

**APRENDIZAJE CONCEPTUAL**

# Índice

---

- Definición
- Aprendizaje conceptual como búsqueda
- Algoritmo FIND-S
- Algoritmo CANDIDATE-ELIMINATION
- Sesgo Inductivo

# Definición

---

- **Aprendizaje Conceptual:**

Inferir un concepto —una función booleana— a partir de un conjunto de entrenamiento.

- **Ejemplo:**

¿Cuándo salva Pedro un examen?

- **Se define concepto objetivo  $c$ :**

$c: X \rightarrow \{0,1\}$  en donde  $X$  es el conjunto de instancias.

- En el ejemplo,  $c(x) = 1$  implica que Pedro salva el examen para la instancia  $x \in X$

# Definición

- Supongamos que contamos con el siguiente conjunto de entrenamiento:

#Ej	x					c(x)
	Dedicación	Dificultad	Horario	Humedad	Humor Doc	
1	Alta	Alta	Nocturno	Media	Bueno	SÍ
2	Baja	Media	Matutino	Alta	Malo	NO
3	Media	Alta	Nocturno	Media	Malo	SÍ
4	Media	Alta	Matutino	Alta	Bueno	NO

- ➡ Alguien ya eligió por mí los atributos para representar las instancias en este problema.

# Definición

---

- Puedo elegir cómo representar al concepto buscado.
- A los posibles candidatos los denominamos *hipótesis*.
- Para fijar ideas utilizaremos un espacio  $H$  con hipótesis de la forma:  
 $h: \langle \text{Dedicación}, \text{Dificultad}, \text{Horario}, \text{Humedad}, \text{HumorDoc} \rangle$ 
  - ▶  $h$  representa una conjunción de restricciones sobre cada atributo
  - ▶ Para cada atributo, se tienen los posibles valores:
    - ⊙ Valor específico: alto, medio,...
    - ⊙ Todo valor es aceptable: ?
    - ⊙ Ningún valor es aceptable:  $\emptyset$

# Definición

---

- La hipótesis “*Pedro salva un examen  $\Leftrightarrow$  estudia mucho*”, se puede representar por:  $h: \langle Alta, ?, ?, ?, ? \rangle$
  - Hipótesis más general, “Pedro salva siempre”:  $\langle ?, ?, ?, ?, ? \rangle$
  - Hipótesis más específica, “Pedro siempre pierde”:  $\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ , pero también  $\langle Alta, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$ ,  $\langle \emptyset, ?, \emptyset, Media, Bueno \rangle$ , ...
- ➔ *Estos ejemplos son válidos para el espacio  $H$  elegido. ¿Qué sucede si  $h$  es una disyunción de restricciones en lugar de una conjunción?*

# Definición

---

- Con el conjunto de entrenamiento dado... ¿ $\langle Alta, ?, ?, ?, ? \rangle$  es una buena hipótesis para ser el concepto objetivo?
- ¿Esta es una buena elección para representar a las hipótesis si el concepto objetivo es *“Pedro salva cuando su dedicación es alta o la dificultad es baja”*?

# Definición

---

- Datos:

- ▶ Dominio de instancias  $X$
- ▶ Función objetivo:

$$c: X \rightarrow \{0, 1\}$$

- ▶ Espacio de hipótesis  $H$ :

$$H = \{h_0, h_1, \dots\}, h_i: X \rightarrow \{0, 1\}$$

- ▶ Conjunto de Entrenamiento  $D$ :

$$D = \{ [x_0, c(x_0)], \dots, [x_n, c(x_n)] \mid x \in X \}$$

- Objetivo:

Determinar una hipótesis  $h \in H$  tal que  $h(x) = c(x)$  para todo  $x \in X$ .



