Investigación de Operativa

Clase de análisis de sensibilidad e interpretación de los resultados

Universidad Católica de Cordoba

1417749@ucc.edu.ar

Ing. Sergio H. Rosa

Curso 2020

¿Cuál es el objetivo?

OBJETIVO DEL
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Responder preguntas del tipo:
¿Qué pasa si se modifican algunos parámetros del modelo?

¿Cuáles parámetros?

C_j y B_i

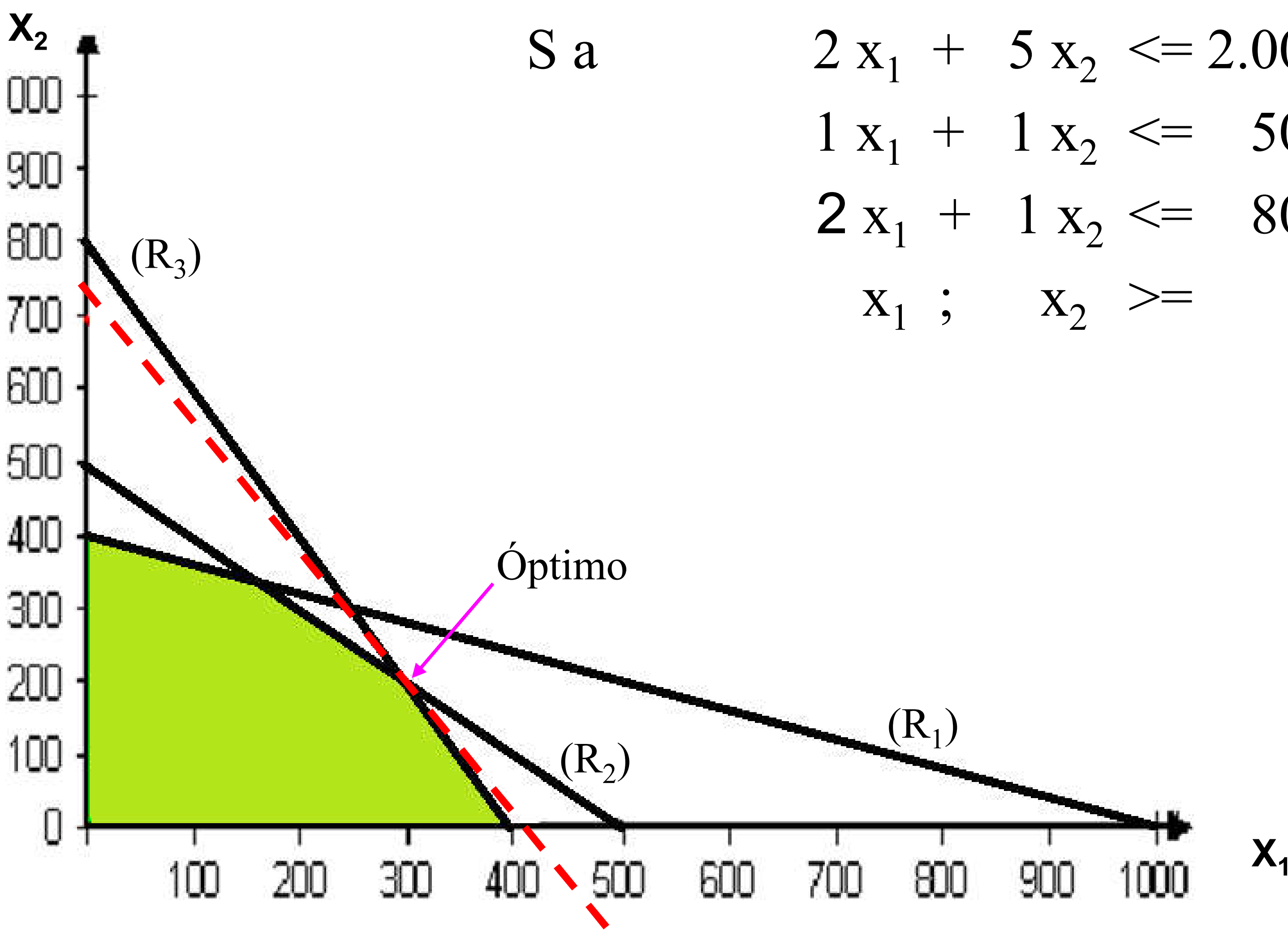
Impacto en Z

Impacto que tienen en el valor de las variables

Ejemplo

$$\text{Máx. } (Z) = 70\,x_1 + 40\,x_2$$

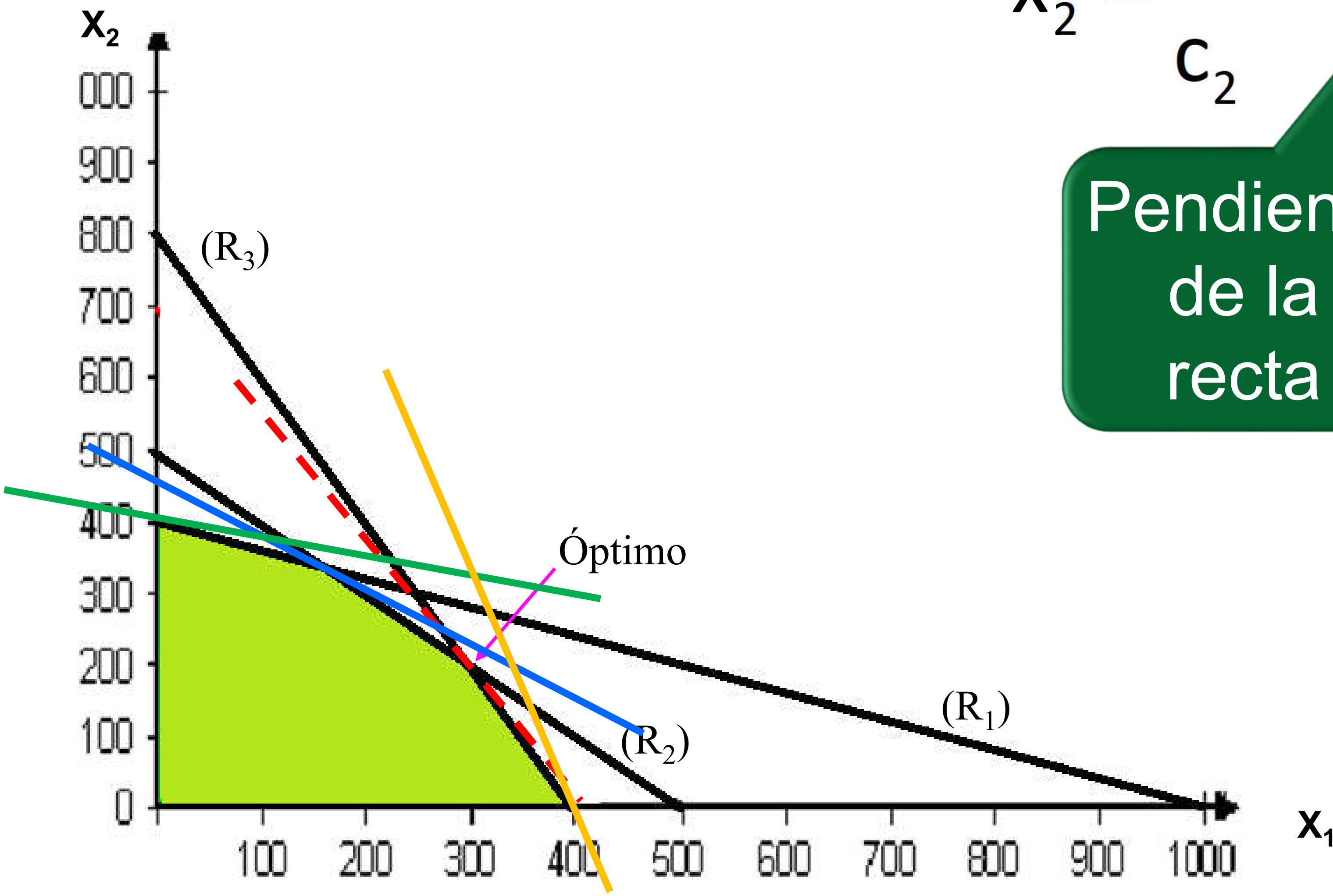
$$\begin{array}{lrcrcr} \text{S a} & 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & <= & 2.000 \\ & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 500 \\ & 2\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 800 \\ & x_1 & ; & x_2 & >= & 0 \end{array}$$



Cambios en el coeficiente de la FO

$$x_2 = \frac{z}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1$$

Pendiente de la recta



