Transformada de Laplace

Dada una función de variable continua $f(t)$, su ***transformada bilateral de Laplace*** se define como:

$$\mathcal{L}_2[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

donde s es una variable compleja, $s = \sigma + i\omega$.

Para que esta integral converja, es decir, para que exista la transformada de f, es necesario que $|f(t)| < e^{\gamma t}$ para algún valor real de γ.

Si $\sigma=0$, es $s=i\omega$ y la transformada bilateral de Laplace se convierte en la conocida transformada de Fourier.

De manera similar, se define la ***transformada unilateral de Laplace*** como

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)} \qquad (1)$$

El símbolo 0^- indica que en el intervalo de integración se incluye cualquier impulso o función singular concentrada en $t=0$.

Esta última forma de la transformada de Laplace resulta útil para analizar sistemas causales, esto es, sistemas para los cuales la señal de salida en cualquier instante depende sólo de los valores de la señal de entrada en el instante presente y en los anteriores, pero no de los futuros. Toda señal causal tiene un instante de inicio, de modo que la función que la representa es nula para cualquier instante previo. Para evitar ambigüedades indicaremos en general a la señal de entrada como $f(t)\cdot u(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón unitario o función de Heaviside.

En lo que sigue, hablaremos de la transformada de Laplace (a secas) para referirnos a la forma unilateral y, como abuso de notación, indicaremos con 0 (en lugar de 0^-) al límite inferior de integración.

Para que exista la función $F(s)$ definida en (1), esto es, para que la integral converja, será necesario imponer algunas restricciones en el dominio de la función F. En otras palabras, será necesario establecer para qué conjunto de valores complejos de s existe $F(s)$. Este punto se comprenderá con mayor claridad cuando analicemos el comportamiento en los límites.

Veremos a continuación algunas propiedades de la transformada de Laplace y notaremos su similitud con aquellas de la transformada de Fourier.

Propiedades de la transformada (unilateral) de Laplace

- *Comportamiento en los límites*:

Analizamos los límites de $F(s)$ definida en (1) para $s \to 0$ y para $s \to \infty$. Si $F(s)$ es continua en el origen, entonces,

$$\boxed{\lim_{s\to 0} F(s) = F(0) = \int_0^\infty f(t)dt}$$

En el otro extremo, $\lim_{s\to\infty} F(s) = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\cdot \lim_{s\to\infty}(e^{-st})dt$. Para evaluar el último límite, tengamos presente que s es una variable compleja y por lo tanto, se expresa mediante su módulo y su argumento en la forma $s = |s|e^{i\varphi} = |s|(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$. Tender con s a infinito significa movernos en una dirección arbitraria sobre el plano complejo hacia puntos infinitamente alejados del origen. Esto equivale a decir que es $|s|$ quien tiende a infinito, para cualquier θ arbitrario. En la función exponencial e^{-st}, el exponente es $-st = -|s|t(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\varphi)$. La exponencial puede descomponerse en dos factores en la forma $e^{-st} = e^{-|s|t\cos\varphi}e^{-i|s|t\,\mathrm{sen}\varphi}$. El segundo factor es un complejo de módulo 1, independientemente del valor que tomen los parámetros que intervienen, de modo que sus componentes real e imaginaria se mantienen acotadas cuando $|s| \to \infty$. El primer factor, en cambio, es real y puede hacerse infinito si el exponente se hace positivo. Dado que tanto $|s|$ como t son cantidades positivas (recordar que estamos analizando la transformada unilateral, donde t>0), es necesario que también sea cosθ>0 para que la exponencial converja cuando $|s| \to \infty$. Pero esto exige que $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Dado que φ es el argumento de s, esta condición equivale a exigir que la parte real de s sea positiva. Tenemos así que $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = \lim_{|s|\to\infty} e^{-st} = 0$ si $\mathrm{Re}(s) > 0$ y por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \text{ si } \mathrm{Re}(s) > 0.}$$

- *Linealidad*:

Si $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ y $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, entonces, para cualquier par de números complejos a y b (en particular, reales), es $\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_0^\infty [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-st}dt = a\int_0^\infty f_1(t)e^{-st}dt +$

$+b\int_0^\infty f_2(t)e^{-st}dt = aF_1(s) + bF_2(s)$. Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)]}$$

- *Cambio de escala*:

Si $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, entonces, para cualquier constante real a >0, es $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt =$

$\frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-sx/a}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(x)e^{-(s/a)x}dx = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ donde se empleó el cambio de variable $x = at$. Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})}$$

- *Desplazamiento en el tiempo*:

Si designamos con $F(s)$ a la transformada de $f(t)\cdot u(t)$, entonces, la transformada de $f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)$ es $\mathcal{L}[f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)] = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+t_0)}dx =$

$e^{-st_0}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = e^{-st_0}\cdot F(s)$, donde se efectuó el reemplazo $x = t - t_0$. Luego

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\cdot u(t-t_0)\right] = e^{-st_0}\,\mathcal{L}\left[f(t)\cdot u(t)\right] = F(s)\cdot e^{-st_0}}$$

- *Desplazamiento en s* (análogo al corrimiento en frecuencia de la transformada de Fourier):

$\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$. La segunda integral tiene la misma forma que (1) pero con *s-a* en el lugar de *s*. Por lo tanto, converge si $\mathrm{Re}(s) > a$, a $F(s-a)$. Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = F(s-a)}$$

- *Transformada de la derivada en el tiempo*:

$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + sF(s)$, donde se ha integrado por partes y se ha usado la condición de que $f(t)$ es de orden exponencial para justificar la anulación del término $f(t)e^{-st}$ en $t = \infty$.Por lo tanto, si conocemos la transformada F(s) de *f*(*t*), podemos obtener la de su derivada mediante

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)}$$

Analicemos el comportamiento en los límites $s \to 0$ y $s \to \infty$. Por un lado,

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{s\to 0} \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f'(t)dt = f(t)\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)$$

Pero además $\lim_{s\to 0} \mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$. Igualando ambas expresiones, obtenemos

$$\boxed{\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)}$$

Por otra parte, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t) \lim_{s\to\infty} (e^{-st})dt = 0$ si $\mathrm{Re}(s) > 0$, como se analizó más arriba. Pero además, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f'(t)] = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0)$. Igualando ambas expresiones, resulta

$$\boxed{\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0) \text{ si } \mathrm{Re}(s) > 0.}$$

- *Transformada de la segunda derivada*:

$\mathcal{L}[f''(t)] = \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = f'(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f'(0) + s\cdot\mathcal{L}[f'(t)]$. Usando el resultado obtenido para la primera derivada, llegamos a

$$\boxed{\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

- *Transformada de la derivada n-ésima*:

Mediante un procedimiento por recurrencia, se obtiene

$$\boxed{\mathcal{L}\,[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - s^2f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

- *Transformada de la integral*:

Se quiere calcular la transformada de $\int_0^t f(x)dx$ en términos de la transformada de *f*. Para esto, se define $g(t) = \int_0^t f(x)dx$, que depende del límite superior de integración, *t*. (La integral da el área debajo de la curva representativa de la función *f*, tomada entre 0 y un valor *t* variable. El valor del área depende de la posición del límite superior de integración). La función *g* así definida es una primitiva de *f* y, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, se cumple que $g'(t) = f(t)$. Si designamos con $G(s)$ a la transformada de $g(t)$, y empleamos la relación ya probada entre la transformada de una función de *t* y la de su derivada, tenemos

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = sG(s) - g(0)$. Pero $g(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$ y, por lo tanto, $G(s) = \dfrac{F(s)}{s}$, es decir

$$\boxed{\mathcal{L}[\int_0^t f(x)dx] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]}$$

- *Transformada de* $t \cdot f(t)$: Si en la expresión $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, que define a la transformada de *f*, derivamos con respecto a *s*, obtenemos $\dfrac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty t \cdot f(t)e^{-st}dt$. Esta integral representa a la transformada de $t \cdot f(t)$. Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}}$$

Esta relación indica que, si conocemos la transformada de una función *f*, para calcular la de $t \cdot f(t)$ nos basta con derivar a la anterior con respecto a la variable compleja *s*. Esto resulta en general más simple que transformar $t \cdot f(t)$ a partir de la definición de la transformada. Más aún, en muchos casos, al aplicar la definición se obtiene una función cuya integración resulta muy complicada o imposible. Tal es el caso de las funciones $\operatorname{sen} t$ y $t \operatorname{sen} t$. Como veremos, $\mathcal{L}[\operatorname{sen} t] = \dfrac{1}{s^2+1}$. Al aplicar la definición para transformar $t \operatorname{sen} t$, obtenemos $\mathcal{L}[tsent] =$ $= \int_0^\infty tsente^{-st}dt$. Esta integración debe resolverse en el campo complejo y no está al alcance de este curso. Sin embargo, $\mathcal{L}$ $[t \operatorname{sen} t]$ puede obtenerse a partir de $-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \dfrac{2s}{s^2+1}$.

- *Transformada de* $t^2 \cdot f(t)$:

A partir del resultado anterior, podemos obtener esta transformada, descomponiendo esta expresión como $t \cdot (t \cdot f(t))$.$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[t(tf(t))] = -\dfrac{d}{ds}(\mathcal{L}[tf(t)])$ $= -\dfrac{d}{ds}(-\dfrac{d}{ds}(\mathcal{L}[f(t)]))$ $= \dfrac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}[f(t)]) = \dfrac{d^2F(s)}{ds^2}$. Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[t^2 f(t) = \frac{d^2F(s)}{ds^2}}$$

- *Transformada de* $t^n \cdot f(t)$:

Repitiendo n veces el procedimiento anterior, vemos que cada vez que se incrementa en una unidad la potencia de t, el signo de la transformada se invierte y se incrementa en una unidad el orden de derivación en s. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f(t)]) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

- *Transformada de* $f(t)/t$:

Definimos $g(t) = f(t)/t$ y queremos evaluar $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$. Usando un resultado anterior, $F(s)= \mathcal{L}[f(t)]= \mathcal{L}[t \cdot g(t)] = -\frac{dG(s)}{ds}$, de donde $dG(s) = -F(s)ds$ es decir, la transformada $G(s)$ de $f(t)/t$ es una primitiva de $-F(s)$, que es la transformada de $f(t)$. Para encontrar esa primitiva, tengamos en cuenta el comportamiento en el límite $s \to \infty$, esto es $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$. Ahora integremos ambos miembros de $dG(s) = -F(s)ds$ entre s e ∞, cambiando por w el nombre de la variable de integración. $\int_s^\infty dG(w) = \lim_{w\to\infty} G(w) - G(s) = -G(s) = -\int_s^\infty F(w)dw$.

Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty F(w)dw}$$

Cálculo de las transformadas de Laplace de algunas funciones elementales

- $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & , \ t < 0 \\ 0 & , \ t > 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \lim_{Q\to\infty} \frac{e^{-sQ}}{-s} - \frac{1}{-s} = -\lim_{Q\to\infty} \frac{e^{-(\sigma+i\omega)Q}}{s} + \frac{1}{s} =$$

$= -\lim_{Q\to\infty} \frac{e^{-\sigma Q} e^{-i\omega Q}}{s} + \frac{1}{s}$. La segunda exponencial tiene módulo 1, de modo que se mantiene acotada cuando $Q \to \infty$. La primera, converge a 0 sólo si $\sigma > 0$. Luego,

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \text{ si } \mathrm{Re}(s) > 0$$

- $f(t) = \delta(t)$

Si intentamos efectuar la transformada de esta función mediante la definición, encontramos $\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt$, pero esta integral no se puede resolver. (Recordar que integrales similares que involucran a la función impulso unitario $\delta(t)$ abarcan el intervalo de integración $(-\infty,\infty)$). En cambio, recurrimos a otro procedimiento, definiendo la función $\delta_\lambda(t) = \begin{cases} 1/\lambda & , \ 0 \le t \le \lambda \\ 0 & , \ \text{otro valor} \end{cases}$ que cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(t)dt = 1$ y que $\lim_{\lambda\to 0} \delta_\lambda(t) = \delta(t)$.

Calculamos ahora $\mathcal{L}[\delta_\lambda(t)] = \int_0^\infty \delta_\lambda(t) e^{-st}\,dt = \int_0^\lambda \frac{1}{\lambda} e^{-st}\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-\lambda s}\right|_0^\lambda = \frac{e^{-\lambda s}-1}{-\lambda s}$. Entonces, $\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}[\lim_{\lambda\to 0} \delta_\lambda(t)] = \lim_{\lambda\to 0} \mathcal{L}[\delta_\lambda(t)] = \lim_{\lambda\to 0} \frac{e^{-\lambda s}-1}{-\lambda s} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{-se^{-\lambda s}}{-s} = 1$, donde hemos aplicado la regla de L´Hospital para calcular el límite del cociente indeterminado del tipo 0/0, derivando el numerador y el denominador con respecto a λ. En resumen,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

- $h(t) = t \cdot u(t)$

Conociendo la transformada de $u(t)$ y la relación que vincula la transformada de una función f con la de $t.f$, $\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$, tenemos

$$\mathcal{L}[t \cdot u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

- $h(t) = t^n \cdot u(t)$

Del mismo modo,

$$\mathcal{L}[t^2 \cdot u(t)] = \mathcal{L}[t \cdot (t \cdot u(t))] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[t \cdot u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[t^3 \cdot u(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{2\cdot 3}{s^4} = \frac{3!}{s^4}$$

y generalizando,

$$\mathcal{L}[t^n \cdot u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

- $h(t) = e^{at} \cdot u(t)$

Conociendo la transformada de $u(t)$ y la relación que vincula la transformada $F(s)$ de una función $f(t)$ con la de $f(t)e^{at}$, $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$, tenemos

$$\mathcal{L}[e^{at} u(t)] = \frac{1}{s-a}, \text{ válido para } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

- $f(t) = \cos at \cdot u(t)$ con a constante real

Dado que $\cos at = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$, calculamos las transformadas de ambas exponenciales usando el resultado anterior

$\mathcal{L}[e^{iat} u(t)] = \frac{1}{s-ia}$ y $\mathcal{L}[e^{-iat} u(t)] = \frac{1}{s+ia}$, válidos para $\operatorname{Re}(s) > 0$. Luego,

$\mathcal{L}[\cos at \cdot u(t)] =$

$=\mathcal{L}[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \cdot u(t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$, válido para $\operatorname{Re}(s) > 0$

➢ $f(t) = \text{sen}\, at \cdot u(t)$ con a constante real

Dado que $\text{sen}\, at = \dfrac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$,

$$\mathcal{L}[\text{sen}\, at \cdot u(t)] = \mathcal{L}[\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} \cdot u(t)] = \frac{1}{2i}(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$, válido para $\text{Re}(s) > 0$.

➢ $f(t) = \cosh at \cdot u(t)$ con a constante real

Dado que el coseno hiperbólico es $\cosh at = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, su transformada se puede calcular a partir de las de las exponenciales.

$\mathcal{L}[e^{at}u(t)] = \dfrac{1}{s-a}$, válido para $\text{Re}(s) > a$ y $\mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \dfrac{1}{s+a}$, válido para $\text{Re}(s) > -a$.

Luego,

$$\mathcal{L}[\cosh at \cdot u(t)] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \cdot u(t)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$, válido para $\text{Re}(s) > |a|$

➢ $f(t) = \text{senh}\, at \cdot u(t)$ con a constante real

La función seno hiperbólico es $\text{senh}\, at = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ y su transformada es

$$\mathcal{L}[\text{senh}\, at \cdot u(t)] = \mathcal{L}[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \cdot u(t)] = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$, válido para $\text{Re}(s) > |a|$

Otros ejemplos

♣ Ejemplo 1: $f(t) = e^t \cos t\ u(t)$

Para transformar esta función podemos usar la definición o bien hacer uso de la transformada del coseno y de la propiedad de corrimiento en s que resulta de la multiplicación por la función exponencial

$\mathcal{L}[\cos t \cdot u(t)] = \dfrac{s}{s^2 + 1}$, reemplazando a=1 en la expresión anterior para la transformada del coseno.

$\mathcal{L}[e^t \cos t \cdot u(t)] = \dfrac{s-1}{(s-1)^2 + 1} = \dfrac{s-1}{s^2 - 2s + 2}$, donde, en la expresión para el corrimiento en s asociado a la exponencial e^{at} se ha reemplazado a por 1.

♣ Ejemplo 2: $f(t) = t^2 \,\text{sen}\, 2t$

Calculamos primero $\mathcal{L}[\text{sen}\, 2t] = \dfrac{2}{s^2 + 4}$. El producto por t^2 conduce a derivar dos veces respecto de s en la transformada: $\mathcal{L}[t^2 \,\text{sen}\, 2t] = \dfrac{d^2}{ds^2}(\dfrac{2}{s^2 + 4})$. La primera derivada es

$\dfrac{-4s}{(s^2+4)^2}$ y la segunda, $\dfrac{-4(s^2+4)^2+4s\cdot 2s(s^2+4)\cdot 2s}{(s^2+4)^4}=\dfrac{-4(s^2+4)+16s^2}{(s^2+4)^3}=\dfrac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$.

Luego, $\mathcal{L}[t^2 \operatorname{sen} 2t]=\dfrac{4(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}$

Transformada inversa o antitransformada de Laplace

Cuando estudiamos la transformada de Fourier aprendimos a encontrar el espectro de frecuencias $F(\omega)$ correspondiente a una dada función del tiempo $f(t)$, resolviendo para esto una integral en el tiempo. También aprendimos a resolver el problema inverso, es decir, dado el espectro de frecuencias, determinar la función de t asociada. Esto es la transformada inversa o antitransformada de Fourier, que requiere una integración en el dominio de la frecuencia ω.

El estudio de la transformada de Laplace es, en muchos aspectos, similar a aquél. La única diferencia importante aparece en el pasaje de la frecuencia, o mejor dicho de la variable imaginaria $i\omega$ a la variable compleja s. Sin embargo, el procedimiento de antitransformar introduce en el caso de Laplace una dificultad insalvable a esta altura, ya que exige resolver integrales en la variable s. La integración en el campo complejo es un tema de la matemática que demanda un estudio minucioso y escapa al alcance de este curso. Por otra parte, para la mayor parte de las aplicaciones de la transformada inversa de Laplace que puedan interesarnos, basta con disponer de una tabla suficientemente completa de transformadas directas de funciones elementales (que habrá que leer de derecha a izquierda) y tener un buen manejo de las propiedades.

Aplicaremos la transformada inversa a funciones de s, $F(s)$, y obtendremos sus correspondientes funciones de t, $f(t)$. Para indicar la transformada inversa emplearemos el símbolo $\mathcal{L}^{-1}$. No daremos ninguna teoría general. Sólo resolveremos algunos ejemplos, con la tabla de transformadas directas a la vista.

♣ Ejemplo 3: $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{s^2+2}]$

La función $F(s)$ dada tiene una forma similar a la de la transformada de la función seno. Para hacer evidente ese parecido, la reescribimos en la forma

$F(s)=\dfrac{1}{s^2+2}=\dfrac{1}{s^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}$. Luego,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+2}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\mathcal{L}^{-1}[\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}]=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\cdot u(t)=f(t)$$

♣ Ejemplo 4: $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{4}{2s+3s^2}]$

No disponemos en nuestra tabla de ninguna función de s que tenga una dependencia funcional similar. Podemos, en cambio, reescribir el denominador en la forma $2s+3s^2=3s(\frac{2}{3}+s)$ y descomponer $F(s)$ en fracciones simples:

$$F(s)=\frac{4}{2s+3s^2}=\frac{4}{3s(\frac{2}{3}+s)}=\frac{4/3}{s(\frac{2}{3}+s)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{2}{3}}=\frac{A(s+2/3)+Bs}{s(\frac{2}{3}+s)}=\frac{(A+B)s+(2/3)A}{s(\frac{2}{3}+s)}$$

Para que el numerador sea igual a 4/3, es necesario que $A+B=0$ y que $(2/3)A=4/3$, de donde A=2 y B=-2. Entonces,

$$F(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+\frac{2}{3}} \text{ y } \mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{2s+3s^2}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s}-\frac{2}{s+\frac{2}{3}}]=2\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}]-2\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+\frac{2}{3}}]=$$

$$=2u(t)-2e^{-(2/3)t}u(t)=2(1-e^{-2t/3})\cdot u(t)$$

El mismo problema puede resolverse partiendo de $F(s)=\dfrac{4/3}{s(2/3+s)}$ y usando la propiedad que asegura que $\mathcal{L}[\int_0^t f_1(x)dx]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f_1(t)]=\frac{1}{s}F_1(s)$. (El empleo de los subíndices tiene por objeto evitar confusiones con las funciones del ejemplo). Esta identidad también puede escribirse como $\int_0^t f_1(x)dx=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F_1(s)\right]$. Para aplicar esta idea al caso que nos ocupa, denominemos $F_1(s)=\dfrac{1}{2/3+s}$. Su antitransformada es $\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{2/3+s}\right]=$ $=e^{-(2/3)t}u(t)=f_1(t)$. Luego, $\mathcal{L}^{-1}$ $[\frac{1}{s}F_1(s)]=$ $\mathcal{L}^{-1}$ $\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{2/3+s}\right]=\int_0^t e^{-(2/3)x}u(x)dx=$ $=\int_0^t e^{-(2/3)x}dx=\left[\dfrac{e^{-(2/3)x}}{-2/3}\right]_0^t=\dfrac{e^{-(2/3)t}-1}{-2/3}$. Para obtener la antitransformada de $F(s)=\dfrac{4/3}{s(2/3+s)}$, sólo nos resta incluir la constante multiplicativa 4/3 en la última expresión: $\dfrac{4}{3}\dfrac{e^{-2t/3}-1}{-2/3}=-2(e^{-2t/3}-1)$, que coincide con el resultado obtenido por el otro procedimiento.

