

Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG  
Curso de Graduação em Engenharia Elétrica/Aeroespacial

# Linearização do modelo

## Etapas 5

Aluno: Davi Ferreira Santiago  
Matrícula: 2021020422  
Aluno: Leonardo Hemerly Menezes Collaço dos Santos  
Matrícula: 2020027849  
Aluno: João Pedro Tavares da Fonseca Lima  
Matrícula: 2020421962

Belo Horizonte, 6 de agosto de 2024

### Resumo

Quinta etapa do trabalho de simulação referente à disciplina de "Introdução ao Controle Automático de Aeronaves". Esta etapa consiste na linearização do modelo em torno da condição de equilíbrio de voo usando o *Simulink*. É utilizada a condição de equilíbrio de voo encontrada na Etapa 5 como ponto de operação no qual o modelo é linearizado em torno. O presente documento contém as funções de transferência encontradas, bem como a interpretação de cada uma delas, a representação em Espaço de Estados e a comparação de resposta entre os modelos não linear e linear local.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Linearização do modelo</b>	<b>4</b>
1.1	Funções de transferência obtidas . . . . .	4
1.1.1	Variáveis de estado em relação à deflexão de profundor . . . . .	4
1.1.2	Variáveis de estado em relação à variação da tração . . . . .	4
1.1.3	Modos longitudinais de resposta . . . . .	5
1.2	Representação em Espaço de Estados . . . . .	5
1.2.1	Autovalores da Matriz de Estado . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Comparação dos modelos não linear e linear local</b>	<b>6</b>

## 1 Linearização do modelo

Por meio da ferramenta *Model Linearizer* do *Simulink* o modelo da aeronave foi linearizado em torno da condição de equilíbrio de vôo encontrada na etapa anterior. Desse modo, em se tratando do ponto de operação encontrado (dinâmica longitudinal), onde se teve por premissa que as deflexões de aileron e leme são nulas, tem-se apenas funções de transferência não-nulas entre as variáveis da dinâmica longitudinal ( $h$ ,  $U$ ,  $W$ ,  $Q$  e  $\theta$ ) para deflexão de profundor e variação da tração.

### 1.1 Funções de transferência obtidas

#### 1.1.1 Variáveis de estado em relação à deflexão de profundor

$$\frac{H(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{6.113s^3 + 2.756s^2 - 546.5s - 13.99}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (1)$$

$$\frac{U(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{1.077s^4 + 0.009663s^3 + 3.612s^2 + 60.97s - 0.06447}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (2)$$

$$\frac{W(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-6.125s^4 - 233.4s^3 - 6.373s^2 - 6.682s + 0.0006899}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (3)$$

$$\frac{Q(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-2.625s^4 - 6.294s^3 - 0.2278s^2 - 1.104 \times 10^{-7}s - 5.019 \times 10^{-24}}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (4)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-2.625s^3 - 6.294s^2 - 0.2278s - 1.104 \times 10^{-7}}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (5)$$

Na forma zero-polo-ganho:

$$\frac{H(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{6.113(s + 9.671)(s - 9.246)(s + 0.02559)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \quad (6)$$

$$\frac{U(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{1.0774(s + 3.552)(s - 0.001057)(s^2 - 3.542s + 15.93)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \quad (7)$$

$$\frac{W(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-6.1251(s + 38.08)(s - 0.0001032)(s^2 + 0.02668s + 0.02866)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \quad (8)$$

$$\frac{Q(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-2.6253s(s + 2.361)(s + 0.03675)(s + 4.848 \times 10^{-7})}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \quad (9)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\Delta_E(s)} = \frac{-2.6253(s + 2.361)(s + 0.03675)(s + 4.848 \times 10^{-7})}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \quad (10)$$

#### 1.1.2 Variáveis de estado em relação à variação da tração

$$\frac{H(s)}{\Delta_T(s)} = \frac{-0.1085s^3 + 2.191s^2 - 36.17s + 6.513}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (11)$$

$$\frac{U(s)}{\Delta_T(s)} = \frac{10s^4 + 28.13s^3 + 38.97s^2 + 4.133s + 0.03061}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (12)$$

$$\frac{W(s)}{\Delta_T(s)} = \frac{-17.48s^3 - 1.316s^2 - 0.434s - 0.0003837}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (13)$$

$$\frac{Q(s)}{\Delta_T(s)} = \frac{-0.1706s^4 - 0.422s^3 + 0.06972s^2 - 5.864 \times 10^{-7}s + 1.668 \times 10^{-23}}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (14)$$

$$\frac{\Theta(s)}{\Delta_T(s)} = \frac{-0.1706s^3 - 0.422s^2 + 0.06972s - 5.864 \times 10^{-7}}{s^5 + 2.858s^4 + 4.003s^3 + 0.1152s^2 + 0.08747s + 1.534 \times 10^{-6}} \quad (15)$$

