CAPÍTULO 9

Modelos de transporte y asignación

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al terminar de estudiar este capítulo, el alumno será capaz de:

1. Estructurar problemas de PL para modelos de transporte, trasbordo y asignación.
2. Utilizar el método de la esquina noroeste y el método del salto de piedra en piedra.
3. Resolver problemas de localización de instalaciones y otras aplicaciones con los modelos de transporte.
4. Resolver problemas de asignación con el método húngaro (reducción de matriz).

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

9.1 Introducción

En este capítulo exploramos tres tipos especiales de problemas de programación lineal: el problema de transporte (introducido en el capítulo 8), el problema de asignación y el problema de trasbordo. Todos pueden modelarse como *problemas de flujo en red*, empleando nodos (puntos) y arcos (líneas). En el capítulo 11 se estudiarán otros modelos de redes.

La primera parte de este capítulo explica estos problemas y brinda sus representaciones en redes, así como sus modelos de programación lineal. Las soluciones se encontrarán usando software estándar de programación lineal. Los problemas de transporte y asignación tienen una estructura especial que permite resolverlos con algoritmos muy eficientes. La última parte del capítulo presenta los algoritmos especiales para obtener las soluciones.

9.2 Problema de transporte

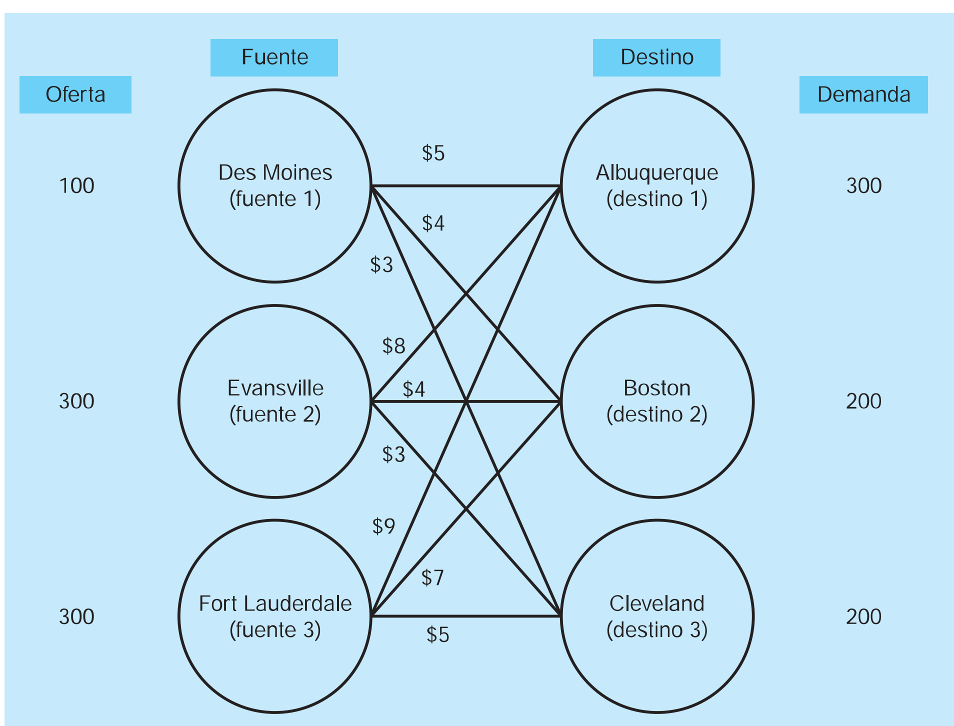
El **problema de transporte** maneja la distribución de bienes desde varios puntos de oferta (*orígenes* o **fuentes**) hasta varios puntos de demanda (**destinos**). En general, se tiene la capacidad (oferta) de bienes en cada fuente, un requerimiento (demanda) de bienes en cada destino, y el costo de envío por unidad de cada fuente a cada destino. La figura 9.1 ilustra un ejemplo. El objetivo de este problema es programar los envíos de manera que se minimice el costo total de transporte. Algunas veces, también se incluyen los costos de producción.