# Definición

---

- En nuestro ejemplo:
  - ▶ X es el conjunto de instancias formadas por los atributos:
    - ⊙ Dedicación: alta, media, baja.
    - ⊙ Dificultad: alta, media, baja.
    - ⊙ Horario: matutino, nocturno.
    - ⊙ Humedad: alta, media, baja.
    - ⊙ HumorDoc: bueno, malo.
  - ▶  $c: X \rightarrow \{0,1\} / c(x)=1 \Leftrightarrow$  Pedro salva bajo las condiciones x.
  - ▶  $H = \{h / h \text{ es la conjunción de restricciones sobre los atributos, tomando un valor específico, cualquier valor o ninguno}\}$
  - ▶ D está dado por la tabla de la transparencia 4.

# Definición

---

- La única información que tenemos de  $c$  son los valores en el conjunto de entrenamiento.
- Nada nos garantiza que el concepto objetivo pertenezca al conjunto  $H$  que elegimos.
- Hipótesis de Aprendizaje Inductivo:

*Toda hipótesis que aproxime correctamente el concepto objetivo en un conjunto de ejemplos lo suficientemente grande también lo hará sobre las instancias aún no observadas.*

# Aprendizaje = Búsqueda

---

- Nuestro problema es encontrar una hipótesis en el espacio elegido
- En nuestro ejemplo, tenemos 2000  $[5*5*4*5*4]$  hipótesis sintácticamente distintas
- ¿Cuántas semánticamente distintas hay?
- Tenemos que desarrollar estrategias para buscar en espacios muy grandes o infinitos.

# Aprendizaje = Búsqueda

---

- Se necesitan estrategias para buscar en el espacio de hipótesis sin tener que listarlas todas.
- Definiciones:

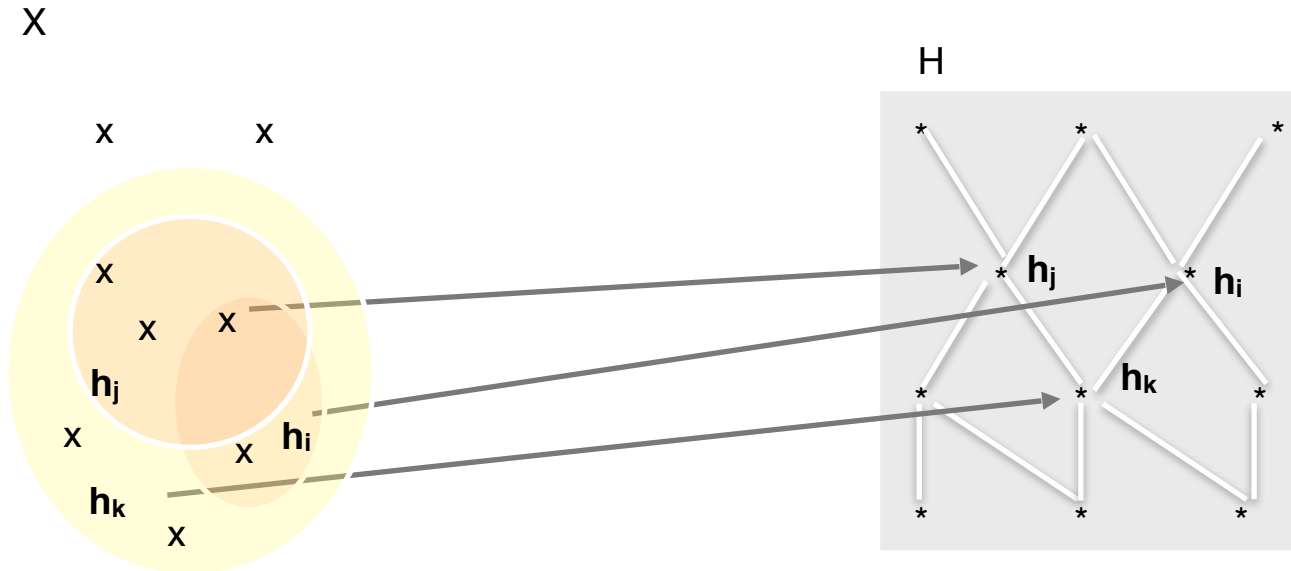
- ▶ Más general o igual: Sean  $h_j$  y  $h_k$  funciones booleanas sobre  $X$

$$h_j \geq h_k \text{ sii } (\forall x \in X) h_k(x)=1 \rightarrow h_j(x)=1$$

- ▶ Análogamente, definimos más específica o igual:

$$h_j \leq h_k \text{ sii } (\forall x \in X) h_j(x)=1 \rightarrow h_k(x)=1 \text{ o } h_k(x)=0 \rightarrow h_j(x)=0$$

