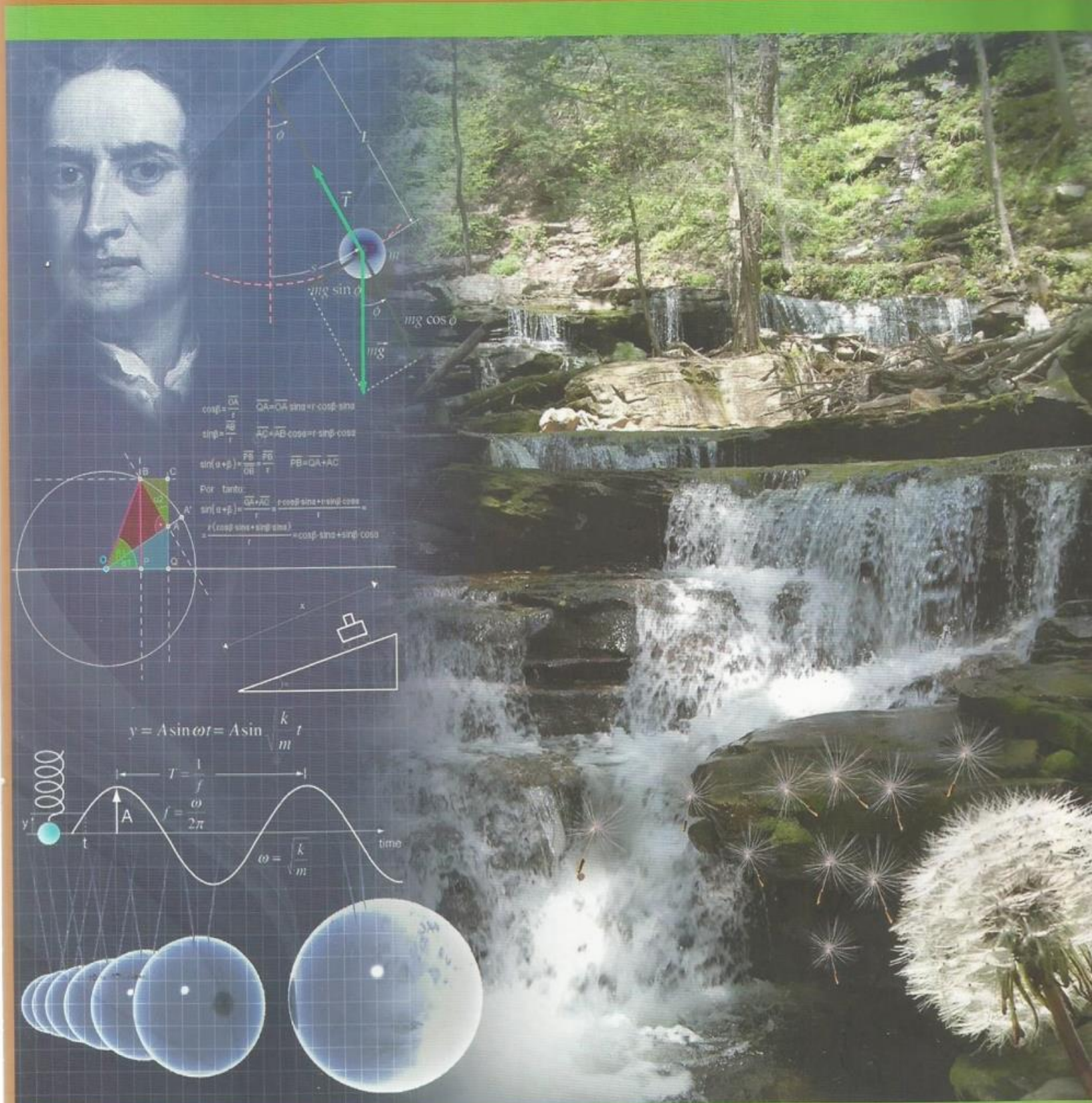


EL MOVIMIENTO Y SUS MECÁNICAS



¿Qué es una competencia?