Los modelos de transporte sirven también cuando una empresa intenta decidir dónde localizar una nueva instalación. Antes de abrir un nuevo almacén, fábrica u oficina de ventas, se recomienda considerar varios sitios alternativos. Las buenas decisiones financieras respecto a la localización de instalaciones también intentan minimizar los costos totales de transporte y producción para el sistema completo.

Programación lineal para el ejemplo de transporte

La corporación Executive Furniture tiene el problema de transporte que se ilustra en la figura 9.1. La compañía desea minimizar los costos de transporte al tiempo que cubre la demanda en cada destino, sin exceder la oferta en cada fuente. Para la formulación de este con programación lineal, hay tres

FIGURA 9.1
Representación en red de un problema de transporte con costos, demandas y ofertas



restricciones de oferta (una para cada fuente) y tres restricciones de demanda (una para cada destino). Las decisiones que deben tomarse son el número de unidades a enviar por cada ruta, de manera que existe una variable de decisión para cada arco (flecha) en la red. Sea:

$$X_{ij} = \text{número de unidades enviadas de la fuente } i \text{ al destino } j$$

donde,

$i = 1, 2, 3$, con $1 =$ Des Moines, $2 =$ Evansville y $3 =$ Fort Lauderdale

$j = 1, 2, 3$, con $1 =$ Albuquerque, $2 =$ Boston y $3 =$ Cleveland

La formulación de PL es:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar el costo total} = {} & 5X_{11} + 4X_{12} + 3X_{13} + 8X_{21} + 4X_{22} \\ & + 3X_{23} + 9X_{31} + 7X_{32} + 5X_{33}\end{aligned}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} &\leq 100 \quad \text{(oferta en Des Moines)}\\
X_{21} + X_{22} + X_{23} &\leq 300 \quad \text{(oferta en Evansville)}\\
X_{31} + X_{32} + X_{33} &\leq 300 \quad \text{(oferta en Fort Lauderdale)}\\
X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 300 \quad \text{(demanda en Albuquerque)}\\
X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 200 \quad \text{(demanda en Boston)}\\
X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 200 \quad \text{(demanda en Cleveland)}\\
X_{ij} &\geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

Las soluciones a este problema de PL se encuentran con Solver de Excel 2010, ingresando estas restricciones en la hoja de cálculo, como en el capítulo 7. Sin embargo, la estructura especial de este problema lleva a un formato más sencillo y más intuitivo, como se indica en el programa 9.1. Solver se utiliza todavía, pero como todos los coeficientes de las restricciones son 1 o 0, el lado izquierdo de cada restricción es simplemente la suma de las variables de una fuente específica o para un destino dado. En el programa 9.1 estas celdas son E10:E12 y B13:D13.

Un modelo general de PL para problemas de transporte

El número de variables y restricciones para un problema de transporte típico se determina por el número de fuentes y destinos.

En este ejemplo, había 3 fuentes y 3 destinos. La programación lineal tenía $3 \times 3 = 9$ variables y $3 + 3 = 6$ restricciones. En general, para un problema de transporte con m fuentes y n destinos, el número de variables es mn y el número de restricciones es $m + n$. Por ejemplo, si hay 5 restricciones (es decir, $m = 5$) y 8 variables (es decir, $n = 8$), con programación lineal tendrá $5(8) = 40$ variables y $5 + 8 = 13$ restricciones.

Los subíndices dobles en las variables hacen que sea fácil expresar la forma general del problema con programación lineal, para un problema de transporte con m fuentes y n destinos. Sean:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{número de unidades enviadas de la fuente } i \text{ al destino } j\\
c_{ij} &= \text{costo de enviar una unidad de la fuente } i \text{ al destino } j\\
s_i &= \text{oferta en la fuente } i\\
d_j &= \text{demanda en el destino } j
\end{aligned}$$

El modelo de programación lineal es:

$$\text{Minimizar el costo} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m\\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n\\
x_{ij} &\geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