# Aprendizaje = Búsqueda



se cumple:  $h_k \geq h_i$   
 $h_k \geq h_j$

pero no se cumple:  $h_j \geq h_i$   
 $h_i \geq h_j$

# Recordamos el ejemplo

---

#Ej	x					c(x)
	Dedicación	Dificultad	Horario	Humedad	Humor Doc	Salva
1	Alta	Alta	Nocturno	Media	Bueno	SÍ
2	Baja	Media	Matutino	Alta	Malo	NO
3	Media	Alta	Nocturno	Media	Malo	SÍ
4	Media	Alta	Matutino	Alta	Bueno	NO

# Find-S

---

- ¿Cómo realizar la búsqueda de  $c$  en  $H$ ?
- Algoritmo FIND-S: empiezo con la hipótesis más específica y a medida que tengo ejemplos generalizo.
- En nuestro ejemplo:

$\langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle$

+  $[x_1, \text{sí}]$

$\langle \text{Alta}, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, \text{Bueno} \rangle$

+  $[x_3, \text{sí}]$

$\langle ?, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, ? \rangle$

➡ *Esta forma de generalizar es válida para el  $H$  del ejemplo, pero no necesariamente para otro.*

# Find-S

---

- Algoritmo FIND-S:

$h \equiv$  hipótesis más específica de  $H$

Para cada instancia positiva  $x$

Para cada restricción  $r$  de  $h$

Si  $x$  no satisface  $r$ , sustituir  $r$  por una restricción más general que satisfaga  $x$ .

Devolver  $h$

- ¿Qué sucede con los ejemplos negativos?
- Notar que en el  $H$  de nuestro ejemplo siempre tenemos una única hipótesis más específica, pero en principio podrían ser varias.



# Find-S

---

- Llegamos a una hipótesis válida, pero...
  - ▶ ¿Llegamos al concepto correcto?
  - ▶ ¿Por qué preferir la hipótesis más específica?
  - ▶ ¿Qué pasa si hay varias hipótesis más específicas? ¿Por qué quedarnos con sólo una de ellas?
  - ▶ ¿Y si en el conjunto de entrenamiento hay ejemplos mal clasificados?

# Candidate-Elimination

---

- Definiciones:

- ▶ Una hipótesis  $h$  es consistente con un conjunto de entrenamiento:

$$\text{Consistente}(h, D) \equiv \forall [x, c(x)] \in D, h(x) = c(x).$$

- ▶ Espacio de versiones  $VS_{H,D}$

$$VS_{H,D} = \{h \in H / \text{consistente}(h, D)\}.$$

- El espacio de versiones representa a todas las hipótesis candidatas a ser el objetivo buscado, dado el conjunto de entrenamiento.
- ¿Cómo calcular el espacio de versiones?

# Candidate-Elimination

---

- Algoritmo List-Then-Eliminate:

VS  $\equiv$  conjunto con TODAS las hipótesis.

Para cada ejemplo  $[x, c(x)]$ :

Eliminar todas las  $h$  tq.  $h(x) \neq c(x)$ .

Devolver VS.

- ▶ Enumera todo el espacio de hipótesis.
- ▶ En espacios  $H$  infinitos...

