

Método de Newton globalizado para el problema de localización de Fermat–Weber

Fada Santiago



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



Universidad
Nacional
de Córdoba

Noviembre 2025

Contenidos

① Introducción y motivación

② Formulación y propiedades

③ Algoritmos de resolución

- Método de punto fijo (Weiszfeld)
- Método de Newton globalizado

④ Resultados numéricicos

- Casos en el plano
- Experimentos aleatorios de gran escala

⑤ Conclusiones y trabajo futuro

¿Qué es el problema de Fermat–Weber?

- Dado un conjunto de puntos fijos (nodos) $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ y pesos positivos $\omega_1, \dots, \omega_m$.
 - Se busca un punto $x \in \mathbb{R}^n$ que minimice la suma de distancias ponderadas:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|.$$

- Es un problema simple de enunciar, pero con una estructura interesante:
 - función convexa,
 - no diferenciable en los nodos.
 - Aparece en:
 - Localización de instalaciones (depósitos, centros de distribución),
 - Planificación urbana y transporte,
 - Análisis de redes y clustering geométrico.

Motivación

- El algoritmo clásico para este problema es el método de punto fijo de **Weiszfeld**.
 - converge sólo linealmente,
 - puede tener problemas cerca de los nodos.
- La pregunta es:

¿Podemos usar un **método de Newton** y seguir teniendo buena estabilidad global?

Definición formal

Problema de Fermat–Weber

Dado $a_i \in \mathbb{R}^n$ y $\omega_i > 0$ para $i = 1, \dots, m$, buscamos

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|$$

- a_i : nodos o ubicaciones dadas.
- ω_i : importancia o demanda asociada a cada nodo.
- x : ubicación a determinar (ej. centro de servicio).

Propiedades básicas

- f es una suma de normas $\|x - a_i\|$ ponderadas:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|.$$

- Cada término $\|x - a_i\|$ es **convexo** en $x \Rightarrow f$ es convexa.
- Si los nodos $\{a_i\}$ no son colineales:
 - f es estrictamente convexa,
 - la solución óptima es única.
- f es diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$, pero **no** es diferenciable exactamente en los nodos.
- En el caso colineal (todos los a_i sobre un hiperplano):
 - el problema se reduce a 1D
 - no tiene solución única.
 - una solución es una **media ponderada**.

Gradiente y Hessiana (región diferenciable)

Para $x \neq a_i$ para todo i :

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|}$$

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left(\frac{I_n}{\|x - a_i\|} - \frac{(x - a_i)(x - a_i)^T}{\|x - a_i\|^3} \right)$$

- En la región diferenciable, la Hessiana es **definida positiva** si los nodos no son colineales.
- Esto implica:
 - convexidad estricta.
 - posibilidad de aplicar métodos de Newton.

Nodo candidato y condición suficiente de óptimo

- Entre los nodos dados, consideramos aquel que minimiza f :

$$f(a_p) = \min_{1 \leq i \leq m} f(a_i).$$

- Se puede demostrar que a_p es óptimo si y sólo si se cumple

$$\left\| \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_i - a_p}{\|a_i - a_p\|} \right\| \leq \omega_p.$$

La suma ponderada de las “fuerzas” que ejercen los otros nodos sobre a_p no debe superar el peso ω_p

Punto inicial basado en nodos

- Si a_p **no** satisface la condición anterior, no es óptimo.
- A partir del derivado direccional se puede construir una dirección de descenso

$$d_p = -\frac{R_p}{\|R_p\|}, \quad R_p = \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_p - a_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

- Además, se obtiene un paso explícito:

$$t_p = \frac{\|R_p\| - \omega_p}{L(a_p)}, \quad L(a_p) = \sum_{i \neq p} \frac{\omega_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

- Esto define un punto inicial “inteligente”:

$$x^{(0)} = a_p + t_p d_p,$$

Método de punto fijo (Weiszfeld)

Método de Weiszfeld

- A partir de $\nabla f(x) = 0$ (para $x \neq a_i$) se obtiene:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x - a_i\|}}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}}.$$

- Ventajas:
 - fácil de implementar,
 - no requiere derivadas.
- Desventajas:
 - converge solo **linealmente**,
 - problemas si $x^{(k)}$ se acerca demasiado a un nodo.