PROGRAMA 9.1
Solución del problema de Executive Furniture en Excel 2010

	A	B	C	D	E	F
1			Shipping Cost Per Unit			
2	From\To	Albuquerque	Boston	Cleveland		
3	Des Moines	5	4	3		
4	Evansville	8	4	3		
5	Fort Lauderdale	9	7	5		
6						
7						
8			Solution - Number of units shipped			
9		Albuquerque	Boston	Cleveland	Total shipped	Supply
10	Des Moines	100	0	0	100	100
11	Evansville	0	200	100	300	300
12	Fort Lauderdale	200	0	100	300	300
13	Total received	300	200	200		
14	Demand	300	200	200		
15						
16	Total cost =	3900				

Registro de parámetros y opciones en Solver

Set Objective: B16
By Changing cells: B10:D12
To: Min
Subject to the Constraints:
E10:E12 <= F10:F12
B13:D13 = B14:D14
Solving Method: Simplex LP
☑ **Make Variables Non-Negative**

Fórmulas clave

	E
9	Total shipped
10	=SUM(B10:D10)

Copy E10 to E11:E12

	B
13	=SUM(B10:B12)

Copy B13 to C13:D13

	B
16	=SUMPRODUCT(B3:D5,B10:D12)

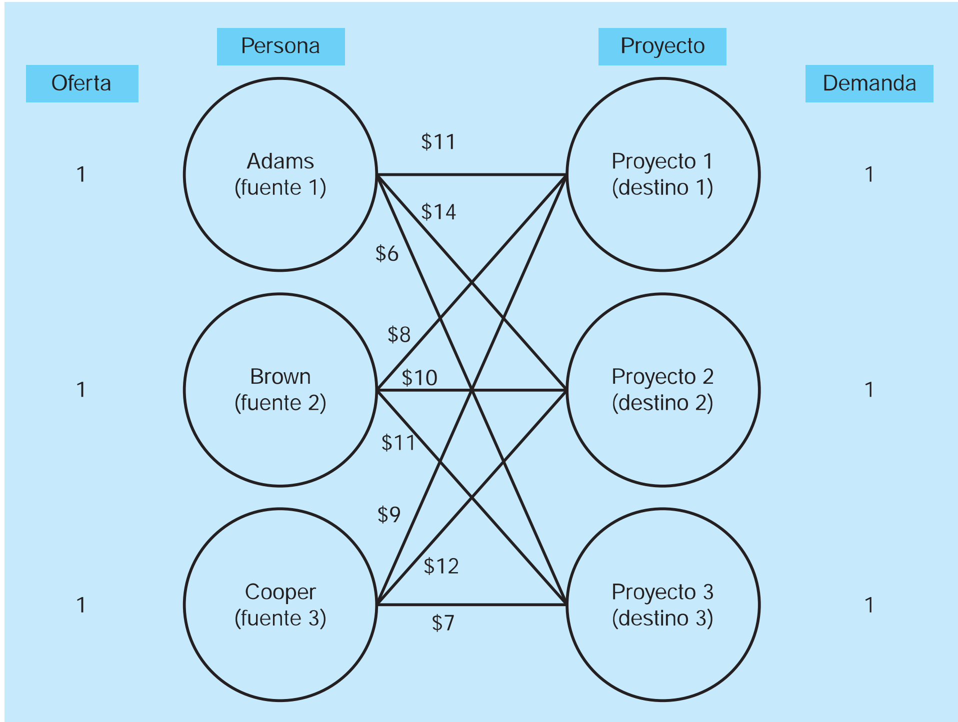
9.3 Problema de asignación

Un problema de asignación es equivalente a un problema de transporte, donde cada oferta y cada demanda son iguales a 1.

El problema de asignación se refiere a la clase de problemas de programación lineal que implica determinar la asignación más eficiente de individuos a proyectos, vendedores a territorios, auditores a compañías para auditarlas, contratos a licitadores, trabajos a máquinas, equipo pesado (como grúas) a labores de construcción, etcétera. El objetivo es casi siempre minimizar el costo total o el tiempo total para realizar las tareas. Una característica importante de los problemas de asignación es que tan solo un trabajo o empleado se asigna a una máquina o un proyecto.

