

# Método de Newton globalizado para el problema de localización de Fermat–Weber

Fada Santiago



Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación



UNC

Universidad  
Nacional  
de Córdoba

Noviembre 2025

# Contenidos

- ① Introducción y motivación
- ② Formulación y propiedades
- ③ Algoritmos de resolución
  - Método de punto fijo (Weiszfeld)
  - Método de Newton globalizado
- ④ Resultados numéricos
  - Casos en el plano
  - Experimentos aleatorios de gran escala
- ⑤ Conclusiones y trabajo futuro

# ¿Qué es el problema de Fermat–Weber?

- Dado un conjunto de puntos fijos (nodos)  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$  y pesos positivos  $\omega_1, \dots, \omega_m$ .
- Se busca un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  que minimice la suma de distancias ponderadas:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|.$$

- Es un problema simple de enunciar, pero con una estructura interesante:
  - función convexa,
  - no diferenciable en los nodos.
- Aparece en:
  - Localización de instalaciones (depósitos, centros de distribución),
  - Planificación urbana y transporte,
  - Análisis de redes y clustering geométrico.

# Motivación

- El algoritmo clásico para este problema es el método de punto fijo de **Weiszfeld**.
  - converge sólo linealmente,
  - puede tener problemas cerca de los nodos.
- La pregunta es:

¿Podemos usar un **método de Newton** y seguir teniendo buena estabilidad global?

# Definición formal

## Problema de Fermat–Weber

Dado  $a_i \in \mathbb{R}^n$  y  $\omega_i > 0$  para  $i = 1, \dots, m$ , buscamos

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|$$

- $a_i$ : nodos o ubicaciones dadas.
- $\omega_i$ : importancia o demanda asociada a cada nodo.
- $x$ : ubicación a determinar (ej. centro de servicio).

# Propiedades básicas

- $f$  es una suma de normas  $\|x - a_i\|$  ponderadas:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \|x - a_i\|.$$

- Cada término  $\|x - a_i\|$  es **convexo** en  $x \Rightarrow f$  es convexa.
- Si los nodos  $\{a_i\}$  no son colineales:
  - $f$  es estrictamente convexa,
  - la solución óptima es única.
- $f$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ , pero **no** es diferenciable exactamente en los nodos.
- En el caso colineal (todos los  $a_i$  sobre un hiperplano):
  - el problema se reduce a 1D
  - no tiene solución única.
  - una solución es una **media ponderada**.

# Gradiente y Hessiana (región diferenciable)

Para  $x \neq a_i$  para todo  $i$ :

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \frac{x - a_i}{\|x - a_i\|}$$
$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left( \frac{I_n}{\|x - a_i\|} - \frac{(x - a_i)(x - a_i)^T}{\|x - a_i\|^3} \right)$$

- En la región diferenciable, la Hessiana es **definida positiva** si los nodos no son colineales.
- Esto implica:
  - convexidad estricta.
  - posibilidad de aplicar métodos de Newton.

## Nodo candidato y condición suficiente de óptimo

- Entre los nodos dados, consideramos aquel que minimiza  $f$ :

$$f(a_p) = \min_{1 \leq i \leq m} f(a_i).$$

- Se puede demostrar que  $a_p$  es óptimo si y sólo si se cumple

$$\left\| \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_i - a_p}{\|a_i - a_p\|} \right\| \leq \omega_p.$$

La suma ponderada de las “fuerzas” que ejercen los otros nodos sobre  $a_p$  no debe superar el peso  $\omega_p$



## Punto inicial basado en nodos

- Si  $a_p$  **no** satisface la condición anterior, no es óptimo.
- A partir del derivado direccional se puede construir una dirección de descenso

$$d_p = -\frac{R_p}{\|R_p\|}, \quad R_p = \sum_{i \neq p} \omega_i \frac{a_p - a_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

- Además, se obtiene un paso explícito:

$$t_p = \frac{\|R_p\| - \omega_p}{L(a_p)}, \quad L(a_p) = \sum_{i \neq p} \frac{\omega_i}{\|a_p - a_i\|}.$$

- Esto define un punto inicial “inteligente”:

$$x^{(0)} = a_p + t_p d_p,$$

# Método de Weiszfeld

- A partir de  $\nabla f(x) = 0$  (para  $x \neq a_i$ ) se obtiene:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x - a_i\|}}$$
$$x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i a_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}}{\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{\|x^{(k)} - a_i\|}}.$$

- Ventajas:
  - fácil de implementar,
  - no requiere derivadas.
- Desventajas:
  - converge solo **linealmente**,
  - problemas si  $x^{(k)}$  se acerca demasiado a un nodo.

