TEORÍA DE JUEGOS

Teoría de juegos

¿Qué es un juego?

Un juego es un modelo simplificado de la realidad que representa una situación de conflicto.

Los elementos que intervienen en un juego son:

- Jugadores.
- Opciones o Alternativas.
- Un valor/resultado asociado a cada alternativa (compensaciones).

Teoría de juegos

¿Qué aplicaciones tiene esta teoría?

- Planificación estratégica.
- Negociación.
- Juegos de computadoras.
- Todo problema en ambiente competitivo…

Teoría de juegos

Supuestos o características:

- 2 jugadores igualmente inteligentes.
- Tratan de hacerse el mayor daño posible.
- Jugador A → m renglones.
- Jugador B → n columnas.
- Suma cero (ganancia de A + pérdida de B = 0).
- Jugador A → recibe recompensa C_{ij} → Jugador B.
- Jugador B → paga recompensa C_{ij} → Jugador A.

John Von Newman
Oskar Morgenstein
→ Desarrollan la teoría sobre la manera en que se deben jugar

juegos con punto de equilibrio

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{21}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Se cumple que:

Para jugador maximizante (A)
máx.[min. c_{ij}]
 y x

=

Para jugador minimizante (B)
min. [Máx. c_{ij})]
 x y

Juegos con punto de equilibrio

$$\max_{x} \min_{y} c_{ij} = \min_{y} \max_{x} c_{ij}$$

Equilibrio de Nash

Valor del juego

$$v = \max_{x} \min_{y} c_{ij} = \min_{y} \max_{x} c_{ij}$$

Equilibrio de Nash

El ***equilibrio de Nash***, se presenta cuando cada jugador elige la acción que optimiza su pago, tomando como dadas las decisiones de los otros jugadores, y sin tener en cuenta los efectos que su decisión pueda tener en los pagos de los demás.

En una situación de equilibrio de Nash, ninguno de los jugadores tendrá incentivos individuales para variar de estrategia.

Ejemplo, con punto de equilibrio

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)
a_1	4	4	10	4
a_2	2	3	1	1
a_3	6	5	7	5
d(y)	6	5	10	

- El par de valores coincide (gana 5 , pierde 5) = Valor del juego = 5

Juegos de suma constante para dos personas

Aunque un juego no sea suma cero, dos jugadores pueden aún estar en conflicto total.

Definición: un juego de suma constante para dos personas es un juego donde participan dos contrincantes en el cual, para cualquier elección de estrategias de ambos jugadores, la recompensa del jugador de renglones (i) y la recompensa del jugador columnas (j) suman un valor constante “C”.

Juego suma cero ⇒ Caso especial C = 0

Ejemplo: juegos de suma constante.

Red televisoras: en juego 100 millones de televidentes.

Los televidentes que no sean atraídos por la R1 serán atraídos por defecto por la R2. Ej.: si R1 no hace nada, todos verán la R2.

Red 1 /Red 2	**Película acción**	**Telenovela**	**Programa comedia**
Película acción	35	15	60
Telenovela	45	58	50
Programa comedia	38	14	70

Ejemplo: juegos de suma constante.

Red televisoras: en juego 100 millones de televidentes.

Red 1 /Red 2	**Película acción**	**Telenovela**	**Programa comedia**	**d(x)**
Película acción	35	15	60	15
Telenovela	45	58	50	45
Programa comedia	38	14	70	14
d(y)	45	58	70	

- Valor del juego para red 1 = 45 ← lo que gana la red 1
- Valor del juego para red 2 = 100 - 45 = 55 ← lo que gana la red 2
- Suma constante = 45 + 55 = 100

Juego SIN punto de equilibrio

Juego sin punto de equilibrio

$$\underset{x}{\text{Máx.}}\left[\underset{y}{\min.}\ c_{ij}\right] \neq \underset{y}{\text{Min.}}\left[\underset{x}{\text{Máx.}}\ c_{ij}\right]$$

La expectativa de ambos jugadores no coincide.

Existe un punto de equilibrio, pero no pueden llegar los jugadores utilizando estrategias simples (o puras). Existe el teorema de Von Newman y Morgenstern que demuestra como se llega al punto de equilibrio. Tendremos entonces:

$$\underset{x}{\text{Max.}}\ \underset{y}{\text{Min.}} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} c_{ij} * p_i * q_j = V = \underset{y}{\text{Min.}}\ \underset{x}{\text{Max.}} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} c_{ij} * p_i * q_j$$

$0 <= p_i <= 1$; $0 <= q_j <= 1$ → p_i y q_j representa la probabilidad que cada jugador le asigna a cada alternativa “i” o “j”.

