



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba

FAMAF

Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

Método de Newton Globalizado para el Problema de Localización de Fermat–Weber

Fada Santiago

14 Noviembre 2025

Resumen

Este trabajo estudia el problema clásico de localización de Fermat–Weber, el cual busca determinar la posición que minimiza la suma de distancias ponderadas a un conjunto de puntos dados. Se analiza su formulación matemática, las propiedades de convexidad y unicidad de la solución, y se implementa el método de Newton, comparándolo con el algoritmo de Weiszfeld. Se presentan resultados numéricos que muestran mejoras significativas en velocidad y estabilidad.

Índice

1. Introducción	2
2. Formulación y propiedades	2
2.1. Definición formal	2
2.2. Propiedades	2
2.3. Gradiente, Hessiana y subgradiente	3
3. Algoritmos de resolución	4
3.1. Método de punto fijo (Weiszfeld)	4
3.2. Método de Newton	5
4. Resultados numéricos	6
4.1. Configuración experimental	6
4.2. Análisis cualitativo de los resultados	6
4.3. Análisis cuantitativo	8
5. Conclusiones	10
6. Trabajo futuro	10

1. Introducción

El problema de Fermat–Weber, también conocido como problema de localización de Weber, consiste en encontrar el punto que minimiza la suma de las distancias ponderadas a un conjunto de ubicaciones fijas llamadas nodos. Este problema tiene una larga historia que se remonta al siglo XVII, cuando fue planteado por Pierre de Fermat y resuelto geométricamente por Evangelista Torricelli. En la actualidad, tiene numerosas aplicaciones en logística, planificación urbana y análisis de redes, y constituye un caso base en la teoría de problemas de localización continua.

El presente trabajo aborda este problema desde la perspectiva de la optimización numérica. En particular, se estudia la implementación de un método de Newton globalizado, propuesto en *On Newton's Method for the Fermat–Weber Location Problem* (Görner & Kanzow, 2015), que garantiza convergencia global y cuadrática local bajo condiciones suaves sobre la función objetivo.

El objetivo general es analizar y comparar el método contra el algoritmo de punto fijo de Weiszfeld, el cual es el algoritmo más difundido para resolver este problema.

2. Formulación y propiedades

2.1. Definición formal

Dado un conjunto de puntos $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ a los que llamaremos **nodos**, con pesos positivos $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, el problema de Fermat–Weber consiste en resolver:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|.$$

2.2. Propiedades

- La función f es **convexa**, ya que se trata de una suma de términos $\|x - a_i\|$ convexos.
- Si los puntos $\{a_i\}$ no son colineales, la solución del problema es única.
- La función no es diferenciable en los puntos a_i , aunque es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$.

En el caso particular en que los puntos $\{a_i\}$ son colineales, la función objetivo sigue siendo convexa pero deja de ser estrictamente convexa. Esto implica que puede existir un intervalo de puntos óptimos en lugar de una única solución. No obstante, desde un punto de vista práctico, este caso no requiere un análisis adicional, ya que el problema puede reducirse a una sola coordenada. En efecto, si todos los a_i pertenecen a una misma recta, es posible parametrizar dicha recta mediante una variable escalar t y reformular el problema como

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m \omega_i |t - t_i|,$$

donde t_i representa la proyección escalar de cada a_i sobre la dirección común. Este problema unidimensional admite una solución explícita: el **promedio ponderado mediano** (o *weighted median*) de los valores t_i , definido como el punto que equilibra los pesos a ambos lados de la recta.