Determinación de los intervalos de los coeficiente de la FO

Si c_j Є a una variable No Básica

Máximo ➔ $[-\infty , \Delta Cj^{+}]$

Mínimo ➔ $[\Delta Cj^{-}, \infty]$

Si c_j Є a una variable Básica

$[\Delta Cj^{-} \leq \Delta Cj \leq \Delta Cj^{+}]$

$\Delta Z = \Delta c_k \ x_k$

Veamos un ejemplo

Max. (Z) =	$40X1 + 50X2 + 30X3$		
Sa	$3X1 + 4X2 + 2X3$	$\leq$ 1.200	(Horas Secc. 1)
	$1X1 + 2X2 + 1X3$	$\leq$ 800	(Horas Secc. 2)
	$1X1 + 1X2$	$\geq$ 300	(Demanda)
	$X1, X2, X3$	$\geq$ 0	

$$X^* = \begin{array}{l} X_1 = 300 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 150 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 200 \\ S_3 = 0 \end{array} \qquad Z^* = 16.500$$

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Qué sucede si se produce un aumento en las ganancias de $3 en el producto 2?

Como la variación esta dentro del intervalo $-\infty \leq \Delta C_2 \leq 5 \rightarrow$ no se produce ningún cambio

Ej.: ¿Qué sucede si se produce una disminución en las ganancias de $4 en el producto 1?

