la hoja de cálculo presentada en la figura 5.12:

- V F** Si los requerimientos de A y de C aumentan en 0.5 libras, el análisis de sensibilidad nos dice que el costo óptimo aumentará en \$24.44.
- V F** El que todos los precios sombra sean ≥ 0 se explica exclusivamente por el hecho de que estamos trabajando con un modelo Min.

Opciones múltiples

- Una solución óptima degenerada
 - tiene menos de m variables positivas (donde m es la cantidad de restricciones)
 - no proporciona alguna información sobre óptimos alternativos
 - tal vez no proporcione alguna información sobre el rango completo de incremento y decremento permisibles de los coeficientes objetivos
 - los tres puntos anteriores
- La “mejora” de un modelo de PL significa
 - que el VO aumenta en los modelos Max
 - que el VO disminuye en los modelos Min
 - tanto a como b
- Para una solución óptima no degenerada de un modelo Max, si el coeficiente c_1 de la función objetivo aumenta en (exactamente) el incremento permisible

- a. podría cambiar el VO
 - b. la solución óptima previa permanece óptima
 - c. habrá una nueva solución óptima con un valor óptimo mayor de x_1
 - d. los tres puntos anteriores
12. Acabamos de resolver un modelo de minimización de costos y $x_1^* = 0$. La administración quisiera saber: “¿cuánto habrá que reducir el costo de x_1 antes de que comencemos a emplearlo con un valor positivo en una solución óptima?” ¿En qué parte de la hoja de trabajo o del Informe de sensibilidad de Solver se encuentra la respuesta?
- a. en los valores de las variables
 - b. en los cambios permisibles del LD de la primera restricción
 - c. en el incremento permisible del coeficiente de x_1
 - d. en el costo reducido
13. Suponga que la primera restricción de un PL, evaluada en un punto dado P_0 , tiene un valor de cero para la variable de holgura. Entonces
- a. P_0 cae en el límite de la región factible
 - b. P_0 cae en la primera línea de restricción
 - c. tanto a como b
14. Una relación correcta es
- a. las restricciones con precio sombra igual a cero deben estar inactivas
 - b. las restricciones con precio sombra positivo deben estar activas
 - c. tanto a como b

Las siguientes preguntas (15-18) se refieren a la salida de hoja de cálculo electrónica que aparece en la figura 5.12:

15. Si el requerimiento de A cambiara de 5 a 6.5
 - a. el VO disminuiría en \$66.66
 - b. el VO mejoraría en \$66.66
 - c. el VO aumentaría en \$66.66
 - d. el VO no cambiaría
16. Si el requerimiento de C se redujera de 30 a 20
 - a. el VO disminuiría en \$44.44
 - b. el VO aumentaría en \$44.44
 - c. el VO mejoraría en \$31.00 cuando menos
17. Si el costo del mineral de la localidad 2 disminuyera a \$300 por tonelada
 - a. el VO no cambiaría
 - b. la solución óptima no cambiaría
 - c. ni a ni b
 - d. tanto a como b
18. Si el costo del mineral de la localidad 1 se redujera a \$680 por tonelada
 - a. habría una nueva solución óptima con $T1^* > 0.259$
 - b. habría óptimos alternativos
 - c. la solución óptima anterior seguiría siendo óptima
 - d. los tres anteriores

Respuestas

- | | | | |
|------|-------|-------|-------|
| 1. V | 6. V | 11. d | 15. c |
| 2. V | 7. F | 12. d | 16. c |
| 3. V | 8. F | 13. b | 17. b |
| 4. F | 9. d | 14. b | 18. d |
| 5. F | 10. c | | |

Problemas

5-1. Considere una PL con 3 variables y 14 restricciones. ¿Cuántas variables positivas tendría como máximo una solución óptima de Solver?

5-2. Para el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Max } x_1 + x_2 \\
 \text{s.a. } &x_1 + x_2 \geq 3 \\
 &2x_1 + x_2 \leq 12 \\
 &x_1 + x_2 \leq 12 \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(a) Utilice el GLP para dibujar gráficamente una representación geométrica del modelo. ¿Existen vértices degenerados?

(b) Añada la restricción $x_1 + x_2 \leq 8$. ¿Existen ahora vértices degenerados?

5-3. Considere una PL con 80 variables y 30 restricciones.

(a) ¿Cuántas variables positivas tendrá ahora una solución óptima no degenerada de Solver?

(b) ¿Cuántas variables positivas tendrá ahora una solución óptima degenerada de Solver?

5-4. Karma Computers produce dos modelos de computadoras, la Estándar y la De lujo. El primer modelo se fabrica ensamblando un solo disco duro y un chasis Estándar. El segundo modelo se produce ensamblando dos unidades de disco y un chasis De lujo. El modelo Estándar tiene una ganancia neta por unidad de \$300, mientras que el modelo De lujo tiene una ganancia neta por unidad de \$400. El inventario actual de Karma consiste en 60 chasis Estándar, 50 chasis De lujo y 120 unidades de disco.

- (a) Formule el modelo de PL de Karma y utilice GLP para generar una gráfica con su representación geométrica.
- (b) Optimice el modelo de Karma con GLP y con el resultado llene los valores que faltan en las celdas en blanco de la hoja de trabajo de la figura 5.17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	KARMA COMPUTER						
2	Variables de decisión	S	D				
3	Cantidad			GANANCIAS			
4	Margen contrib.	\$300	\$400				
5	Sujeto a:			LI	LD	Holgura	
6	Restricción chasis Estándar	1			≤	60	
7	Restricción chasis de lujo		1		≤	50	
8	Restricción unidades disco				≤		

FIGURA 5.17

- (c) Con el resultado de la hoja de cálculo anterior ponga los valores correctos en las celdas de Valor final y Restricción lado derecho del Informe de sensibilidad que sigue. A continuación, válgase del modelo GLP de Karma para determinar los valores de las demás celdas en blanco del Informe de sensibilidad de la figura 5.18.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad						
Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coefficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Cantidad S			300		
\$C\$3	Cantidad D			400	200	400
Restricciones						
Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$D\$6	Restricción chasis Estándar LI			60	60	
\$D\$7	Restricción chasis De lujo LI			50		20
\$D\$8	Restricción unidades disco LI					60

FIGURA 5.18

- 5-5. Refiérase a la figura 5.4.
- (a) Suponga que hay 5 horas más de trabajo disponibles en el departamento A. ¿Cuál será el cambio del VO?
- (b) Suponga que hay 20 horas menos de trabajo disponibles en el departamento A. ¿Cuál será el cambio del VO?
- (c) ¿Para qué rango de valores de LD es válido el precio sombra del departamento A?
- 5-6. ¿Qué valor tiene siempre el precio sombra de una restricción inactiva? ¿Qué puede decir acerca del precio sombra de una restricción activa?
- 5-7. Considere una restricción con un valor de holgura óptimo positivo. ¿Cuál debe ser el precio sombra?
- 5-8. Refiérase a la salida de Solver tal como aparece en la figura 5.4.
- (a) Supongamos que cambiara a 6 el lado derecho de la restricción del total unidades de la fila 10. ¿Cuál sería el efecto de esto en el VO?
- (b) ¿En qué cantidad podría constreñirse la restricción de requerimiento del total de unidades antes de que pudiera cambiar el precio sombra?
- (c) Suponga que hay 50 horas más disponibles en el departamento B. ¿En cuánto cambiará el VO?
- 5-9. Note que en la figura 5.8 hay un incremento permisible de cero para la capacidad del departamento B. ¿Qué anomalía es la que produjo esto?
- 5-10. Refiérase a la figura 5.8. ¿La solución exhibida es degenerada o no degenerada? Sustente su respuesta.
- 5-11. Refiérase a la figura 5.4. Suponga que el margen de contribución de E se reduce a \$4,000 por unidad.
- (a) ¿Cuál es la solución óptima que resulta?
- (b) ¿Cuál es el cambio del VO?
- 5-12. Refiérase a la figura 5.4. Suponga que el margen de contribución de F aumenta a \$5,000 por unidad.
- (a) ¿Cuál es la solución óptima que resulta?
- (b) ¿Cuál es el cambio del VO?

- 5-13. Refiérase a la figura 5.12.
- ¿Cuánto tendría que disminuir el precio por tonelada de mineral de la localidad 4 para que la opción de comprarlo se vuelva atractiva?
 - Supongamos que el precio del mineral de la localidad 1 disminuyera en \$80 por tonelada. ¿Habría algún cambio en la solución óptima y en el VO?
 - Suponga que el precio del mineral de la localidad 1 aumenta en \$100 por tonelada. ¿Ha habido algún cambio en la solución óptima? ¿Cuál es el cambio (si lo hay) del costo de una tonelada de mezcla óptima?
- 5-14. Refiérase a la figura 5.12.
- Suponga que el precio del mineral de la localidad 3 aumenta en \$50 la tonelada. ¿Hay algún cambio en la solución óptima? ¿Cuál es el cambio (si lo hay) del VO?
 - Analice el efecto sobre la solución óptima de la disminución del costo de mineral de la localidad 3 en \$118.269 por tonelada. (Por ejemplo, ¿continúa siendo óptima la solución actual? ¿Existe alguna otra solución óptima y, de ser así, cómo podría definirla?)
 - Para el cambio que hemos descrito en la parte (b), ¿cuál sería el nuevo VO?
- 5-15. Suponga que acaba de resolver un modelo de PL. Observe que tiene una solución no degenerada y, para algún coeficiente de función objetivo ve un cero en la columna de Incremento permisible. ¿Qué le dice esto?
- 5-16. Explique cómo se emplean los costos reducidos para saber si hay soluciones óptimas alternativas.
- 5-17. Utilizando los términos *razón* y *VO*, haga la interpretación correcta del precio sombra en el Informe de sensibilidad de Solver.
- 5-18. Considere el modelo de Buster Sod: Buster Sod opera una granja de riego de 800 acres en el Red River Valley de Arizona. Las principales actividades de Sod son el cultivo de trigo y alfalfa, y la cría de ganado vacuno. La Autoridad de Aguas del Red River Valley acaba de indicar las asignaciones de agua para el siguiente año (a Sod se le asignaron 1,000 pies-acre) y Sod está ocupado en la preparación de su plan de producción para el siguiente año. Él calcula que los precios del ganado vacuno se conservarán en \$500 aproximadamente por tonelada y que el trigo se venderá a \$2 por paca. Las estimaciones más precisas indican que la alfalfa podría venderse a \$22 por tonelada, pero si Sod llegara a necesitar más alfalfa de la que puede producir para alimentar su ganado, tendría que pagar \$28 por cada tonelada que adquiriera para esos propósitos.
- Algunas características tecnológicas del negocio de Sod son: rendimiento de alfalfa, 70 pacas por acre; rendimiento de alfalfa, 4 toneladas por acre. Otras características aparecen en la siguiente tabla. Defina las variables:

ACTIVIDAD	MANO DE OBRA, MAQUINARIA Y OTROS COSTOS (\$)	REQUERIMIENTO DE AGUA (PIES-ACRE)	REQUERIMIENTO DE TERRENO (ACRES)	REQUERIMIENTO DE ALFALFA (TONELADAS)
1 acre de trigo	20	2	1	
1 acre de alfalfa	28	3	1	
1 tonelada de ganado vacuno	50	0.05	0.1	5

Trigo = trigo cultivado y vendido (acres)

Acres de alfalfa = alfalfa cultivada (toneladas)

Ganado vacuno = ganado vacuno criado y vendido (toneladas)

Alfalfa comprada = alfalfa comprada (toneladas)

Alfalfa vendida = alfalfa vendida (toneladas)

En la figura 5.19 se muestra la formulación de una PL y la solución del modelo de Buster Sod. Con base en la información de la figura 5.19, conteste las siguientes preguntas.

- Muestre los cálculos que expliquen los valores del coeficiente *Trigo* de la función objetivo y los coeficientes de *Acres de alfalfa* de la primera y segunda restricciones.
- ¿Cuánta agua se está empleando?
- ¿Cuánto ganado vacuno se está produciendo?
- ¿Sod compra o vende alfalfa?
- ¿Cuánto debería pagar Sod para comprar un pie-acre adicional de agua?
- Interprete el precio sombra del “Límite de acres” de 800.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Trigo	Alfalfa	Ganado vacuno	Alfalfa comprada	Alfalfa vendida				
2	Rendimiento	70 pacas/acre	4 ton./acre							
3	Precio	\$2/paca		\$500/ton.	\$28/ton.	\$22/ton.				
4	Costos	\$20/acre	\$28/acre	\$50/ton.						
5		Acres de trigo	Acres de alfalfa	Toneladas de ganado vacuno	Toneladas de alfalfa comprada	Toneladas de alfalfa vendida				
6		0	0	8,000	40,000	0	Ganancias			
7		\$120/acre	\$(7)/acre	\$450/ton.	\$(28)/acre	\$22/acre	\$2,480,000			
8							Total	Disponible	Holgura	
9	Límite acres	1	0.25	0.1			800 ≤	800	-0	
10	Límite agua	2	0.75	0.05			400 ≤	1000	600	
11	Balance		-1	5	-1	1	-7.276E-12 =	0	0	

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$6	Acres trigo	0	-2980	120	2980	1E+30
\$C\$6	Acres alfalfa	0	-754	-7	754	1E+30
\$D\$6	Ganado vacuno ton	8000	0	450	1E+30	298
\$E\$6	Alfalfa comprada ton	40000	0	-28	6	55.85
\$F\$6	Alfalfa vendida tone	0	-6	22	6	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$9	Límite acres total	800	3100	800	1200	800
\$G\$10	Límite agua total	400	0	1000	1E+30	600
\$G\$11	Balance total	0	28	0	40000	1E+30

FIGURA 5.19

Solución e Informe de sensibilidad del modelo en PL de Buster Sod

- (g) ¿Qué sucede con la política óptima de cultivo si se triplica el precio del trigo? ¿Qué le sucede al VO?
- (h) ¿Cuánto recibirá Sod por concepto de ganancias de la operación óptima de su granja?
- (i) ¿Qué sucede con el valor óptimo de la función objetivo si el costo de la compra de alfalfa aumenta de \$28 a \$29?
Nota: el coeficiente de *Alfalfa comprada* actualmente es -\$28 y se volverá -\$29.
 Por tanto, el coeficiente *disminuirá* en \$1.

- (j) ¿Cuánto puede disminuir el precio de compra de alfalfa antes de que cambie la política óptima actual de cultivo?

- 5-19. Una planta puede fabricar cualquier combinación de cinco productos diferentes. La fabricación de cada producto requiere cierto tiempo en tres máquinas diferentes, como se indica en la siguiente tabla. Todas las cifras están expresadas en minutos por libra de producto.

PRODUCTO	TIEMPO-MÁQUINA (MIN/LB)		
	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

Cada máquina está disponible durante 128 horas por semana. Los productos A, B, C, D y E son muy competitivos y puede venderse cualquier cantidad que se produzca a precios por libra de \$5, \$4, \$5, \$4 y \$4, respectivamente. Los costos variables de mano de obra son \$4 por hora para las máquinas 1 y 2 y \$3 por hora para la máquina 3. Los costos de material son \$2 por cada libra de los productos A y C y \$1 por cada libra de los productos B, D y E. Lo que usted desea es maximizar las ganancias de la compañía. La solución de PL y el Informe de sensibilidad correspondiente aparecen en la figura 5.20.

- (a) ¿Cuántas horas de trabajo se destinan a cada una de las tres máquinas?
- (b) ¿Cuáles son las unidades de los precios sombra correspondientes a las restricciones de las cuales depende la capacidad de las máquinas?
- (c) ¿Cuánto debería estar dispuesta a gastar la compañía para disponer de una hora adicional en la máquina 2
- (d) ¿Cuánto puede aumentar el precio de venta del producto A antes de que cambie el plan óptimo de producción? Exprese su respuesta en las unidades adecuadas.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Producto	A	B	C	D	E				
2	Precio/lb	\$5	\$4	\$5	\$4	\$4				
3	Costo/hr máq. 1	\$4	\$4	\$4	\$4	\$4				
4	Costo/hr máq. 2	\$4	\$4	\$4	\$4	\$4				
5	Costo/hr. máq. 3	\$3	\$3	\$3	\$3	\$3				
6	Costos mat./lb	\$2	\$1	\$2	\$1	\$1				
7	Producto	A	B	C	D	E	Horas máq. dispon./semana			
8	Libras prod.	0	0	512	0	512	Ganancia	128		
9	Margen contrib./lb	\$ 1.417	\$ 1.433	\$ 1.850	\$ 2.183	\$ 1.700	\$ 1,817.60			
10							Total	Mins. dispon./sem.	Holgura	
11	Mins. máq. 1	12	7	8	10	7	7680 ≤	7680	7E-07	
12	Mins. máq. 2	8	9	4	0	11	7680 ≤	7680	2E-08	
13	Mins. máq. 3	5	10	7	3	2	4608 ≤	7680	3072	
14	=B2-SUMAPRODUCTO(B3:B5,B11:B13)/60-B6; Copiado a C9:F9									
15										

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$8	Libras prod. A	0	-1.380	1.417	1.380	1E+30
\$C\$8	Libras prod. B	0	-0.245	1.433	0.245	1E+30
\$D\$8	Libras prod. C	512	0	1.85	0.093	0.041
\$E\$8	Libras prod. D	0	-0.075	2.183	0.075	1E+30
\$F\$8	Libras prod. E	512	0	1.700	0.1125	0.081

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$11	Mins. máq. 1 total	7680	0.2258	7680	2671.304	2792.727
\$G\$12	Mins. máq. 2 total	7680	0.0108	7680	4388.571	3840
\$G\$13	Mins. máq. 3 total	4608	0	7680	1E+30	3072

FIGURA 5.20
Solución del modelo de cinco
productos y tres máquinas

--5-20. *Modelo de mezcla de productos/selección de procesos.* Dos productos, A y B, se procesan en tres máquinas. Ambos productos tienen dos rutas posibles. La ruta 1 procesa el producto en las máquinas 1 y 2, mientras que la ruta 2 procesa el producto en las máquinas 1 y 3. Los tiempos de procesamiento en horas por unidad aparecen en la siguiente tabla.

PRODUCTO	RUTA	TIEMPO-MÁQUINA (HRS/UNIDAD)		
		1	2	3
A	1	2	1	
A	2	2		1.5
B	1	1	2	
B	2	1		3

Los costos por hora en las máquinas 1, 2 y 3 son \$20, \$30 y \$18, respectivamente. Cada máquina está disponible 40 horas a la semana. La compañía puede vender cualquier cantidad de los productos A y B a \$110 y \$150 por unidad, respectivamente. La solución de PL y el Informe de sensibilidad correspondiente aparecen en la figura 5.21, donde

A_i = unidades de A producidas por la ruta i ($i = 1, 2$)

B_i = unidades de B producidas por la ruta i ($i = 1, 2$)