Na forma zero-polo-ganho:

$$\begin{aligned}\frac{H(s)}{\Delta_T(s)} &= \frac{-0.10851(s - 0.1821)(s^2 - 20.01s + 329.7)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \\ \frac{U(s)}{\Delta_T(s)} &= \frac{10(s + 0.1066)(s + 0.008007)(s^2 + 2.699s + 3.587)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \\ \frac{W(s)}{\Delta_T(s)} &= \frac{-17.483(s + 0.0008865)(s^2 + 0.07441s + 0.02476)}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \\ \frac{Q(s)}{\Delta_T(s)} &= \frac{-0.1706s(s + 2.629)(s - 0.1554)(s - 8.411 \times 10^{-6})}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)} \\ \frac{\Theta(s)}{\Delta_T(s)} &= \frac{-0.1706s(s + 2.629)(s - 0.1554)(s - 8.411 \times 10^{-6})}{(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)}\end{aligned}$$

### 1.1.3 Modos longitudinais de resposta

Os denominadores das funções de transferência anteriores são da forma  $(s + 1.754 \times 10^{-5})(s^2 + 0.01318s + 0.02218)(s^2 + 2.845s + 3.944)$ . Assim, identificam-se os modos longitudinais de resposta associados à cada função de transferência:

- **Modo fugoide:** possui frequência natural baixa e um amortecimento pequeno, sendo caracterizado pelo par de polos complexos e conjugados,  $s^2 + 0.01318s + 0.02218$ ;
- **Modo período curto:** possui frequência natural mais alta e um amortecimento maior, sendo caracterizado pelo par de polos complexos e conjugados,  $s^2 + 2.845s + 3.944$ .

## 1.2 Representação em Espaço de Estados

Tem-se também a representação alternativa na forma espaço de estados,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x} = [h \ U \ W \ Q \ \theta]'$ ,  $\mathbf{u} = [\delta_a \ \delta_e \ \delta_r \ \delta_t]'$ ,  $\mathbf{y} = [h \ Q \ \theta \ U \ W]'$  e:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 87.84 & -0.01085 & -0.9999 \\ -2.171 \times 10^{-6} & -0.382 & 0 & 4.739 \times 10^{-5} & -0.03376 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001355 & 0.9532 & -9.806 & -0.02842 & 0.08762 \\ 0.00103 & 87.83 & 0.1064 & -0.2499 & -2.448 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.625 & 0 & -0.1706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.077 & 0 & 10 \\ 0 & -6.125 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 1.2.1 Autovalores da Matriz de Estado

Calculando os autovalores da matriz de estado,  $\mathbf{A}$ , tem-se:

$$\lambda \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.4226 \pm j1.3857 \\ -0.0066 \pm j0.1488 \\ -1.754 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

## 2 Comparação dos modelos não linear e linear local

Finalmente, comparam-se as respostas dos modelos não linear e linearizado em torno da condição de equilíbrio. Isso é feito por meio da criação de um bloco *Simulink*, Fig. 1, que recebe por entradas nas funções de transferência os desvios das entradas de controle,  $\delta u$ , e tem as saídas somadas aos estados de equilíbrio para serem comparadas às saídas do modelo não linear.

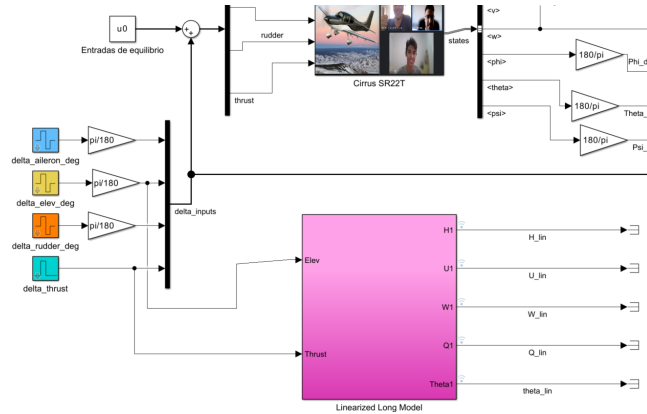


Figura 1: Bloco do modelo linear local projetado pelos discentes.

O interior de um bloco qualquer pode ser visto na Fig. 2; onde cada sub-bloco possui uma das funções de transferência anteriormente apresentadas em relação a cada uma das entradas não nulas, i.e. deflexão do profundor e variação da tração. As posições  $x0(\cdot)$  do vetor de dados  $x0$  contém os estados de equilíbrio, com valores exportados diretamente da condição de equilíbrio de voo encontrada na etapa anterior.

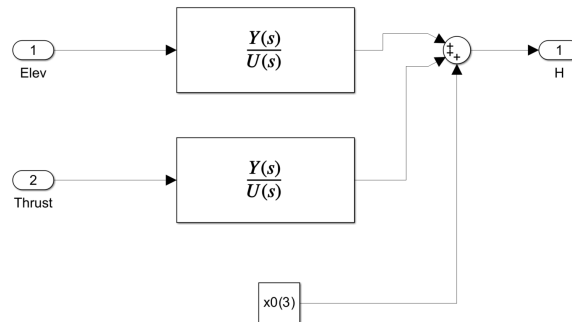


Figura 2: Bloco das funções de transferência de uma variável de estado projetado pelos discentes.