La variación esta dentro del intervalo será $\rightarrow -5 \leq \Delta C_1 \leq 5$
No se producen cambios en las variables, si cambia el valor de z de la siguiente manera:
El valor actual de $C_1 = 40 \rightarrow C_1 = 36$
$\Delta Z = \Delta C_1 X_1$; en nuestro ejemplo: $\Delta Z = -4 (300) = -1200$
Lo que lleva al nuevo Z = 16.500 - 1.200 = 15.300

Nota: cualquier cambio fuera del intervalo cambia la base, se debe resolver nuevamente.

Resultados del Solver de Excel

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$E$3		0	16500

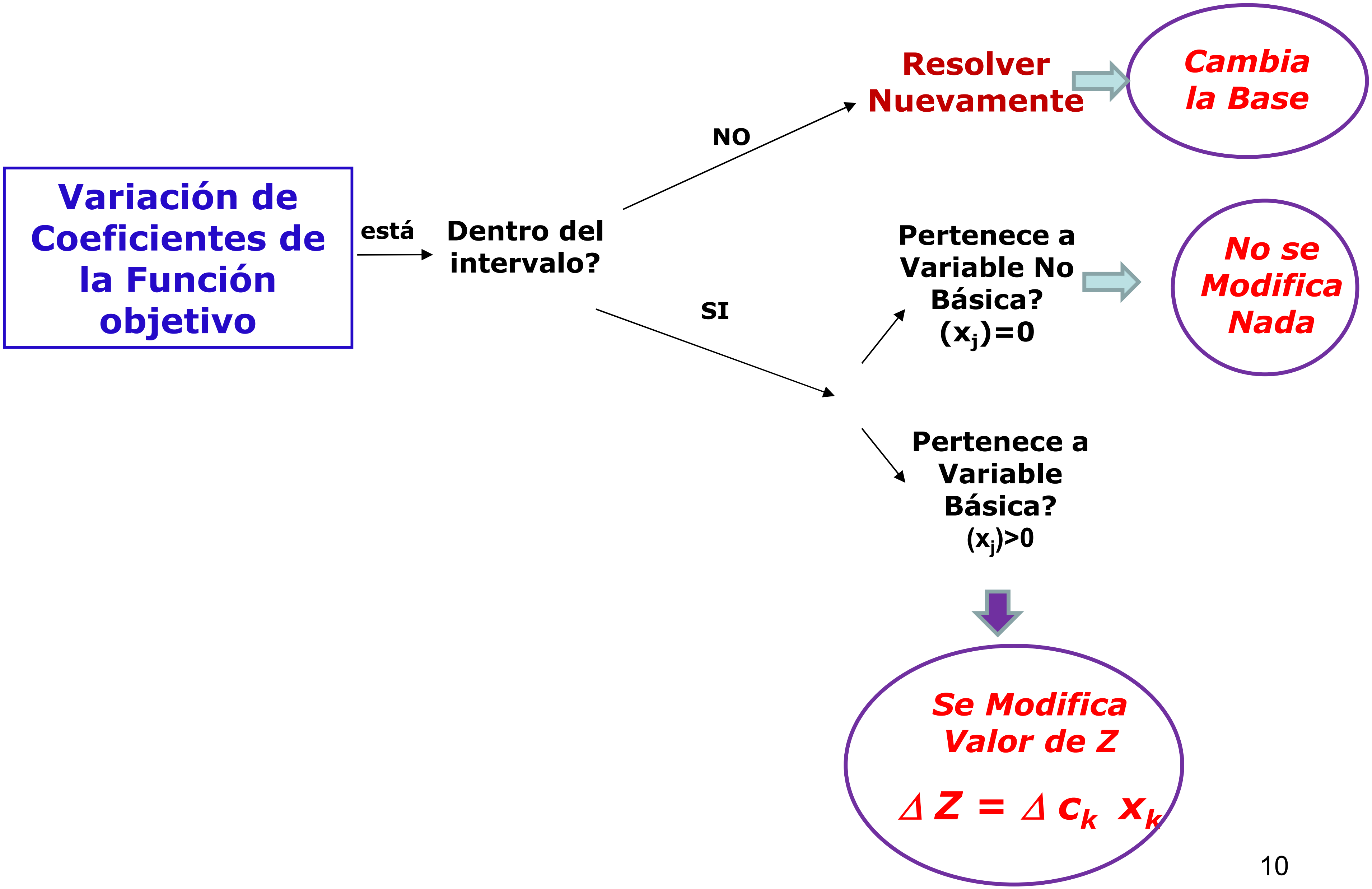
Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$B$2	X1	0	300	Continuar
$C$2	X2	0	0	Continuar
$D$2	X3	0	150	Continuar

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$B$2	X1	300	0	40	5	5
$C$2	X2	0	-5	50	5	1E+30
$D$2	X3	150	0	30	1E+30	3,333333333

