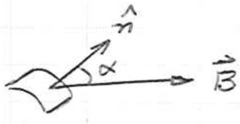
GUIA 12: Flujo Magnético y Ley de Faraday

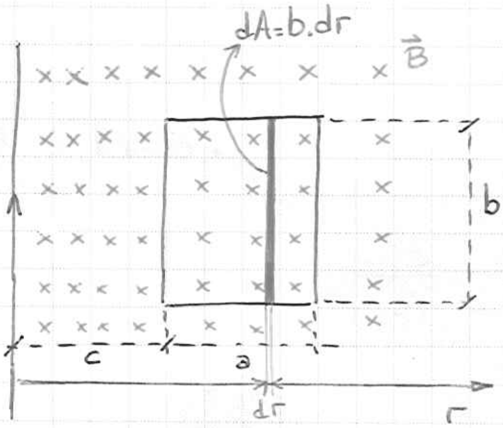
1) Flujo Magnético



$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{dA} = \int B \, dA \cos\alpha$$

a) B uniforme: $\phi_B = B . A \cos\alpha$ $[Tm^2] = [Wb]$

b) B no uniforme:



$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

$$\phi_B = \int B . dA . \underbrace{\cos 0°}_{1}$$

$$= \int_c^{c+a} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} . b . dr$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} (\ln r) \Big|_c^{c+a}$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

2) Ley de Faraday - Lentz

$$\mathcal{E}_i = - N \frac{d\phi_B}{dt}$$

derivada temporal del flujo magnético

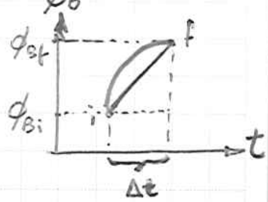
fem inducida

nro de espiras

- El signo menos indica que la polaridad de $\mathcal{E}_i$ es tal que se opone al cambio de ϕ_B que la genera.

$$\overline{\mathcal{E}_i} = - N \frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = - N \frac{\phi_{Bf} - \phi_{Bi}}{\Delta t}$$

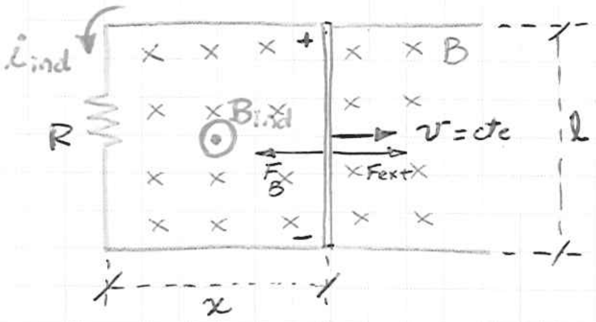
fem inducida promedio



a) Caso 1: Área Variable

$$\phi_B = \underbrace{B}_{cte} \cdot \overset{\substack{variable\\ \uparrow}}{A} \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{cte}$$

i) Conductor en movimiento:



B uniforme y estacionario

Si $v = cte \Rightarrow x(t) = v \cdot t$

$A(t) = x \cdot \ell = v \cdot \ell\, t$

$\phi_B(t) = B \cdot A \cdot \overbrace{\cos 0°}^{1}$

$= B\, v\, \ell \cdot t$

$$\varepsilon_{ind} = -\underbrace{N}_{1} \cdot \frac{d(Bv\ell t)}{dt} = -Bv\ell$$

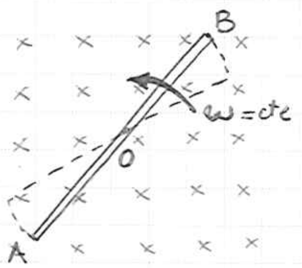
$\hookrightarrow |\varepsilon_{ind}| = Bv\ell$ (cte)

$$\text{Si } R = cte \Rightarrow I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{Bv\ell}{R} \quad (cte)$$

