

## 2.2. Características en el tiempo del sistema lineal

SLC

- Supuesto: El sistema va a operar para ángulos pequeños ( $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$ )
- Valores iniciales: escalón  $\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0,01 \text{ Nm}, & t \geq 0 \end{cases} = 0,01 \cdot u(t)$
- Buscar:
- a)  $\zeta$ : factor de amortiguación
  - b)  $\omega_n$ : frecuencia natural
  - c)  $t_r$ : tiempo de subida
  - d)  $M_p$ : Porcentaje de Sobre-oscilación
  - e)  $t_s$ : tiempo de establecimiento
  - f)  $\theta_p$ : valor en régimen permanente

• Asumiendo oscilaciones pequeñas:  $\sin \theta \approx \theta$ , el modelo diferencial queda del siguiente modo:

$$I \cdot \ddot{\theta}(t) + b \cdot \dot{\theta}(t) + mgl \cdot \theta(t) = \tau(t)$$

a) Definición de sistema oscilador amortiguado simple

$$\ddot{\theta} + 2\zeta \omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = A \omega_n^2 u(t)$$

$$\rightarrow I \cdot \ddot{\theta}(t) + b \cdot \dot{\theta}(t) + mgl \cdot \theta(t) = \tau(t) \quad | : I$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{b}{I} \cdot \dot{\theta}(t) + \frac{mgl}{I} \cdot \theta(t) = \tau(t)/I$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{mgl}{I} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1 \text{ m}}{10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} = 9,90454 = \omega_n \\ 2\zeta \omega_n = \frac{b}{I} \rightarrow \zeta = \frac{b}{2\omega_n I} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad/s}}{2 \cdot 9,9045 \frac{1}{\text{s}} \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 0,100964 = \zeta \end{cases}$$

$$\rightarrow A \cdot \omega_n^2 u(t) = \frac{\tau(t)}{I} = \frac{0,01 \text{ Nm}}{10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \cdot u(t) \quad \parallel u(t) = \text{escalón}$$

$$A \cdot \omega_n^2 = 10$$

$$A = 10/\omega_n^2$$

$$A = 10/9,90454^2 = 0,101937$$

→ EDO:  $\ddot{\theta}(t) + 2 \cdot \dot{\theta}(t) + 98,1 \cdot \theta(t) = 10 \cdot u(t)$

PROARTE

c) tiempo de subida:

$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n \cdot (1 - 0,74 \zeta)} = \boxed{0,1094} = t_r$$

d) Porcentaje de sobre-oscilación

$$M_p = e^{\frac{-\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} = e^{-0,3188} = 0,727 = \boxed{72,7\%} = M_p$$

e) Tiempo de establecimiento:

$$t_s = \frac{4,6}{\omega_n \cdot \zeta} = \boxed{4,6 \text{ s}}$$

f) Valor en régimen permanente:

$$\theta_p = \theta(t \rightarrow \infty) \rightarrow \ddot{\theta}(t \rightarrow \infty) = \dot{\theta}(t \rightarrow \infty) = 0$$

$$\text{edo: } \ddot{\theta}(t) + 2 \cdot \dot{\theta}(t) + 98,1 \cdot \theta(t) = 10 \cdot u(t) \quad / \quad \lim_{t \rightarrow \infty}$$

$$0 + 0 + 98,1 \cdot \theta_p = 10$$

$$\theta_p = \frac{10}{98,1}$$

$$\theta_p = \boxed{0,101937} = \theta_p \text{ [Rad]}$$