Assim, como mostrado na Fig. 3, aplicando-se um doublet como comando de profundor no desvio da entrada de controle,  $\delta u$ , tem-se por resultado a Fig. 4.

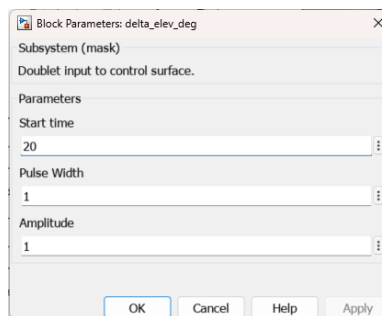


Figura 3: Doublet aplicado no comando de profundor.

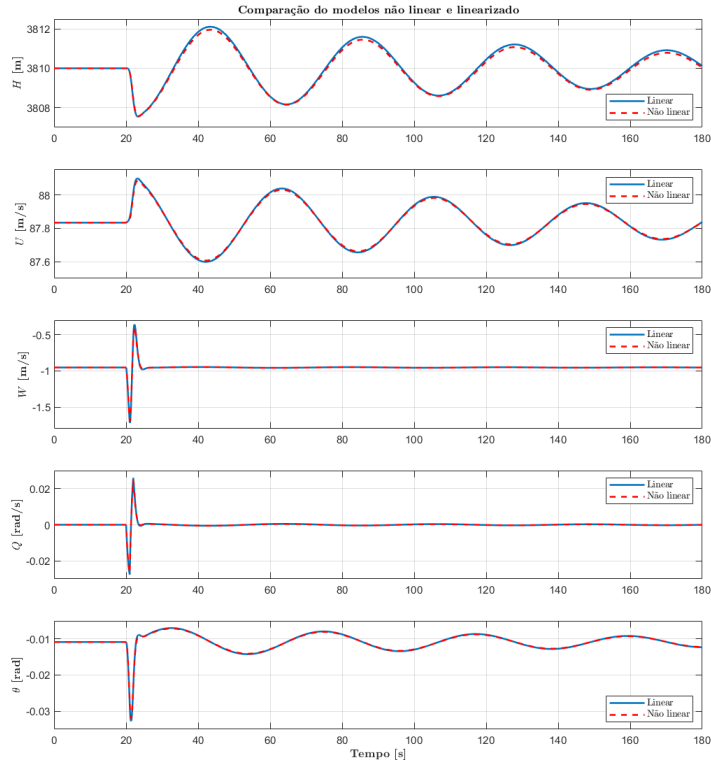


Figura 4: Comparação dos modelos não linear e linear local.

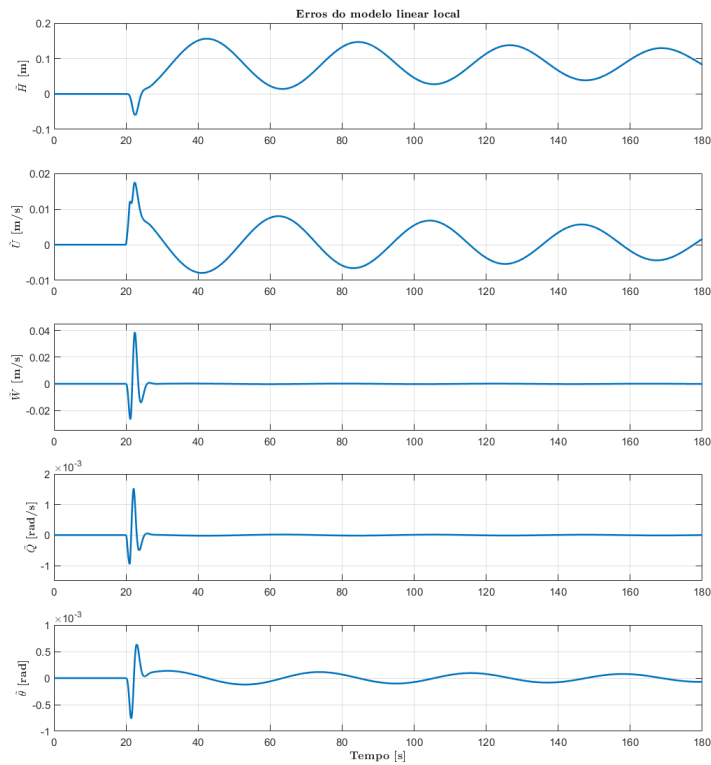


Figura 5: Erros do modelo linear local em relação ao não linear.

Desse modo, tendo por base a ligeira diferença de resposta entre os modelos - explicitada pelos pequenos erros verificados na Fig. 5 e ainda menores se tomados como relativos - valida-se a ideia de que o modelo linear local é uma boa aproximação para o modelo não linear.