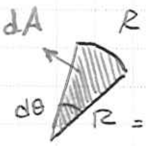
$$F_B = F_{ext} = I_{ind} \cdot \ell\, B = \frac{B^2 v \ell^2}{R} \quad (cte)$$

$$\begin{cases} Pot_{mecánica} = F_{ext} \cdot v \\ Pot_{eléctrica} = I_{ind}^2 \cdot R \end{cases} \Rightarrow \text{Verificar } Pot_{mec} = Pot_{elect}$$

ii) Conductor rotante:



$\ell = 2R$



$R\, d\theta = \frac{\ell}{2} d\theta$

$$dA = \frac{1}{2}\frac{\ell}{2}\frac{\ell}{2} d\theta$$

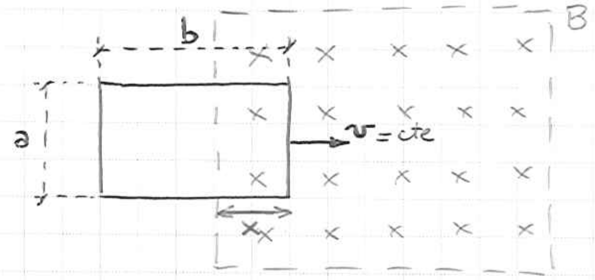
$$dA = \frac{\ell^2}{8} d\theta$$

$$|\varepsilon_i| = \overset{1}{N} \cdot \left|\frac{d\phi_B}{dt}\right| = \frac{B\, dA\, \overbrace{\cos 0°}^{1}}{dt}$$

$$= B\, \frac{\ell^2}{8} \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}$$

$$|\varepsilon_i| = \frac{B \ell^2 \omega}{8}$$

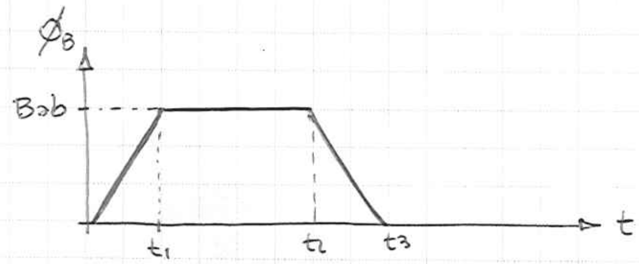
iii) Espira en movimiento:

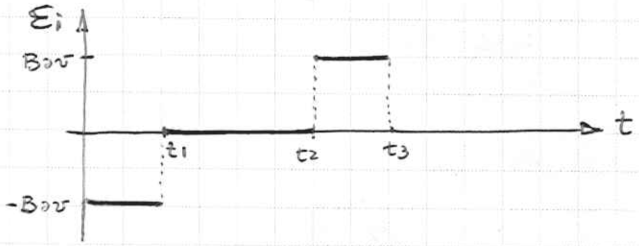


$$\phi_B = B\,a\,x = B\,a\,v\,t$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_B}{dt} = -B\,a\,v$$

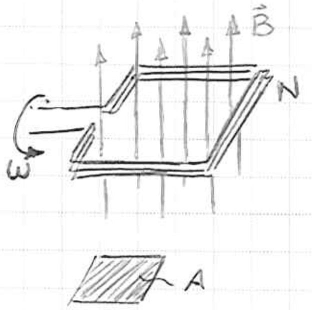
$$\phi_{B\,max} = B\,a\,b$$

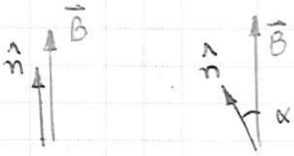




b) Ángulo Variable

$$\phi_B = \underbrace{B}_{cte}\,.\,\underbrace{A}_{cte}\,.\,\overset{\text{variable}}{\cos\alpha}$$