# Idea general del método de Newton

- En la región diferenciable, la dirección de Newton está dada por

$$d(x) = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x).$$

- Como la Hessiana es definida positiva (sin colinealidad):

$$\nabla f(x)^T d(x) = -\nabla f(x)^T [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x) < 0,$$

- por lo tanto,  $d(x)$  es siempre una **dirección de descenso**.
- Esto permite combinar Newton con una **búsqueda lineal** (por ejemplo, regla de Armijo) para garantizar descenso en cada paso.

# Newton con Armijo e inicialización basada en nodos

- Esquema utilizado:

- 1 Inicializar en  $x^{(0)}$  usando el nodo  $a_p$  que minimiza  $f(a_i)$  y el paso explícito  $t_p d_p$ .

- 2 En cada iteración  $k$ :

- calcular  $\nabla f(x^{(k)})$  y  $\nabla^2 f(x^{(k)})$ ,
- resolver el sistema

$$\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

- elegir  $t$  por backtracking de Armijo:

$$f(x^{(k)} + t d^{(k)}) \leq f(x^{(k)}) + \sigma t \langle \nabla f(x^{(k)}), d^{(k)} \rangle,$$

- actualizar  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t d^{(k)}$ .

- Con esto se obtiene:

- **convergencia global** (desde cualquier  $x^{(0)}$  razonable)
- **convergencia cuadrática local** cerca del óptimo.

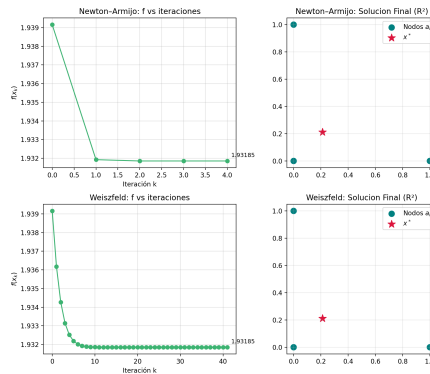
# Casos ilustrativos en $\mathbb{R}^2$

- Se comparó Weiszfeld vs. Newton–Armijo en distintos escenarios:
  - triángulo equilátero con pesos iguales,
  - triángulo con un nodo “pesado”,
  - polígono regular de 12 lados,
  - cuadrado con pesos opuestos equilibrados,
  - dos clústeres simétricos,
  - puntos aleatorios en el plano.
- Para cada caso se graficó:
  - la evolución de  $f(x_k)$  vs iteraciones,
  - los nodos y la posición final del óptimo.

# Ejemplo: triángulo equilátero

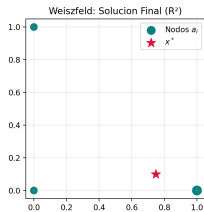
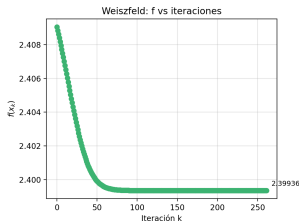
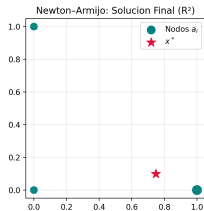
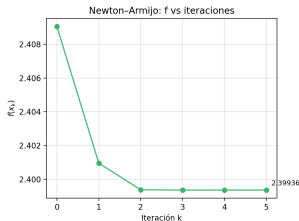
- Tres nodos en las esquinas de un triángulo equilátero, pesos iguales.
- Ambos métodos convergen al mismo punto (el “Fermat point”).
- Newton–Armijo: típicamente  $< 5$  iteraciones.
- Weiszfeld: varias decenas de iteraciones para error comparable.

Comparación 1  
Triángulo

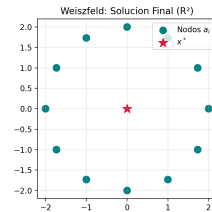
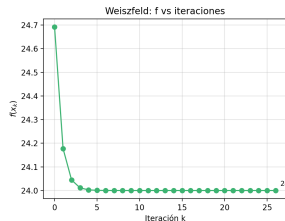
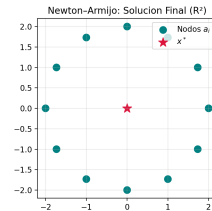
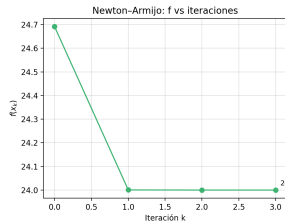