Resumen de cambios en los coeficientes



Cambio lado derecho de las restricciones

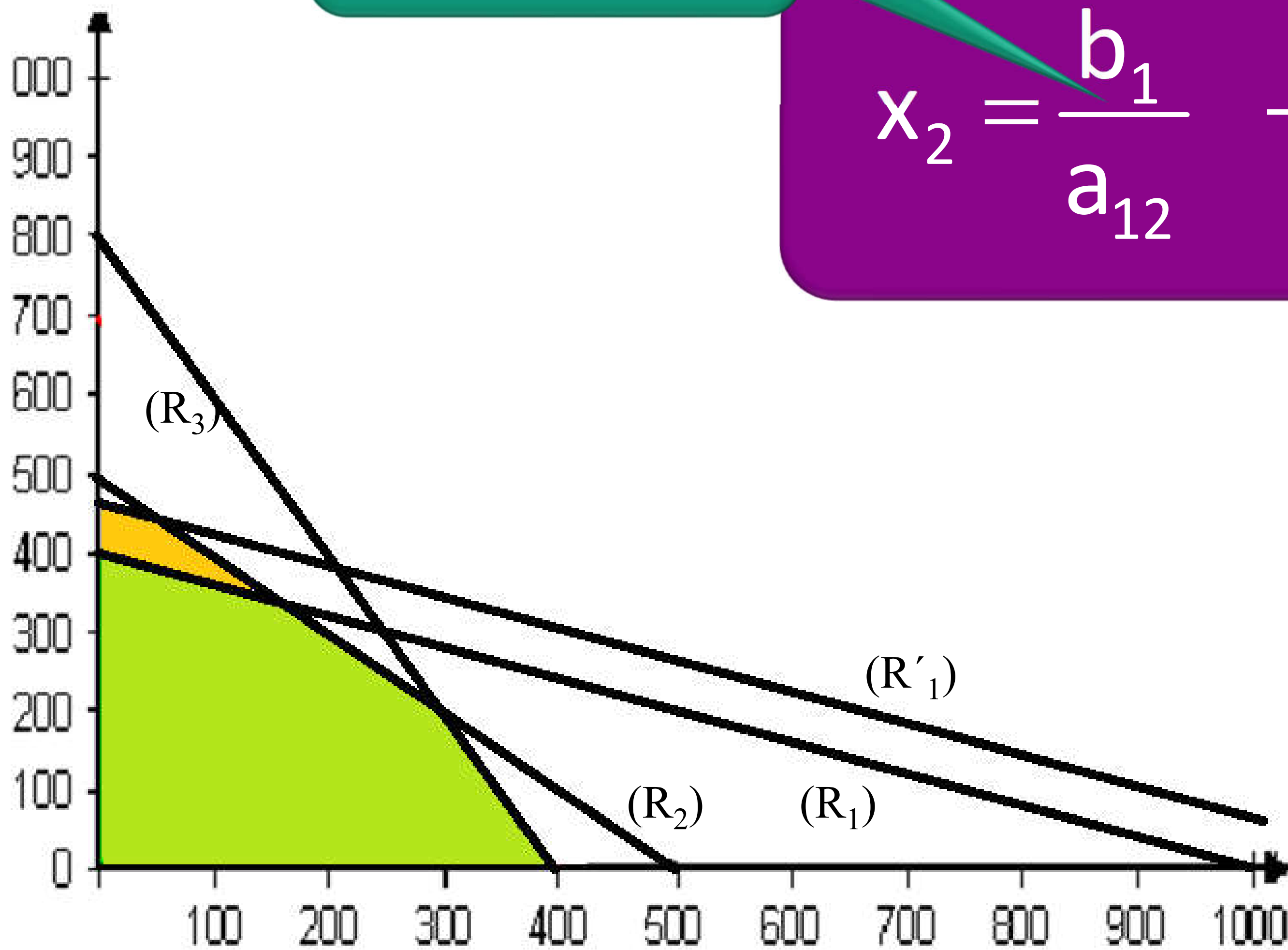
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1$$

Cambio lado derecho de las restricciones

Ordenada al Origen

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1$$



Calculo de los intervalos

Si la restricción es No Limitante del tipo ≤ → $[\Delta bi^{-}, \infty]$

Si la restricción es No Limitante del tipo ≥ → $[-\infty, \Delta bi^{+}]$

Si la restricción es Limitante del tipo

$$[\Delta bi^{-} \leq \Delta Cj \leq \Delta bi^{+}]$$

$$\Delta Z = \Delta b_i \, y_i$$

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Cómo afecta a la FO un incremento en las horas de sección 2 de 200 hs?

Como la variación esta dentro del intervalo $-350 \leq \Delta b_2 \leq \infty$ → no se produce ningún cambio

Ej.: ¿Qué sucede si hay una disminución de las horas de la sección 1 en 100 unidades?