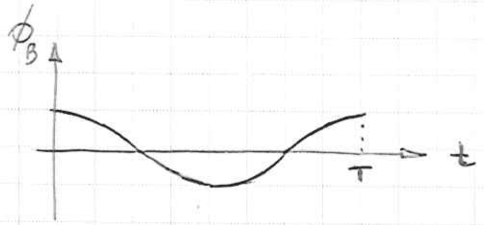
$$\alpha = \omega t$$

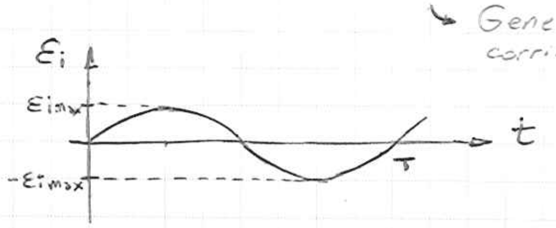
$$\phi_B(t) = B\,.\,A\cos(\omega t)$$

$$\varepsilon_i(t) = -N\frac{d\phi_B}{dt} = -N\,B\,A[-\omega\,sen(\omega t)]$$

$$\varepsilon_i(t) = \overbrace{NBA\omega}^{\varepsilon_{i\,max}}\,sen(\omega t)$$

Generador de corriente alterna



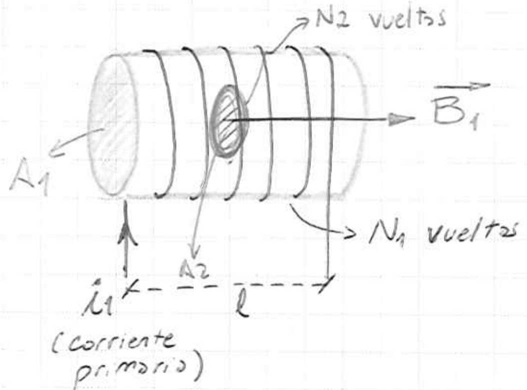


$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

c) Campo Magnético Variable

$$\phi_B = \underset{\text{variable}}{B} \cdot \underset{cte}{A} \; \underset{cte}{\cos\alpha}$$

a) Ejemplo con solenoide



$$B_1(t) = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1(t) \quad \left(\frac{N_1}{\ell} \to n_1\right)$$

$$\phi_{B_{12}} = \underset{\text{uniforme}}{B_1} \cdot \underset{A_1 \text{ ó } A_2 \text{ (la menor)}}{A} \cdot \overbrace{\cos 0°}^{1}$$

$$\phi_{B_{12}}(t) = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} A \cdot i_1(t)$$

$$\mathcal{E}i_2(t) = -N_2 \cdot \frac{d\phi_{B_{12}}}{dt}$$

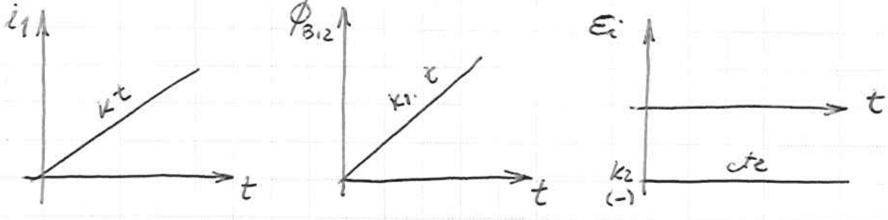
$$i_{ind_2}(t) = \frac{\mathcal{E}i_2(t)}{R_2}$$

$R_2 \longrightarrow$ resistencia del bobinado 2.

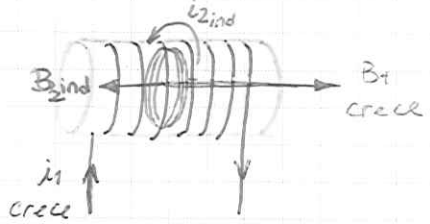
i) $i_1(t) = cte \Rightarrow \phi_{B_{12}}(t) = cte \Rightarrow \mathcal{E}i_2 = 0$

ii) $i_1(t) = k \cdot t \Rightarrow \phi_{B_{12}}(t) = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1}{\ell} A \cdot k}_{cte = k_1} \cdot t$

$$\mathcal{E}i_2(t) = -N_2 \cdot \left(\frac{\mu_0 N_1 A \cdot K}{\ell}\right) \quad (cte)$$