El Acuerdo 442 de la Secretaría de Educación Pública define competencia como la integración de habilidades, conocimientos, actitudes y valores en un contexto específico. La meta de la formación como bachiller es que tú desarrolles las competencias que han sido definidas por la SEP como perfil de egreso para la Educación Media Superior. No se pretende que te dediques a memorizar información o que demuestres habilidades aisladas. El objetivo es que logres aplicar de manera efectiva tus conocimientos, habilidades, actitudes y valores en situaciones o problemas concretos.

Por eso cuando estudies, orienta tus esfuerzos a identificar los conceptos más importantes, a analizarlos con detenimiento para comprenderlos y reflexionar sobre cómo se relacionan con otros términos. Busca información adicional. Pero no te quedes allí, aprende cómo aplicar los saberes en situaciones y contextos propuestos en las actividades. Para acreditar el módulo Dinámica en la naturaleza: El movimiento, es básico que demuestres que eres capaz de analizar y resolver situaciones, problemas y casos que te exigen la articulación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

Este libro está diseñado con el propósito de aplicar las herramientas matemáticas de geometría, trigonometría y modelos matemáticos en el análisis de la dinámica del movimiento de los fenómenos naturales presentes en el entorno, empleados en el desarrollo de la ciencia y tecnología.

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA

Lee con atención las siguientes situaciones y realiza lo que se pide en cada una de ellas.

1. Un mago pide a un voluntario que piense en un número y a continuación, lo multiplique por 4; al resultado le sume 6; luego divida entre 2; sume el número que

pensó y finalmente reste 2. El voluntario obtiene como resultado el número 10.

¿Cuál es el número que pensó al principio?

- a) 3
- b) 6
- c) 1
- d) 0

2. La diagonal de un cuadrado tiene 10 cm de longitud. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

- a) 14.14
- b) 16.16
- c) 10.22
- d) 12.55

3. De las siguientes parejas de variables, señala cuáles son directamente proporcionales (DP), cuáles son inversamente proporcionales (IP) y cuáles no son ni lo uno ni lo otro. Explica brevemente el porqué de tu elección.

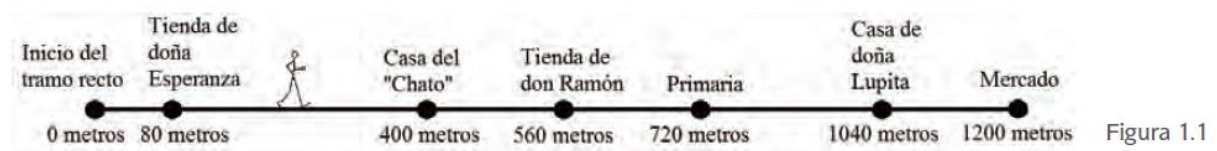
Parejas de Variables	Proporcionalidad
2.1 Radio de una circunferencia / Área encerrada por la circunferencia	
2.2 Número de trabajadores en una obra / Tiempo en que la obra quedará completa	
2.3 Radio de una circunferencia / Longitud de la circunferencia	
2.4 Flujo de agua en un grifo / Tiempo que el grifo tarda en llenar una pileta	
2.5 Diámetro de una circunferencia / Radio de la circunferencia	
2.6 Altura de una caja de base fija / Volumen de la caja	

Unidad I. Movimiento Rectilíneo

El propósito de esta unidad es que relaciones los conceptos de movimiento a situaciones de tu entorno y los interpretes desde diversos enfoques utilizando la medición y herramientas matemáticas.