♣ Ejemplo 5: $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s}{s^2+2s-4}]$

En primer lugar, intentamos factorear el denominador. Si sus raíces son reales, podremos hacer una descomposición en fracciones simples, como en el ejemplo anterior. Pero, haciendo $s^2+2s-4=0$, vemos que sus raíces son complejas. Entonces, reescribimos el polinomio de segundo grado completando el cuadrado: $s^2+2s-4=s^2+2s+1-1-4=(s+1)^2-5$. El término s+1 indica que hay un corrimiento en s. A menos del corrimiento, el denominador tiene un término cuadrático al que se le resta otro independiente, como ocurre en las transformadas de las funciones seno y coseno hiperbólico. El corrimiento en s debe aparecer también en el numerador, de modo que

$$F(s)=\frac{s}{s^2+2s-4}=\frac{s+1-1}{(s+1)^2-5}=\frac{s+1}{(s+1)^2-5}-\frac{1}{(s+1)^2-5}=\frac{s+1}{(s+1)^2-5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2-5}$$

Esta expresión puede antitransformarse mediante las funciones de la tabla. Tenemos así,

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+2s-4}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{(s+1)^2-5}]-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}[\frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2-5}]=$$

$$=[\cosh(\sqrt{5}t)-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{senh}(\sqrt{5}t)]e^{-t}u(t)$$

Ecuaciones diferenciales

El estudio de las ecuaciones diferenciales se origina en la investigación de las leyes de la naturaleza, cuya formulación matemática, en general, involucra derivadas de funciones desconocidas. La determinación de las relaciones entre las magnitudes intervinientes requiere de la resolución de ecuaciones que se denominan diferenciales.

En términos generales, si el problema contiene las variables independientes x, y, z, ... y las funciones u, v, w, ... dependen de dichas variables, una ecuación diferencial (o un sistema de ecuaciones diferenciales) establece una relación funcional (o un conjunto de relaciones funcionales) entre las variables independientes x, y, z, ..., las variables dependientes u, v, w, ... y algunas de las derivadas de u, v, w, ... respecto de x, y, z, ...

Si el problema contiene una sola variable independiente y una variable dependiente, la ecuación se dice *diferencial ordinaria*. Si hay varias variables independientes, las derivadas que intervienen son derivadas parciales y la ecuación se dice *diferencial en derivadas parciales*.

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n es una expresión de la forma

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

es decir, la derivada de más alto orden es la que da la denominación a la ecuación diferencial. Una *solución* o *integral* de la ecuación diferencial es una función $y(x)$ tal que cuando ella y sus derivadas se reemplazan en la ecuación diferencial, se obtiene una identidad en x.

Mostremos algunos ejemplos:

$y\frac{dy}{dx} = 2x + y$	ecuación diferencial ordinaria no lineal de primer orden	solución general en forma implícita $(y-2x)^2(y+x) = K$
$x^2y''+xy'-y = 2x^2$	ecuación diferencial ordinaria de segundo orden	solución general en forma explícita $y = \frac{2}{3}x^2 + K_1x + \frac{K_2}{x}$
$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = z$	ecuación diferencial de primer orden en derivadas parciales	solución general en forma explícita $z(x,y) = K_1e^{K_2x^2/2+x+K_2y}$
$\begin{cases} 2\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 4y + z \\ \frac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \end{cases}$	sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	solución general en forma explícita $y(x) = K_1\cos x + K_2\sin x$ $z(x) = (-3K_1 - K_2)\cos x + (K_1 - 3K_2)\sin x$

En los diversos ejemplos que se muestran aparecen constantes (K, K_1, K_2). Se puede comprobar en cada caso que las expresiones presentadas como soluciones verifican la ecuación diferencial correspondiente y esto ocurre en forma independiente del valor que adopten dichas constantes. Vemos que la solución de una ecuación diferencial no es una función en particular sino una familia de funciones.

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

Ya estamos familiarizados con una ecuación diferencial particularmente simple como es

$$y' = f(x)$$

que resolvemos por integración de la función $f(x)$:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, es decir, una función tal que $F'(x) = f(x)$. Como todas las funciones de la forma $F(x) + C$ verifican que $(F(x) + C)' = f(x)$, vemos que no obtenemos una solución única sino una familia de soluciones con un parámetro indeterminado. Si imponemos la condición adicional de que la solución tome el valor y_0 cuando la variable independiente toma el valor x_0, entonces el valor de la constante C queda determinado ($C = y_0 - F(x_0)$) y la solución pasa a ser única: $y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Las cosas suelen ser bastante más complicadas cuando se trata de ecuaciones diferenciales más generales, aún las de primer orden, si bien algunas características se mantienen. Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma general

$$y' = f(x, y) \text{ o bien } y' = f(x, y(x)).$$

Resolverla significa hallar la familia de funciones que satisface la ecuación en una región dada del plano *xy* llamada *dominio* de la ecuación. A dicha familia de soluciones también se la designa como *solución general*. Si bien esta denominación es muy habitual en el ámbito de las ecuaciones diferenciales, en algunos casos puede inducir a confusiones ya que para ciertas ecuaciones resulta imposible hallar una expresión única que represente a todas las soluciones dentro del dominio de la ecuación. Debe tenerse presente que, cuando resolvamos una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$, no hablaremos de hallar "la" solución $y(x)$.

Al escribir $y' = f(x, y)$, estamos diciendo que, dado un punto (x, y) perteneciente al dominio plano de la ecuación, conocemos, mediante la ecuación, el valor de la pendiente de la curva que representa a la solución en dicho punto. En otras palabras, en cuanto conocemos la curva integral que pasa por un punto dado, conocemos la dirección de la curva en dicho punto.

Así como en el caso simple, una ecuación de primer orden general, $y' = f(x, y)$, tiene infinitas curvas integrales que forman una familia de funciones con un parámetro indeterminado. Si ahora queremos seleccionar de todas ellas a aquella que pasa por un punto (x_0, y_0) dado, estaremos eligiendo a una función particular de esa familia. Esta función se denomina *solución particular*. La exigencia de pasar por el punto (x_0, y_0) del dominio de la ecuación se designa como *condición inicial* del problema. Dicho de otro modo, la fijación de la condición inicial equivale a determinar el parámetro que aparecía como indeterminado en la expresión de la familia de soluciones.

Lo dicho hasta aquí parecería indicar que para toda ecuación de la forma $y' = f(x,y)$ siempre se puede encontrar una familia de soluciones y que una sola función de esa familia pasa por el punto (x_0, y_0) dado. Sin embargo, esto no siempre es así. Para que se verifique lo anterior, la función $f(x,y)$ debe cumplir ciertos requisitos que están puntualizados en el ***teorema de existencia y unicidad.***

- Si en un dado dominio *D* del plano *xy* la función $f(x,y)$ es continua, entonces existe solución de $y' = f(x,y)$ en *D*.
- Si, además, $\partial f / \partial y$ es continua en *D*, entonces por cada punto (x_0, y_0) de *D* pasa una y sólo una curva integral de la ecuación $y' = f(x,y)$.

Veamos en los siguientes ejemplos cómo determinar la región de existencia y de unicidad. Sea la ecuación $y' = 2x^2 + y^2$. La función a la que se refiere el teorema es en este caso $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ que existe y es continua en todo el plano *xy*. Esto significa que la ecuación admite solución en todo el plano real o, en otras palabras, que por todo punto de $\mathbf{R}^2$ pasa alguna curva solución de esta ecuación. Aún no sabemos si pasa más de una curva por cada punto ni tampoco sabemos cómo encontrar su o sus expresiones. Posterguemos esto último por ahora y analicemos la cuestión de la unicidad mediante el segundo ítem del teorema. Para esto calculamos $\partial f / \partial y = 2y$. Esta función también es continua en todo $\mathbf{R}^2$, por lo tanto, la ecuación admite solución única en todo $\mathbf{R}^2$.

Tomemos ahora este otro ejemplo: $y' = \dfrac{\sqrt{y^2 - 1}}{x+1}$ donde $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y^2 - 1}}{x+1}$. Esta función no es continua para *x*=-1 y sus valores son reales sólo cuando $y^2 - 1 \geq 0$, es decir, cuando $y \geq 1$ o cuando $y \leq -1$. No pertenecen al dominio *D* de la ecuación los puntos del plano situados dentro de la banda horizontal -1<*y*<1 ni los situados en la recta vertical *x*=-1. El dominio de existencia de solución está entonces formado por cuatro regiones del plano *xy*. Existe solución en cada una de ellas pero esas funciones no trasponen las fronteras de las regiones pues, si lo hicieran, deberían ser válidas también en los puntos prohibidos. En cuanto a $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{(x+1)\sqrt{y^2 - 1}}$, es continua para *y*>1 o *y*<1 y $x \neq -1$. El dominio así definido es similar al descrito más arriba salvo por los puntos situados sobre las rectas *y*=1 e *y*=-1. Sobre estos puntos la solución existe pero no es única. Vemos en este ejemplo que el dominio de existencia no siempre coincide con el de unicidad de la solución.

Consideremos como ejemplo la ecuación de primer orden $xy' + y^3 = y$, y comprobemos que la familia de funciones que la cumple es de la forma $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{K + x^2}}$, donde *K* es una constante real. Para esto, calculamos $y'(x) = \dfrac{K}{(K+x^2)^{3/2}}$ y reemplazamos en la ecuación: $xy' + y^3 = \dfrac{Kx}{(K+x^2)^{3/2}} + \dfrac{x^3}{(K+x^2)^{3/2}} = \dfrac{x(K+x^2)}{(K+x^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{(K+x^2)^{1/2}} = y$. Hemos verificado que se obtiene una identidad, independiente del valor de la constante *K*. Si ahora pedimos hallar una solución que tome el valor ½ cuando *x*=1, entonces debe ser *K*=3. En tal caso, la solución es la función particular de la familia: $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3+x^2}}$.

Un problema bastante más complejo que éste es el de hallar la expresión de la familia de soluciones. Veremos cómo proceder en ciertos casos particulares.

Técnicas para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. *Ecuaciones en variables separables*

Las ecuaciones de primer orden más simples son aquellas que pueden llevarse a la forma

$$R(x)dx = S(y)dy$$

El primer miembro es el diferencial de una función de *x* solamente y el segundo, el de una función de *y* solamente. Esto permite integrar en cada miembro en forma separada en cada variable con lo que la ecuación queda resuelta. Veamos mediante ejemplos cómo se ejecuta la separación de variables.