- Muestre cálculos que expliquen los valores de los coeficientes de la primera función objetivo.
- ¿Cuánto producto B se está produciendo? ¿Cuánto se produce por la primera ruta? (Interprete los números como razones de producción. Por tanto, 4.44 representaría 4.44 unidades por semana. Esto podría lograrse produciendo la primera semana 4 unidades y comenzando la 5ª, en la primera semana terminando la 5ª y produciendo hasta la 8ª y comenzando la 9ª, en la segunda semana, etc.)
- ¿Cuántas horas se emplea cada una de las máquinas?
- ¿Cuáles son las unidades de los precios sombra en las restricciones de capacidad de las máquinas?
- Suponga que hay la oportunidad de trabajar hasta 8 horas de tiempo extra en la máquina 2, con un costo de \$45 por hora (50% más que el costo de tiempo normal de \$30 por hora). ¿Debería programarse la máquina 2 para trabajar 8 horas más?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Producto	A1	A2	B1	B2				
2	Precio	\$ 110	\$ 110	\$ 150	\$ 150				
3	Costo/hr máq. 1	\$ 20	\$ 20	\$ 20	\$ 20				
4	Costo/hr máq. 2	\$ 30	\$ 30	\$ 30	\$ 30				
5	Costo/hr máq. 3	\$ 18	\$ 18	\$ 18	\$ 18				
6	Producto	A1	A2	B1	B2				
7	Cant. prod.	4.444	0.000	17.778	13.333	Ganancia			
8	Margen contrib.	\$ 40	\$ 43	\$ 70	\$ 76	\$ 2,435.56			
9						Total		Hrs. dispon.	Holgura
10	Hrs. máq. 1	2	2	1	1	40 ≤		40	-0
11	Hrs. máq. 2	1		2		40 ≤		40	-0
12	Hrs. máq. 3		1.5		3	40 ≤		40	0

Microsoft Excel 8.0 Reporte de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$7	Cant. prod. A1	4.444	0	40	100	0
\$C\$7	Cant. prod. A2	0	0	43	0	1E+30
\$D\$7	Cant. prod. B1	17.78	0	70	0	50
\$E\$7	Cant. prod. B2	13.33	0	76	1E+30	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado derecho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$F\$10	Hrs. máq. 1 Total	40	3.333	40	53.333	6.667
\$F\$11	Hrs. máq. 2 Total	40	33.333	40	13.333	26.667
\$F\$12	Hrs. máq. 3 Total	40	24.222	40	20.000	40

FIGURA 5.21

Formulación de la PL correspondiente al problema 5-20

- 5-21. *Un modelo de mezclas.* Un viñedo desea mezclar su producción de cuatro cosechas diferentes para elaborar tres tipos de vino combinado. Se han impuesto ciertas restricciones sobre el porcentaje de composición de las mezclas (véase la tabla siguiente).

MEZCLA	COSECHA				PRECIO DE VENTA POR GALÓN (\$)
	1	2	3	4	
A	cuando menos 75% de 1 y 2		*	como máximo 5%	70
B	*	cuando menos 35% de 2 y 3		*	40
C	cuando menos 50% de 1 y 3, sin restricción de 2			como máximo 40%	30
Existencias (galones)	180	250	200	400	
*Indica que no hay restricciones					

	A	B	C	D	E	F	G
1		Decisiones	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C	Total	Existencia
2		Cosecha 1	180.00	0	0	180	<=180
3		Cosecha 2	246.71	3.29	0	250	<=250
4		Cosecha 3	0	200.00	6.46E-26	200	<=200
5		Cosecha 4	22.46	377.54	0	400	<=400
6		Total producido	449.17>=	580.83>=	0.00>=		
7		Total vendido	449.17	580.83	0.00		Ganancias
8		Precio de venta	\$70	\$40	\$30	\$54,675	
9		% mezcla mínima	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C		
10		Cosecha 1	180.00		0		
11		Cosecha 2	246.71	3.29			
12		Cosecha 3		200.00	6.46E-26		
13		Cosecha 4					
14		Menos % del total	75%	35%	50%		
15		Balance	89.83	0.00	0.00		
16		Debe ser	>=0	>=0	>=0		
17							
18		% mezcla máxima	mezcla A	mezcla B	mezcla C		
19		Cosecha 1					
20		Cosecha 2					
21		Cosecha 3					
22		Cosecha 4	22.46		0		
23		Menos % del total	5%	0%	40%		
24		Balance	0.00	0.00	0.00		
25		Debe ser	<=0	<=0	<=0		

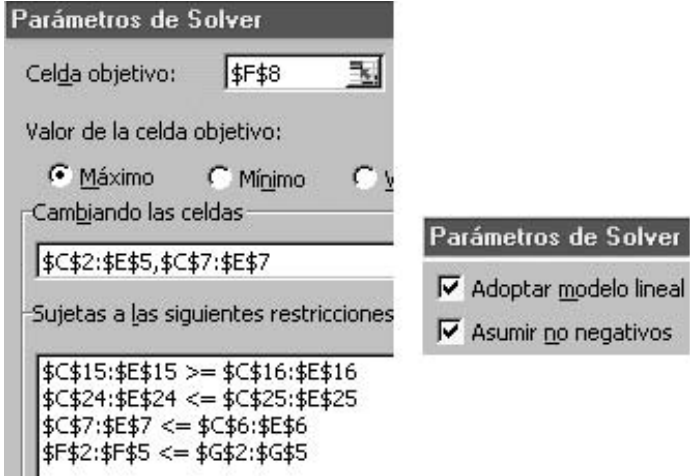


FIGURA 5.22
Modelo de PL y solución del
problema 5-21

Celda	Fórmula	Copie a
C6	= SUMA(C2:C5)	D6:E6
C10	= C2	C11, D11:D12, E10, E12
C15	= SUMA(C10:C13) - C\$6*C14	D15:E15, C24:E24

- La solución de PL aparece en la figura 5.22 y el Informe de sensibilidad en la figura 5.23.
- (a) ¿Cuál es el propósito de las restricciones que aparecen en F2:G5?
 - (b) ¿Qué finalidad tienen las restricciones que aparecen en C15:E16 y C24:E25?
 - (c) Explique por qué el LI y el LD de la restricción C15:C16 han asumido los valores que tienen. ¿Qué impedimento representa esta restricción?
 - (d) ¿Cuál es el ingreso máximo que puede lograrse al mezclar las cuatro cosechas?
 - (e) ¿Qué cantidad de cada mezcla deberá producirse? ¿Cuál es la composición de cada mezcla?
 - (f) ¿La solución actual es degenerada o no degenerada? ¿Cómo puede saberlo?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 8.0a Informe de sensibilidad							
2	Celdas cambiantes							
3								
4		Celda	Nombre	Valor Final	Gradiente reducido	Coefficiente objetivo	Aumento permisible	Reducción permisible
5	\$C\$2	Cosecha 1 Mezcla A		180.00	0.00	0	1E+30	0
6	\$D\$2	Cosecha 1 Mezcla B		0.00	-50.000	0	50.000	1E+30
7	\$E\$2	Cosecha 1 Mezcla C		0.00	0.00	0	0	0
8	\$C\$3	Cosecha 2 Mezcla A		246.71	0.00	0	0	0
9	\$D\$3	Cosecha 2 Mezcla B		3.29	0.00	0	0	40.602
10	\$E\$3	Cosecha 2 Mezcla C		0.00	0.00	0	85.000	0
11	\$C\$4	Cosecha 3 Mezcla A		0.00	0.00	0	0	1E+30
12	\$D\$4	Cosecha 3 Mezcla B		200.00	0.00	0	0	0
13	\$E\$4	Cosecha 3 Mezcla C		0.00	0.00	0	37.5	1E+30
14	\$C\$5	Cosecha 4 Mezcla A		22.46	0.00	0	771.429	46.154
15	\$D\$5	Cosecha 4 Mezcla B		377.54	0.00	0	46.154	21.862
16	\$E\$5	Cosecha 4 Mezcla C		0.00	-56.250	0	56.250	1E+30
17	\$C\$7	Total vendido Mezcla A		449.17	0.00	70	38.571	30.000
18	\$D\$7	Total vendido Mezcla B		580.83	0.00	40	30.000	14.211
19	\$E\$7	Total vendido Mezcla C		0.00	0.00	30	22.500	30
20	Restricciones							
21								
22		Celda	Nombre	Valor Final	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Reducción permisible
23	\$C\$15	Balance Mezcla A		89.83	0.00	0	89.833	1E+30
24	\$D\$15	Balance Mezcla B		0.00	-50.000	0	155.816	2.079
25	\$E\$15	Balance Mezcla C		0.00	0.00	0	0	0
26	\$C\$24	Balance Mezcla A		0.00	50.000	0	5.643	20.731
27	\$D\$24	Balance Mezcla B		0.00	0.00	0	1E+30	0
28	\$E\$24	Balance Mezcla C		0.00	106.25	0	0	144.000
29	\$F\$2	Cosecha 1 Total		180	72.5	180	112.857	180
30	\$F\$3	Cosecha 2 Total		250	72.5	250	112.857	239.717
31	\$F\$4	Cosecha 3 Total		200	72.5	200	3.198	200
32	\$F\$5	Cosecha 4 Total		400	22.5	400	445.188	5.940
33	\$C\$7	Total vendido Mezcla A		449.17	70.00	0	1E+30	449.167
34	\$D\$7	Total vendido Mezcla B		580.83	40.00	0	1E+30	580.833
35	\$E\$7	Total vendido Mezcla C		0.00	30.00	0	1E+30	0

FIGURA 5.23

Informe de sensibilidad del problema 5-21

- (g) ¿Cuál es la cantidad mínima en la cual tendría que cambiar el precio de venta de la mezcla C, y en qué dirección, para que la solución óptima fuera producir la mezcla C?
- (h) ¿Cuáles son los precios sombra de las cuatro cosechas? ¿En qué unidades están expresados estos precios sombra?
- (i) Suponga que un terremoto destruyó la mitad de la cosecha 3 disponible. ¿Qué podría usted decir acerca del impacto que tendría este acontecimiento sobre la solución y el ingreso óptimos?
- ..5-22. La Party Nut Company tiene disponibles 550 libras de cacahuates, 150 libras de nueces de la India, 90 libras de nueces del Brasil y 70 libras de avellanas. Envasa y vende cuatro variedades de mezclas de nueces en latas normales de 8 onzas (media libra). Los requerimientos de mezcla y el margen de contribución correspondiente a cada lata aparecen en la tabla siguiente. La compañía puede vender toda la producción que ponga a la venta. ¿Qué mezclas de productos debe elaborar para maximizar la contribución a las ganancias?

