

(20) Una combinación con repetición de orden r de los n elementos de A es una selección no ordenada de r elementos de A que pueden repetirse.

Entonces cada combinación con repetición de orden r de los elementos de A se corresponde con una solución de:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

siendo x_i el número de veces que elegimos el elemento i -ésimo, considerando solo soluciones positivas.

Cada solución x_i de la ecuación se corresponde con una cadena de r 's y $n-1$ barras distribuidas así:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{x_1} | \underbrace{1 \dots 1}_{x_2} | \dots | \underbrace{1 \dots 1}_{x_n}$$

De modo que buscamos el número de r formas de ordenar $n-1$ barras en ~~(para)~~ $r+r-1$ posiciones.

Este número es $\binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}$ y la forma de hacer las combinaciones es:

$$C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r! (n-1)!}$$