♣ Ejemplo 1: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-1}{xy}$

Dado que $dy = y'dx = \dfrac{dy}{dx}dx$, tenemos en este caso que $dy = \dfrac{y-1}{xy}dx$, es decir $\dfrac{y}{y-1}dy = \dfrac{dx}{x}$. Ya separadas las variable, integramos el primer miembro respecto de *y*, y el segundo respecto de *x*.

$$\int \frac{y}{y-1}dy = \int \frac{y-1+1}{y-1}dy = \int (1 + \frac{1}{y-1})dy = y + \ln|y-1| + \ln|K_1| = \ln\left|K_1(y-1)e^y\right|$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|K_2| = \ln|K_2 x|$$

donde las constantes de integración se escribieron en la forma de logaritmos de las constantes arbitrarias K_1 y K_2, por razones que se comprenderán inmediatamente. Al igualar, eliminamos los logaritmos: $\left|K_1(y-1)e^y\right| = |K_2 x|$. Esta es una igualdad entre cantidades positivas, pero las expresiones entre las barras de módulo pueden ser positivas, negativas o nulas. Vemos que podemos emplear una sola constante de integración y dar una forma más simple de la familia de soluciones:

$K(y-1)e^{y}=x$.

Hemos obtenido en forma implícita una relación que liga a *y* con *x*, en la que interviene una sola constante arbitraria *K*. Para verificar que esta expresión es solución de la ecuación diferencial, derivamos cada miembro: $[Ke^{y}+K(y-1)e^{y}]y'=1$, de donde $Kye^{y}y'=1$. Para eliminar la constante K, de la expresión para la familia de soluciones obtenemos $K=\dfrac{x}{(y-1)e^{y}}$. Al reemplazar en la anterior da $\dfrac{xyy'}{y-1}=1$ que coincide con la ecuación de partida.

♣ Ejemplo 2: $y'=(1-y^{2})$

La ecuación equivale a $\dfrac{dy}{dx}=(1-y^{2})$, de donde $\dfrac{dy}{1-y^{2}}=dx$, con lo que hemos separado las variables. Descomponemos la función del primer miembro en fracciones simples:

$\dfrac{1}{1-y^{2}}=\dfrac{1}{(1-y)(1+y)}=\dfrac{A}{1-y}+\dfrac{B}{1+y}$.

Resolviendo se obtiene *A*=1/2 y *B*=1/2. Integrando ambos miembros, $\int\dfrac{1/2}{1-y}dy+\int\dfrac{1/2}{1+y}dy=$ $=\int dx$ resulta $-\dfrac{1}{2}\ln|1-y|+\dfrac{1}{2}\ln|1+y|+\dfrac{1}{2}\ln|K|=x$, donde se ha elegido por comodidad dar a la constante arbitraria la forma $(1/2)\ln|K|$. Agrupando, se obtiene $\ln\left|\dfrac{K(1+y)}{(1-y)}\right|=2x$, es decir, $\dfrac{K(1+y)}{(1-y)}=e^{2x}$.

Ésta es una relación implícita que expresa a *y* en función de *x*, en la que interviene un parámetro indeterminado. Derivando ambos miembros y eliminando *K*, se puede verificar que ésta expresión es solución de la ecuación diferencial planteada.

1.2. *Ecuaciones diferenciales exactas*

Recordemos cómo se calcula el diferencial de una función $u(x,y)$ de dos variables independientes:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Si $u(x,y)$ es clase C^2, esto es, con derivadas continuas hasta el segundo orden, se cumple que sus derivadas segundas cruzadas son iguales, esto es

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})$ que también se expresa como $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Supongamos ahora que tenemos una ecuación genérica de primer orden $y' = f(x, y)$. Una ecuación de este tipo siempre puede llevarse a la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Dada la similitud con la expresión del diferencial total de una función de dos variables, nos preguntamos si existe una cierta función $u(x, y)$ tal que

$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$; $N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ y du=0

Para que dicha función u exista, debe cumplirse la condición sobre las derivadas segundas cruzadas, que para el caso se expresa como

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

No cualquier ecuación de primer orden, llevada a la forma $M.dx+N.dy=0$, será un diferencial exacto pues, para esto, las funciones M y N no pueden ser cualesquiera. Si ellas cumplen que $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$, entonces podremos encontrar una función $u(x, y)$, llamada función potencial, de la que conocemos sus derivadas parciales respecto a x y a y, y de la que sabemos, a través de la ecuación, que es constante pues su diferencial es nulo. Resolver la ecuación es, en este caso, encontrar la función $u(x, y) = \text{constante}$.

Veamos, mediante ejemplos, cómo es el procedimiento.

♣ Ejemplo 3: $x^2 - y^2 = 2xyy'$

Para empezar, vemos que es imposible separar las variables. Descartada esta posibilidad, pasamos a analizar si se trata de un diferencial exacto. Para esto, escribimos la ecuación en la forma

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$$

e identificamos $M(x, y) = x^2 - y^2$; $N(x, y) = -2xy$

Si se trata de un diferencial exacto, debe ocurrir que $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$. Evaluamos:

$\partial M / \partial y = -2y$; $\partial N / \partial x = -2y$

Que sean iguales indica que existe una cierta función $u(x, y)$ tal que

$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = x^2 - y^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = -2xy$; $u(x, y) = \text{contante}$

A partir de la primera, integrando en x, obtenemos

$$u(x, y) = x^3 / 3 - xy^2 + h(y)$$

Nótese que hemos introducido una cierta función $h(y)$ como "constante" de integración. Esto es así porque hemos partido de la derivada parcial de *u* con respecto a *x*, de modo que cualquier función que dependa sólo de *y* actuará como una constante al efectuar esa derivada parcial. En otras palabras, si derivamos la función *u* propuesta con respecto a *x*, obtenemos la función *M* dada por la ecuación, no importa cuál sea la función *h*, en tanto dependa sólo de *y*. Además, la función *u* debe cumplir que su derivada parcial respecto a *y* coincida con *N*. Esto es, derivamos la función $u(x,y)$ propuesta y la igualamos con *N*:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy + h'(y) = -2xy$$

de donde resulta que $h'(y) = 0$, es decir $h(y) = \text{constante} = C_1$. Hasta aquí sabemos además que $u(x,y) = \text{contante} = C_2$ y que su expresión es $u(x,y) = x^3/3 - xy^2 + C_1$. Igualando ambas y reuniendo las dos constantes en una, tenemos

$$x^3/3 - xy^2 = C$$

de la que podría en este caso obtenerse en forma explícita *y*(*x*). En caso contrario, puede dejarse la expresión en forma implícita.

♣ Ejemplo 4: $(\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y)dy - (\cos y - y\cos x)dx = \operatorname{sen} y dy$

La reescribimos en la forma

$$(\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y)dy + (-\cos y + y\cos x)dx = 0$$

e identificamos

$$M(x,y) = -\cos y + y\cos x \quad ; \quad N(x,y) = senx + xseny - seny \quad ; \quad du = 0$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \operatorname{sen} y + \cos x \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + \operatorname{sen} y$$

y vemos que son iguales. Por lo tanto es posible hallar una función potencial $u(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = -\cos y + y\cos x \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y \quad ; \quad u(x,y) = K_1$$

De la primera, obtenemos

$$u(x,y) = -x\cos y + y\operatorname{sen} x + h(y)$$

La función *u* propuesta debe cumplir que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x + h'(y) = N(x,y) = \operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y$$

de donde $h'(y) = -\operatorname{sen} y$ y, por lo tanto, $h(y) = \cos y + K_2$.

Reemplazando en la expresión propuesta para *u*, tenemos

$u(x,y) = -x\cos y + y \operatorname{sen} x + \cos y + K_2 = K_1$

Reuniendo las dos constantes en una:

$-x\cos y + y\operatorname{sen} x + \cos y = K$

1.3. *Factor integrante*

Puede ocurrir que una ecuación de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no satisfaga las condiciones para ser una ecuación exacta pero que, multiplicándola por una función $\mu(x,y)$ apropiada, pueda transformársela en exacta. Si esto ocurre, diremos que $\mu(x,y)$ es el *factor integrante* y podremos resolver la ecuación dada como una ecuación exacta. La ecuación así modificada tiene la forma

$\mu(x,y)\cdot M(x,y)dx + \mu(x,y)\cdot N(x,y)dy = 0$

Para que sea una ecuación exacta, debe cumplir que

$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, es decir, $\mu'_y M + \mu M'_y = \mu'_x N + \mu N'_x$

Agrupando términos,

$$\mu(M'_y - N'_x) = \mu'_x N - \mu'_y M \qquad (1)$$

Encontrar una función de dos variables $\mu(x,y)$ puede ser una tarea muy difícil y el método no resultaría útil. Pero, si existe un factor integrante que dependa sólo de x o sólo de y, el problema se torna más simple y el procedimiento resulta de gran ayuda.

Supongamos que $\mu = \mu(x)$. En tal caso, $\mu'_y = 0$ y en lugar de μ'_x escribiremos μ', ya que se trata de la única derivada posible. La ecuación queda

$\mu(M'_y - N'_x) = \mu' N$

que es una ecuación en variables separables de la que obtenemos μ. La última expresión nos dice si existe el factor integrante que estamos buscando. En efecto, reescribiéndola en la forma

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{(M'_y - N'_x)}{N} \qquad (2)$$

vemos que si existe un factor integrante dependiente sólo de x, el primer miembro resulta función de x solamente. Por lo tanto, también debe ser función sólo de x el segundo miembro.

Las funciones M y N están dadas por la ecuación diferencial de partida, de modo que resulta sencillo ver si el cociente $(M'_y - N'_x)/N$ cumple con esa condición. Si esto ocurre, podemos asegurar que existe una función $\mu = \mu(x)$ e integrar (2) para hallarla. Nótese que sólo nos interesa encontrar *una* función que cumpla la condición (2), de modo que elegiremos la constante de integración que nos conduzca a la forma más simple de $\mu(x)$.

Una vez hallada $\mu(x)$, podemos transformar la ecuación diferencial y ponerla en la forma

$$\mu(x) \cdot M(x,y)dx + \mu(x) \cdot N(x,y)dy = 0$$

y resolverla como una ecuación diferencial exacta, como se discutió es la sección anterior.

Si, en cambio, existe una función $\mu = \mu(y)$, dependiente de y solamente, será $\mu_x = 0$ y en lugar de μ_y escribiremos μ'. La igualdad (1) queda en este caso:

$$\mu(M'_y - N'_x) = -\mu' M \qquad \text{o sea,} \qquad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{(M'_y - N'_x)}{M}$$

Vemos que el factor integrante que buscamos existe si $-(M'_y - N'_x)/M$ depende sólo de *y*. Si esto ocurre, a partir de μ'/μ, integrando, encontramos $\mu = \mu(y)$.

Nótese que en ambos casos, tanto si el factor integrante depende sólo de *x* como de *y*, el cálculo comienza evaluando $M'_y - N'_x$. Nótese además que si la ecuación es un diferencial exacto, esta diferencia de derivadas parciales es nula.

Consideremos un caso práctico:

♣ Ejemplo 5: Sea $dy = x^2 y dx + x^3 dy$

que reagrupamos en la forma $x^2 y dx + (x^3 - 1)dy = 0$.