2.3. Gradiente, Hessiana y subgradiente

Para $x \neq a_i$ se tiene:

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|}.$$

La Hessiana correspondiente se obtiene derivando nuevamente y resulta:

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left(\frac{I_n}{\|x - a_i\|} - \frac{(x - a_i)(x - a_i)^T}{\|x - a_i\|^3} \right), \quad x \neq a_i.$$

La función f es además direccionalmente diferenciable en todo punto. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y dirección $d \in \mathbb{R}^n$, el derivado direccional se define como

$$f'(x; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Entre los nodos dados, sea a_p aquel que minimiza $f(a_i)$:

$$f(a_p) = \min_{1 \leq i \leq m} f(a_i).$$

Entonces, el punto a_p es una solución del problema de Fermat–Weber si y sólo si se cumple

$$\left\| \sum_{i=1, i \neq p}^m \omega_i \frac{a_i - a_p}{\|a_i - a_p\|} \right\| \leq \omega_p.$$

Entonces, el punto a_p es una solución del problema de Fermat–Weber si y sólo si se cumple

$$\left\| \sum_{i=1, i \neq p}^m \omega_i \frac{a_i - a_p}{\|a_i - a_p\|} \right\| \leq \omega_p.$$

Esta condición se obtiene evaluando el subgradiente de f en a_p y comprobando si el vector nulo pertenece a dicho conjunto. En términos intuitivos, significa que la suma ponderada de las direcciones desde a_p hacia los demás puntos no debe exceder la magnitud del peso ω_p . Si la desigualdad se cumple, el nodo a_p equilibra las “fuerzas” del sistema y constituye una solución global del problema.

Si la desigualdad anterior no se cumple, a_p no es óptimo y existe una dirección de descenso que puede obtenerse resolviendo

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} f'(a_p; d) \quad \text{s.a. } \|d\| = 1.$$

Y puede probarse que la dirección óptima de descenso viene dada por

$$d_p = -\frac{R_p}{\|R_p\|}, \quad R_p = \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_p - a_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

En esta dirección, $f(a_p + td_p) < f(a_p)$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeño. Además, puede obtenerse una longitud de paso explícita que garantiza disminución del valor de la función:

$$t_p = \frac{\|R_p\| - \omega_p}{L(a_p)}, \quad L(a_p) = \sum_{i \neq p} \frac{\omega_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

De esta forma se construye un punto inicial adecuado

$$x^{(0)} = a_p + t_p d_p,$$

que sirve como estado de partida para el método de Newton presentado en la siguiente sección.

Estos resultados permiten establecer la base teórica para aplicar métodos de Newton al problema de Fermat–Weber. En particular, en el dominio donde f es diferenciable, la dirección de Newton definida por

$$d(x) = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x)$$

es siempre una dirección de descenso, pues se cumple

$$\nabla f(x)^T d(x) = -\nabla f(x)^T [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x) < 0.$$

Como la matriz Hessiana es definida positiva siempre que $x \neq a_i$, se garantiza que la dirección de Newton constituye una dirección de descenso. En consecuencia, avanzar en dicha dirección reduce el valor de la función objetivo f . A partir de esta propiedad, puede incorporarse una regla de búsqueda lineal, por ejemplo el criterio de Armijo, con el fin de globalizar el método y asegurar convergencia desde cualquier punto inicial, manteniendo al mismo tiempo la convergencia cuadrática local en la vecindad del óptimo.

3. Algoritmos de resolución

3.1. Método de punto fijo (Weiszfeld)

El método de Weiszfeld es un procedimiento iterativo que permite aproximar la solución del problema de Fermat–Weber mediante una sucesión de puntos que se actualizan a partir de una ecuación de punto fijo. A partir de la condición de primer orden $\nabla f(x) = 0$, se puede despejar x en función de los nodos a_i y sus pesos ω_i , llegando así a que:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x - a_i\|}}.$$

Esta expresión sugiere un esquema iterativo de la forma

$$x^{(k+1)} = T(x^{(k)}) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}},$$

donde $x^{(k)}$ representa la aproximación en la iteración k .

El método es sencillo de implementar y requiere únicamente el cálculo de distancias entre el punto actual y los nodos.

El algoritmo converge linealmente hacia la solución única x^* , siempre que el punto inicial $x^{(0)}$ no coincida con un nodo y la función f sea estrictamente convexa en el entorno de la solución. A pesar de su simplicidad, este método puede ser lento cuando los puntos están muy próximos o los pesos son muy desbalanceados, lo que motiva el uso de métodos más robustos como el de Newton, presentado a continuación.