La figura 9.2 es una representación en red de un problema de asignación. Observe que esta red es muy similar a la red para el problema de transporte. De hecho, un problema de asignación se puede ver como un tipo especial de problema de transporte, donde la oferta en cada fuente y la demanda en cada destino son iguales a uno. Cada individuo se asigna nada más a un puesto de trabajo o proyecto y cada puesto de trabajo únicamente necesita una persona.

FIGURA 9.2
Ejemplo de un problema de asignación en el formato de una red de transporte



Programación lineal para el ejemplo de asignación

La red de la figura 9.2 ilustra el problema que enfrenta Fix-It Shop, que acaba de recibir tres nuevos proyectos de reparación que deben terminarse pronto: **1.** un radio, **2.** un horno tostador y **3.** una mesa de café. Se dispone de tres personas que reparan, cada una con talentos diferentes, para realizar los trabajos. El dueño del taller estima el costo en salarios, si los empleados se asignan a cada uno de los tres proyectos. Los costos difieren debido al talento de cada trabajador en cada uno de los puestos de trabajo. El dueño quiere asignar los trabajos, de manera que se minimice el costo total y cada trabajo debe tener una persona asignada; cada persona puede asignarse a tan solo un trabajo.

Al formular este con programación lineal, se utiliza la forma general de PL para el problema de transporte. La definición de las variables es:

Las variables especiales 0-1 se utilizan en el modelo de asignación.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la persona } i \text{ se asigna al proyecto } j \\ 0 \text{ de otra manera} \end{cases}$$

donde,

$i = 1, 2, 3$, con $1 =$ Adams, $2 =$ Brown y $3 =$ Cooper

$j = 1, 2, 3$, con $1 =$ proyecto 1, $2 =$ proyecto 2 y $3 =$ proyecto 3

La formulación de PL es:

$$\text{Minimizar el costo total} = 11X_{11} + 14X_{12} + 6X_{13} + 8X_{21} + 10X_{22} + 11X_{23} + 9X_{31} + 12X_{32} + 7X_{33}$$

sujeto a

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 1$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 1$$
$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 1$$
$$x_{ij} = 0 \text{ para toda } i \text{ y } j$$

La solución se muestra en el programa 9.2. De ahí, $X_{13} = 1$, de manera que Adams se asigna al proyecto 3; $X_{22} = 1$, de modo que Brown se asigna al proyecto 2 y $X_{31} = 1$, por lo que Cooper se asigna al proyecto 1. Todas las demás variables son 0. El costo total es 25.

PROGRAMA 9.2
Solución para el taller Fix-It Shop en Excel 2010

	A	B	C	D	E	F
1			Cost for Assignments			
2	Person\Project	Project 1	Project 2	Project 3		
3	Adams	11	14	6		
4	Brown	8	10	11		
5	Cooper	9	12	7		
6						
7						
8			Made			
9		Project 1	Project 2	Project 3	Total projects	Supply
10	Adams	0	0	1	1	1
11	Brown	0	1	0	1	1
12	Cooper	1	0	0	1	1
13	Total assigned	1	1	1		
14	Total workers	1	1	1		
15						
16	Total cost =	25				

Registro de parámetros y opciones en Solver

Set Objective: B16
By Changing cells: B10:D12
To: Min
Subject to the Constraints:
E10:E12 <= F10:F12
B13:D13 = B14:D14
Solving Method: Simplex LP
☑ **Make Variables Non-Negative**

Fórmulas clave

	E
10	=SUM(B10:D10)

Copy E10 to E11:E12

	B
13	=SUM(B10:B12)