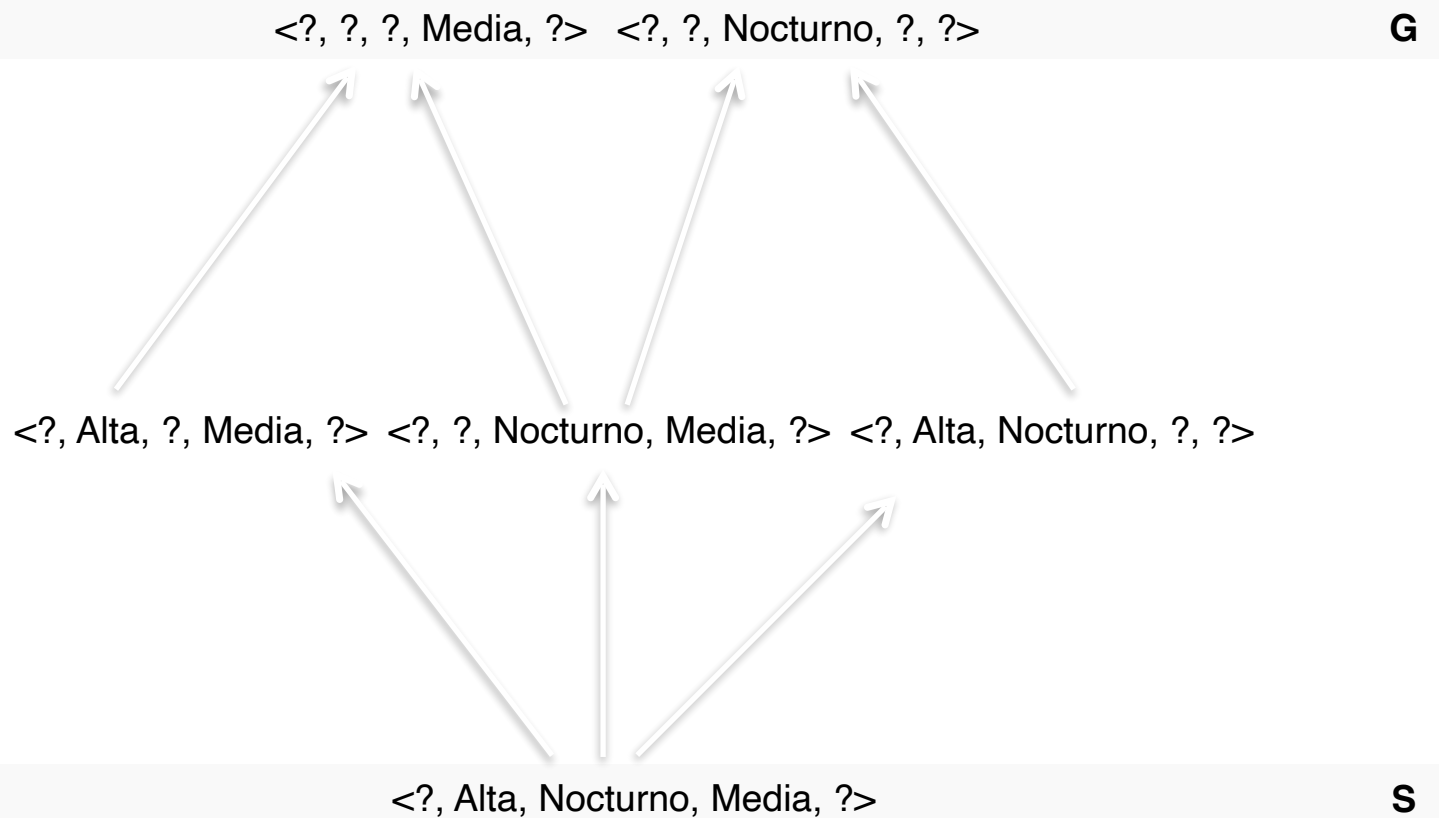
# Candidate-Elimination

---

- Representemos el espacio de versiones con las hipótesis consistentes más específicas y más generales.
- Límite general  $G_{H,D}$ :  
$$G_{H,D} \equiv \{g \in H / \text{consistente}(g,D) \text{ y } (\neg \exists g' \in H) g' > g \wedge \text{consistente}(g',D)\}$$
- Límite específico  $S_{H,D}$ :  
$$S_{H,D} \equiv \{s \in H / \text{consistente}(s,D) \text{ y } (\neg \exists s' \in H) s > s' \wedge \text{consistente}(s',D)\}$$
- Teorema de la representación del espacio de versiones  
$$VS_{H,D} = \{h \in H / (\exists s \in S) (\exists g \in G) g \geq h \geq s\}$$
  - ▶ En otras palabras, con  $G_{H,D}$  y  $S_{H,D}$  puedo representar a todo  $VS_{H,D}$ .

# Candidate-Elimination

- En nuestro ejemplo:



# Candidate-Elimination

---

- Algoritmo Candidate-Elimination:

$S$   $\equiv$  conjunto de hipótesis más específicas.

$G$   $\equiv$  conjunto de hipótesis más generales.

Para cada instancia  $x$ .

Si  $x$  es un ejemplo positivo.