La variación esta dentro del intervalo será → $-300 \leq \Delta b_1 \leq 300$
Se se producen cambios en las variables, no cambia la base. Cambia el valor de Z de la siguiente manera:
El valor actual de $b_1 = 1.200$ → $b_1 = 1.100$
$\Delta Z = \Delta b_1 \, y_1$; en nuestro ejemplo: $\Delta Z = -100\ (15) = 1.500$
Lo que lleva al nuevo Z = 16.500 - 1.500 = 15.000

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Qué sucede si hay una disminución de las horas de la sección 1 en 100 unidades?

X^*= Los valores de las variables cambian

$Z^* = 16.500 - 100*15 = 15.000$

Nota: cualquier cambio fuera del intervalo, se debe resolver nuevamente.

Resultados del Solver de Excel

Informe de resultados

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$E$5	Horas de sección 1	1100	$E$5<=$F$5	Vinculante	0
$E$6	Horas de sección 2	400	$E$6<=$F$6	No vinculante	400
$E$7	Demanda mínima	300	$E$7>=$F$7	Vinculante	0

Informe de sensibilidad

		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
$E$5	Horas de sección 1	1200	15	1200	700	300
$E$6	Horas de sección 2	450	0	800	1E+30	350
$E$7	Demanda mínima	300	-5	300	100	300

Solución gráfica

Variación de Valores del Lado Derecho está → **Dentro del intervalo?**

NO → **Resolver Nuevamente** → ***Cambia la Base***

SI →

- **Restricción No Limitante? ($S_i>0$)** → ***Se Modifica el Valor de la Holgura***
- **Restricción Limitante? ($S_i=0$)** →

Se Modifican valores de variables básicas y valor de Z

$$\Delta Z = \Delta b_i Y_i$$

$$x_i = \lambda_i + \Delta b_i \lambda_{ij} (\leq; =)$$

$$x_i = \lambda_i - \Delta b_i \lambda_{ij} (\geq)$$

No se modifica la Base

λ_i → valores de las variables en la solución

λ_{ij} → tasas de sustitución de la variable de holgura/excedente correspondiente al b_i

Regla del 100%

La validez de los cambios informados por el análisis de sensibilidad son *ceteris paribus*.

No obstante, existe una regla práctica, conocida como regla del 100%, la cual sostiene que *"para considerar cambios simultáneos se deben sumar los porcentajes de cambio tanto de los incrementos como de las disminuciones permisibles;* ***si la suma de los cambios porcentuales no excede el 100%, la base óptima no se modificará****".*

Esto es válido tanto para cambios en el vector de términos independientes de las restricciones como en los coeficientes que preceden a las variables en la FO.

Programación Lineal Entera

Supuestos de la PL

1. Única Función Objetivo
2. Sujeta a Restricciones
3. Aditividad
4. Proporcionalidad
5. Divisibilidad
6. Certidumbre

Formulación general

$$\text{Max. } (Z) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \dots + c_n x_n$$

S. A:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

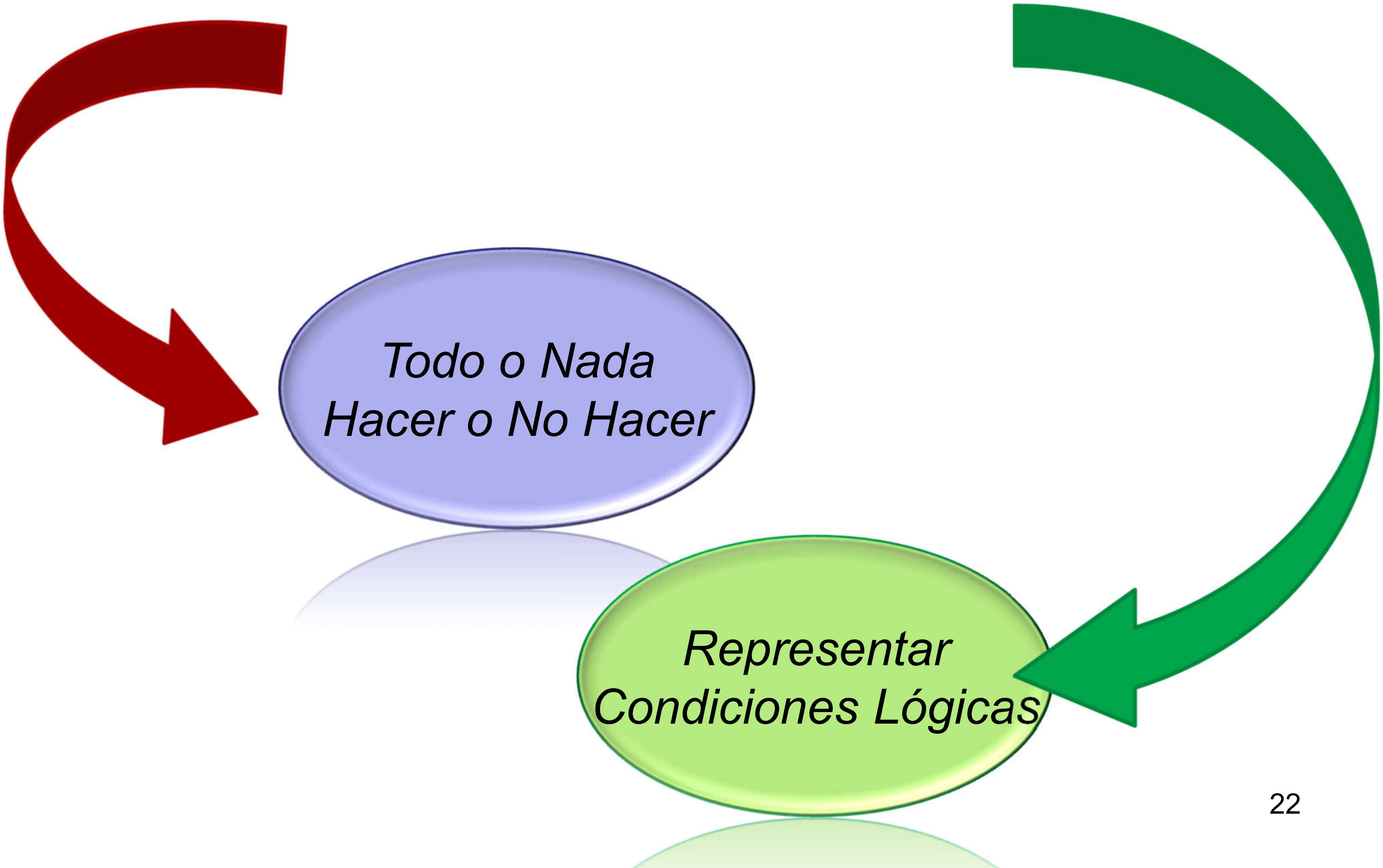
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$x_j \geq 0$ y enteras