Copy B13 to C13:D13

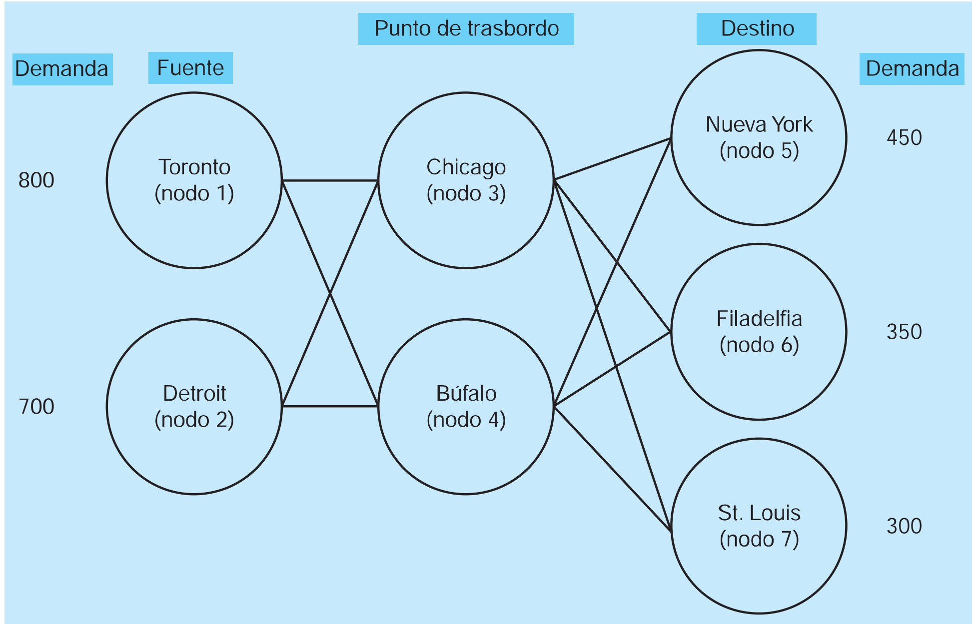
	B
16	=SUMPRODUCT(B3:D5,B10:D12)

En el problema de asignación, se requiere que las variables tomen el valor 0 o 1. Por la estructura especial de este problema con coeficientes de las restricciones como 0 o 1, y todos los lados derechos iguales a 1, el problema se resuelve con programación lineal. La solución a este tipo de problemas (si existe una) siempre tendrá variables iguales a 0 o 1. Hay otro tipo de problemas donde es deseable usar variables 0-1, pero su solución con métodos normales de programación lineal no necesariamente tiene solo ceros y unos. En tales casos, deberían aplicarse métodos especiales para forzar a las variables a que sean 0 o 1; esto se analizará como un tipo especial de problema de programación entera que se verá en el capítulo 10.

9.4 Problema de trasbordo

En un problema de transporte, si los artículos deben pasar por un punto intermedio (llamado *punto de trasbordo*) antes de llegar al destino final, se trata de un *problema de trasbordo*. Por ejemplo, una compañía fabrica un producto en varias fábricas que tiene que enviarse a un conjunto de centros de distribución regionales. Desde estos centros, los artículos se envían a las tiendas que son los destinos

FIGURA 9.3
Representación en red de un ejemplo de trasbordo



Un problema de transporte con puntos intermedios es un problema de trasbordo.

finales. La figura 9.3 ilustra una representación en red de un problema de trasbordo. En este ejemplo, hay dos fuentes, dos puntos de trasbordo y tres destinos finales.

Programación lineal para el ejemplo de trasbordo

Frosty Machines fabrica barredoras de nieve en fábricas localizadas en Toronto y Detroit. Los productos se envían a centros de distribución regionales en Chicago y Búfalo, desde donde se reparten a las casas de oferta en Nueva York, Filadelfia y St. Louis, como se ilustra en la figura 9.3.

La oferta disponible en las fábricas, la demanda en los destinos finales y los costos de envío se muestran en la tabla 9.1. Observe que es posible que las barredoras de nieve no se envíen directamente desde Toronto o Detroit a cualquiera de los destinos finales, sino que deben ir primero a Chicago o a Búfalo. Este es el motivo por el que Chicago y Búfalo están listados no solo como destinos sino también como fuentes.