Remover de  $G$  cualquier hipótesis inconsistente con  $x$ .

Para cada hipótesis  $s$  de  $S$ , inconsistente con  $x$ .

Cambiarla por todas las generalizaciones mínimas de  $s$ , consistentes con  $x$ , para las cuales haya una hipótesis en  $G$  más general que ellas.

Remover de  $S$  toda hipótesis más general que otra hipótesis de  $S$ .

# Candidate-Elimination

---

- Algoritmo Candidate-Elimination (cont):

...

Si  $x$  es un ejemplo negativo.

Remover de  $S$  cualquier hipótesis inconsistente con  $x$ .

Para cada hipótesis  $g$  de  $G$ , inconsistente con  $x$ .

Cambiarla por todas las especializaciones mínimas de  $g$ , consistentes con  $x$ , para las cuales haya una hipótesis en  $S$  más específica que ellas.

Remover de  $G$  toda hipótesis más específica que otra hipótesis de  $G$ .

# Candidate-Elimination

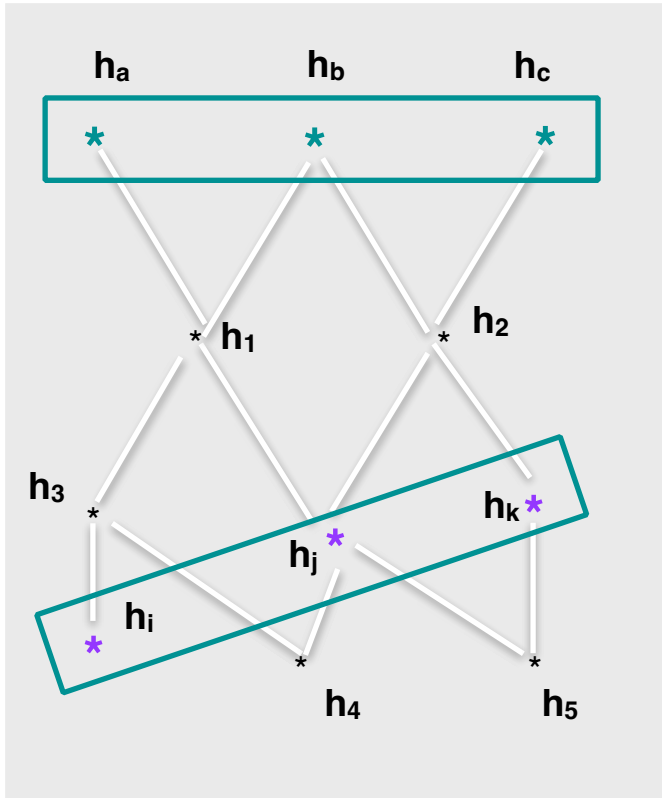
---

- Observar que:
  - ▶ El cálculo de  $S$  es una generalización de FIND-S.
  - ▶ Las operaciones de generalización y especialización dependen del espacio de trabajo  $H$  elegido.