3.2. Método de Newton

El método de Newton aproxima la solución usando información de primer y segundo orden. Dado que f no es diferenciable en los nodos a_i , seguimos a Görner y Kanzow (2015) y combinamos la dirección de Newton con una búsqueda lineal tipo Armijo y una *inicialización basada en nodos* que evita quedar en un punto no diferenciable. En cada iteración, la dirección se obtiene resolviendo el sistema lineal

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}),$$

y el tamaño de paso t se selecciona por backtracking para asegurar

$$f(x^{(k)} + t d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma t \langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle, \quad \sigma \in (0, \frac{1}{2}).$$

El esquema completo, incluida la inicialización propuesta en el paper, es el siguiente:

Algorithm 1: Método de Newton con condición de Armijo (según Görner & Kanzow, 2015)

Data: $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, $\omega_1, \dots, \omega_m > 0$, parámetros $\rho \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$

Result: $x^* \in \mathbb{R}^n$ que minimiza $f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|$

// Etapa de inicialización

Determinar $p \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f(a_p) = \min\{f(a_1), \dots, f(a_m)\}$;

// Verificamos si el nodo a_p ya cumple la condición de optimalidad

if $\left\| \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_p - a_i}{\|a_p - a_i\|} \right\| \leq \omega_p$ **then** devolver $x^* \leftarrow a_p$ y terminar ;

else

$$R_p \leftarrow \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_p - a_i}{\|a_p - a_i\|}$$

$$d_p \leftarrow -\frac{R_p}{\|R_p\|}$$

$$L(a_p) \leftarrow \sum_{i \neq p} \frac{\omega_i}{\|a_p - a_i\|}$$

$$t_p \leftarrow \frac{\|R_p\| - \omega_p}{L(a_p)}$$

$$x^{(0)} \leftarrow a_p + t_p d_p$$

// Etapa iterativa: método de Newton

for $k = 0, 1, 2, \dots$ **do**

 Evaluar $\nabla f(x^{(k)})$ y $\nabla^2 f(x^{(k)})$

 Resolver el sistema lineal $\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$

 // Búsqueda lineal con regla de Armijo

$t \leftarrow 1$

while $f(x^{(k)} + t d^{(k)}) > f(x^{(k)}) + \sigma t \langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle$ **do**

$t \leftarrow \rho t$

$x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + t d^{(k)}$

if $\|\nabla f(x^{(k+1)})\| \leq \varepsilon$ **then** devolver $x^* \leftarrow x^{(k+1)}$ y terminar ;

El uso de la condición de Armijo garantiza una reducción estricta de la función objetivo en cada iteración, aun cuando el punto inicial se encuentre lejos de la solución o la función presente zonas de no diferenciabilidad. De este modo, el algoritmo combina la estabilidad global de los métodos con búsqueda lineal con la rapidez local del método de Newton puro.

Görner y Kanzow (2015) demuestran que la secuencia $\{x^{(k)}\}$ generada permanece en un conjunto de nivel compacto y converge al único minimizador x^* del problema. Además, si la solución x^* no coincide con ningún nodo a_i y la hessiana $\nabla^2 f(x)$ es definida positiva en un

entorno de x^* , la convergencia es **cuadrática**, es decir,

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C \|x^{(k)} - x^*\|^2, \quad C > 0.$$

En la práctica, esta propiedad se vio reflejada en que, una vez que el algoritmo se aproxima a la solución, la mejora por iteración crece rápidamente y suele bastar con pocas actualizaciones para alcanzar la tolerancia deseada.

Comparado con el método de Weiszfeld, el enfoque de Newton requiere un mayor costo computacional por iteración debido al cálculo de la hessiana y la resolución del sistema lineal asociado. Sin embargo, esta inversión se ve compensada por una convergencia mucho más rápida, que en los experimentos reportados por los autores reduce el número total de iteraciones entre un orden de magnitud y dos, manteniendo estabilidad numérica y garantizando descenso de la función objetivo en cada paso.