Utilización de variables binarias



Restricciones lógicas

Restricciones de elección múltiple

Elegir un proyecto u otro $\Rightarrow$ $x_n + x_m = 1$

Elegir por lo menos un proyecto $\Rightarrow$ $x_n + x_m \geq 1$

No más de *k* de entre *n* proyectos $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n \leq k$

Decisiones dependientes (condicionales)

No se desea elegir la opción *k* a menos que se elija primero la opción *m*

$$\Downarrow$$

$$x_k \leq x_m \quad \text{ó} \quad x_k - x_m \leq 0$$

Si se elige una, se debe elegir la otra $\Rightarrow$ $x_k - x_m = 0$

Si elige la opción *m*, no podrá elegir la *k* y viceversa $\Rightarrow$ $x_k + x_m \leq 1$

Restricciones de tamaño de lote

$20 \leq x_j \leq 100$ $\Rightarrow$ no funciona porque esta restricción dice que debe ser por lo menos 20 y nosotros queremos que $x_j = 0$ ó bien, $20 \leq x_j \leq 100$.

Necesitamos usar una variable 0 – 1, por ejemplo y_j para la acción j.

Si **$y_j = 1$** $\Rightarrow$ se realiza el producto j

Si **$y_j = 0$** $\Rightarrow$ no se realiza el producto j

$$x_j \leq 100\, y_j$$

$$x_j \geq 20\, y_j$$

De esta forma, si $y_j = 1 \Rightarrow$ **$20 \leq x_j \leq 100$** y

si $y_j = 0 \Rightarrow$ **$x_j = 0$**

Restricción de costo fijo

Ejemplo

Supongamos una empresa que fabrica dos tipos de productos: A y B.

Para fabricarlos tiene que disponer de una maquinaria especial, la que debe alquilar con las siguientes tarifas:

Maquinaria para el producto A a $500 por semana.

Maquinaria para el producto B a $550 por semana.

El resto de la información respecto a insumos necesarios por unidad y contribución unitaria se proporcionan en la siguiente tabla:

	Hs. Mano de Obra	***Insumos***	***Contribución a las utilidades***
Producto A	**5**	**7**	**10**
Producto B	**3**	**2**	**8**
Disponibilidad semanal	**250**	**300**	

Restricción de costo fijo

1). Objetivo: maximizar el beneficio total.

2). Variables:

x_A = unidades del producto A a producir semanalmente.

x_B = unidades del producto B a producir semanalmente.

y_A = 1 ó 0, si es que el producto A se produce o no se produce.

y_B = 1 ó 0, si es que el producto B se produce o no se produce.

3). Restricciones

I) Disponibilidad de Hs de MO.