El camino de Don Martín

Don Martín es un comerciante del municipio de Hermosillo en el Estado de Sonora. Todos los días sale de su casa a las siete de la mañana y camina hasta el mercado en la cabecera municipal, en donde atiende su local de venta de semillas y granos. En un buen tramo del camino, Don Martín camina en línea recta y va pasando frente a las casas y comercios de varios vecinos amigos suyos. En la figura 1.1 puedes ver una representación de ese tramo:



Los vecinos han notado que el comerciante es muy regular en sus recorridos, y hablando con ellos se pudo averiguar que siempre lo ven pasar a la misma hora. Así, fue posible armar la siguiente tabla, donde se muestra la hora a la que cada quien ve pasar a Don Martín:

Vecino	Hora a la que ve pasar a Don Martín
Doña Esperanza	7:11
"Chato"	7:15
Don Ramón	7:17
Conserje de la primaria	7:19
Doña Lupita	7:23

Tabla 1.1

A una cantidad (por ejemplo, una longitud, un tiempo, una temperatura, etcétera...) cuyo valor va cambiando conforme se desarrolla algún proceso, se le llama variable. Por otro lado, una cantidad que se mantiene en el mismo valor durante el desarrollo de un proceso se llama constante. Eso quiere decir que, en este caso, tenemos dos variables. ¿Habrá alguna constante?

Veamos:

La rapidez de un objeto (que puede ser una persona, un auto, un avión, cualquier cosa que se mueva) es una medida de qué tan rápido ese objeto recorre

determinada distancia. Para calcularla, se divide la distancia recorrida entre el tiempo que lleva recorrerla.

Ejemplo:

Un automóvil sale de Hermosillo rumbo a Ciudad Obregón, en el Estado de Sonora. La tabla nos muestra la distancia recorrida por el auto conforme pasa el tiempo:

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida (km)
0	0
10	15
30	45

La información de la tabla nos permite determinar varias características del movimiento que representa. Entre otras cosas, podemos saber cuál es la rapidez del automóvil en los primeros 10 minutos de recorrido.

El camino para responder esta pregunta requiere, primero, que comprendas qué se está preguntando. Queremos saber la **rapidez del vehículo** en sus primeros 10 minutos de recorrido. Ahora bien, la rapidez, de acuerdo con lo que acaba de verse, se calcula dividiendo la **distancia recorrida** entre el **tiempo que lleva recorrerla**. Si observas la tabla que registra el movimiento del automóvil, verás que en los primeros 10 minutos, recorrió 15 kilómetros. Entonces su rapidez en ese intervalo de tiempo se obtiene haciendo:

$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{15\text{km}}{10\text{min}} = 1.5\text{km}/\text{min}$$

Asegúrate de verificar que la operación es correcta. Además, nota que tanto la distancia recorrida como el tiempo transcurrido y la rapidez tienen unidades: la distancia está expresada en kilómetros, el tiempo en minutos, y la rapidez en kilómetros sobre minuto (que se acostumbra leer como “kilómetros por minuto”).

¿Cuál es su rapidez entre los 10 y los 30 minutos de viaje?

Observa de nuevo la tabla. A los 10 minutos, el auto había recorrido 15 kilómetros, mientras que a los 30 minutos ya llevaba 45 kilómetros. Si te das cuenta, entre

ambos momentos transcurrieron 20 minutos, y en ese tiempo el auto recorrió 30 kilómetros. Entonces, su rapidez fue de:

$$\frac{30\text{km}}{20\text{min}} = 1.5\text{km}/\text{min}$$

Lo que significa que el auto no alteró su rapidez, al menos de acuerdo con lo que se puede saber con los datos de la tabla.

Convirtiendo unidades

Como mencionamos hace un momento, las cantidades físicas se miden empleando diversas unidades: metros para la distancia, segundos para el tiempo, grados centígrados para la temperatura, etcétera. Ahora bien, una misma cantidad se puede medir empleando varias unidades. Por ejemplo, la distancia se puede medir en metros, pero también en kilómetros, en centímetros, en pies, en pulgadas, etc.

Para evitar confusiones innecesarias, a nivel internacional se ha acordado emplear las mismas unidades para medir cantidades físicas. Esta estandarización recibe el nombre de Sistema Internacional de Unidades (conocido como **SI**).