4. Resultados numéricos

4.1. Configuración experimental

Se implementaron los algoritmos de Weiszfeld y Newton globalizado propuesto por Görner y Kanzow (2015) en Python 3.11, utilizando NumPy para el cálculo matricial y Matplotlib para la visualización. Ambos métodos se ejecutaron bajo las mismas condiciones de tolerancia, con $\varepsilon = 10^{-9}$ como criterio de detención sobre la norma del gradiente, y un máximo de 500 iteraciones. Todas las pruebas se realizaron en precisión doble y en entornos controlados, sin ruido numérico ni restricciones adicionales.

Se consideraron distintos conjuntos de puntos en \mathbb{R}^2 , tanto sintéticos como aleatorios, con el objetivo de ilustrar el comportamiento general de ambos algoritmos:

- **Caso 1: Triángulo.** Tres nodos equiespaciados con pesos iguales.
- **Caso 2: Pesos desbalanceados.** Un nodo con peso dominante, desplazando el óptimo.
- **Caso 3: Polígono regular.** Doce puntos distribuidos sobre una circunferencia de radio fijo.
- **Caso 4: Cuadrado con pesos opuestos.** Cuatro nodos formando un cuadrado, con pares opuestos de pesos iguales.
- **Caso 5: Clústeres aleatorios.** Puntos agrupados en dos regiones simétricas.
- **Caso 6: Puntos aleatorios.** Nodos distribuidos de forma uniforme en el plano.

En cada escenario, se comparó la evolución de $f(x_k)$ y la trayectoria de los puntos generados, permitiendo analizar visualmente la estabilidad, la velocidad de convergencia y la precisión final alcanzada por ambos métodos.

4.2. Análisis cualitativo de los resultados

Las Figuras 1–2 muestran la evolución del valor de la función objetivo y las trayectorias seguidas por los iterados x_k en el plano. En todos los experimentos, el método de Newton alcanza la solución en muy pocas iteraciones (generalmente menos de 6), mientras que Weiszfeld requiere entre una y dos órdenes de magnitud más pasos para obtener un error comparable.

En configuraciones más complejas, como los polígonos o clústeres (Figuras 3 y 5), ambos métodos confirman la posición del óptimo en el centro geométrico, aunque la diferencia en eficiencia

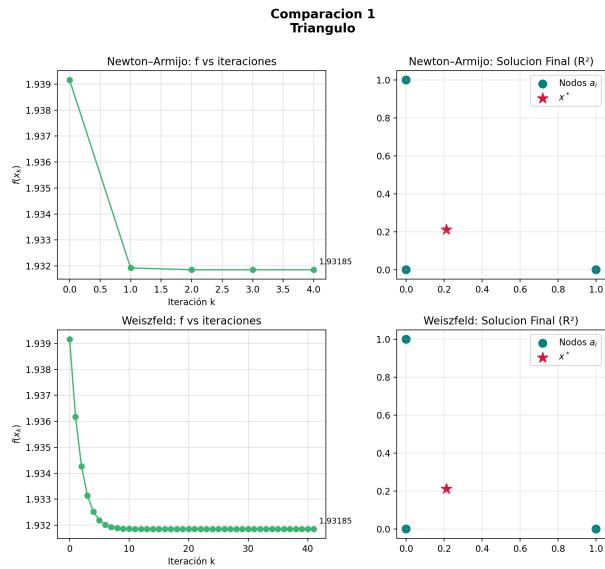


Figura 1: Triángulo equilátero: convergencia de Weiszfeld y Newton–Armijo. Ambos métodos alcanzan el mismo punto óptimo, pero Newton reduce la cantidad de iteraciones en un orden de magnitud.