Idea general del método de Newton

- En la región diferenciable, la dirección de Newton está dada por

$$d(x) = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x).$$

- Como la Hessiana es definida positiva (sin colinealidad):

$$\nabla f(x)^T d(x) = -\nabla f(x)^T [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x) < 0,$$

- por lo tanto, $d(x)$ es siempre una **dirección de descenso**.
- Esto permite combinar Newton con una **búsqueda lineal** (por ejemplo, regla de Armijo) para garantizar descenso en cada paso.

Newton con Armijo e inicialización basada en nodos

- Esquema utilizado:

- ① Inicializar en $x^{(0)}$ usando el nodo a_p que minimiza $f(a_i)$ y el paso explícito $t_p d_p$.
- ② En cada iteración k :

- calcular $\nabla f(x^{(k)})$ y $\nabla^2 f(x^{(k)})$,
- resolver el sistema

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

- elegir t por backtracking de Armijo:

$$f(x^{(k)} + t d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma t \langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle,$$

- actualizar $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t d^{(k)}$.

- Con esto se obtiene:

- **convergencia global** (desde cualquier $x^{(0)}$ razonable)
- **convergencia cuadrática local** cerca del óptimo.

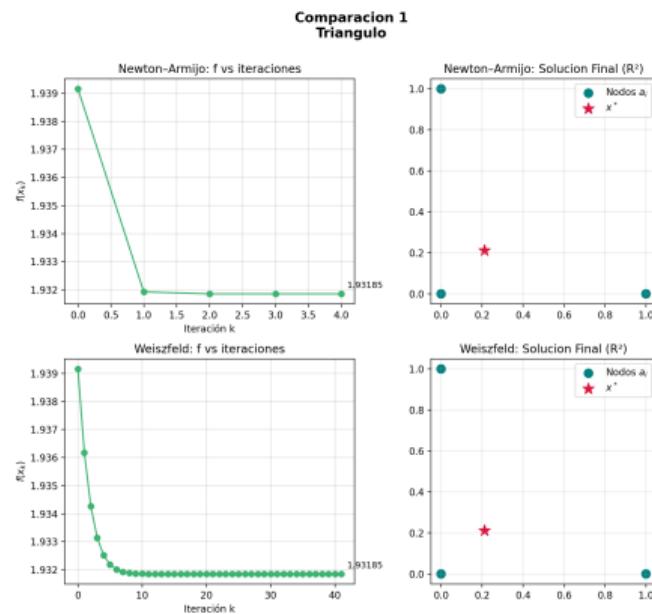
Casos ilustrativos en \mathbb{R}^2

- Se comparó Weiszfeld vs. Newton–Armijo en distintos escenarios:
 - triángulo equilátero con pesos iguales,
 - triángulo con un nodo “pesado”,
 - polígono regular de 12 lados,
 - cuadrado con pesos opuestos equilibrados,
 - dos clústeres simétricos,
 - puntos aleatorios en el plano.
- Para cada caso se graficó:
 - la evolución de $f(x_k)$ vs iteraciones,
 - los nodos y la posición final del óptimo.

Casos en el plano

Ejemplo: triángulo equilátero

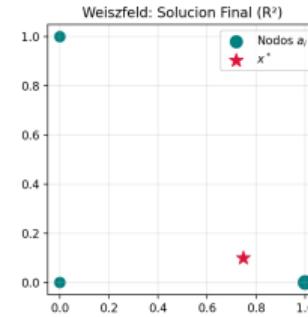
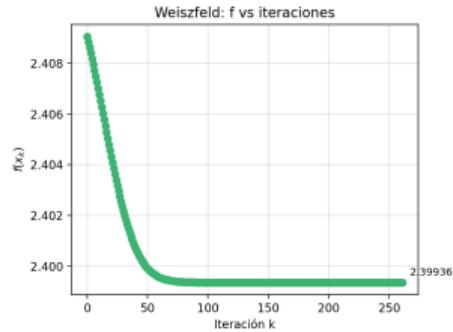
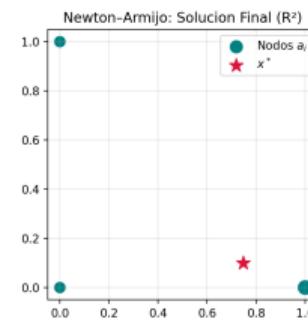
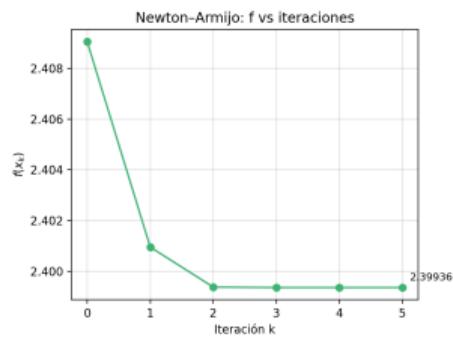
- Tres nodos en las esquinas de un triángulo equilátero, pesos iguales.
- Ambos métodos convergen al mismo punto (el “Fermat point”).
- Newton–Armijo: típicamente < 5 iteraciones.
- Weiszfeld: varias decenas de iteraciones para error comparable.