Identificamos $M(x,y) = x^2 y$ y $N(x,y) = x^3 - 1$. Calculamos $M'_y = x^2$ y $N'_x = 3x^2$. Como las derivadas cruzadas no coinciden, concluimos que no se trata de un diferencial exacto. Buscamos entonces un factor integrante. Vemos que la expresión

$$-(M'_y - N'_x)/M = -(x^2 - 3x^2)/(x^2 y) = 2x^2/(x^2 y) = 2/y$$

es función de *y* solamente. Por lo tanto podremos encontrar un factor integrante $\mu = \mu(y)$ resolviendo la ecuación $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{y}$, que escribimos en la forma de variables separadas $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2}{y}dy$. La solución general de esta ecuación es $\ln|\mu| = 2\ln|y| + K$, que podemos escribir como $\mu = y^2 \cdot e^K$, donde e^K es un valor constante y mayor que cero. Encontramos así una familia de funciones $\mu = \mu(y)$ que satisfacen las condiciones requeridas. Como sólo nos interesa encontrar una de ellas, elegimos K =0 pues nos conduce a la expresión más sencilla para el factor integrante: $\mu(y) = y^2$. Ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación diferencial $x^2 y dx + (x^3 - 1)dy = 0$ por este factor y obtenemos una nueva ecuación diferencial

$$x^2 y^3 dx + (x^3 - 1)y^2 dy = 0 .$$

Podemos comprobar que ésta es exacta pues $\dfrac{\partial(x^2 y^3)}{\partial y} = 3x^2 y^2 = \dfrac{\partial[(x^3 - 1)y^2]}{\partial x}$. Por lo tanto, existirá una función $u(x, y)$ tal que $du = x^2 y^3 dx + (x^3 - 1)y^2 dy = 0$. Esto significa que cumple que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 y^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = (x^3 - 1)y^2$ y $du = 0$. La última indica que u=constante=K_1.

Integramos la primera respecto de x y obtenemos

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 y^3 + g(y) .$$

Derivamos ésta respecto de y e igualamos con la expresión que ya teníamos para esta derivada parcial, dada por factor que multiplica a dy en la ecuación diferencial exacta:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 y^2 + g'(y) = (x^3 - 1)y^2$$

Deducimos que $g'(y) = -y^2$. Por lo tanto, integrando, resulta $g(y) = -\frac{1}{3} y^3 + K_2$. Reunimos ahora toda la información que tenemos de la función u: $u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 y^3 - \frac{1}{3} y^3 + K_2 = K_1$, que puede escribirse en forma más simple como

$$y^3 (x^3 - 1) = K$$

en la que se definió una nueva constante $K = 3(K_1 - K_2)$. Subrayemos que, por tratarse de una ecuación diferencial de primer orden, la familia de soluciones contiene una sola constante indeterminada.

La expresión hallada es la solución expresada en forma implícita. En este caso se podría escribir la solución como una función explícita de y en términos de x. En otros ejemplos esto no es posible aunque tal circunstancia no debe considerarse un obstáculo. La familia de soluciones queda correctamente expresada ya sea como una función explícita como si ella es implícita.

1.4. *Ecuaciones diferenciales lineales*

Un tipo de ecuaciones diferenciales de primer orden que se presentan con frecuencia son las de la forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Veremos que las ecuaciones de este tipo, después de una manipulación apropiada, pueden resolverse empleando separación de variables y una integración. (En particular, si $Q(x) = 0$, la ecuación es de variables separables). Uno de los métodos habituales para resolver las ecuaciones diferenciales lineales consiste en descomponer a la función incógnita $y(x)$ como un producto de otras dos funciones desconocidas:

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

A primera vista, esto parece haber incrementado la complejidad del problema al aumentar el número de funciones a determinar. Sin embargo, y precisamente por esto, podremos imponer ciertas condiciones a una de ellas, lo que nos conducirá finalmente a la solución. Derivando $y(x)$, obtenemos:

$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Al reemplazar en la ecuación diferencial, resulta:

$u' \cdot v + u \cdot v' + P \cdot u \cdot v = Q$

y agrupando:

$u' \cdot v + u \cdot (v' + P \cdot v) = Q$

Imponemos a la función $v(x)$ que sea tal que

$v' + P \cdot v = 0$,

con lo cual la ecuación se reduce a

$u' \cdot v = Q$

La primera es una ecuación en variables separables, de la que obtenemos $v(x)$. La segunda nos da $u'(x) = Q(x)/v(x)$, que integramos para obtener $u(x)$. Por último, el producto de $u(x)$ por $v(x)$ nos da la función $y(x)$, solución del problema.

Veamos algunos ejemplos.

♣ Ejemplo 6: $y\,dx + x\,dy = \operatorname{sen} x\,dx$

Para ver que se trata de una ecuación lineal, debemos escribirla en la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$. Para esto, agrupamos:

$(y - \operatorname{sen} x)\,dx + x\,dy = 0$; $(y - \operatorname{sen} x)\,dx = -x\,dy$; $y - \operatorname{sen} x = -x \dfrac{dy}{dx}$; $x\,y' + y = \operatorname{sen} x$;

$y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

que tiene la forma buscada, con $P(x) = \dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Ahora proponemos $y = u \cdot v$, reemplazamos su derivada en la ecuación: $u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x} \cdot u \cdot v = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, agrupamos términos: $u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{1}{x} \cdot v) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e imponemos sobre v la condición $v' + \frac{1}{x} \cdot v = 0$, que equivale a $\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot v$, de la que, separando variables, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, obtenemos v: $\ln|v| = -\ln|x| + K$ es decir $|v| = e^K / |x|$. Definiendo una nueva constante, escribimos, en forma más simple $v = K_1 / x$. Dado que tenemos libertad para elegir la función v, elegimos la constante de integración $K_1 = 1$. Por lo tanto

$$v = \frac{1}{x}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ o sea $u' = \operatorname{sen} x$, de donde

$$u = -\cos x + C$$

Por la tanto, la solución $y = uv$ es

$$y(x) = \frac{C - \cos x}{x}$$

♣ Ejemplo 7: $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6$

Dividimos por x para escribir la ecuación en la forma estándar de la ecuación diferencial lineal:

$\frac{dy}{dx} - \frac{4y}{x} = x^5$ donde $P(x) = -\frac{4}{x}$ y $Q(x) = x^5$

Proponemos $y = u \cdot v$, reemplazamos su derivada en la ecuación y agrupamos $u' \cdot v + u \cdot (v' - \frac{4}{x} \cdot v) = x^5$. Elegimos v de modo que $v' - \frac{4}{x} \cdot v = 0$. Al separar las variables $\frac{dv}{v} = 4 \frac{dx}{x}$, resulta $\ln|v| = 4\ln|x| + K$, es decir $|v| = e^K x^4$, donde e^K es una constante positiva. Elegimos por simplicidad $K = 0$ y obtenemos

$$v = x^4$$

La ecuación diferencial quedó reducida a $u' \cdot v = x^5$. Reemplazando v, obtenemos $u' = x$, de donde

$u = \frac{x^2}{2} + C$. Multiplicando ésta por v, llegamos a

$$y(x) = \frac{x^6}{2} + Cx^4$$

1.5. *Ecuación de Bernouilli*

Se denominan así a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

donde *n* es algún número racional (entero o fraccionario) distinto de 0 y de 1. La restricción proviene de observar que si *n*=0, la ecuación se convierte en *lineal*, del tipo que se describió en el apartado anterior; si *n*=1, las funciones *P* y *Q* pueden reunirse en un solo término, y se obtiene una ecuación en variables separables.

Al dividir ambos miembros de la ecuación por y^n, tenemos

$$y^{-n} \cdot y' + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x)$$

Definimos una nueva variable $z = y^{-n+1}$ dependiente de *x*. Al derivarla respecto a *x*, se obtiene

$$z' = (-n+1)y^{-n} \cdot y'$$

Podemos fácilmente reemplazar en la ecuación diferencial:

$$\frac{z'}{-n+1} + P(x) \cdot z = Q(x)$$

Multiplicando por (-*n*+1), resulta

$$z' + (-n+1)P(x) \cdot z = (-n+1)Q(x)$$

que es una ecuación del tipo designado como *lineal*, que resolvemos mediante la sustitución $z = u \cdot v$. Una vez hallada *z*, integramos para encontrar *y*.

Consideremos el siguiente caso:

♣ Ejemplo 8: $y' + 2\,\mathrm{sen}\,x \cdot y = \sqrt{y}\; x\, e^{\cos x}$

Esta es una ecuación de Benouilli en la que *n*=1/2. Al dividir por $y^{1/2}$ obtenemos

$$y^{-1/2} y' + 2\,\mathrm{sen}\,x \cdot y^{1/2} = x\, e^{\cos x}$$

Efectuamos la sustitución $z = y^{1/2}$ cuya derivada es $z' = \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y'$. Al reemplazar se tiene

$2z'+2\operatorname{sen}x\cdot z = x\,e^{\cos x}$ que equivale a $z'+\operatorname{sen}x\cdot z = \frac{1}{2}x\,e^{\cos x}$.

Para resolver esta ecuación lineal, recurrimos a la sustitución $z(x)=u(x)v(x)$, de donde $z'=u'v+uv'$. Entonces, al reemplazar en la ecuación tenemos:

$$u'v+uv'+\operatorname{sen}x\cdot uv = \frac{1}{2}x\,e^{\cos x} \quad ; \quad u'v+u\,(v'+\operatorname{sen}x\cdot v) = \frac{1}{2}x\,e^{\cos x}$$

Imponemos la condición $v'+\operatorname{sen}x\cdot v=0$ de la que se desprende, por un lado, que una solución para *v* es

$$v(x)=e^{\cos x}$$

y, por otro, que

$u'v=\frac{1}{2}x\,e^{\cos x}$. Al reemplazar *v*, se tiene $u'=\frac{1}{2}x$ cuya integral general es

$u(x)=x^2+C$. Por lo tanto,

$$z(x)=e^{\cos x}(x^2+C)$$

y finalmente, recordando que $z=y^{1/2}$, se obtiene

$$y(x)=z^2=\left[e^{\cos x}(x^2+C)\right]^2=e^{2\cos x}(x^2+C)^2$$

<u>Como recomendación general, se sugiere siempre verificar la solución, esto es, por un lado, comprobar que la solución cumple con la condición inicial. Por otro lado, si la solución es correcta, al reemplazar la función y su derivada en la ecuación original, se debe llegar a una identidad en *x*.</u>

Los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden expuestos hasta aquí son sólo algunos de los varios conocidos. Se ha elegido analizarlos pues buena parte de los problemas que se presentan en situaciones de índole práctica pueden ser resueltos mediante alguno de ellos. Por otra parte, si bien no cubren todo el abanico de posibilidades, son muchas las ecuaciones de primer orden que, mediante alguna manipulación algebraica previa, pueden reducirse a alguno de estos tipos.