# Otros ejemplos en $\mathbb{R}^2$

**Comparacion 2**  
Triangulo con un nodo con  $w = 1.75$

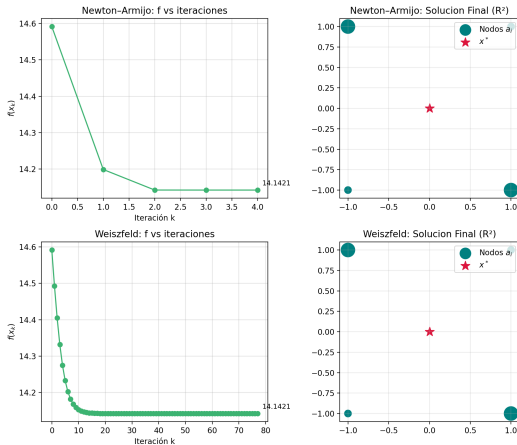


**Comparacion 3**  
Poligono Regular

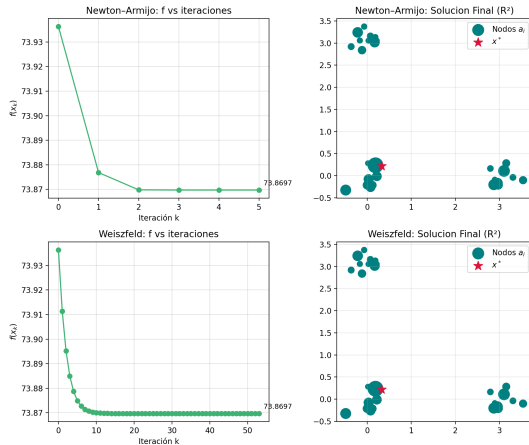


# Otros ejemplos en $\mathbb{R}^2$

**Comparación 4**  
Pesos Opuestos



**Comparación 5**  
Clusters Aleatorios





# Diseño experimental en alta dimensión

¿Qué pasa si variamos sistemáticamente  $m$  y  $n$ ?

- Se generaron instancias aleatorias con:

$$n \in \{2, \dots, 10\}, \quad m \in \{10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200, 300\}.$$

- Para cada par  $(m, n)$ :
  - $N = 300$  instancias,
  - nodos  $a_i$  uniformes en  $[0, 1]^n$ ,
  - pesos  $\omega_i > 0$  aleatorios.
- Ambos métodos se inicializaron desde el **mismo**  $x^{(0)}$  construido a partir del nodo  $a_p$ .

# Comparación cuantitativa

- A partir de los datos se calcularon medias y desvíos estándar, más razones del tipo:

$$\text{speedup}_{\text{iter}} = \frac{\text{iteraciones Weiszfeld}}{\text{iteraciones Newton}}, \quad \text{speedup}_{\text{time}} = \frac{\text{tiempo Weiszfeld}}{\text{tiempo Newton}}.$$

- En promedio se obtuvo:

$$\text{speedup}_{\text{iter}} \approx 2.8, \quad \text{speedup}_{\text{time}} \approx 1.82.$$

# Robustez e impacto de la inicialización

Con inicialización basada en nodos:

- Newton tuvo tasa de fallo prácticamente nula.
- Weiszfeld presentó algunos estancamientos.
- Si se reemplaza por un  $x^{(0)}$  arbitrario (ej. aleatorio en  $[0, 1]^n$ ), el desempeño de Weiszfeld empeora notablemente, requiere más iteraciones y hubo más casos donde no alcanza la tolerancia.

Una buena inicialización + Newton globalizado produce un método estable y muy eficiente para el problema de Fermat–Weber.

# Conclusiones

- El método de Newton globalizado constituye una alternativa claramente superior al esquema de punto fijo de Weiszfeld:
  - muchas menos iteraciones,
  - buena estabilidad numérica,
  - convergencia cuadrática cerca del óptimo.
- El costo extra por iteración (Hessiana + sistema lineal) se compensa en la mayoría de los escenarios prácticos.
- La inicialización basada en nodos es clave para mejorar la robustez global.

# Trabajo futuro

- **Restricciones adicionales:**
  - limitar la solución a una región factible (p.ej. “no alejarse demasiado de los nodos”),
  - incorporar restricciones lineales o de caja.
- **Otras normas:** estudiar versiones con norma  $\ell_1$ ,  $\ell_p$  o normas inducidas para distintas aplicaciones.
- **Extensiones algorítmicas:** variantes quasi-Newton

¡Muchas gracias!  
¿Preguntas?