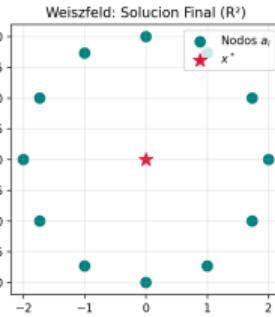
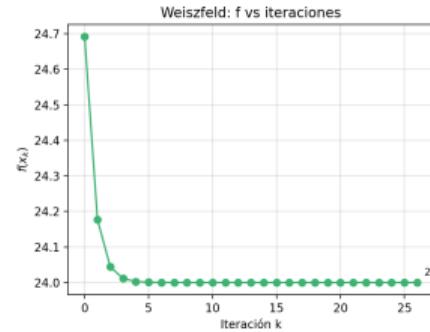
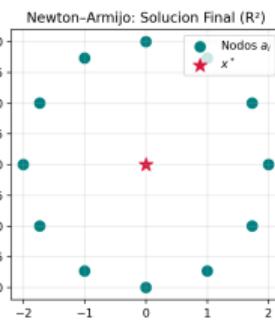
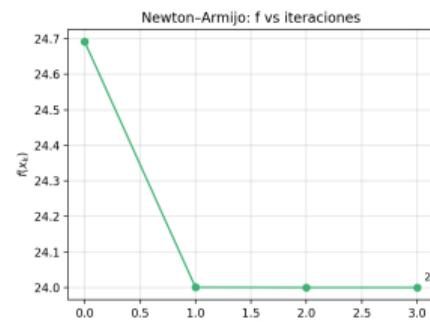
Casos en el plano

Otros ejemplos en \mathbb{R}^2

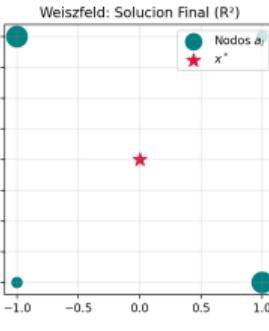
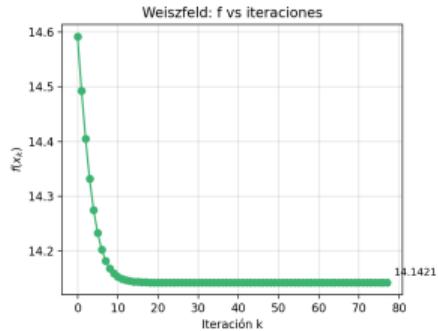
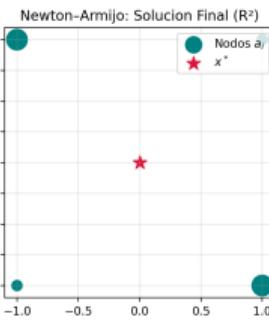
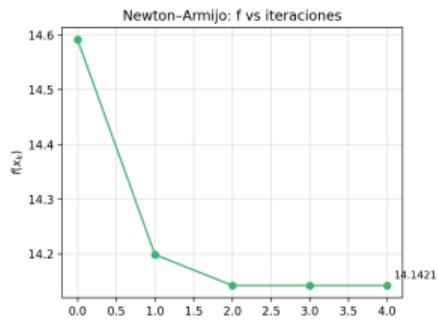
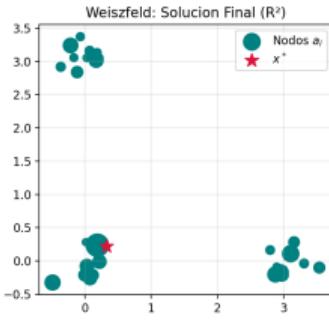
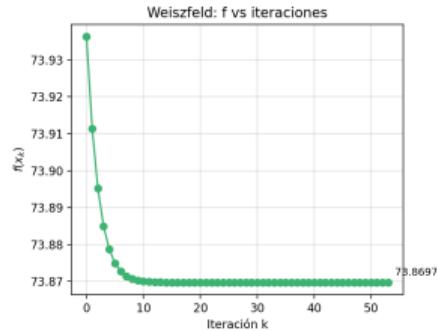
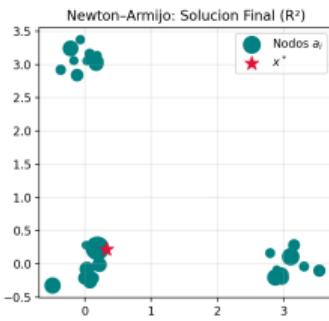
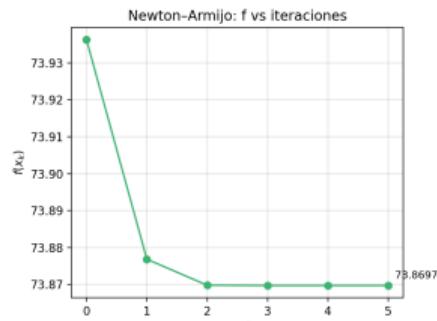
Comparacion 2
Triangulo con un nodo con $w = 1.75$