# Ejemplo Candidate-Elimination

H



Supongamos

$$G_{H,D} = \{h_a, h_b, h_c\}$$

$$S_{H,D} = \{h_i, h_j, h_k\}$$

Llega un ejemplo  $x$ , tal que:

- $c(x) = \text{False}$
- $h_j(x) = h_a(x) = h_b(x) = \text{True}$
- $h_i(x) = h_k(x) = h_c(x) = \text{False}$
- $h_1(x) = h_2(x) = \text{False}$
- $h_3(x) = ?$

1. ¿Qué hipótesis forman  $VS_{H,D}$ ?
2. ¿Cómo queda  $VS_{H,D} \cup \{ \langle x, \text{False} \rangle \}$ ?

# Volviendo a Pedro...

---

#Ej	x					c(x)
	Dedicación	Dificultad	Horario	Humedad	Humor Doc	Salva
1	Alta	Alta	Nocturno	Media	Bueno	SÍ
2	Baja	Media	Matutino	Alta	Malo	NO
3	Media	Alta	Nocturno	Media	Malo	SÍ
4	Media	Alta	Matutino	Alta	Bueno	NO

# Candidate-Elimination

---

- En nuestro ejemplo:

$S_0 = \{ \langle \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset \rangle \}$

$G_0 = \{ \langle ?, ?, ?, ?, ? \rangle \}$

$S_1 = \{ \langle \text{Alta}, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, \text{Bueno} \rangle \}$

$G_1 = \{ \langle ?, ?, ?, ?, ? \rangle \}$

$S_2 = \{ \langle \text{Alta}, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, \text{Bueno} \rangle \}$

$G_2 = \{ \langle \text{Alta}, ?, ?, ?, ? \rangle, \langle ?, \text{Alta}, ?, ?, ? \rangle, \langle ?, ?, \text{Nocturno}, ?, ? \rangle, \langle ?, ?, ?, \text{Media}, ? \rangle, \langle ?, ?, ?, ?, \text{Bueno} \rangle \}$

$S_3 = \{ \langle ?, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, ? \rangle \}$

$G_3 = \{ \langle ?, \text{Alta}, ?, ?, ? \rangle, \langle ?, ?, \text{Nocturno}, ?, ? \rangle, \langle ?, ?, ?, \text{Media}, ? \rangle \}$

$S_4 = \{ \langle ?, \text{Alta}, \text{Nocturno}, \text{Media}, ? \rangle \}$

$G_4 = \{ \langle ?, ?, \text{Nocturno}, ?, ? \rangle, \langle ?, ?, ?, \text{Media}, ? \rangle \}$

- ¿qué pasa si procesamos los ejemplos en otro orden?

# Candidate-Elimination

---

- ¿El algoritmo converge a una hipótesis correcta? La respuesta es afirmativa cuando:
  - ▶ Los datos de entrenamiento no contienen ruido (errores).
  - ▶ Hay una hipótesis en  $H$  que describe el concepto objetivo.
- Si tuviésemos un oráculo, ¿cuál ejemplo nos conviene elegir como siguiente a procesar?