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

En forma similar a lo dicho para las ecuaciones de primer orden, las de segundo orden son, en general, expresiones de la forma

$$y''=f(x,y,y')$$

donde *f* es alguna relación funcional que vincula a la variable independiente (*x*), a la variable dependiente (*y*) y a su primera derivada (*y'*). Resolver la ecuación significa encontrar una expresión $y(x)$ tal que al reemplazarla, junto con sus derivadas de primero y segundo orden en la ecuación, se obtenga una identidad en *x*. Para que una ecuación de este tipo admita solución es necesario que la relación *f* cumpla ciertos requisitos, que están establecidos en el teorema de existencia y unicidad:

> Sea $f(x, y, y')$ una función continua definida para $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, $c_1 < y' < c_2$ que tiene derivadas parciales $\partial f / \partial y$ y $\partial f / \partial y'$ continuas en esa región. Entonces, si el punto (x_0, y_0, y'_0) pertenece a la región, la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ tiene una solución única $y(x)$ que pasa por (x_0, y_0) con pendiente y'_0.

Resolver ecuaciones de segundo orden es un problema bastante más complicado que el de resolver las de primer orden y sólo en ciertos casos pueden obtenerse las soluciones. En general, cuando se puede encontrar las soluciones, ellas son familias de funciones en las que intervienen dos parámetros indeterminados. La afirmación hecha en el teorema de que al fijar (x_0, y_0, y'_0), la solución es única, equivale a afirmar que se requieren dos condiciones iniciales. Esto es, una vez obtenida la expresión de la familia de soluciones $y(x)$ en la que figuran dos constantes indeterminadas, buscamos aquella que para $x = x_0$ pasa por $y = y_0$ con pendiente $y' = y'_0$. Al establecer estas dos condiciones iniciales las constantes quedan determinadas.

2.1. Aplicación de las transformadas directa e inversa de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

La transformada de Laplace nos brinda un método especialmente útil para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales, las denominadas *ecuaciones diferenciales ordinarias lineales a coeficientes constantes*.

(Las ecuaciones se dicen ordinarias cuando la incógnita es función de una sola variable independiente; en caso contrario, se tienen ecuaciones en derivadas parciales. La denominación de lineal se refiere al tipo de operaciones que afectan a la función incógnita; no aparecen productos entre la función y sus derivadas, ni potencias de ellas).

Tomemos el caso de una ecuación de este tipo de segundo orden cuya forma general es

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

donde a_0, a_1, a_2 son constantes reales y $f(x)$ es una función conocida. (Si $f(x) = 0$, la ecuación se dice, además, *homogénea*). Supongamos conocidos los valores de la función y de su primera derivada en x=0: $y(0) = y_0$ y $y'(0) = y'_0$. Estos valores constituyen lo que se conoce como ***condiciones iniciales del problema.*** Supongamos, además, que a_2=1. Esta suposición no implica pérdida de generalidad ya que siempre se puede dividir ambos miembros de la ecuación por a_2. Apliquemos la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación. Si designamos con

$\mathcal{L}[y] = Y(s)$,

las transformadas de las derivadas primera y segunda son:

$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y_0$ y

$\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - y_0 s - y'_0$.

Queda a la vista que las transformadas de la función incógnita y las de sus derivadas primera y segunda resultan expresadas en términos de una sola nueva función incógnita $Y(s)$. Reemplazando en la ecuación diferencial, tenemos

$$s^2Y(s) - y_0 s - y'_0 + a_1[sY(s) - y_0] + a_0Y(s) = F(s)$$

donde hemos introducido la transformada del término inhomogéneo $f(x)$: $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. Reordenando los términos,

$$Y(s)(s^2 + a_1 s + a_0) = F(s) + y_0 s + y'_0 + a_1 y_0$$

de la que puede despejarse $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{F(s) + y_0 s + y'_0 + a_1 y_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Esta función dependiente de s es la transformada de la función incógnita $y(x)$. Por lo tanto, para encontrar $y(x)$ habrá que antitransformar $Y(s)$. Como paso previo, habrá que dar a $Y(s)$ la forma adecuada, que permita luego efectuar la antitransformación, para lo cual será necesario analizar qué tipo de raíces tiene el denominador. Si son reales, descompondremos la expresión en fracciones simples y obtendremos términos que podrán antitransformarse mediante la tabla de transformadas de las funciones elementales. En caso contrario, es decir, si las raíces del polinomio de segundo grado son complejas, completaremos el cuadrado y el denominador tomará la forma $(s - \alpha)^2 + \beta$. El binomio $s - \alpha$, al antitransformar, deberá interpretarse como un corrimiento en s.

Nótese que este procedimiento exige introducir desde el principio las condiciones iniciales (y_0 e y'_0) del problema.

Veamos algunos ejemplos:

♣ Ejemplo 9: Consideremos la ecuación homogénea $y'' - y' - 2y = 0$, con las condiciones iniciales $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$.

Al transformar la función y sus derivadas primera y segunda, y al reemplazar los valores iniciales, tenemos:

$\mathcal{L}[y] = Y(s)$; $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - 1$; $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - s$

Cuando aplicamos la transformada a ambos miembros de la ecuación, resulta una igualdad en la que la única incógnita es $Y(s)$:

$s^2Y(s) - s - sY(s) + 1 - 2Y(s) = 0$ de donde

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2}$$

Las raíces del denominador son 2 y -1, de modo que $s^2 - s - 2 = (s-2)(s+1)$. Descomponemos $Y(s)$ en fracciones simples.

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1) + B(s-2)}{(s-2)(s+1)}$$

La igualdad $A(s-2) + B(s+1) = s-1$ se verifica para A=1/3 y B=2/3. Luego,

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}$$

Al antitransformar, se obtiene

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1}] = (\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t})u(x)$$

Se puede verificar fácilmente que esta función es solución de la ecuación y además cumple las condiciones iniciales. Para esto, evaluamos las derivadas hasta el segundo orden y reemplazamos en la ecuación:

$$y'(x) = (\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x})u(x) \quad ; \quad y''(x) = (\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x})u(x)$$

$$y'' - y' - 2y = \frac{4}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x} - (\frac{2}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x}) - 2(\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}) = 0$$

Vemos que la solución hallada verifica la ecuación diferencial. Comprobemos que también se cumplen las condiciones iniciales:

$$y(0) = \frac{1}{3}e^0 + \frac{2}{3}e^0 = 1 \quad ; \quad y'(0) = \frac{2}{3}e^0 - \frac{2}{3}e^0 = 0$$

♣ Ejemplo 10: Mediante el mismo procedimiento, resolvamos ahora la ecuación no homogénea $2y'' - 12y' + 18y = e^x u(x)$, con las condiciones iniciales $y_0 = 0$, $y'_0 = 0$.

Dividimos ambos miembros de la ecuación por 2, reemplazamos los valores iniciales en las transformadas de las derivadas primera y segunda, y transformamos la ecuación:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s) \;\; ; \;\; \mathcal{L}[y'] = sY(s) \;\; ; \;\; \mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) \;\; ; \;\; \mathcal{L}[e^x u(x)] = \frac{1}{s-1}$$

$$s^2Y(s) - 6sY(s) + 9Y(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-1)(s^2-6s+9)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-1)(s-3)^2}$$

Para descomponer la expresión en fracciones simples debemos tener en cuenta que 3 es raíz doble del denominador:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{s-3} = \frac{A(s-3)^2 + B(s-1) + C(s-1)(s-3)}{(s-1)(s-3)^2}$$

Los coeficientes deben cumplir la condición $A(s-3)^2 + B(s-1) + C(s-1)(s-3) = 1/2$, de donde A=1/8, B=1/4, C=-1/8. Así,

$$Y(s) = \frac{1/8}{(s-1)} + \frac{1/4}{(s-3)^2} - \frac{1/8}{s-3}$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s-3)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s-3}]$$

Los términos primero y tercero se antitransforman fácilmente y dan lugar a las exponenciales e^x y e^{3x}. En cambio, el segundo término no tiene la dependencia funcional de ninguna de las transformadas de las funciones elementales. Sin embargo, observemos que

$$\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-3}) = -\frac{1}{(s-3)^2}$$

Por lo tanto, dado que $\frac{1}{s-3} = \mathcal{L}[e^{3x}u(x)]$, entonces $-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s-3}) = \frac{1}{(s-3)^2} = \mathcal{L}[x \cdot e^{3x}u(x)]$.

La raíz doble (s=3) del denominador de $Y(s)$ da lugar al término de la forma xe^{3x} en $y(x)$. Tenemos, por último, que

$$y(x) = [\frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{1}{8}e^{3x}]u(x)$$

Verificación: $y'(x) = [\frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{3}{4}xe^{3x} - \frac{3}{8}e^{3x}]u(x) = [\frac{1}{8}e^x - \frac{1}{8}e^{3x} + \frac{3}{4}xe^{3x}]u(x)$

$$y''(x) = [\frac{1}{8}e^x - \frac{3}{8}e^{3x} + \frac{3}{4}e^{3x} + \frac{9}{4}xe^{3x}]u(x) = [\frac{1}{8}e^x + \frac{3}{8}e^{3x} + \frac{9}{4}xe^{3x}]u(x)$$

$$2y'' - 12y' + 18y =$$
$$= [2(\frac{1}{8}e^x + \frac{3}{8}e^{3x} + \frac{9}{4}xe^{3x}) - 12(\frac{1}{8}e^x - \frac{1}{8}e^{3x} + \frac{3}{4}xe^{3x}) + 18(\frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{1}{8}e^{3x})]u(x) =$$
$$= e^x u(x).$$

Se comprueba así que la solución cumple la ecuación diferencial. Además, cumple las condiciones iniciales: $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

♣ Ejemplo 11: Resolver $y''-10y'+25y = e^{5t}u(t)$ con las condiciones iniciales $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$. Este caso, si bien es similar al anterior, tiene con él una diferencia significativa, como veremos.

$\mathcal{L}[y] = Y(s)$; $\mathcal{L}[y'] = sY(s) - 1$; $\mathcal{L}[y''] = s^2Y(s) - s$; $\mathcal{L}[e^t \cdot u(t)] = \dfrac{1}{s-5}$

$$s^2Y(s) - s - 10(sY(s) - 1) + 25Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$Y(s)(s^2 - 10s + 25) = \dfrac{1}{s-5} + s - 10$. En el coeficiente de $Y(s)$, 5 es raíz doble, pues $(s^2 - 10s + 25) = (s-5)^2$, pero este valor coincide con el coeficiente de *t* en la exponencial. Esto hace que 5 sea raíz triple de $Y(s)$, lo que se reflejará en la solución de la ecuación

$$Y(s) = \frac{1}{(s-5)^3} + \frac{s-10}{(s-5)^2} = \frac{1}{(s-5)^3} + \frac{s-5-5}{(s-5)^2} = \frac{1}{(s-5)^3} + \frac{1}{(s-5)} - \frac{5}{(s-5)^2}$$

Esta expresión ya está separada en fracciones simples. El segundo término es la transformada de $e^{5t}u(t)$. Para antitransformar los otros, podemos hacer dos análisis diferentes. Por un lado,

$\dfrac{d}{ds}(\dfrac{1}{s-5}) = -\dfrac{1}{(s-5)^2}$, de modo que $\mathcal{L}[te^{5t}u(t)] = \dfrac{1}{(s-5)^2}$ y $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{5}{(s-5)^2}] = 5te^{5t}u(t)$, y $\dfrac{d^2}{ds^2}(\dfrac{1}{s-5}) = \dfrac{2}{(s-5)^3}$, de modo que $\mathcal{L}[t^2e^{5t}u(t)] = \dfrac{2}{(s-5)^3}$ y $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{(s-5)^3}] = \dfrac{1}{2}t^2e^{5t}u(t)$.