Juego sin punto de equilibrio

Cada jugador tratara de mantener el máximo secreto sobre la mecánica que aplica en sus decisiones (suponemos aleatorios).
“Esto nos dice, que la presentación de algún c_{ij} es aleatoria”

y esa probabilidad de presentación es una probabilidad compuesta dada por el producto de $p_i * q_j$.

El valor esperado de esta serie de posibles resultados es:

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} c_{ij} * p_i * q_j$$

Es condición necesaria que el jugador A y B deben poder fijar las probabilidades p_i y q_j.

14

Ejemplo, sin punto de equilibrio

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)
a_1	9	2	3	2
a_2	-1	8	9	-1
a_3	6	4	5	4
d(x)	9	8	9	

- El par de valores no coincide (gana 4 ; pierde 8).

Dominancia

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)
a_1	9	2	3	2
a_2	-1	8	9	-1
a_3	6	4	5	4
d(y)	9	8	9	

Algunas alternativas de decisión (para cualquier Universo), no se utilizarán nunca por ser dominadas por otra u otras; es el caso en que esas alternativas sean NO preferibles a primera vista cualquiera sea el estado de naturaleza o la decisión del opositor.

Dominancia

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)	
a_1	9	2	3	2	p_1
a_2	-1	8	9	-1	p_2
a_3	6	4	5	4	p_3
d(y)	9	8	9		
	q_1	q_2	q_3		

Matriz reducida

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(y)	9	8	
	q_1	q_2	

Solución del juego

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(x)	9	8	
	q_1	q_2	

$$9*q_1 + 2*q_2 <= V$$

$$(-1)*q_1 + 8*q_2 <= V$$

$$6*q_1 + 4*q_2 <= V$$

Como el jugador siempre elije alguna de las alternativas, esto es, $q_1 + q_2 = 1$ podemos hacer $q_2 = 1- q_1$ y reemplazar en las formulas anteriores:

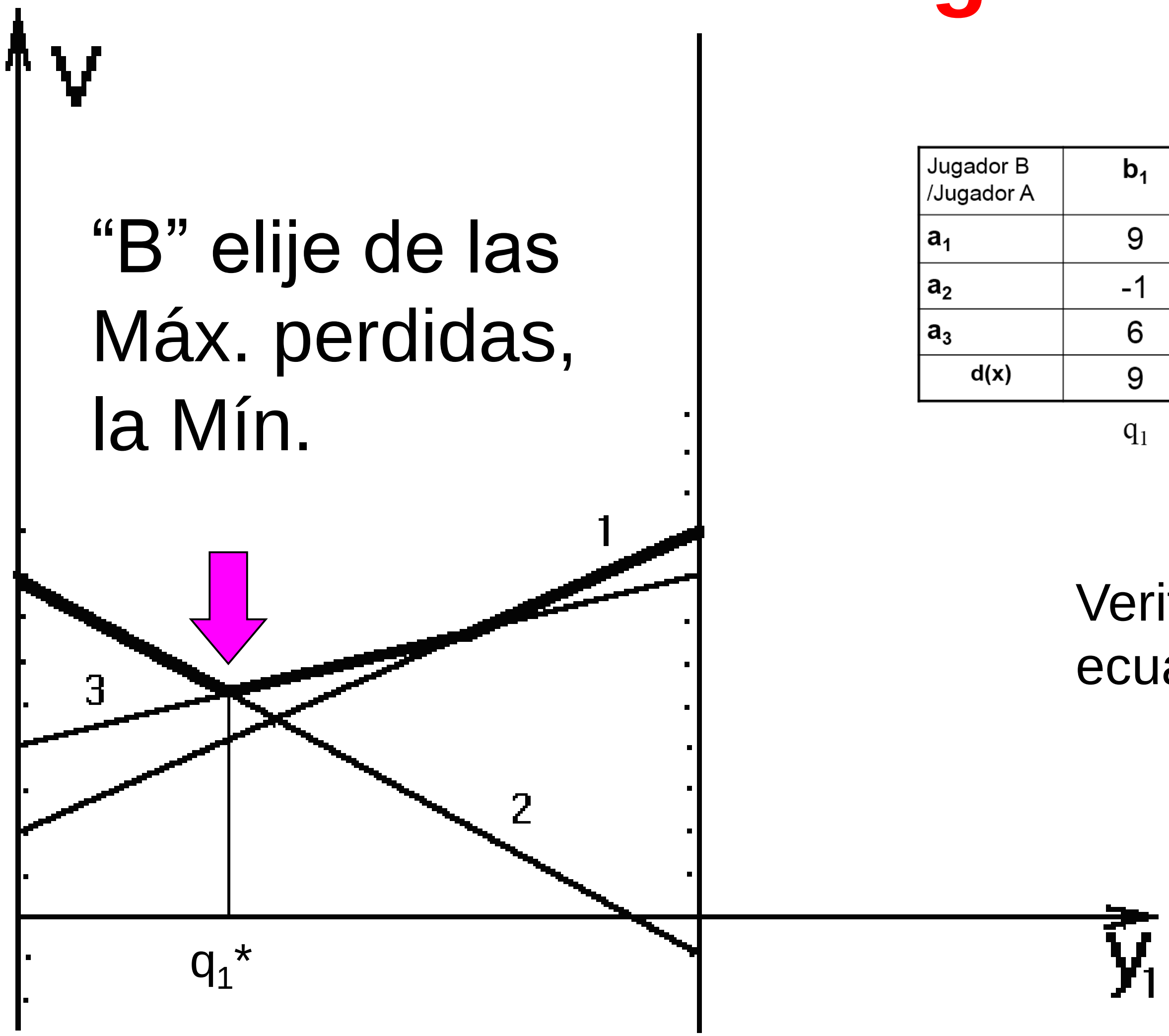
Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(x)	9	8	
	q_1	$1-q_1$	