II) disponibilidad de Insumos

4) Condición de no negatividad, enteras

Restricción de costo fijo

$\text{Max. } (Z) = 10\, X_A + 8\, X_B - 500\, Y_A - 550\, Y_B$

sa

$$5\, x_A + 3\, x_B \leq 250 \qquad \text{Hs. MO}$$

$$7\, x_A + 2\, x_B \leq 300 \qquad \text{Insumos}$$

$$X_A \leq M\, Y_A$$

$$X_B \leq N\, Y_B$$

$$X_A\, ,\, X_B \geq 0 \text{ y enteras}$$

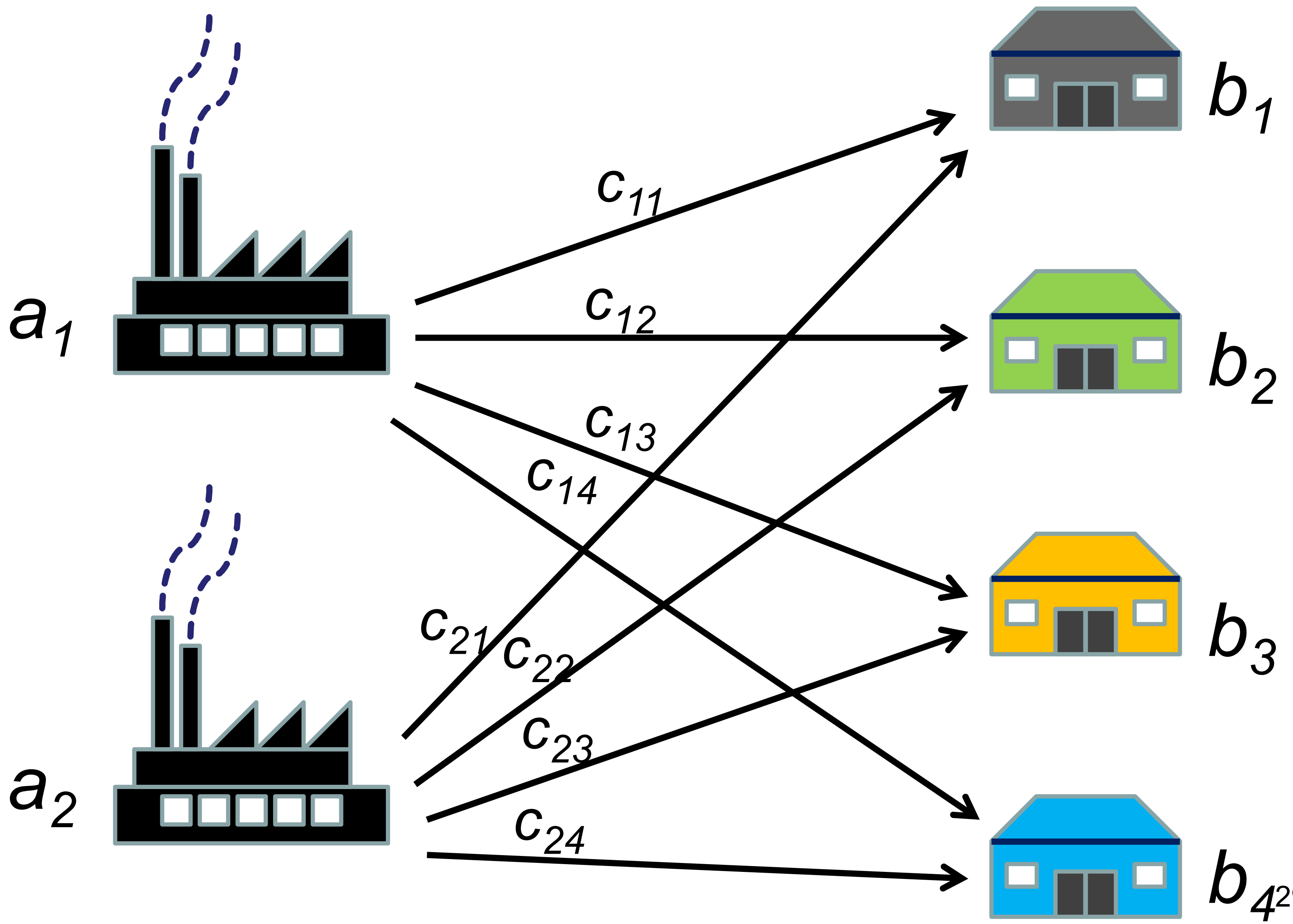
$$Y_A\, ,\, Y_B = \text{binarias}$$

M se puede reemplazar por la producción máxima posible de A, en este caso, M = 42 unidades.

De la misma manera se procede para N que para este caso es N = 83 unidades.

Transporte y Asignación

El problema de transporte



Regla del 100%

1. *m Orígenes con oferta conocida*
2. *n Destinos con demanda conocida*
3. a_i ➔ *oferta del* O_i
4. b_j ➔ *demanda del* D_j
5. *Total de Oferta = Total de Demanda*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Planteo del modelo

Objetivo*: encontrar el esquema de transporte de mínimo costo*

Variables (x_{ij})*: unidades a transportar del O_i al D_j*

Restricciones*:*

- *Cada origen transporta todo lo que tiene*
- *Cada destino recibe todo lo que demanda*