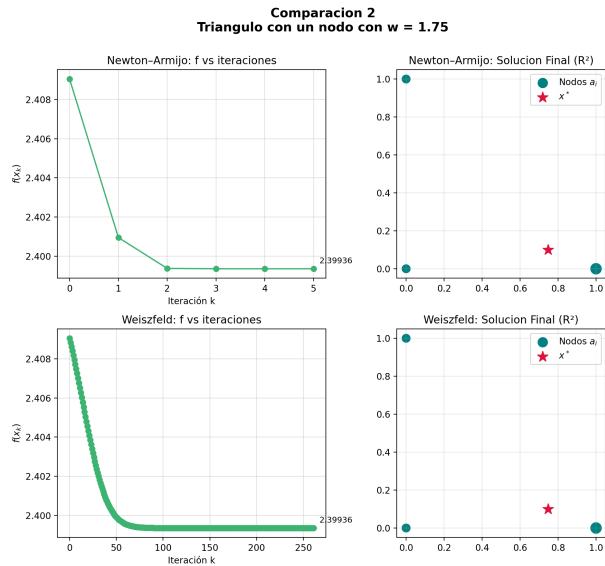


Figura 2: Pesos desbalanceados: Newton converge rápidamente al óptimo desplazado hacia el nodo dominante.

es aún más evidente. Weiszfeld presenta una reducción monótona pero lineal de $f(x_k)$, mientras que Newton muestra un decrecimiento abrupto tras las primeras iteraciones, característico de la convergencia cuadrática.

[h!]

Finalmente, en el caso del de puntos distribuidos de forma uniforme 6, este caso sirvió para plantear una idea, qué tal si en lugar de ver ejemplos en el plano planteamos muchos ejemplos variando de forma aleatoria la dimensión n así como la cantidad de nodos m para tener un análisis mas cuantitativo

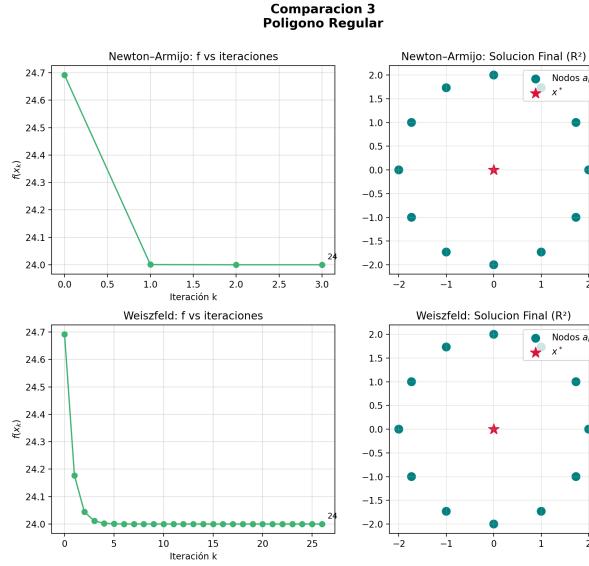


Figura 3: Polígono regular: convergencia hacia el centro de la figura, observamos que el método de Newton converge en un par de iteraciones.

4.3. Análisis cuantitativo

Para evaluar de manera sistemática el desempeño de los dos métodos estudiados, se generaron $N = 300$ instancias aleatorias del problema de Fermat–Weber para distintos valores de la dimensión del espacio y del número de nodos. En concreto, se consideraron dimensiones

$$n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

y cantidades de nodos

$$m \in \{10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200, 300\}.$$

Cada instancia se construyó generando los nodos a_i de forma independiente con distribución uniforme en el hipercubo $[0, 1]^n$ y pesos ω_i también aleatorios con valores positivos.

Para cada par (m, n) se resolvieron las 300 instancias mediante ambos métodos: Newton–Armijo y Weiszfeld. Con el fin de evitar sesgos, ambos métodos se inicializaron desde el mismo punto $x^{(0)}$, escogido siempre a partir de la regla basada en nodos descrita en la sección anterior (esto es, utilizando como punto de partida el $x^{(0)}$ construido a partir del nodo a_p que minimiza $f(a_i)$). De este modo, cualquier diferencia en el desempeño se debe exclusivamente al método iterativo y no a la calidad de la inicialización.