MEZCLA	CONTENIDO	MARGEN DE CONTRIBUCIÓN POR LATA
1 (cacahuates)	Sólo cacahuates	\$0.26
2 (mezcla Party)	No más de 50% de cacahuates; cuando menos 15% de nueces de la India; cuando menos 10% de nueces del Brasil	0.40
3 (nueces de la India)	Sólo nueces de la India	0.51
4 (mezcla de lujo)	Cuando menos 30% de nueces de la India; cuando menos 20% de nueces del Brasil; cuando menos 30% de avellanas	0.52

El modelo puede formularse como el programa lineal de la figura 5.24. Observe que en el modelo de esta figura, el coeficiente para la mezcla de cacahuates en la función objetivo es de \$0.52, en lugar de \$0.26, porque hay dos latas de 8 onzas por cada libra de cacahuates vendidos como sólo cacahuates.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Decisiones	Mezcla de cacahuates	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	Total	Existencia
2		Cacahuates	380.00	123.333		46.667	550	<=550
3		Nueces de la India		80.00	0.00	70	150	<=150
4		Nueces del Brasil		43.33		46.667	90	<=90
5		Avellanas		0.00		70	70	<=70
6		Total	380.00	246.667	0.00	233.333	Ganancia	
7		Margen de contribución	\$0.52	\$0.80	\$1.02	\$1.04	\$637.60	
8								
9		% mezcla	Mezcla de cacahuates	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo		
10		Cacahuates	=100% del Total	<=50% del Total				
11		Nueces de la India		>=15% del Total	=100% del Total	=30% del Total		
12		Nueces del Brasil		>=10% del Total		>=20% del Total		
13		Avellanas				>=30% del Total		
14								
15		Balance >= 0	Mezcla de cacahuates	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo		
16		Cacahuates	0	0				
17		Nueces de la India		43.000	0	0		
18		Nueces del Brasil		18.667		0		
19		Avellanas				0		

	B	C	D	E	F	G
6	Total	=SUMA(C2:C5)	=SUMA(D2:D5)	=SUMA(E2:E5)	=SUMA(F2:F5)	Ganancias
7	Margen contrib.	0.52	0.8	1.02	1.04	=SUMAPRODUCTO(\$C\$6:\$F\$6,C7:F7)
8						
9	mezcla %	Mezcla de cacah	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	
10	Cacahuates	1	0.5			
11	Nueces de la India		0.15	1	0.3	
12	Nueces del Brasil		0.1		0.2	
13	Avellanas				0.3	
14						
15	Balance >= 0	Mezcla de cacah	Mezcla Party	Mezcla de nueces	Mezcla de lujo	
16	Cacahuates	=C2-C10*C\$6	=-(D2-D10*D\$6)			
17	Nueces de la India		=D3-D11*D\$6	=E3-E11*E\$6	=F3-F11*F\$6	
18	Nueces del Brasil		=D4-D12*D\$6		=F4-F12*F\$6	
19	Avellanas				=F5-F13*F\$6	

Parámetros de Solver

Celda objetivo:

Valor de la celda objetivo:

☒ Máximo
 ☐ Mínimo
 ☐ Variable

Cambiando las celdas

Sujetas a las siguientes restricciones:

Opciones de Solver

☒ Adoptar modelo lineal

☒ Asumir no negativos

FIGURA 5.24

Modelo de PL y solución del modelo de Party Nut

En el Informe de sensibilidad de la figura 5.25 hemos excluido intencionalmente varios de los precios sombra y de los costos reducidos. Emplee esta salida para contestar las siguientes preguntas. Si no le es posible responder alguna de ellas, explique la causa.

- Explique el cálculo que justifique que \$1.02 sea el coeficiente de mezcla de nueces de la India en la función objetivo.
- ¿Cuántas latas de mezcla Party se producen en la solución óptima?
- ¿El precio sombra de la restricción G3:H3 es ≥ 0 o ≤ 0 ? Explique por qué.
- ¿Cuál es el valor del precio sombra de la restricción D18 ≥ 0 ? ¿Cómo lo sabe?
- ¿Qué significa que el contenido de la celda D17 sea positivo? Explique (sin emplear el léxico técnico de la PL).

- (f) ¿Cuál sería el efecto sobre la solución óptima y el VO si el precio de venta de la mezcla de cacahuates aumentara a \$0.27 por lata de 8 onzas?
- (g) ¿Cuál es el valor numérico del precio sombra de la restricción G2:H2? (*Sugerencia:* ¿qué haría con otra libra de cacahuates, si la tuviera?)
- (h) ¿Por qué es infinito el incremento permisible del LD de la restricción G2:H2? (*Sugerencia:* la respuesta de la parte (g) es la base del razonamiento.)
- (i) Explique por qué es posible tener una solución óptima, inclusive si existe un excedente positivo en la restricción D11.
- (j) ¿Cuál es el valor numérico de los precios reducidos de los cacahuates en la mezcla Party y de las nueces de la India en la mezcla de tales nueces?
- ..5-23. ¿Por qué el decremento permisible del coeficiente objetivo de F es igual a 1,500 en la figura 5.8 y a 19,000 en la figura 5.10?
- ..5-24. Observe que el LD de la restricción de mezcla correspondiente al balance de mercado de la fila 8 presenta un incremento permisible de $1E+30$ en la figura 5.8 y de 3.75 en la figura 5.10. Aun en ese caso, como puede ver al comparar las figuras 5.7 y 5.9, el vértice óptimo es el mismo en ambos casos. Por medio de la geometría, trate de explicar esta diferencia en los valores de incrementos permisibles.

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad
Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coeficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$C\$2	Cacahuates Mezcla de cacahua	380.00	0	0.52	0.06	0.12
\$D\$2	Cacahuates Mezcla Party	123.33		0.8	0.09	0.06
\$D\$3	Nueces de la India Mezcla Party	80.00	0	0.8	0.24	0.06
\$D\$4	Nueces del Brasil Mezcla Party	43.33	0	0.8	0.36	0.56
\$D\$5	Avellanas Mezcla Party	0	-0.24	0.80	0.24	1E+30
\$E\$3	Nueces de la India Mezcla de nu	0		1.02	0.06	1E+30
\$F\$2	Cacahuates Mezcla de lujo	46.67	0	1.04	1E+30	0.36
\$F\$3	Nueces de la India Mezcla de luj	70	0	1.04	0.56	0.24
\$F\$4	Nueces del Brasil Mezcla de lujo	46.67	0	1.04	0.56	0.36
\$F\$5	Avellanas Mezcla de lujo	70	0	1.04	1E+30	0.24

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Restricción lado de recho	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$2	Cacahuates Total	550		550	1E+30	380
\$G\$3	Nueces de la India Total	150		150	93.33	61.43
\$G\$4	Nueces del Brasil Total	90	1.08	90	143.33	23.33
\$G\$5	Avellanas Total	70	1.32	70	56	70
\$C\$16	Cacahuates Mezcla de cacahua	0	0	0	0	1E+30
\$D\$16	Cacahuates Mezcla Party	0	-0.56	0	61.67	93.33
\$D\$17	Nueces de la India Mezcla Party	43.00	0	0	43	1E+30
\$D\$18	Nueces del Brasil Mezcla Party	18.67		0	18.67	1E+30
\$E\$17	Nueces de la India Mezcla de nu	0	0	0	0	1E+30
\$F\$17	Nueces de la India Mezcla de luj	0	-0.56	0	46.67	70
\$F\$18	Nueces del Brasil Mezcla de lujo	0	-0.56	0	23.33	46.67
\$F\$19	Avellanas Mezcla de lujo	0	-0.80	0	28	56

FIGURA 5.25

Informe de sensibilidad del modelo de Party Nut

Caso práctico

Preguntas relacionadas con el caso Red Brand Canners

La primera vez que vimos el caso de Red Brand Canners (RBC) fue en el capítulo 3, y en esa ocasión formulamos el modelo y presentamos algunas suposiciones. En las siguientes preguntas continuaremos ese análisis. Aquí se requiere que usted resuelva en Excel varias formulaciones y que después analice los Informes de sensibilidad de Solver.

- Use Solver para optimizar su formulación de PL del modelo de producción correspondiente a Red Brand Canners. No incluya la opción de compra de hasta 80,000 libras adicionales de tomates grado A.
- ¿Cuál es la ganancia neta obtenida después de descontar el costo de la cosecha?
- Myers ha propuesto que la ganancia neta obtenida por su política será de \$144,000. ¿Es cierto esto? De no ser así, ¿cuál es su ganancia neta (tomando en cuenta, como en la pregunta 2, el costo de la cosecha)?
- Suponga que Cooper sugiere que, para apegarse a su esquema de contabilidad, presentado en el Anexo 2 del caso original, debería restarse el costo de la cosecha de 18 centavos por libra de cada coeficiente de la función objetivo. Cambie su formulación según esto y vuelva a resolver el modelo. Usted deberá obtener un valor objetivo óptimo mayor que el conseguido en la pregunta 2. Explique esta aparente discrepancia (suponga que los tomates no utilizados se estropearán).