El modelo

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{ij}$$

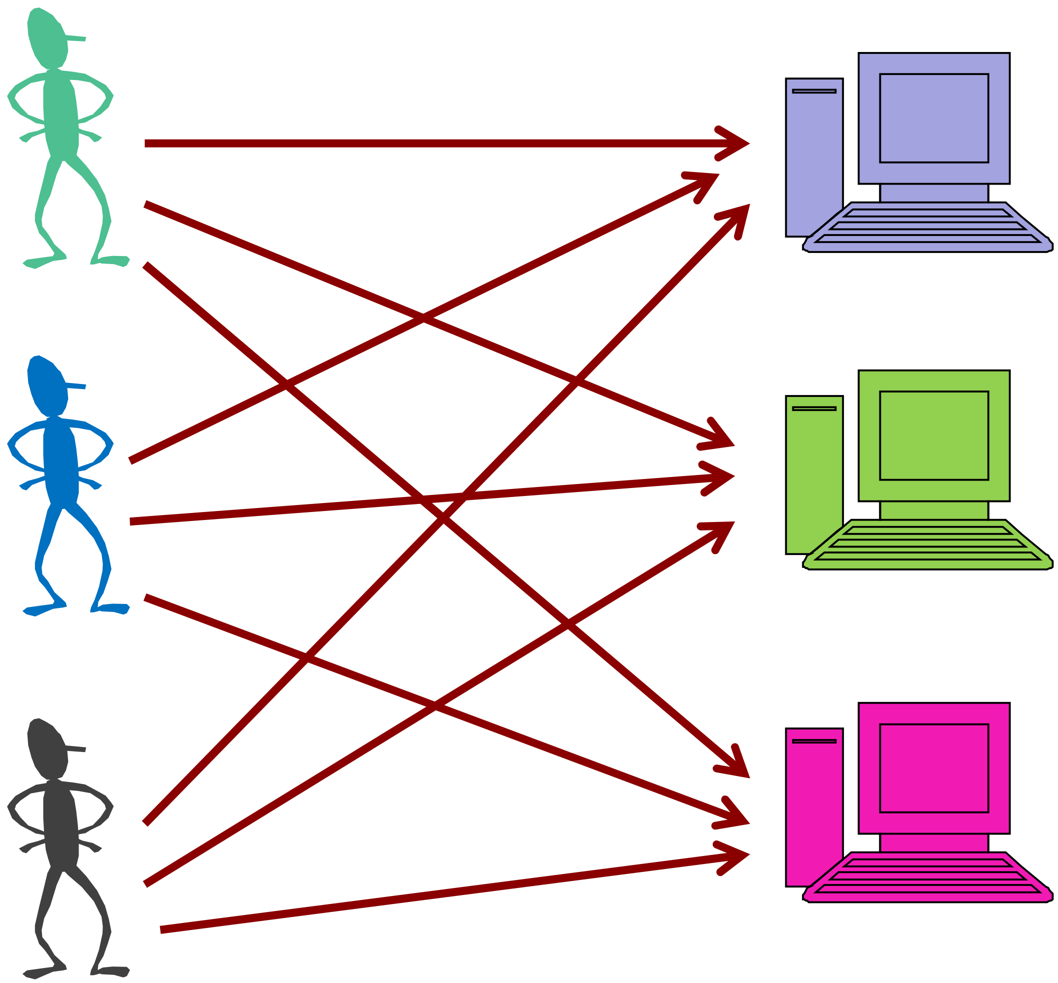
sa

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,h$$

$$\sum_{i=1}^{h} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\ldots,k$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ y enteras } \quad \forall i, \forall j$$

Problema de asignación



Planteo del problema

***Objetivo**: asignar los individuos a los puestos de trabajo al mínimo costo total*

***Variables (x_{ij})**: el individuo **i** se asigna o no al puesto **j** ➔ variables binarias*

***Restricciones**:*

- *Cada individuo se asigna a un puesto de trabajo*
- *Cada puesto recibe un solo individuo*

El modelo

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

sa

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots,m$$

$$x_{ij} \ \text{binaria} \quad \forall i, \forall j$$

Ejemplo de aplicación

Una empresa debe distribuir cuatro promotores, de su nueva línea de máquinas para riego automático, a cuatro regiones del país. En la tabla se muestran los incrementos estimados en ventas, en cada región, de acuerdo al promotor que asigne.

	Regiones			
Promotor	**1**	**2**	**3**	**4**
A	20	22	22	15
B	25	15	16	20
C	18	20	18	20
D	21	15	20	24

Ejemplo de aplicación

Max (Z)= $20\ A1 + 22\ A2 + 22\ A3 + \ldots + 15\ D2 + 20\ D3 + 24\ D4$

Sa

$A1 + A2 + A3 + A4 = 1$

$B1 + B2 + B3 + B4 = 1$

$C1 + C2 + C3 + C4 = 1$

$D1 + D2 + D3 + D4 = 1$

$A1 + B1 + C1 + D1 = 1$

$A2 + B2 + C2 + D2 = 1$

$A3 + B3 + C3 + D3 = 1$

$A4 + B4 + C4 + D4 = 1$

$Xij = 0 - 1$