Finalmente, $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = (\frac{1}{2}t^2 - 5t + 1) \cdot e^{5t} \cdot u(t)$

Otro procedimiento alternativo para antitransformar los términos primero y tercero, consiste en partir de $\mathcal{L}[t^n] = n!/s^{n+1}$ y considerar que dichos términos están afectados de un corrimiento en *s* que, como sabemos, es debido al producto por una exponencial. Así, de $\mathcal{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}$, obtenemos $\mathcal{L}[te^{5t}] = \dfrac{1}{(s-5)^2}$ y de $\mathcal{L}[t^2] = \dfrac{2}{s^3}$, obtenemos $\mathcal{L}[t^2e^{5t}] = \dfrac{2}{(s-5)^3}$.

Naturalmente, llegamos a la misma función de *t* que obtuvimos por el otro procedimiento.

Verificamos: $y'(t) = [t - 5 + 5(\frac{1}{2}t^2 - 5t + 1)] \cdot e^{5t} \cdot u(t) = (\frac{5}{2}t^2 - 24t) \cdot e^{5t} \cdot u(t)$,

$$y''(t) = [5t - 24 + 5(\frac{5}{2}t^2 - 24t)] \cdot e^{5t} \cdot u(t) = (\frac{25}{2}t^2 - 115t - 24) \cdot e^{5t} \cdot u(t)$$

$$y''-10y'+25y = [\frac{25}{2}t^2 - 115t - 24 - 10(\frac{5}{2}t^2 - 24t) + 25(\frac{1}{2}t^2 - 5t + 1)] \cdot e^{5t} \cdot u(t) = e^{5t}u(t)$$

$y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

♣ Ejemplo 12: Resolver $y''+4y'+5y=\operatorname{sen}3t\cdot u(t)$ con las condiciones iniciales $y_0=0$, $y'_0=1$

$\mathcal{L}[y]=Y(s)$; $\mathcal{L}[y']=sY(s)$; $\mathcal{L}[y'']=s^2Y(s)-1$; $\mathcal{L}[\operatorname{sen}t\cdot u(t)]=\dfrac{3}{s^2+9}$

$$s^2Y(s)-1+4sY(s)+5Y(s)=\frac{3}{s^2+9}$$

$$Y(s)(s^2+4s+5)=\frac{3}{s^2+9}+1$$

$$Y(s)=\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4s+5)}+\frac{1}{s^2+4s+5}$$

Los binomios s^2+9 y s^2+4s+5 tienen raíces complejas. Descomponemos el primer término en fracciones simples en la forma

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4s+5)}=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+5}=\frac{(As+B)(s^2+4s+5)+(Cs+D)(s^2+9)}{(s^2+9)(s^2+4s+5)}$$

Resolvemos la expresión $(As+B)(s^2+4s+5)+(Cs+D)(s^2+9)=3$ para determinar las constantes *A*, *B*, *C* y *D*. Para esto, necesitamos cuatro ecuaciones en las que las aparezcan como incógnitas. Una manera de construirlas es asignar cuatro valores a *s*, como hicimos en otros ejemplos. Otra manera es agrupar los términos de la última ecuación para formar un polinomio de tercer grado en *s* e igualar los términos de igual grado a ambos lados de la ecuación. Resulta así un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 4A+B+D=0 \\ 5A+4B+9C=0 \\ 5B+9D=3 \end{cases}$$

que resolvemos triangulando la matriz ampliada del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 4 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

de donde resulta: *D*=3/8, *C*=3/40, *B*=-3/40, *A*=-3/40. El primer término de $Y(s)$ queda en la forma:

$$\frac{3}{(s^2+9)(s^2+4s+5)}=-\frac{3}{40}\cdot\frac{s+1}{s^2+9}+\frac{3}{40}\cdot\frac{s+5}{s^2+4s+5}$$

Reemplazando en $Y(s)$ y agrupando los términos con igual denominador,

$$Y(s)=-\frac{3}{40}\cdot\frac{s+1}{s^2+9}+\frac{(3/40)s+11/8}{s^2+4s+5}=-\frac{3}{40}\frac{s+1}{s^2+9}+\frac{3}{40}\frac{s+55/3}{s^2+4s+5}$$

En el denominador del segundo término completamos el cuadrado y lo escribimos en la forma

$$s^2+4s+5=s^2+4s+4+1=(s+2)^2+1$$

El término (s+2) indica un corrimiento en s; el numerador debe contener un corrimiento similar. Por esto, escribimos el segundo término en la forma

$$Y(s)=\frac{3}{40}\left[-\frac{s+1}{s^2+9}+\frac{s+2-2+55/3}{(s+2)^2+1}\right]$$

Para antitransformar, en $Y(s)$ separamos los términos,

$$Y(s)=\frac{3}{40}\left[-\frac{s+1}{s^2+9}+\frac{s+2-2+55/3}{(s+2)^2+1}\right]=\frac{3}{40}\left[-\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{s^2+9}+\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{49/3}{(s+2)^2+1}\right]$$

$$Y(s)=-\frac{3}{40}\cdot\frac{s}{s^2+9}-\frac{1}{40}\cdot\frac{3}{s^2+9}+\frac{3}{40}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{49}{40}\cdot\frac{1}{(s+2)^2+1}$$

El último término tiene la forma funcional de la transformada de sen t; el corrimiento en s a través del término s+2, indica que la antitransformada es de la forma $\operatorname{sen} t\cdot e^{-2t}\cdot u(t)$. Del mismo modo, el tercer término tiene la forma funcional de la transformada de $\cos t\cdot e^{-2t}\cdot u(t)$. Los dos primeros términos se antitransforman de manera inmediata. Finalmente, antitransformamos

$$y(t)=[-\frac{3}{40}\cdot\cos 3t-\frac{1}{40}\cdot\operatorname{sen} 3t+\frac{3}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t}+\frac{49}{40}\cdot\operatorname{sen} t\cdot e^{-2t}]u(t)$$

Verificamos:

$$y'(t)=[\frac{9}{40}\cdot\operatorname{sen} 3t-\frac{3}{40}\cdot\cos 3t-\frac{101}{40}\cdot\operatorname{sen} t\cdot e^{-2t}+\frac{43}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t}]u(t)$$

$$y''(t)=[\frac{27}{40}\cdot\cos 3t+\frac{9}{40}\cdot\operatorname{sen} 3t-\frac{187}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t}+\frac{159}{40}\cdot\operatorname{sen} t\cdot e^{-2t}]u(t)$$

$$y''+4y'+5y=[\frac{27}{40}\cdot\cos 3t+\frac{9}{40}\cdot sen3t-\frac{187}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t}+\frac{159}{40}\cdot sent\cdot e^{-2t}+$$

$$+4(\frac{9}{40}\cdot sen3t-\frac{3}{40}\cdot\cos 3t-\frac{101}{40}\cdot sent\cdot e^{-2t}+\frac{43}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t})+$$

$$+5(-\frac{3}{40}\cdot\cos 3t-\frac{1}{40}\cdot sen3t+\frac{3}{40}\cdot\cos t\cdot e^{-2t}+\frac{49}{40}\cdot sent\cdot e^{-2t})]u(t)=sen3t\cdot u(t)$$

$$y(0)=0 \qquad ; \qquad y'(0)=1$$

2.1.a. *Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de circuitos eléctricos*

♣ Ejemplo 13: Un circuito R-C serie tiene una resistencia $R = 20000\Omega$, un capacitor $C = 10^{-6} F$ y está alimentado por una fuente de tensión continua *E* de 100V. El circuito se activa al cerrar una llave, previo a lo cual, el capacitor está descargado. Calcule la carga en el capacitor y la corriente en el circuito a partir del cierre de la llave.

Debido a la presencia de la llave, la tensión, la corriente y la carga están dadas por funciones de la forma $E \cdot u(t)$, $I(t) \cdot u(t)$ y $q(t) \cdot u(t)$, respectivamente. Al aplicar una de las leyes de Kirchhoff, tenemos la ecuación

$$RI + q / C = E$$

Dividiendo por R y teniendo en cuenta que $I(t) = \frac{dq}{dt}$, obtenemos la ecuación diferencial en *q*:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{E}{R}$$

que con los valores numéricos de este ejemplo es:

$\frac{dq}{dt} + 50q = 0.005$, con la condición inicial $q(0) = 0$.

Esta ecuación, por ser de primer orden, requiere sólo una condición inicial. Podemos resolverla separando variables: $\frac{dq}{dt} = -50q + 0.005$; $\frac{dq}{dt} = -50(q - 10^{-4})$; $\frac{dq}{q - 10^{-4}} = -50dt$

e integrando, $\int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{q - 10^{-4}} = -50\int_0^t dt$; $\left[\ln\left|q - 10^{-4}\right|\right]_{q(0)}^{q(t)} = -50t$; $\ln\left|\frac{q(t) - 10^{-4}}{q(0) - 10^{-4}}\right| = -50t$;

$\left|\frac{q(t) - 10^{-4}}{0 - 10^{-4}}\right| = e^{-50t}$; $-\frac{q(t)}{10^{-4}} + 1 = e^{-50t}$ con $q(t)/10^{-4}<1$; $q(t) = 10^{-4}(1 - e^{-50t})$

Vamos a resolver esta misma ecuación aplicando la transformada de Laplace, para mostrar que este método puede aplicarse a ecuaciones lineales de cualquier orden, siempre que sus coeficientes sean constantes. Si definimos $\mathcal{L}[q(t)] = Q(s)$, es $\mathcal{L}[q'(t)] = sQ(s) - q(0) = sQ(s)$, la ecuación se convierte en

$$sQ(s) + 50Q(s) = 0.005 / s$$

$$Q(s) = \frac{0.005}{s(s+50)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+50} = \frac{A(s+50) + Bs}{s(s+50)}$$

Al resolver, encontramos A=10^{-4} y B=-10^{-4}. Luego, $Q(s) = \frac{10^{-4}}{s} - \frac{10^{-4}}{s+50}$

Al antitransformar, obtenemos

$q(t) = 10^{-4} \cdot u(t) - 10^{-4} \cdot e^{-50t} \cdot u(t) = 10^{-4}(1 - e^{-50t}) \cdot u(t)$

Verificamos que la solución hallada cumple la ecuación del circuito y la condición inicial:

$I(t) = q'(t) = 50 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-50t} \cdot u(t)$

$$RI + \frac{q}{C} = 20000 \cdot (50 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-50t}) + \frac{10^{-4}(1 - e^{-50t})}{10^{-6}} = 100e^{-50t} + 100(1 - e^{-50t}) = 100 = E$$

$q(0) = 0$

Vemos que la carga del capacitor crece desde cero en forma exponencial y tiende en forma asintótica al valor de 10^{-4}Coul. Simultáneamente, la corriente en t=0 es máxima, $I(0) = 5\,\text{mA}$, y decrece en forma exponencial. La constante de tiempo del circuito es $1/RC$=50 seg^{-1}, que aparece con signo negativo como coeficiente de t en la exponencial. La inversa de este parámetro representa el tiempo necesario para que la corriente caiga a $1/e$=0.3679=(36.79%) de su valor inicial.