Para cada experimento se registraron:

- el número total de iteraciones necesarias para alcanzar la tolerancia,
- el tiempo de cómputo (promedio sobre 300 corridas),
- el valor final de la función objetivo,
- el porcentaje de fallos (por ejemplo, estancamiento o situaciones degeneradas).

A partir de estos datos se construyó un resumen estadístico que promedia el desempeño de cada método sobre todas las instancias para cada combinación (m, n) . Las métricas de interés fueron la media y desviación estándar de:

iteraciones promedio, tiempo promedio, tasa de fallos.

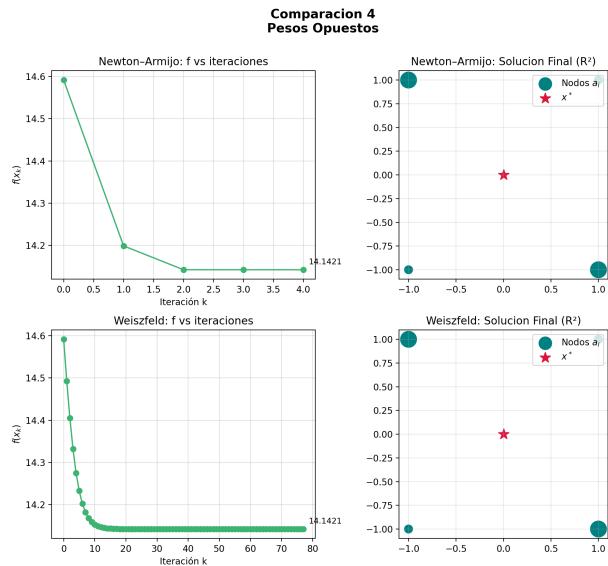


Figura 4: Polígono de cuatro lados con pesos opuestos equilibrados

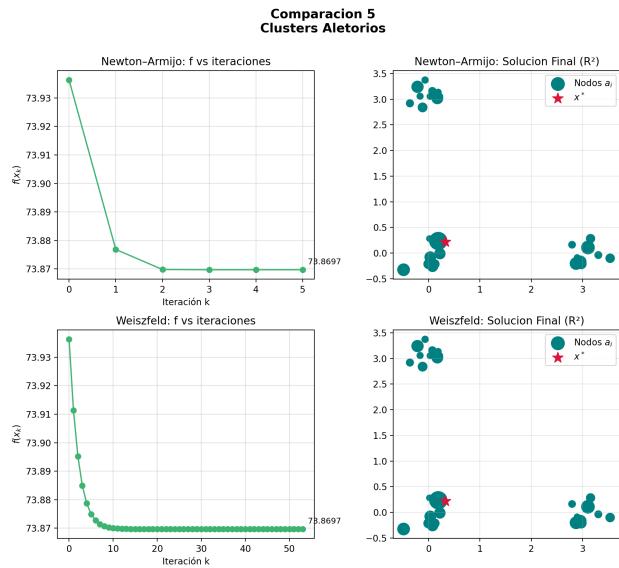


Figura 5: Clústeres aleatorios: ambos métodos localizan el mismo punto pero el método de punto fijo toma 10 veces más iteraciones.

asimismo, se analizó la razón entre los métodos:

$$\text{speedup}_{\text{iter}} = \frac{\text{iteraciones de Weiszfeld}}{\text{iteraciones de Newton}} = 2,800763 \quad \text{speedup}_{\text{time}} = \frac{\text{tiempo de Weiszfeld}}{\text{tiempo de Newton}} = 1.8216640$$

la cual permite cuantificar cuántas veces más rápido es Newton en promedio respecto de Weiszfeld.