5. Suponga ahora que los tomates no utilizados pueden venderse a 18 centavos por libra. ¿Qué solución sería preferible bajo estas condiciones? ¿Cuánto puede reducirse el precio de reventa sin afectar esta preferencia?
6. Use el Informe de sensibilidad de la pregunta 1 para determinar si debe efectuarse la compra adicional de hasta 80,000 libras de tomates grado A. ¿Puede usted decir qué cantidad sería conveniente comprar?
7. Reformule el modelo para obtener una mezcla óptima de productos aprovechando la opción de compra adicional. La solución de su modelo reformulado debe mostrar explícitamente la manera de utilizar la compra adicional.
8. Suponga que en la pregunta 1 el Departamento de Investigación de Mercados siente que la demanda de jugo podría aumentar en 25,000 cajas por medio de una campaña publicitaria. ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar Red Brand por dicha campaña?
9. Suponga en la pregunta 1 que el precio del jugo aumentó 30 centavos por caja. ¿Su Informe de sensibilidad de Solver le indica cambios en el plan de producción óptimo?
10. Suponga que RBC está obligada a reducir a 2 el número de productos elaborados con tomate. ¿Tendría usted que ejecutar Solver una vez más para saber qué producto conviene dejar de fabricar?
11. Suponga que en la pregunta 1 estuviera disponible una partida adicional de 50,000 libras de tomates grado B. ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar RBC por esta partida de tomates grado B?
15. Suponga que Cooper sugiere que, para apegarse a su esquema contable, presentado en la muestra 2 del caso original, el costo de la cosecha de 18 centavos por libra debería restarse de cada coeficiente de la función objetivo. Cambie su formulación según esto y vuelva a resolver el modelo, suponiendo un costo por cosecha de 21 centavos por libra. Usted debería obtener una solución distinta de la que obtuvo en la pregunta 12. ¿Qué solución tiene una mayor ganancia neta (suponga que los tomates no usados se estropean)? ¿Es correcto incluir el costo del tomate en la función objetivo?
16. Si en la pregunta 15 los tomates no usados pueden revenderse a 21 centavos por libra, ¿cuál sería la solución preferible? ¿Cuánto podría reducirse el precio de reventa sin afectar dicha preferencia?
17. Utilice el Informe de sensibilidad de la pregunta 12 para determinar si debe efectuarse la compra adicional de hasta 80,000 libras de tomates de grado A. ¿Puede usted decir qué cantidad debería comprarse?
18. Con un modelo reformulado, obtenga una mezcla óptima de productos, valiéndose de la opción de compra adicional. La solución a su modelo reformulado deberá mostrar explícitamente cómo usar la compra adicional.
19. Suponga que, en la pregunta 12, el Departamento de Investigación de Mercados piensa que puede aumentar en 3,000 cajas la demanda de puré mediante una campaña publicitaria. ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar Red Brand por tal campaña?
20. Suponga que, en la pregunta 12, el precio de los tomates enteros enlatados disminuyó en 48 centavos por caja. ¿Su Informe de sensibilidad de Solver le indica si habrá cambios en el plan óptimo de producción?
21. Suponga que el Departamento de Investigación de Mercados sugiriera que, si la calidad promedio del puré fuera menor que 4, el producto ya no sería aceptable para los clientes. ¿Tendría usted necesidad de volver a ejecutar Solver para determinar el plan óptimo de producción si se agregara esta nueva restricción al modelo?
22. Supongamos que en el caso de la pregunta 12 hubiera disponible una partida adicional de 200,000 libras de tomates grado C. ¿Cuánto tendría que estar dispuesta a pagar la RBC por esta partida de tomates grado C?

Preguntas alternativas sobre Red Brand Canners

Para responder las siguientes preguntas, supongamos que existen tres grados de tomates, como en las preguntas alternativas del capítulo 3.

12. Utilice Solver para optimizar su formulación de PL para la pregunta 8 de las preguntas alternativas de Red Brand Canners que aparecen en el capítulo 3.
13. ¿Cuál es la ganancia neta obtenida después de descontar el costo de la cosecha?
14. Myers asegura que la ganancia neta de su política de producción de 2,000,000 libras de puré y 1,000,000 libras de jugo es de \$268,800. ¿Es correcto esto? De no serlo, ¿cuál es su ganancia neta (tomando en cuenta, como en la pregunta 13, el costo de la cosecha)?

Caso práctico

Crawler Tread y un nuevo enfoque

En varios aspectos importantes, parte del trabajo de un gerente se relaciona con el análisis y evaluación del trabajo de otras personas, en lugar de elaborar personalmente su propia formulación y análisis “desde cero”. En su papel de buscador de diagnósticos, el administrador juzgará el modelo de otra persona. ¿Se han planteado las preguntas correctas? ¿Se ha llevado a cabo el análisis correcto? El siguiente diálogo capta la esencia de tal situación. Aquí se le pide a usted que haga comentarios sobre el análisis de una nueva oportunidad.

Ralph Hanson ha sido el jefe de metalurgistas de la fundición de hierro de PROTRAC durante los últimos cinco años. Con su

presencia aporta varias características importantes para su puesto. Para empezar, tiene una magnífica experiencia. Se graduó en la Universidad Case Western con el título de MCM (maestro en ciencias de materiales) y tuvo cinco años de experiencia en la U.S. Steel antes de ingresar a PROTRAC. Se ha servido de esta capacitación y experiencia para efectuar varios cambios que han contribuido a mejorar la calidad de los productos y la eficiencia de los procesos. Además se ha vuelto un administrador eficaz. A través de su instrucción formal y el estudio autodidáctico, se ha familiarizado con muchas técnicas y enfoques administrativos modernos y ha pugnado para que dichos métodos se apliquen en las condiciones

apropiadas. De hecho, Ralph es el autor de la idea de aplicar los modelos de PL a las actividades de mezcla de minerales y reciclaje de desechos en PROTRAC.

Ralph era el jefe de metalurgistas cuando se completó Crawler Tread, la primera aplicación de su mezcla de minerales. Actualmente, tanto Ralph como Sam Togas, el administrador de la planta, emplean con soltura los modelos de PL en el área de mezcla de minerales. Por lo general, Ralph formula, resuelve e interpreta por su cuenta la salida del modelo. Actualmente se enfrenta a un nuevo problema. La recesión ha afectado seriamente la demanda de equipo pesado y la mayoría de los departamentos de PROTRAC tienen un exceso de capacidad, incluyendo el de fundición. Sin embargo, las industrias de defensa están en auge. Un fabricante de tanques requiere un mineral de alto grado para la producción de rodamientos para tanques. De hecho, los requerimientos son exactamente los mismos que empleó PROTRAC en el modelo Crawler Tread (véase la sección 5.4). El fabricante de tanques está dispuesto a pagar a PROTRAC \$850 por tonelada de mineral, por un máximo de 150,000 toneladas que deberán ser entregadas el próximo mes. Ralph se entera de que puede disponer de hasta 98,000 toneladas de mineral, el cual está compuesto de 21,000 toneladas de material procedente de la mina 1; 40,000 de la mina 2; 15,000 de la mina 3 y 22,000 de la mina 4.

A partir de esta información, Ralph ha formulado un nuevo modelo de PL. En este modelo, T_i representa los miles de toneladas de mineral de la mina i (donde $i = 1, 2, 3, 4$) que intervienen en la mezcla y B son los miles de toneladas de mineral mezclado. Con el mayor cuidado, ha anotado la formulación para poder explicar fácilmente su análisis a Sam, el administrador de la planta. La formulación y la solución aplicadas por Ralph para su presentación aparecen en el Anexo 1.

A Sam le encantó el proyecto. Da un margen de contribución de \$30,500,000 y ocupa recursos (mano de obra y maquinaria) que de otra manera estarían ociosos. De inmediato hizo que el departamento legal elaborara un contrato por la venta de 98,000 toneladas de mineral.

Cuando Ralph llegó, al día siguiente, Sam ya lo estaba esperando. Entonces sostuvieron la siguiente conversación:

Sam: El contrato está listo y cuando ya me disponía a telefonear para confirmar el acuerdo, surgieron nuevos acontecimientos. Acabamos de recibir un télex de la mina 1. Debido a la cancelación de otro pedido, tenemos a nuestra disposición hasta 3,000 toneladas más de material al precio normal de \$800 por tonelada, si las queremos. ¿Qué debemos hacer? Por qué no regresas y resuelves de nuevo tu modelo, incluyendo la posibilidad de las 3,000 toneladas más de la mina 1 y preparas un nuevo contrato si la solución es mejor. Obviamente, no nos puede ir peor que ahora, y la verdad es que no nos va tan mal.

Ralph: En realidad, no hay necesidad de resolverlo de nuevo. Una de las mejores cosas de la PL es que podemos contestar muchas preguntas referentes a posibles cambios en el modelo original. En particular, el precio sombra de la cantidad de T_i disponible nos da un límite superior sobre cuánto más debemos pagar por la oportunidad de adquirir una tonelada adicional de mineral de la mina 1. Si el precio sombra es positivo, digamos \$10, deberíamos estar dispuestos a pagar hasta \$10 más por la oportunidad de comprar

otra tonelada de mineral (es decir, hasta \$810 por tonelada de mineral de la mina 1). Si es cero, el aumento de la cantidad de mineral disponible en la mina 1 no nos permitirá incrementar las ganancias.

Una rápida inspección de la solución nos revela que el precio sombra de esta restricción es cero.

Ralph: En virtud de que no podemos aumentar nuestro margen de contribución, dejemos el contrato tal como está y regresemos a trabajar.

Sam: ¡Caramba, Ralph, no lo entiendo! Podemos comprar mineral a \$800 la tonelada y venderlo a \$850, ¿y me dices que no lo debemos hacer?

Ralph: Comprendo que es difícil de entender, pero yo sé que si se aumenta el lado derecho de la restricción (celda I7) el valor óptimo de la función objetivo permanecerá igual. Esto implica que las toneladas de mineral extra de la mina 1 no nos ayudarán. Supongo que es porque no podemos añadir este mineral nuevo a nuestra mezcla y aun así satisfacer los requerimientos mínimos de elementos. Recuerda que el mineral de la mina 1 sólo tiene 90 libras del elemento B por tonelada y que la mezcla debe tener cuando menos 100.

Sam: Mira, Ralph, debo reunirme con el comité ahora. No puedo pasar más tiempo con este proyecto. No te diré que entiendo bien tu respuesta, pero tú eres el experto. Sigamos pues con el contrato actual.