Antes de que se estableciera el Sistema Internacional (**SI**), era común encontrar un sinnúmero de unidades de medida que no solo variaban entre distintas regiones sino incluso entre poblaciones de una misma región. Esto acarreaba grandes dificultades para el desarrollo de la actividad comercial, pues los mercaderes debían realizar conversiones de unidades que podían llegar a ser bastante engorrosas. Durante la Revolución Francesa, la idea de unificar las unidades de medida cobró fuerza y con la creación del sistema métrico decimal (basado en tres unidades básicas: el metro, el kilogramo y el segundo) se dio el primer paso hacia el establecimiento del actual Sistema Internacional de Unidades, (el cual contempla siete unidades básicas), que hasta el día de hoy continúa siendo de enorme utilidad para toda clase de actividades, desde el comercio hasta la investigación científica de vanguardia.

Ejemplo

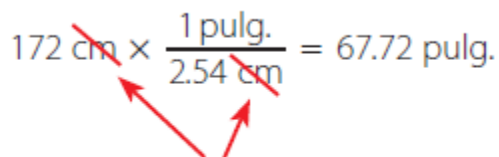
Daniel mide 172 cm de estatura y quiere saber la equivalencia en **pulgadas**. Es decir, Daniel quiere saber cuántas pulgadas mide de estatura. Se conoce que una pulgada equivale a 2.54 cm (1 pulg = 2.54 cm), así que la conversión puede hacerla recurriendo a un “truco” consistente en multiplicar sus 172 cm de estatura por una fracción muy especial, una que equivalencia sea 1. Como sabes, cuando una cantidad se multiplica por 1, no sufre ninguna modificación; el “truco” es elegir esa fracción de la siguiente manera:

- El numerador y el denominador van a ser formados por lo equivalente a 1. Si deseamos convertir a pulgadas. El numerador será 1 pulgada y de denominador lo equivalente en centímetros.
- El numerador debe estar expresado en las unidades a las que Daniel quiere convertir su estatura, mientras que el denominador debe estar expresado en las unidades en las que ya está escrita su estatura.

En este caso, lo anterior significa que el numerador debe estar expresado en pulgadas, mientras que el denominador debe estarlo en centímetros. Una fracción que cumple con ambas condiciones es

$$\frac{1 \text{ pulg.}}{2.54 \text{ cm}}$$

Ahora, sólo hay que multiplicar la estatura que se nos proporcionó por esta fracción. Se multiplica $172 \times 1 = 172$ y después se divide entre 2.54. Lo que sucederá es lo siguiente:

$$172 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ pulg.}}{2.54 \text{ cm}} = 67.72 \text{ pulg.}$$


Los "cm" se cancelan. ¿Por qué?

Al efectuar la multiplicación, los “cm” se cancelan, y sólo sobreviven las pulgadas. Como la fracción vale 1, la estatura no sufrió modificación alguna, aparte de haber quedado expresada en pulgadas. Así que los 172 cm de estatura de Daniel equivalen a 67.72 pulgadas.

Movimiento rectilíneo uniforme

Volvamos al recorrido de Don Martín. Un movimiento que como el suyo se realiza en línea recta, y en el que la rapidez se mantiene constante, se llama movimiento rectilíneo uniforme.

Por ejemplo, detente un momento y analiza las siguientes figuras, ¿Cuál de los vehículos exhibe las características del movimiento rectilíneo uniforme? ¿Por qué?