Comparacion 3
Polígono Regular



Casos en el plano

Otros ejemplos en \mathbb{R}^2 Comparacion 4
Pesos OpuestosComparacion 5
Clusters Aleatorios

Diseño experimental en alta dimensión

¿Qué pasa si variamos sistemáticamente m y n ?

- Se generaron instancias aleatorias con:

$$n \in \{2, \dots, 10\}, \quad m \in \{10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200, 300\}.$$

- Para cada par (m, n) :
 - $N = 300$ instancias,
 - nodos a_i uniformes en $[0, 1]^n$,
 - pesos $\omega_i > 0$ aleatorios.
- Ambos métodos se inicializaron desde el **mismo** $x^{(0)}$ construido a partir del nodo a_p .

Comparación cuantitativa

- A partir de los datos se calcularon medias y desvíos estándar, más razones del tipo:

$$\text{speedup}_{\text{iter}} = \frac{\text{iteraciones Weiszfeld}}{\text{iteraciones Newton}}, \quad \text{speedup}_{\text{time}} = \frac{\text{tiempo Weiszfeld}}{\text{tiempo Newton}}.$$

- En promedio se obtuvo:

$$\text{speedup}_{\text{iter}} \approx 2.8, \quad \text{speedup}_{\text{time}} \approx 1.82.$$

Robustez e impacto de la inicialización

Con inicialización basada en nodos:

- Newton tuvo tasa de fallo prácticamente nula.
- Weiszfeld presentó algunos estancamientos.
- Si se reemplaza por un $x^{(0)}$ arbitrario (ej. aleatorio en $[0, 1]^n$), el desempeño de Weiszfeld empeora notablemente, requiere más iteraciones y hubo más casos donde no alcanza la tolerancia.

Una buena inicialización + Newton globalizado produce un método estable y muy eficiente para el problema de Fermat–Weber.

Conclusiones

- El método de Newton globalizado constituye una alternativa claramente superior al esquema de punto fijo de Weiszfeld:
 - muchas menos iteraciones,
 - buena estabilidad numérica,
 - convergencia cuadrática cerca del óptimo.
- El costo extra por iteración (Hessiana + sistema lineal) se compensa en la mayoría de los escenarios prácticos.
- La inicialización basada en nodos es clave para mejorar la robustez global.

Trabajo futuro

- **Restricciones adicionales:**
 - limitar la solución a una región factible (p.ej. “no alejarse demasiado de los nodos”),
 - incorporar restricciones lineales o de caja.
- **Otras normas:** estudiar versiones con norma ℓ_1 , ℓ_p o normas inducidas para distintas aplicaciones.
- **Extensiones algorítmicas:** variantes quasi-Newton

¡Muchas gracias!
¿Preguntas?