Preguntas

1. ¿Es correcta la interpretación que ha hecho Ralph de las cifras que aparecen en el informe?
2. ¿Es correcta la respuesta que dio Ralph en cuanto a la oportunidad de efectuar la compra adicional? Si usted cree que se equivocó, ¿dónde estuvo la falla?
3. Suponga que se eliminara del modelo la fila 11 (restricción total del mineral disponible). ¿Cuál sería el precio sombra de la restricción límite del material de la mina 1? ¿Y de la restricción límite del material de la mina 2?
4. ¿Puede usted determinar qué sucedería con el VO si se modificara el valor del LD de la restricción de la mina 2 (celda I8) a 39.999?
5. Suponga que el LD de la restricción de la mina 2 (celda I8) aumenta a 40.001. ¿Cuáles son los nuevos valores óptimos de T_1 , T_2 , T_3 y T_4 ?
6. Determine por qué el incremento permisible de esta restricción (celda I8) es de 0.5714.
7. ¿Es degenerada la solución del modelo de Ralph? De ser así, ¿puede identificar cuál o cuáles son las restricciones que provocan la degeneración del modelo?
8. El Anexo 2 es un intento de Ralph por reformular el PL de manera más compacta, parecida a la del modelo de Wayne Foley presentado en la sección 5.6. Su solución óptima es la misma, pero el Informe de sensibilidad tiene una apariencia distinta que el Informe que aparece en el Anexo 1. ¿Cómo explica los coeficientes objetivo y los costos reducidos que aparecen en el Informe de sensibilidad en el Anexo 2 comparados con los correspondientes al del informe del Anexo 1? ¿Puede responder las preguntas 4 y 5 basándose en el Anexo 2?

ANEXO 1 Modelo de PL de Ralph

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Producto	Mezcla	T1	T2	T3	T4				
2	Cant. Prod. (miles)	98.0	21.0	40.0	15.0	22.0	Ganancia			
3	Margen contrib.	\$ 850	\$ (800)	\$ (400)	\$ (600)	\$ (500)	\$ 30,500			
4							Total	LD	Holgura	
5	Mineral mezclado	1	-1	-1	-1	-1	0 =	0	0	
6	Límite de mezcla	1					98 ≤	150	52	
7	Límite mineral mina 1		1				21 ≤	21	1E-04	
8	Límite mineral mina 2			1			40 ≤	40	0	
9	Límite mineral mina 3				1		15 ≤	15	0	
10	Límite mineral mina 4					1	22 ≤	22	0	
11	Total mineral dispon.		1	1	1	1	98 ≤	98	0	
12	Mínimo A		5	-2	3	-3	4 ≥	0	4	
13	Mínimo B		-10	50	-25	75	3065 ≥	0	3065	
14	Mínimo C		15	-5	-10	7	119 ≥	0	119	

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$2	Cant. prod. (miles) Mezcla	98.0	0.0	850	1E+30	50
\$C\$2	Cant. prod. (miles) T1	21.0	0.0	-800	200	50
\$D\$2	Cant. prod. (miles) T2	40.0	0.0	-400	1E+30	400
\$E\$2	Cant. prod. (miles) T3	15.0	0.0	-600	1E+30	200
\$F\$2	Cant. prod. (miles) T4	22.0	0.0	-500	1E+30	300

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$G\$1	Mínimo A Total	4	0	0	4	1E+30
\$G\$1	Mínimo B Total	3065	0	0	3065	1E+30
\$G\$1	Mínimo C Total	119	0	0	119	1E+30
\$G\$5	Mineral mezclado Total	0	850	0	52	98
\$G\$6	Límite de mezcla Total	98	0	150	1E+30	52
\$G\$7	Límite mineral mina 1 Total	21	0	21	1E+30	0
\$G\$8	Límite mineral mina 2 Total	40	400	40	0.5714	0
\$G\$9	Límite mineral mina 3 Total	15	200	15	2	0
\$G\$10	Límite mineral mina 4 Total	22	300	22	0.5	0
\$G\$11	Total mineral dispon. Total	98	50	98	0	0.8

ANEXO 2 Segundo modelo de PL de Ralph

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Producto	T1	T2	T3	T4	Mezcla	Ganancia	
2	Margen contrib.	\$ (800)	\$ (400)	\$ (600)	\$ (500)	\$ 850	\$ 30,500	
3	Cant. prod. (miles)	21.0	40.0	15.0	22.0	98.0	<=98	
4	Límite oferta o demanda	<=21	<=40	<=15	<=22	<=150		
5	Restricciones de elementos					Total	LD	Holgura
6	Mínimo A	5	-2	3	-3	4	>=0	4
7	Mínimo B	-10	50	-25	75	3065	>=0	3065
8	Mínimo C	15	-5	-10	7	119	>=0	119

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Producto	T1	T2	T3	T4	Mezcla	Ganancia	
2	Margen contrib.	-800	-400	-600	-500	850	=SUMAPRODUCTO(\$B\$3:\$F\$3,B2:F2)	
3	Cant. prod. (miles)	21	40	15	22	=SUMA(B3:E3)	98	
4	Límite oferta o de	21	40	15	22	150		
5	Restricciones de					Total	LD	Holgura
6	Mínimo A	5	-2	3	-3	=SUMAPRODUCTO(\$B\$3:\$E\$3,B6:E6)	0	=F6-G6
7	Mínimo B	-10	50	-25	75	=SUMAPRODUCTO(\$B\$3:\$E\$3,B7:E7)	0	=F7-G7
8	Mínimo C	15	-5	-10	7	=SUMAPRODUCTO(\$B\$3:\$E\$3,B8:E8)	0	=F8-G8

Microsoft Excel 8.0 Informe de sensibilidad

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Costo reducido	Coficiente objetivo	Incremento permisible	Decremento permisible
\$B\$3	Cant. prod. (miles) T1	21	50	50	1E+30	50
\$C\$3	Cant. prod. (miles) T2	40	450	450	1E+30	450
\$D\$3	Cant. prod. (miles) T3	15	250	250	1E+30	250
\$E\$3	Cant. prod. (miles) T4	22	350	350	1E+30	350

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Precio sombra	Lado derecho restricción	Incremento permisible	Decremento permisible
\$F\$6	Mínimo A Total	4	0	0	4	1E+30
\$F\$7	Mínimo B Total	3065	0	0	3065	1E+30
\$F\$8	Mínimo C Total	119	0	0	119	1E+30
\$F\$3	Cant. prod. (miles) Mezcla	98	0	150	1E+30	52
\$F\$3	Cant. prod. (miles) Mezcla	98	0	98	1E+30	0

Caso práctico

Saw Mill River Feed y Grain Company¹

El propósito de este caso es ejercitar tanto su juicio como sus habilidades técnicas. Usted tendrá que decidir, con base en los objetivos del señor Overton, cuál es la información que usted debe proporcionarle. Entonces tendrá que formular un modelo (o varios) de PL, optimizarlo(s) y presentar, en un informe abreviado, los resultados relevantes.

El lunes 28 de agosto de 1996 el señor Overton llamó a su gerente de ventas y a su gerente de compras para estudiar la política del próximo mes. Saw Mill había aceptado órdenes de compra de Turnbull Co. y de McClean Bros. y tenía la opción de aceptar un pedido de Blue River, Inc. También tenía la opción de comprar un poco de grano adicional de Cochrane Farm. El señor Overton, direc-

tor administrativo de Saw Mill, tenía como plazo hasta el fin de esa semana para decidir qué se debía hacer.

Generalmente, las compras de grano finalizan hacia los últimos días de agosto. Sin embargo, Saw Mill tiene todavía la posibilidad de comprar grano adicional a Cochrane Farm. Este compromiso tiene que concretarse antes de la fecha límite: el 1 de septiembre. El grano sería entregado en el elevador de granos de Midwest el día 15 del mes a más tardar. Este elevador funciona simplemente como almacén de Saw Mill.

Es una política invariable de la compañía cobrar un cargo adicional de 15% sobre el costo del grano suministrado a sus clientes. Los pagos al elevador de granos Midwest se manejan

COMPAÑÍA SOLICITANTE	CANTIDAD (BUSHELS)	PORCENTAJE MÁXIMO DE HUMEDAD (POR LB)	PESO MÍNIMO POR BUSHEL (LB)	PORCENTAJE MÁXIMO DE DAÑOS (POR LB)	PORCENTAJE MÁXIMO DE MATERIAL EXTRAÑO (POR LB)	FECHA DE ENTREGA
Turnbull	40,000–45,000	13	56	2	2	9/20
McClean	32,000–36,000	15.5	54	5	3	9/22
Blue River	50,000–54,000	15	56	2	4	9/26

TIPO DE MAÍZ	CANTIDAD (BUSHELS)	COSTO POR BUSHEL (\$)	PORCENTAJE DE CONTENIDO DE HUMEDAD	PESO POR BUSHEL (LB)	PORCENTAJE DE DAÑO TOTAL (POR LB)	PORCENTAJE DE MATERIAL EXTRAÑO (POR LB)
1	30,000	1.45	12	57	2	1.5
2	45,000	1.44	15	57	2	1
3	25,000	1.45	12	58	3	3
4	40,000	1.42	13	56	4	2
5	20,000	1.38	15	54	4	2
6	30,000	1.37	15	55	5	3
7	75,000	1.37	18	57	5	1
8	15,000	1.39	14	58	2	4
9	16,000	1.27	17	53	7	5
10	20,000	1.28	15	55	8	3
11	10,000	1.17	22	56	9	5

como un gasto general y esa política no debe ser modificada. Turnbull, McClean y Blue River han acordado pagar por sus pedidos actuales cualquier precio que cobre Saw Mill. Sin embargo, Saw Mill se da cuenta de que, si eleva demasiado su precio, va a perder negocios en el futuro.

Los detalles de los pedidos de Turnbull, McClean y Blue River se presentan en la primera tabla anexa. Se indica la cantidad, así como el contenido máximo de humedad, el peso mínimo por bushel, el porcentaje máximo de daños y el porcentaje máximo de material extraño.

La compañía tiene la opción de suministrar cualquier cantidad de grano que desee, dentro del rango especificado. Claro está que deberá satisfacer los requerimientos. A más tardar el 4 de

septiembre, Saw Mill debe informar a Turnbull y a McClean la cantidad de granos que recibirán. En la misma fecha, debe notificar a Blue River si aceptará su pedido, así como la cantidad de grano que le entregará si lo acepta.