♣ Ejemplo 14: En el circuito L-C serie, con L=40Hy y $C = 10^{-5} F$, el capacitor está inicialmente descargado. En t=0 se conecta una fuente de tensión continua E=200V. Resuelva el circuito para t>0.

La ecuación del circuito es

$L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{q}{C} = E$ con las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = I(0) = 0$. Dado que $I(t) = dq/dt$, entonces $dI(t)/dt = d^2q/dt^2$. Dividiendo por L,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = \frac{E}{L}$$

y reemplazando los valores de este ejemplo,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2500q = 5 \cdot u(t)$$

Al aplicar la transformada de Laplace con las condiciones iniciales dadas: $\mathcal{L}[q(t)] = Q(s)$, $\mathcal{L}[q'(t)] = sQ(s) - q(0) = sQ(s)$, $\mathcal{L}[q''(t)] = s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) = s^2Q(s)$, tenemos

$$s^2Q(s) + 2500Q(s) = \frac{5}{s}\ ;\ Q(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + 2500} = \frac{A(s^2 + 2500) + s(Bs + D)}{s(s^2 + 2500)}$$

que se cumple si A=0.002, B=-0.002, D=0. Luego,

$$Q(s) = \frac{0.002}{s} - \frac{0.002s}{s^2 + 2500}$$

Al antitransformar, obtenemos

$\mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = q(t) = 0.002(1 - \cos 50t) \cdot u(t)$.

Verificamos que se cumplen la ecuación del circuito y las condiciones iniciales:

$$I(t) = q'(t) = 0.1 \operatorname{sen} 50t \cdot u(t)$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = q''(t) = 5\cos 50t \cdot u(t)$$
$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = [40 \cdot 5\cos 50t + \frac{1}{10^{-5}} 0.002(1 - \cos 50t)] \cdot u(t) = 200 \cdot u(t) = E$$
$$q(0) = 0 \quad ; \quad I(0) = q'(0) = 0$$

Este circuito, que es alimentado por una fuente de tensión constante, tiene una respuesta oscilatoria para la carga y la corriente. La frecuencia característica del circuito es $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 50$.

♣ Ejemplo 15: En el circuito L-C serie, con *L*=40Hy y $C = 10^{-5} F$, el capacitor está inicialmente descargado. En *t*=0 se conecta una fuente de tensión alterna $E = 200\cos 50t$. Resuelva el circuito para *t*>0.

El ejemplo es similar al anterior. La única diferencia reside en la tensión de alimentación, que en este caso es alterna y su frecuencia coincide con la frecuencia propia del circuito. Este circuito se denomina *resonante*. La ecuación del circuito es:

$\frac{d^2q}{dt^2} + 2500q = 5\cos 50t \cdot u(t)$ y su transformada es

$$s^2Q(s) + 2500Q(s) = 5 \cdot \frac{s}{s^2 + 2500} \qquad ; \qquad Q(s) = 5 \cdot \frac{s}{(s^2 + 2500)^2}$$

Para antitransformar esta expresión, observemos que $\mathcal{L}[\operatorname{sen} 50t \cdot u(t)] = \frac{50}{s^2 + 2500}$ y, por lo tanto, $\mathcal{L}[t \operatorname{sen} 50t] = -\frac{d}{ds}(\frac{50}{s^2 + 2500}\} = \frac{100s}{(s^2 + 2500)^2}$. Luego

$\mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = q(t) = \frac{1}{20} t \operatorname{sen} 50t \cdot u(t)$.

Verificamos que se cumplen la ecuación del circuito y las condiciones iniciales:

$$I(t) = q'(t) = [\frac{1}{20}\operatorname{sen} 50t + \frac{5}{2} t\cos 50t] \cdot u(t)$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = q''(t) = [\frac{5}{2}\cos 50t + \frac{5}{2}\cos 50t - 125\operatorname{sen} 50t] \cdot u(t) = [5\cos 50t - 125\operatorname{sen} 50t] \cdot u(t)$$
$$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = [40(5\cos 50t - 125t\operatorname{sen} 50t) + \frac{1}{10^{-5}}\frac{1}{20} t\operatorname{sen} 50t] \cdot u(t) = 200\cos 50t \cdot u(t) = E$$

$q(0) = 0 \quad ; \quad I(0) = q'(0) = 0$

En un circuito resonante, la carga y la corriente oscilan con la misma frecuencia que la tensión de entrada pero su amplitud crece indefinidamente en forma proporcional a *t*.

2.2. *Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables*

Se denominan de este modo las ecuaciones de la forma

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = f(x) \qquad (3)$$

donde $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas, en algún dominio, de la variable independiente *x*. No existe un método general para resolver ecuaciones de esta forma. En algunos casos particulares es posible efectuar una sustitución adecuada que conduce a una ecuación más sencilla de alguno de los tipos ya conocidos. Tal es el caso que se presenta a continuación.

2.2.a. *Ecuaciones de Euler-Cauchy*

Se trata de ecuaciones de la forma

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)$$

en las que *p* y *q* son números reales. En ellas, introduciendo una nueva variable independiente *t* definida como

$t = \ln x$, es decir $x = e^t$. Nótese que la solución será válida sólo para $x>0$.

Al aplicar la regla de la cadena: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ y teniendo en cuenta que $\frac{dy}{dx} = y'$ y que $\frac{dx}{dt} = e^t = x$, se obtiene la relación $\frac{dy}{dt} = xy'$.

Al aplicarla nuevamente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(y'x) \cdot x = (y''x + y') \cdot x = x^2 y'' + xy' ,$$

resulta la relación $x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - xy' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$.

Cuando ambas expresiones se reemplazan en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (1-p)\frac{dy}{dt} + qy = f(x)$$

que es una ecuación a coeficientes constantes.

2.2.b. *Resolución mediante series de potencias*

Retomando el caso de una ecuación general de segundo orden con coeficientes variables del tipo (3) podemos afirmar que, bajo condiciones apropiadas de continuidad de las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ es posible encontrar una expresión para la solución $y(x)$ en forma de serie de potencias. Esto es, si bien no somos capaces en general de encontrar una expresión analítica (explícita o implícita) para la función solución, sí seremos capaces de dar su desarrollo en serie de Taylor válido en algún intervalo, suponiendo que las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ también se puedan desarrollar en serie de Taylor en el mismo intervalo.

El problema consiste en determinar los coeficientes de dicho desarrollo de la función $y(x)$. Para esto, proponemos

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Su derivadas primera y segunda se escriben como

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Al sustituir estas series de potencias junto con las correspondientes a las funciones $a(x)$, $b(x)$ y $f(x)$ en la ecuación diferencial (3) y al igualar los coeficientes de las potencias de igual grado, se obtiene la serie buscada para $y(x)$. Veamos cómo se aplica. Sea:

♣ Ejemplo 16: $(1+x^2)y''+2xy'-2y = 0$

Cuando reemplazamos las series para $y(x)$, $y'(x)$ e $y''(x)$, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)a_{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^n = 0$$

En la segunda suma aparecen las potencias $x^2, x^3, x^4, \ldots$ Podemos reescribirla en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n$$

En forma análoga, en la tercera suma hacemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n$$

La expresión completa para la ecuación diferencial queda ahora

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$$

y agrupando la primera y última suma

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n]x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n = 0$$

Busquemos ahora el coeficiente de x^0. Éste está presente sólo en la primera suma y es $2a_2 - 2a_0$, que se obtiene reemplazando n=0. Dado que el segundo miembro de la ecuación diferencial es idénticamente nulo, debe ser

$$a_2 = a_0$$

Si consideramos ahora el coeficiente de x^1, vemos que está presente en la primera y tercera suma. Haciendo n=1, se obtiene $(3.2a_3 - 2a_1) + 2a_1 = 6a_3$. Al igualar con el segundo miembro, resulta

$$a_3 = 0$$

Para el coeficiente de x^2 (y para todos los sucesivos) intervienen las tres sumas. Tomando n=2 e igualando al segundo miembro,

$$(4.3a_4 - 2a_2) + 2a_2 + 2.2a_2 = 12a_4 + 4a_2 = 0 \text{ de donde } a_4 = -a_2/3 = -a_0/3$$

Podemos generalizar esta última expresión y obtener una ley que nos permita obtener todos los coeficiente de la serie de potencias para $n \geq 2$

$$[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2a_n] + n(n-1)a_n + 2na_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + [-2 + n(n-1) + 2n]a_n =$$
$$= (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 + n - 2)a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)(n-1)a_n = 0$$

De aquí se obtiene una relación que conecta a los sucesivos coeficientes en la forma

$$a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+1}a_n \text{ para } n \geq 2$$

es decir, los coeficientes pares están relacionados entre sí y también lo están los coeficientes impares entre sí. Esta expresión se denomina *ley de recurrencia*. Como $a_3 = 0$, también serán nulos todos los coeficientes impares excepto a_1, que no intervino en las operaciones que hicimos hasta aquí y puede tomar, en principio, cualquier valor. También inferimos a partir de la ley de recurrencia que, una vez fijado el valor de a_0, quedan determinados todos los coeficientes pares. Vemos que, como en toda ecuación de segundo orden, ésta contiene dos constantes indeterminadas. Una vez fijadas las condiciones iniciales del problema, dichas constantes quedarán determinadas.

Si las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, de ellas resultan

$a_0 = 0$ y $a_1 = 1$

y la solución es

$y_1(x) = x$

Si las condiciones son $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, al reemplazarlas en las series de potencias correspondientes, resultan

$a_0 = 1$ y $a_1 = 0$

y la solución es

$$y_2(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$$

Estas dos soluciones de la ecuación forman una base de soluciones, de modo que para condiciones iniciales arbitrarias, la solución general es una combinación lineal de ellas:

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ax + B(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + ...)$$

Esto dice que la solución en un caso general contiene dos constantes arbitrarias, como era de esperar, por tratarse de una ecuación de segundo orden. La constante *B* es el valor de la función *y* en *x*=0, en tanto que *A* es el valor de la derivada en 0.