$$9*q_1 + 2*(1-q_1) <= V$$

$$(-1)*q_1 + 8*(1-q_1) <= V$$

$$6*q_1 + 4*(1-q_1) <= V$$

Solución gráfica



“B” elije de las Máx. perdidas, la Mín.

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(x)	9	8	
	q_1	$1-q_1$	

$$9*q_1 + 2*(1-q_1) <= V$$

$$(-1)*q_1 + 8*(1-q_1) <= V$$

$$6*q_1 + 4*(1-q_1) <= V$$

Verificar los resultados de cada ecuación para cuando q=0 y q=1

(La alternativa a1 queda fuera del punto de equilibrio, por lo cual p_1=0)

Solución del juego

Buscamos la intersección de las 2 rectas:

$$(-1)*q_1 + 8*(1-q_1) = 6*q_1 + 4*(1-q_1)$$
$$(-9)*q_1 + 8 = 2*q_1 + 4$$
$$(-9)*q_1 - 2*q_1 = 4 - 8$$
$$(-11)*q_1 = - 4$$
$$q_1 = - 4 / -11$$

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(x)	9	8	
	q_1	q_2	

$$q_1 = 4/11$$
$$q_2 = 7/11$$

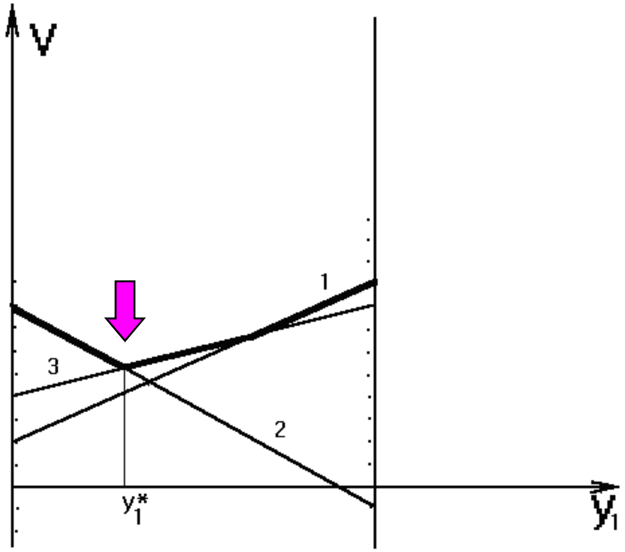
Si reemplazamos q_1 en:

$V= (-1)*q_1 + 8*(1-q_1)$

$V= (-1)*(4/11) + 8*(1-4/11)$

V= 52/11 <= Valor del juego

Matriz reducida



Jugador B /Jugador A	b_1	b_2
a_1	9	2
a_2	-1	8
a_3	6	4
d(x)	9	8
	q_1=4/11	q_2=7/11

p_1=0

p_2 =2/11

p_3 = 9/11

Ya sabemos que V = 52/11 y luego hacemos $p_3 = 1-p_2$ entonces:

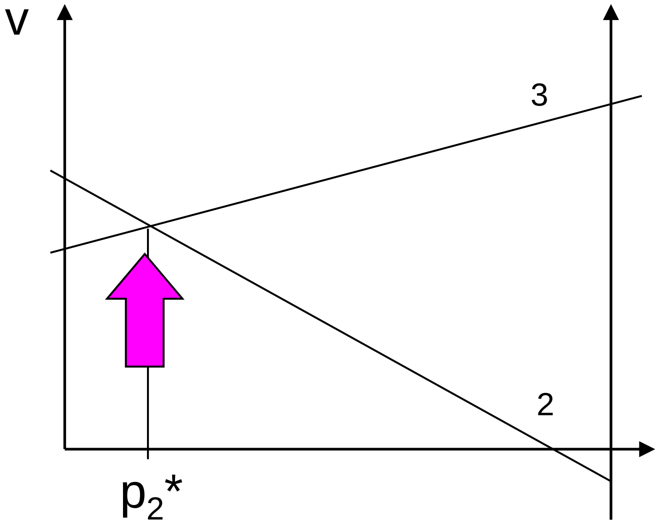
$52/11 = (-1)*p_2 + 6*(1- p_2)$

p_2 = 2/11, entonces

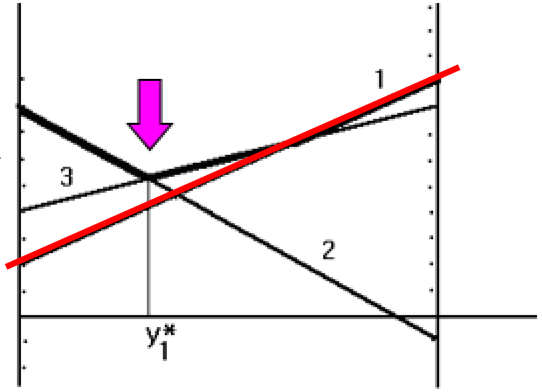
$p_3 = 1-p_2 = 9/11$

Solución gráfica para “A”

“A” elije de las Mín. ganancias, la Máx.



Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	
a_1	9	2	p_1 = 0
a_2	-1	8	p_2
a_3	6	4	p_3
d(x)	9	8	
	q_1	$1-q_1$	



$9^*\ p_1 + (-1)^*p_2 + 6^*(1-\ p_2) >= V$

$2^*\ p_1 +\ \ 8\ \ ^*p_2 + 4^*(1-\ p_2) >= V$

p_1 = 0, porque no participaba del punto de equilibrio, entonces:

$(-1)^*p_2 + 6^*(1-\ p_2) >= V$

$8\ \ ^*p_2 + 4^*(1-\ p_2) >= V$

Verificar los resultados de cada ecuación para cuando p=0 y p=1

Solución del juego con PL

Desde el punto de vista del jugador A:

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)	
a_1	9	2	3	2	p_1
a_2	-1	8	9	-1	p_2
a_3	6	4	5	4	p_3
d(y)	9	8	9		
	q_1	q_2	q_3		

$$\text{Max.}(Z) = V$$

$$\begin{aligned}
\text{SA}\quad & 9p_1 + (-1)p_2 + 6p_3 >= V \\
& 2p_1 + 8p_2 + 4p_3 >= V \\
& 3p_1 + 9p_2 + 5p_3 >= V \\
& p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
& p_1,\ p_2,\ p_3,\ V >= 0
\end{aligned}$$

Solución del juego con PL

Desde el punto de vista del jugador B:

Jugador B /Jugador A	b_1	b_2	b_3	d(x)	
a_1	9	2	3	2	p_1
a_2	-1	8	9	-1	p_2
a_3	6	4	5	4	p_3
d(y)	9	8	9		
	q_1	q_2	q_3		

$$\mathrm{Min}(Z) = V$$

$$\begin{aligned}
\text{SA} \quad & 9q_1 + 2q_2 + 3q_3 <= V \\
& (-1)q_1 + 8q_2 + 9q_3 <= V \\
& 6q_1 + 4q_2 + 5q_3 <= V \\
& q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\
& q_1,\ q_2,\ q_3,\ V >= 0
\end{aligned}$$