Saw Mill mezcla los granos que le pertenecen para atender los pedidos de los clientes. El 28 de agosto, la compañía tenía 326,000 bushels de maíz almacenados en el elevador. Obviamente sería imposible identificar la composición exacta de cada grano de maíz depositado por la Saw Mill River Feed and Grain Company en el elevador. Por tanto, la segunda tabla anexa representa la información adicional acerca de las características de los distintos tipos de grano acreditados en la cuenta del elevador de Saw Mill River. Los 326,000 bushels se subdividen en 11 tipos de maíz, las cuales difieren en cuanto a (1) cantidad disponible, (2) costo por bushel, (3) porcentaje de contenido de humedad, (4) peso por bushel, (5) porcentaje de grano dañado y (6) porcentaje de material extraño.

¹Según una idea de Jonathan Kornbluth, basada en la información que se publicó originalmente en *Introduction of Linear Programming: Methods & Cases*, por Thomas H. Naylor, Eugene T. Byrne y John M. Vernon (Belmont, CA: Wadsworth Publishing, 1971).

El grano que ofrece la Cochrane Farm es un cargamento de hasta 50,000 bushels, con un promedio de 15% de humedad, 3% de daño y 2% de material extraño. La carga tiene una densidad de 57 libras por bushel y Straddle (el gerente de compras) está convencido de que el pedido puede obtenerse a un costo de \$1.41 por bushel.

Desarrolle un modelo de PL como ayuda para analizar el modelo de Overton. (Emplee la notación T_i = bushels de maíz tipo i por enviar a Turnbull; lo mismo para M_i y B_i . Además, denominemos maíz tipo 12 al procedente de Cochrane Farm.) Sin extenderse más de una página, llamada “Resumen ejecutivo”, acompañada con anexos relevantes de su modelo, ofrezca la información más concisa posible que ayude a Overton a responder sus preguntas. Sus objetivos principales consisten en maximizar las ganancias y

mantener los precios de venta a los clientes lo suficientemente bajos para atraer más negocios. Puede esperarse que él se base en su buen juicio para tomar la decisión; el trabajo de usted es proporcionarle la información adecuada que le permita analizar las principales ventajas y desventajas. Usted también tendrá que hacer sus propias recomendaciones.

La presentación de usted será juzgada por la economía de su formulación (es decir, formule su modelo o modelos de la manera más eficiente posible *para el conjunto de datos dado*), así como por sus recomendaciones acerca de

- (a) si se debe comprar o no el producto de Cochrane;
- (b) si se debe aceptar o no la opción de Blue River;
- (c) la cantidad de maíz que conviene suministrar a Blue River, a Turnbull y a McClean.

Caso práctico

Kiwi Computer

La Kiwi Computer de Nueva Zelanda fabrica dos tipos de computadoras personales: un modelo portátil y un modelo de escritorio. Kiwi ensambla los gabinetes y las tarjetas de circuito impreso en su planta, en la cual fabrican también los gabinetes e integran los componentes a las tarjetas de circuito impreso. La producción mensual está limitada por las capacidades que aparecen en la siguiente tabla:

OPERACIÓN	PORTÁTIL	ESCRITORIO
Producción de gabinetes	4000	2000
Integración de tarjetas	2500	3000
Ensamblaje de computadoras portátiles	2000	—
Ensamblaje de equipo de escritorio	—	1800

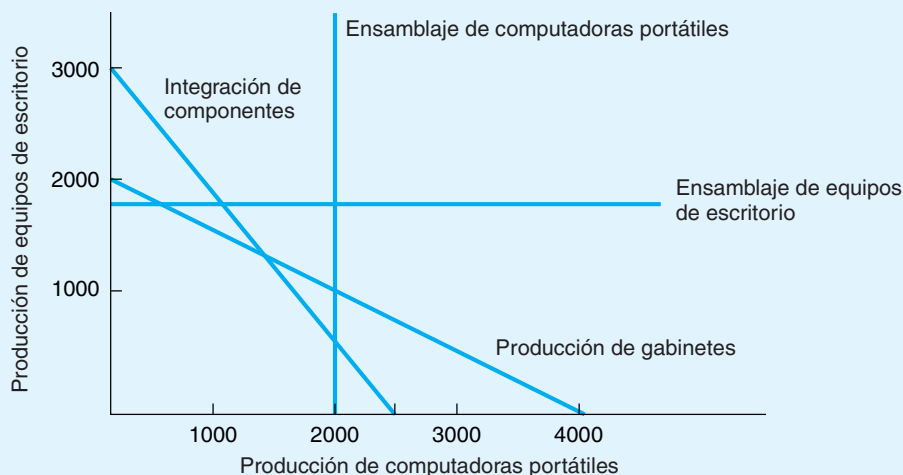
Por ejemplo, en un mes es posible producir 4,000 gabinetes para computadoras portátiles si no se producen gabinetes para escritorio; o bien, ningún gabinete para computadoras portátiles y 2,000 gabinetes para escritorio; o también, si se dedican tiempos iguales para ambos productos, 2,000 gabinetes para modelos por-

tátiles y 1,000 para los de escritorio. Para que sea factible, la producción de computadoras portátiles y de escritorio de cada mes debe satisfacer todas las restricciones simultáneamente. El conjunto de planes de producción factibles aparece en el Anexo 1

El precio de mayoreo al cual Kiwi vende sus productos a las tiendas de menudeo es \$1,500 por la computadora de escritorio y \$1,400 por la portátil. Para poder competir en el mercado, Kiwi tiene que vender sus computadoras a precios que son varios cientos de dólares más bajos que los de un fabricante de computadoras rival muy grande y conocido.

La aparición de este fabricante ha causado un auge en la industria, pues el mercado se ha transformado, de uno dirigido principalmente a los profesionales de los negocios a un mercado de usuarios de computadoras para las empresas y el hogar. Debido a este desplazamiento, el mercado ahora es un “mercado de vendedores” y actualmente Kiwi vende todas las computadoras que produce de ambos modelos. Durante el primer trimestre del año, Kiwi fabricó 2,000 modelos portátiles cada mes y 600 computadoras de escritorio. Tanto la integración de componentes como el ensamblaje de computadoras portátiles operaron a toda su capacidad, pero había cierta holgura en la producción de gabinetes y en

ANEXO 1



ANEXO 2

	GASTOS GENERALES FIJOS TOTALES (MILES DE \$)*	GASTOS GENERALES FIJOS POR UNIDAD (\$)
Producción de gabinetes	247	95
Integración de componentes	533	205
Ensamblaje de computadoras de escritorio	249	415
Ensamblaje de computadoras portátiles	<u>230</u>	115
Total	1259	

*Tomando como base una producción de 600 computadoras de escritorio y 2,000 portátiles al mes.

el ensamblaje de equipos de escritorio. Los contadores de costos de Kiwi determinaron gastos generales y costos estándar fijos, como podemos apreciar en los anexos 2 y 3. La información sobre los gastos generales fijos del Anexo 3 se deriva de los gastos generales fijos totales del Anexo 2.

ANEXO 3

	COMPUTADORAS DE ESCRITORIO	PORTÁTILES
Materiales directos	\$800	\$ 690
Mano de obra directa		
Producción de gabinetes	\$20	\$15
Integración de componentes	100	90
Ensamblaje final	5	10
Gastos generales fijos		
Producción de gabinetes	\$ 95	\$ 95
Integración de componentes	205	205
Ensamblaje final	415	115
Total	\$1640	\$1220

En una reunión trimestral de los ejecutivos de la compañía, se expresó gran insatisfacción por el desempeño reciente de las ganancias de Kiwi. El presidente esperaba ganancias mucho mayores como resultado de la magnitud de su mercado. Como una respuesta, el gerente de ventas indicó que era imposible vender la computadora de escritorio con ganancias. Por tanto, para mejorar las ganancias, sugirió que ese modelo se eliminara de la línea de productos de la compañía.

El contralor objetó esta sugerencia. Sostuvo que el problema real al cual se enfrentaban las computadoras de escritorio era que tenían que absorber la totalidad de los gastos generales fijos del departamento de ensamblaje de computadoras de escritorio cuando sólo se producía una cantidad pequeña de ellas. Indicó que la producción y venta de las computadoras de escritorio estaban haciendo, de hecho, una contribución positiva a los gastos generales y a las ganancias. Esta contribución simplemente era insuficiente para cubrir los costos fijos. Ésta fue su conclusión: "Si producimos más computadoras de escritorio, podremos disminuir el costo fijo de ensamblaje final de \$415. Ahora es muy alto porque estamos produciendo muy pocas unidades."

El gerente de ventas se asombró al escuchar estas palabras. El trabajo del contralor consistía en ofrecer a todos los ejecutivos de Kiwi información de contabilidad que les ayudara a tomar las decisiones de negocios adecuadas. Si la suposición del contralor era

realmente correcta, entonces las cifras de costos del Anexo 3 resultaban bastante engañosas, y así lo habían sido por bastante tiempo.

Haciendo eco de las conjeturas del contralor, el gerente de producción sugirió un modo de aumentar la producción. "Podemos aumentar la producción si un subcontratista efectúa parte de la integración de componentes en las tarjetas de circuito impreso. Podríamos suministrarle las tarjetas y los componentes y pagarle algún precio pactado por cada tarjeta de computadora de escritorio que integre y otro precio pactado (probablemente diferente) por cada tarjeta de computadora portátil que integre."

En ese momento, el presidente intervino en el debate. Él concluyó la junta pidiendo al gerente de ventas, al contralor y al gerente de producción que se reunieran para pensar en una recomendación sobre la mezcla de productos de la compañía y de la subcontratación. Les dijo que supusieran que la demanda se mantendría alta y que la capacidad actual permanecería fija. Específicamente, les pidió que consideraran en grupo dos preguntas derivadas de sus comentarios. Esas preguntas fueron las siguientes:

- Suponiendo que no hubiera algún cambio en la capacidad o en los precios de venta de las computadoras y suponiendo también que no se subcontratara la integración de las tarjetas, ¿cuál sería la mezcla de computadoras de escritorio y portátiles que le reportaría mayores ganancias a Kiwi? Además, ¿habría en esa mezcla menos computadoras de escritorio, como lo sugirió el gerente de ventas?
- ¿Cuál sería el precio de venta máximo por tarjeta integrada que debería estar dispuesto a pagar Kiwi al subcontratista encargado de integrar las tarjetas de las computadoras de escritorio, y cuál sería el precio máximo por tarjeta integrada que debería estar dispuesto a pagar Kiwi al subcontratista por la integración de las tarjetas de las computadoras portátiles, manteniendo a la vez las ganancias en el nivel más alto posible si se integran en su totalidad las tarjetas de ambos modelos de computadora en la planta de Kiwi?