Los resultados muestran que, para todas las dimensiones evaluadas, Newton requiere significativamente menos iteraciones que Weiszfeld, con aceleraciones que aumentan a medida que crece el número de nodos m . En términos de tiempo de cómputo, la superioridad de Newton es particularmente notoria en dimensiones bajas, mientras que en dimensiones más altas esta ventaja no es tan marcada debido al costo de construir y resolver el sistema lineal asociado a la Hessiana.

En todos los casos evaluados, Newton exhibió una tasa de fallos prácticamente nula, mientras

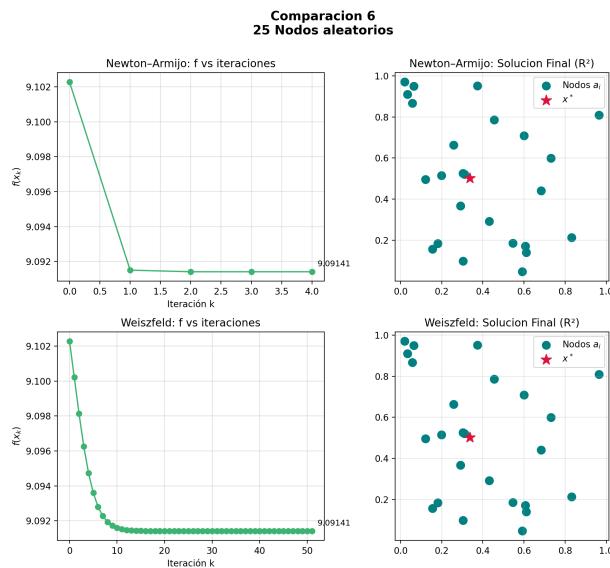


Figura 6: Comparativa de resultados Con puntos aleatorios.

que Weiszfeld presentó estancamientos ocasionales incluso bajo la misma inicialización basada en nodos.

Cabe destacar que, si en lugar de utilizar esta inicialización inteligente se emplea un punto inicial arbitrario (por ejemplo, un valor aleatorio en $[0, 1]^n$), el método de Weiszfeld muestra un deterioro mucho más acusado: la frecuencia de fallos aumenta de manera significativa y el número de iteraciones requerido crece de forma sustancial.

5. Conclusiones

Si bien el paper original no descubre la pólvora, el mismo confirma que el método de Newton constituye una alternativa superior al esquema de punto fijo de Weiszfeld para resolver el problema de Fermat–Weber. La incorporación de una inicialización basada en nodos y una búsqueda lineal tipo Armijo permite al método de Newton combinar robustez global con convergencia cuadrática local, logrando en la práctica una reducción sistemática del número de iteraciones y del tiempo total de cómputo.

Si bien Newton requiere mayor esfuerzo computacional por iteración, este costo se ve ampliamente compensado por su rapidez y estabilidad, en particular en configuraciones con muchos nodos o pesos desbalanceados, donde Weiszfeld suele presentar estancamientos o una marcada pérdida de eficiencia.

En conjunto, los resultados teóricos y numéricos muestran que el método de Newton no solo es competitivo, sino que constituye un enfoque altamente fiable y eficiente para la localización de Fermat–Weber en entornos de optimización práctica.

6. Trabajo futuro

Existen varias direcciones naturales para extender este trabajo. En primer lugar, sería interesante incorporar **restricciones** sobre la solución, por ejemplo acotando la distancia máxima permitida a ciertos nodos o limitando la búsqueda a una región factible dada.

Una segunda línea consiste en analizar el problema bajo **otras normas** o funciones de costo distintas de la Euclídea, lo que puede modelar situaciones con geometrías diferentes (por ejemplo, distancia Manhattan o una norma p entre 1 y 2 que mejor modela una ciudad).

Bibliografía

- G. Görner, C. Kanzow. *On Newton's Method for the Fermat–Weber Location Problem.* Journal of Optimization Theory and Applications, 2015.
- L. Montes. *Métodos Numéricos para Problemas de Localización.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF), Universidad Nacional de Córdoba.