Frosty quiere minimizar los costos de transporte asociados con el envío de suficientes barredoras de nieve, para cumplir con la demanda en los tres destinos sin exceder la oferta en cada fábrica. Entonces, se tienen restricciones de oferta y demanda similares a las del problema de transporte, pero también se tiene una restricción para cada punto de trasbordo, que indica que todo lo que se envía desde estos a un destino final debe haberse enviado a ese punto de trasbordo desde una de las fuentes. El enunciado verbal de este problema sería como sigue:

TABLA 9.1 Datos para el trasbordo de Frosty Machine

	A					
DE	CHICAGO	BÚFALO	NUEVA YORK	FILADELFIA	ST. LOUIS	OFERTA
Toronto	$4	$7	—	—	—	800
Detroit	$5	$7	—	—	—	700
Chicago	—	—	$6	$4	$5	—
Búfalo	—	—	$2	$3	$4	—
Demanda	—	—	450	350	300	

Minimizar el costo

sujeto a

1. El número de unidades enviadas desde Toronto no es mayor que 800
2. El número de unidades enviadas desde Detroit no es mayor que 700
3. El número de unidades enviadas a Nueva York es de 450
4. El número de unidades enviadas a Filadelfia es de 350
5. El número de unidades enviadas a St. Louis es de 300
6. El número de unidades que salen de Chicago es igual al número de unidades que llegan a Búfalo
7. El número de unidades que salen de Búfalo es igual al número de unidades que llegan a Búfalo

Las restricciones especiales de trasbordo forman parte del problema con programación lineal.

Las variables de decisión deberían representar el número de unidades enviadas desde cada fuente hasta cada punto de trasbordo, y el número de unidades enviadas de cada punto de trasbordo a cada destino final, ya que son las decisiones que deben tomar los gerentes. Las variables de decisión son:

$$x_{ij} = \text{número de unidades enviadas del sitio (nodo) } i \text{ al sitio (nodo) } j$$

donde,

$i = 1, 2, 3, 4$

$j = 3, 4, 5, 6, 7$

Los números indican los nodos mostrados en la figura 9.3 y hay una variable para cada arco (ruta) en la figura.

El modelo de PL es:

$$\begin{aligned}\text{Minimizar el costo total} = {} & 4X_{13} + 7X_{14} + 5X_{23} + 7X_{24} + 6X_{35} + 4X_{36} \\ & + 5X_{37} + 2X_{45} + 3X_{46} + 4X_{47}\end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
X_{13} + X_{14} &\leq 800 && \text{(oferta en Toronto [nodo 1])}\\
X_{23} + X_{24} &\leq 700 && \text{(oferta en Detroit [nodo 2])}\\
X_{35} + X_{45} &= 450 && \text{(demanda en Nueva York [nodo 5])}\\
X_{36} + X_{46} &= 350 && \text{(demanda en Filadelfia [nodo 6])}\\
X_{37} + X_{47} &= 300 && \text{(demanda en St. Louis [nodo 7])}\\
X_{13} + X_{23} &= X_{35} + X_{36} + X_{37} && \text{(envío por Chicago [nodo 3])}\\
X_{14} + X_{24} &= X_{45} + X_{46} + X_{47} && \text{(envío por Búfalo [nodo 4])}\\
x_{ij} &\geq 0 \text{ para toda } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

La solución encontrada con Solver en Excel 2010 se muestra en el programa 9.3. El costo total es de $9,550 si se envían 650 unidades de Toronto a Chicago, 150 unidades de Toronto a Búfalo, 300 unidades de Detroit a Búfalo, 350 unidades de Chicago a Filadelfia, 300 de Chicago a St. Louis y 450 de Búfalo a Nueva York.

Aunque este problema con programación lineal se puede resolver usando un software de programación lineal, hay algoritmos especiales, sencillos de usar y rápidos para los problemas de transporte y asignación. El resto de este capítulo se dedica a dichos algoritmos especiales.

9.5 Algoritmo de transporte

El algoritmo de transporte es un procedimiento iterativo donde se encuentra y evalúa una solución a un problema de transporte, mediante un procedimiento especial para determinar si la solución es óptima. Si lo es, el proceso se detiene. Si no es óptima, se genera una nueva solución. Esta nueva solución es al menos tan buena como la anterior y suele ser mejor. Esta nueva solución se evalúa y si no es óptima, se genera otra solución. El proceso continúa hasta que se encuentra la solución óptima.