# Candidate-Elimination

---

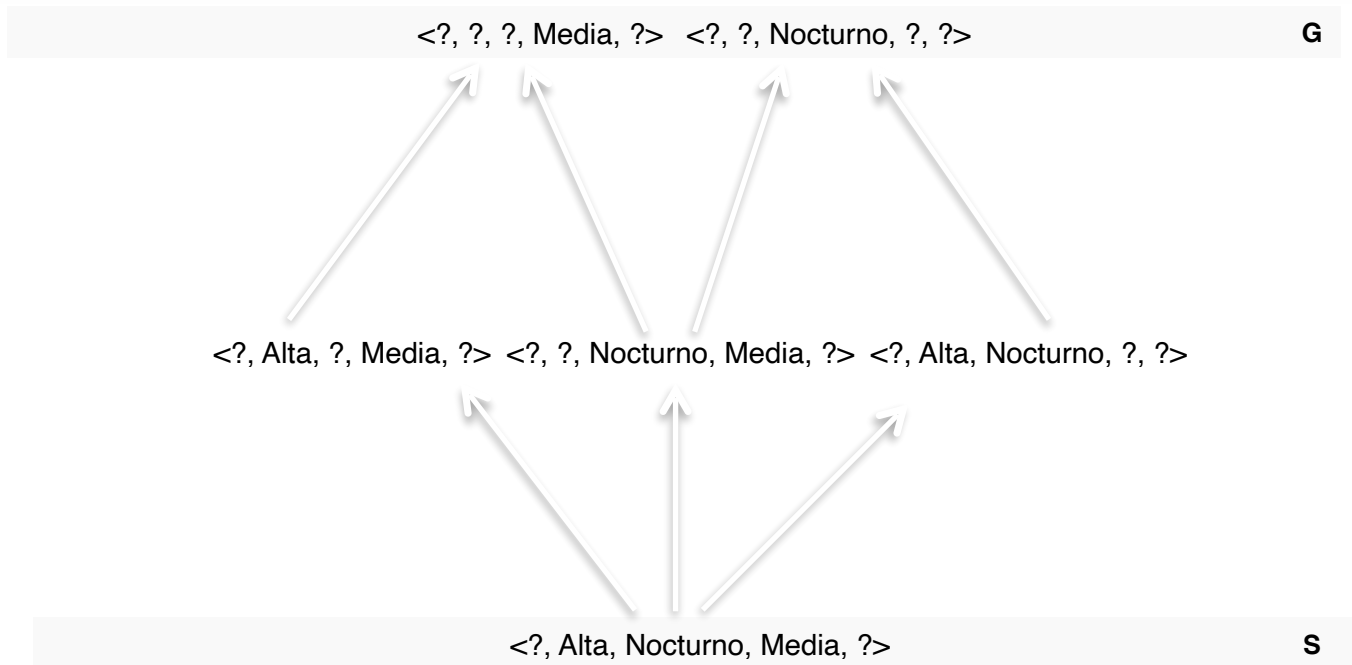
- ¿Cuál ejemplo elegiríamos para procesar?
  - ▶ El mejor ejemplo es aquel que hace que la mitad del espacio diga 'sí', y la otra mitad diga 'no'.
  - ▶ Esto reduce el tamaño del espacio de versiones a la mitad.

# Candidate-Elimination

---

- Podemos utilizar conocimientos parciales:
  - ▶ Si una instancia satisface a toda hipótesis de  $S$ , con seguridad debe ser clasificada positiva.
  - ▶ Si una instancia no satisface a ninguna de las hipótesis de  $G$ , con seguridad debe ser clasificada negativa.

# Candidate-Elimination



- Por ejemplo, ¿cómo se clasifica a...?
  - [Alta, Alta, Nocturno, Media, Malo]
  - [Alta, Baja, Matutino, Alta, Bueno]
  - [Alta, Baja, Nocturno, Media, Bueno]

# Sesgo Inductivo

---

- ¿Qué sucede si el concepto objetivo no está considerado en  $H$ ?
- Por ejemplo, este concepto no está en el  $H$  del ejemplo:

$$\langle \text{Alta}, ?, ?, ?, ? \rangle \vee \langle ?, \text{Baja}, ?, ?, ? \rangle$$

- Podríamos considerar el espacio con TODOS los conceptos posibles, pero... ¿cómo quedaría  $VS_{H,D}$ ?
- Si no se hacen suposiciones previas sobre la forma del concepto que se busca.... ¡nada se puede aprender!



# Sesgo Inductivo

---

- Sesgo Inductivo del algoritmo  $L$  es el conjunto mínimo de suposiciones  $B$  tales que:

$$(\forall x \in X) [(B \wedge D \wedge x) \rightarrow L \text{ clasifica correctamente a } x]$$

- ¿Cuál es el sesgo inductivo de Find-S y Candidate–Elimination?