Interpretación del signo (–) de la $\mathcal{E}i$:



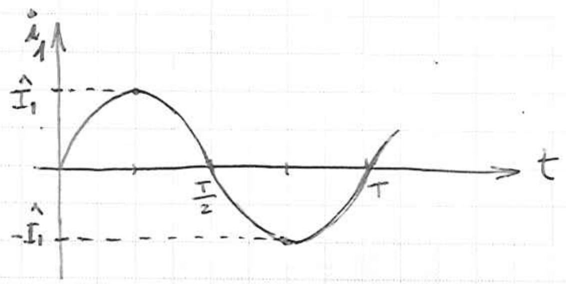
$\Rightarrow$ i_{2ind} tendrá sentido contrario a i_1, generando un B_{ind} contrario a B_1.

iii) $i_1(t) = \hat{I}_1 \cdot sen(\omega t)$

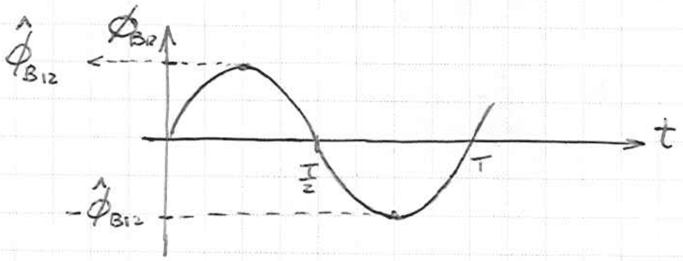
$\omega = 2\pi f$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$
f [Hz]

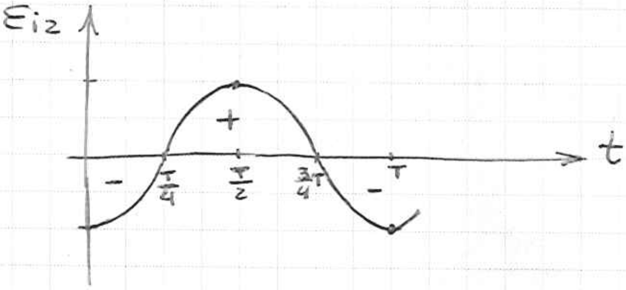
$\phi_{B_{12}}(t) = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1}{\ell} \cdot A \cdot \hat{I}_1}_{\hat{\phi}_B} \cdot sen(\omega t)$

$\varepsilon_{i2}(t) = \underbrace{-N_2 \cdot \mu_0 \frac{N_1}{\ell} A \cdot \hat{I}_1 \cdot \omega}_{\hat{\varepsilon}_2} \cos \omega t$



$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ [s]





$\varepsilon_{i2} < 0$ p/ t / $\begin{cases} 0 < t < \frac{T}{4} \\ \frac{3}{4}T < t < T \end{cases}$

$\Downarrow$

i_{2ind} en sentido contrario a i_1.

$\varepsilon_{i2} > 0$ p/ t $\left\{ \frac{T}{4} < t < \frac{3}{4}T \right.$

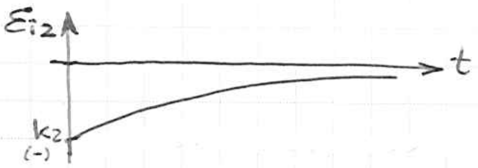
$\Downarrow$

i_{2ind} en igual sentido de i_1.

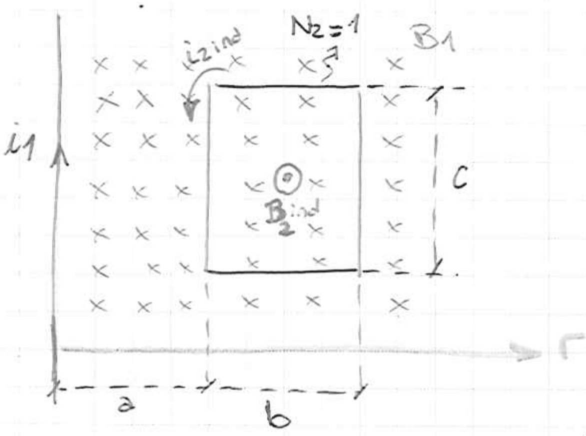
iv) $i_1(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$; I_0 y τ ctes conocidas