Preguntas

Parte A. Sin permitir la subcontratación.

- En el Anexo 3, el costo de los gastos generales estándar asignado a las computadoras de escritorio para el ensamblaje final es \$415. Explique con claridad cómo se obtuvo esta cifra.
- (a) ¿Las computadoras de escritorio hacen una contribución a las ganancias? En otras palabras, dado que los gastos generales son fijos en el corto plazo, ¿las ganancias de la compañía serían mayores si no se produjeran computadoras de escritorio?
- (b) El cálculo correcto de la ganancia por unidad demostraría que el modelo portátil reporta mayores ganancias que el de escritorio. ¿Significa esto que deberían producirse más de ellas o únicamente modelos portátiles? ¿Por qué?
- Al contestar esta pregunta, suponga que las tarjetas no pudieran ser integradas por un subcontratista. Construya un modelo de programación lineal para determinar la mezcla óptima de productos.
- Conteste la primera pregunta del presidente optimizando su modelo mediante Solver e indique cuál sería la mezcla óptima de computadoras de escritorio y portátiles. Se aceptan respuestas expresadas en números no enteros.

5. Encuentre la mejor respuesta entera factible que sea posible, redondeando a enteros las soluciones que haya encontrado para la pregunta 4.
6. (a) Retroceda un poco y vuelva a calcular los “costos estándar” de la compañía, utilizando sus respuestas redondeadas para la pregunta 5, y compárelos con los costos obtenidos para el Anexo 3.
- (b) ¿Cuánto aumentarían las ganancias si se aplicara la nueva mezcla (usando las respuestas en enteros de la pregunta 5), en lugar de la anterior (es decir, 600 computadoras de escritorio y 2,000 portátiles)?

Parte B. Se permite la subcontratación.

Ahora permitiremos que algunas de las tarjetas sean integradas por un subcontratista. Suponga que la producción de una computadora cuya tarjeta va a ser integrada por el subcontratista requiriera la misma cantidad de tiempo para la producción del gabinete y el ensamblaje final, que una cuya tarjeta ha sido integrada en la fábrica.

7. Suponga que el subcontratista va a cobrar \$110 por integrar cada tarjeta de computadora de escritorio y \$100 por cada tarjeta de computadora portátil. Kiwi proporciona al subcontratista los materiales necesarios. ¿Le convendría a Kiwi emplear al subcontratista para que integre las tarjetas? Exponga sus argumentos a favor o en contra sin formular ni resolver un nuevo modelo de PL.
8. Construya ahora un modelo de PL donde esté incluida la subcontratación. En su formulación, haga la distinción entre las computadoras producidas con tarjetas integradas interna y externamente.
9. Suponga que, además del cargo por tarjeta, el subcontratista ha decidido añadir ahora un cargo fijo por integrar un lote de tarjetas (el cargo será el mismo, sin importar la cantidad de tarjetas que integre ni su tipo). ¿Cuál sería el cargo fijo con el cual a Kiwi le resultaría igual subcontratar todas sus tarjetas o integrarlas internamente?

Parte C. Análisis de sensibilidad.

10. Use como referencia la formulación de programación lineal que aparece en la pregunta 8. ¿La solución óptima es degenerada? Explique su respuesta.
11. Tomando como referencia la formulación de programación lineal correspondiente a la pregunta 8, ¿existen soluciones óptimas alternativas? Explique.
12. Use como referencia la formulación de programación lineal para la pregunta 8. El subcontratista cobra actualmente \$110 por cada tarjeta de escritorio que integra. ¿Cuánto tendría que disminuir este cargo para que la solución óptima de Kiwi fuera que el subcontratista integrara las tarjetas a los equipos de escritorio? ¿Por qué?
13. Tome como referencia la formulación de programación lineal correspondiente a la pregunta 3. Supongamos que Kiwi pudiera aumentar la capacidad de integración de tarjetas para integrar una cantidad adicional igual a 600 tarjetas de computadoras de escritorio o a 500 tarjetas de computadoras portátiles o a cualquier combinación equivalente de ellas. ¿Debería aumentar Kiwi la capacidad si el costo fuera \$175,000 al mes? Responda *sin* volver a resolver el modelo de PL.

14. Use como referencia la formulación de PL de la pregunta 3. Suponga que la unidad de escritorio ha sido rediseñada de tal manera que ahora se usan menos chips y, por tanto, se han reducido los costos de los materiales directos en \$200. ¿Su Informe de sensibilidad le indica algún cambio en el plan óptimo de producción? Explique su respuesta.
15. Conteste la segunda pregunta del presidente.

Preguntas alternativas sobre Kiwi Computer

Kiwi está considerando la opción de consolidar en el mismo departamento el ensamblaje de computadoras de escritorio y de modelos portátiles. El nuevo departamento tendría capacidad suficiente para ensamblar cada mes 3,000 computadoras portátiles y ninguna de escritorio, o ninguna portátil y 2,200 de escritorio o, si se le dedicara igual cantidad de tiempo a ambas, 1,500 portátiles y 1,100 de escritorio. Se estima que los gastos generales fijos mensuales de este departamento serían menores de \$479,000, es decir, los actuales gastos generales combinados de los departamentos de ensamblaje de computadoras de escritorio y portátiles. Para responder a las siguientes preguntas, suponga que los departamentos ya están unificados.

Parte A. No se permite la subcontratación.

1. Sean D y P la tasa mensual de producción de computadoras de escritorio y la de computadoras portátiles respectivamente, y F los gastos generales fijos del nuevo departamento de ensamblaje unificado. Exprese usted las ganancias totales en función de D , P y F .
2. ¿Es indispensable conocer el valor de F para determinar la mezcla óptima de productos? Suponga que los gastos generales fijos no son afectados por los valores de D y P .
3. Para contestar esta pregunta, suponga que las tarjetas no pudieran ser integradas por un subcontratista. Construya un modelo de programación lineal para determinar la mezcla óptima de productos.
4. Optimice su modelo por medio de Solver e indique la mezcla óptima de computadoras de escritorio y portátiles. Son aceptables las respuestas fraccionarias.
5. Encuentre la mejor respuesta factible que sea posible obtener con números enteros, mediante el redondeo a los enteros adyacentes de las respuestas que obtuvo para la pregunta 4.
6. Suponga que si no se combinan ambos departamentos de ensamblaje, la ganancia óptima (los ingresos menos *todos* los costos) es de \$330,286. ¿Cuál sería el valor máximo que podrían alcanzar los gastos generales fijos de un departamento de ensamblaje combinado para que Kiwi siguiera prefiriendo unificar los dos departamentos?

Parte B. Se permite la subcontratación.

7. Supongamos que el subcontratista decidiera cobrar \$150 por la integración de cada tarjeta de computadora de escritorio y \$135 por la de cada tarjeta de computadora portátil. Kiwi le proporcionaría al subcontratista todos los materiales necesarios. ¿Debería emplear Kiwi al subcontratista para la integración de las tarjetas? Fundamente su respuesta sin construir ni resolver un nuevo modelo de PL.
8. Ahora formule un modelo de PL donde esté incluida la subcontratación. En su formulación, haga la distinción entre las

computadoras producidas con tarjetas integradas interna y externamente.

9. Supongamos que, además del cargo que cobra por tarjeta, el subcontratista decidiera incluir un cargo fijo por la integración de un lote de tarjetas (el cargo sería el mismo, sin importar la cantidad de tarjetas ni su tipo). ¿Cuál sería el cargo fijo con el cual a Kiwi le resultaría igual subcontratar o integrar todas sus tarjetas internamente?

Parte C. Análisis de sensibilidad.

10. Use usted como referencia la formulación de programación lineal de la pregunta 8. ¿La solución óptima es degenerada? Explique su respuesta.
 11. Tome como referencia la formulación de programación lineal presentada en la pregunta 8. ¿Existen soluciones óptimas alternativas? Explique su respuesta.
 12. Tome ahora como referencia la formulación de programación lineal utilizada en la pregunta 8. El subcontratista cobra actualmente \$150 por cada tarjeta de escritorio que integra.
13. ¿Podría reducir el subcontratista su precio en grado suficiente para que la solución óptima de Kiwi consistiera en permitir que él integrara sus tarjetas para computadoras de escritorio? Explique su respuesta.
 13. Tome como referencia la formulación de programación lineal presentada en la pregunta 3. Suponga que Kiwi puede aumentar la capacidad de integración de tarjetas para integrar una cantidad adicional de 600 tarjetas de computadoras de escritorio o de 500 tarjetas de computadoras portátiles, o a cualquier combinación equivalente de ellas. ¿Le convendría a Kiwi aumentar la capacidad si el costo de ello fuera de \$175,000 al mes? Responda *sin* resolver nuevamente el modelo de PL.
 14. Use como referencia la formulación de PL presentada en la pregunta 3. Supongamos que se ha rediseñado la unidad de escritorio, de manera que ahora se utilizan menos chips y, por tanto, se ha logrado reducir los costos de los materiales directos en \$200. ¿El informe de su hoja de cálculo electrónica muestra que habría algún cambio en el plan óptimo de producción? Explique su respuesta.

Referencias

De-Li Yang y Weiqin Mou, "An Integrated Decision Support System in a Chinese Chemical Plant", en *Interfaces*, 23 núm. 6 (1993), págs. 93-100.

Honorio Carino y Clinton LeNoir, "Optimizing Wood Procurement in Cabinet Manufacturing", en *Interfaces*, 18, núm. 2 (1988), págs. 10-19.