$\phi_{B_{12}}(t) = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} A \cdot I_0 \, (1 - e^{-t/\tau})$

$\varepsilon_{i2}(t) = -N_2 \cdot \mu_0 \frac{N_1}{\ell} A \cdot I_0 \, \frac{1}{\tau} \, e^{-t/\tau}$



b) Ejemplo con conductor largo



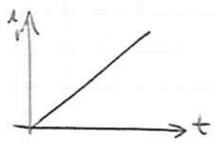
No uniforme

$$B_1(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r}$$

$$\phi_{B_{12}} = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{r} c\,dr$$

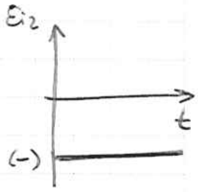
$$\phi_{B_{12}} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 . c \ \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

$$i_1(t) = k.t$$

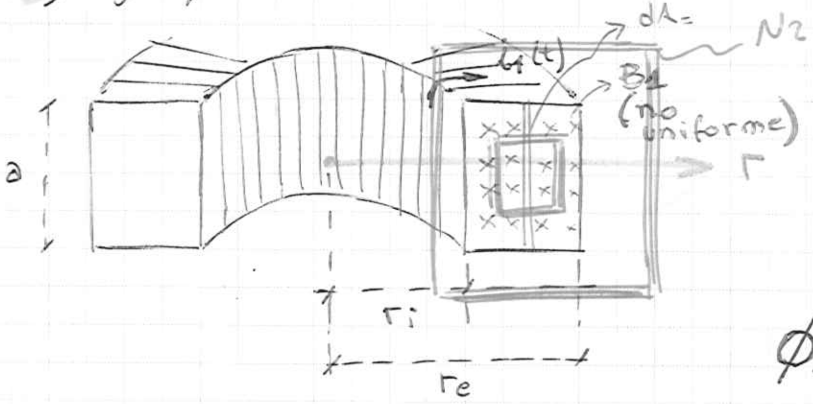


$$\phi_{B_{12}}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} c \ \ln\left(\frac{a+b}{a}\right). k. t$$

$$\varepsilon_{i2}(t) = -N_2 . \frac{\mu_0}{2\pi}. c . \ln\left(\frac{a+b}{a}\right). k \qquad (cte)$$



c) Ejemplo con toroide



$$B_1(r) = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\phi_{B_{12}} = \int_{r_i}^{r_e} \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi r} . a . dr$$

$$\phi_{B_{12}} = \frac{\mu_0 N_1 i_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

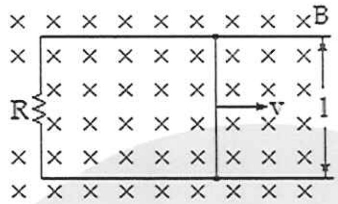
$$i_1(t) = I_0 \, e^{-t/\tau} \Rightarrow \phi_{B_{12}} = \frac{\mu_0 N_1 a}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right). I_0 \, e^{-t/\tau}$$

$$\varepsilon_{i2}(t) = -N_2 . \frac{\mu_0 N_1 a I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)\left(-\frac{1}{\tau}\right). e^{-t/\tau}$$

GUIA 12 – LEY DE FARADAY-LENTZ

12.1 Fem inducida por variación del área

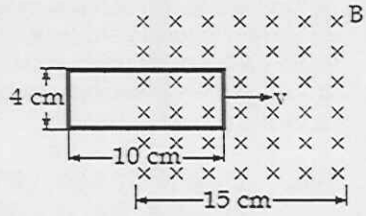
1) Sobre un armazón en forma de U como muestra la figura desliza un conductor recto de longitud l = 10 cm a una velocidad constante de 5 m/s. El armazón y el conductor tienen una resistencia total de 20 Ω que no varía conforme el conductor se mueve. Todo el conjunto se encuentra inmerso en una región de campo magnético uniforme y estacionario de 0,20 T entrante. Se pide calcular:



a) la fem inducida a bornes del conductor móvil;
b) la corriente inducida por la espira, indicando el sentido de la misma;
c) la fuerza externa necesaria para mover el conductor a velocidad cte.;
d) la potencia desarrollada por la fuerza externa;
e) la potencia disipada en la espira en forma de calor. Verifique que sea igual a la calculada en d.

Rta: a) 0,1 V b) 5 mA antihoraria c) 1.10^{-4} N d) 5.10^{-4} W e) 5.10^{-4} W

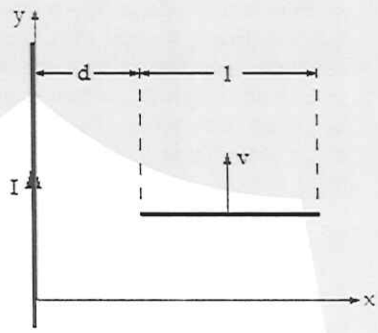
2) Una espira rectangular, cuyas dimensiones se indican en la figura que está siendo introducida a velocidad constante v = 1 m/s a través de una región de espesor d = 15 cm en la cual hay un campo uniforme de inducción B = 0,2 T. Graficar: a) el flujo magnético a través de la espira en función de la posición x; b) la fem inducida en la espira en función de x.



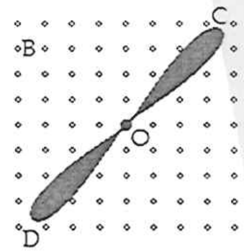
3) Una barra conductora de longitud l se mueve con velocidad v a lo largo de una dirección paralela a un alambre largo que lleva una corriente constante I. La barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo más cercano a una distancia d del alambre. Demuestre que la fem inducida sobre la barra es igual a:

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0 . I}{2\pi} . v . \ln\left(1 + \frac{l}{d}\right)$$

Ayuda: Utilice un sistema de referencia xy como el indicado en la figura y tenga que en cuenta que el campo magnético generado por el alambre es función de x, por lo tanto no es uniforme.



4) Un ventilador, cuyas paletas tienen una longitud de 25 cm, gira con una velocidad constante de 500 rpm. Paralelo al eje de rotación se encuentra un campo magnético de 0,2 T en sentido saliente, tal como muestra la figura. Calcule: a) la fem inducida entre el centro del ventilador y el extremo de las paletas, b) la fem inducida de extremo a extremo.



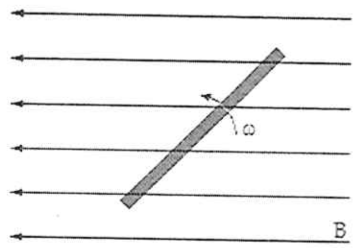
Rta: a) $\varepsilon_{i(OC)}$ = b) $\varepsilon_{i(CD)} = 0$ V

12.2 Fem inducida por variación del ángulo

5) Un espira circular de radio R=20 cm rota en una región de campo magnético uniforme y estacionario de 50 μT a una velocidad angular constante de 4000 rpm. Exprese la fem inducida sobre la espira como una función del tiempo y grafíquela.

Rta: ε_i = 2,63 mV. sen (419 t)

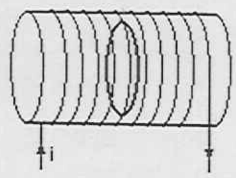
6) Una bobina plana en forma de cuadrado de 10 cm de lado tiene 10 espiras muy juntas. La bobina gira alrededor de un eje perpendicular a la hoja y que pasa por unos de sus extremos en una región de campo magnético uniforme de 0,02 T tal como indica la figura. Calcular con qué velocidad angular deberá girar la bobina para que la amplitud de la fem inducida sobre ella sea de 20 mV.



Rta: $\omega = 10$ rad/s

12.3 Fem inducida por variación del campo magnético

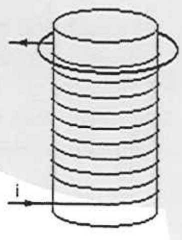
7) Por un solenoide de 100 vueltas por metro circula una corriente alternada en el sentido indicado en la figura, cuya expresión temporal es $i(t)=I_{max}.sen(2\pi f.t + \phi)$ donde I_{max}=5A, f = 50 Hz y ϕ=0. En su región central y compartiendo el eje de simetría se encuentra ubicada una espira (llamémosla secundaria) de 20 vueltas, 8 cm de radio y una resistencia total de 10 Ω. El radio del solenoide es de 12 cm. Considerando que el campo magnético generado por el solenoide es aproximadamente uniforme en la región central, obtenga:



a) Una expresión del flujo magnético a través de la espira secundaria en función de t;
b) La fem inducida sobre la misma en función de t;
c) La corriente inducida en la espira en función de t;
d) Los valores instantáneos de las magnitudes anteriores al cabo de 2 seg; indicando el sentido de la corriente inducida en ese momento.

Rta: a) $\phi_B(t) = 12{,}6 \text{ sen } (100\pi\, t)\ \mu Wb$ b) $\varepsilon_i(t) = -79{,}1 \cos (100\pi\, t)$ mV
c) $i_{ind}(t) = -7{,}91 \cos (100\pi\, t)$ mA d) -0 μWb, -79,1 mV, -7,91 mA

8) El solenoide de la figura tiene un radio de 10 cm, una longitud de 20 cm y un total de 50 vueltas. Por el mismo circula una corriente que aumenta a razón de 20 A por segundo. El radio de la espira en su extremo es de 15 cm y su resistencia de 20 Ω. Encuentre:
a) El flujo magnético a través de la espira en función del tiempo;
b) La fem inducida en la espira;
c) La corriente inducida en la espira;
d) El campo magnético generado por la corriente inducida.



Rta: a) $\phi_B(t) = 9{,}86\text{x}10^{-5}\,t$ Wb b) $\varepsilon_i = 9{,}86\text{x}10^{-5}$ V (cte)
c) $i_{ind} = 4{,}93\ \mu A$ en sentido opuesto a la del solenoide d) $B_{ind} = 2{,}07\ \text{x}10^{-11}$ T hacia abajo

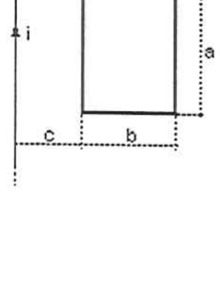
9) Una bobina rectangular de 5 cm x 10 cm de 50 vueltas se deja caer desde una posición donde no hay campo magnético hasta una nueva posición donde el campo magnético es de 0,5 T dirigido en dirección perpendicular al plano de la bobina. Calcule la fem inducida promedio en la bobina si el desplazamiento ocurre en 0,25 seg.

Rta: $\overline{\varepsilon_i} = 10\ mV$

10) Una bobina rectangular de 5 cm x 9 cm se encuentra en una región de campo magnético uniforme B perpendicular al plano de la bobina. Si la bobina tiene 75 espiras y una resistencia total de 8 Ω, ¿con qué rapidez debe cambiar el campo magnético si la corriente inducida en la bobina debe ser de 0,1 A?

Rta: $\frac{dB}{dt} = 2{,}37\ \frac{T}{s}$

11) Por el conductor infinitamente largo mostrado en la figura circula una corriente dada por: $i(t) = I_0.\ (1 - e^{-t/\tau})$ con I_0=100A y τ=5 seg. Si a = 50 cm, b = 20 cm y c = 10 cm, encuentre:
a) El flujo magnético a través de la espira rectangular en función de t (tenga en cuenta que el campo magnético generado por el conductor largo no es uniforme);
b) La fem inducida en la espira en función de t;



Rta: a) $11{,}0\ (1-e^{-t/5})\ \mu Wb$ b) $2{,}20\ e^{-t/5}\ \mu V$