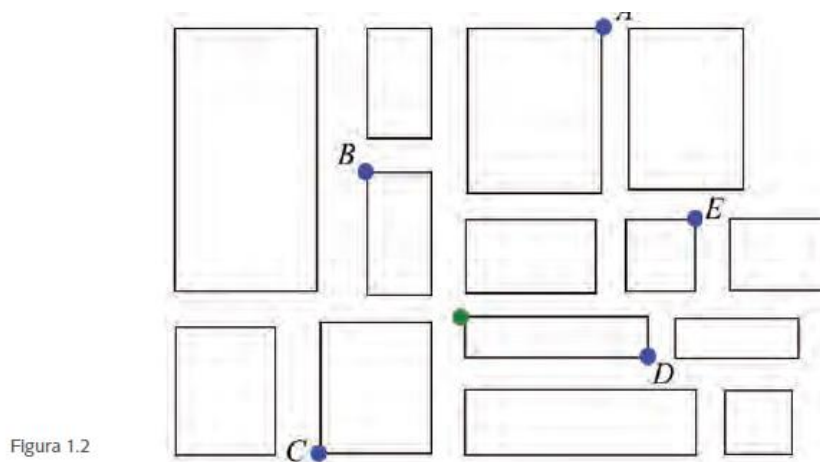
Funciones y movimiento

En diversas situaciones del mundo real hay variables involucradas (por ejemplo, en los casos que hemos estudiado hay un tiempo transcurrido y una distancia recorrida). Más aún, es muy frecuente que estas variables estén relacionadas entre sí, de modo que si se conoce el valor de una de ellas en un momento dado, es posible calcular el valor de la otra. Una relación de este tipo se conoce como función. Una función puede representarse de varias maneras, y aquí exploraremos algunas de ellas. En matemáticas se suele distinguir a las dos variables de una función llamándolas variable dependiente y variable independiente. Cuando se estudia el movimiento, el tiempo se considera como la variable independiente (el paso del tiempo no depende de nada, es “independiente”) mientras que, por ejemplo, la distancia es la variable dependiente (la distancia recorrida por un objeto “depende” del tiempo que lleva moviéndose).

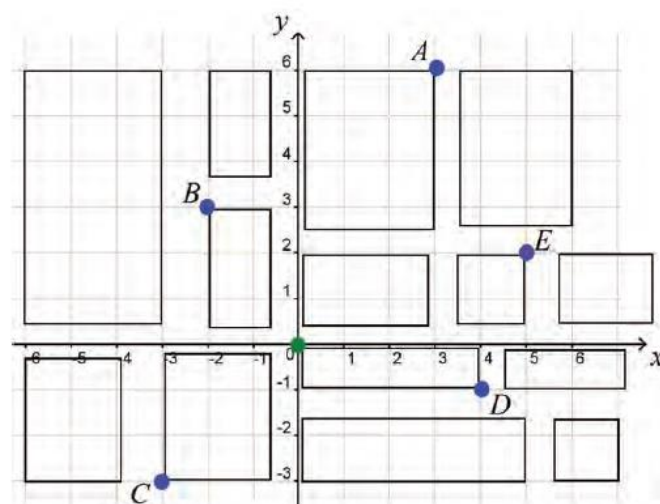
El tiempo siempre se considera como la variable independiente en cualquier movimiento. Las otras variables (que pueden ser la distancia, la rapidez, entre otras) se consideran variables dependientes: dependen del tiempo transcurrido.

El plano cartesiano

La tabla 1.2 es una manera de representar la función (recuerda, la relación entre variables) tiempo-distancia para el recorrido de Don Martín. Existen otras formas de representar una función; una de ellas son las gráficas. Para comprender la manera en que esto se puede llevar a cabo, necesitas comprender primero lo que es el plano cartesiano. Observa la figura 1.2, que representa la vista superior de un piso de oficinas. El punto verde representa la posición de Juan, uno de los oficinistas que trabaja en el lugar, mientras que los puntos azules indican las posiciones de cinco de sus compañeros de trabajo.



Una manera de ubicar con precisión las posiciones de todos los oficinistas es mediante un plano cartesiano, como se aprecia en la figura 1.3.



El plano cartesiano consiste precisamente en un plano, sobre el cual se han dibujado dos ejes (llamados ejes cartesianos) que no son más que rectas numéricas. Cada eje representa los valores de una variable determinada; es usual que la variable representada en el eje horizontal se etiquete con la letra x , mientras que la representada en el eje vertical se suele etiquetar con la letra y .

En el caso de la figura 1.3, ambos ejes representan longitudes, pero no necesariamente debe ser así (se puede representar en ellos cualquier variable). El punto en el que se cruzan ambos ejes se llama origen de coordenadas; en este caso, el origen de coordenadas coincide con la posición de Juan. La figura 1.4 es una versión abstracta de las anteriores, en la que se han conservado sólo los ejes cartesianos y los puntos que indican la posición de los cinco compañeros de Juan:

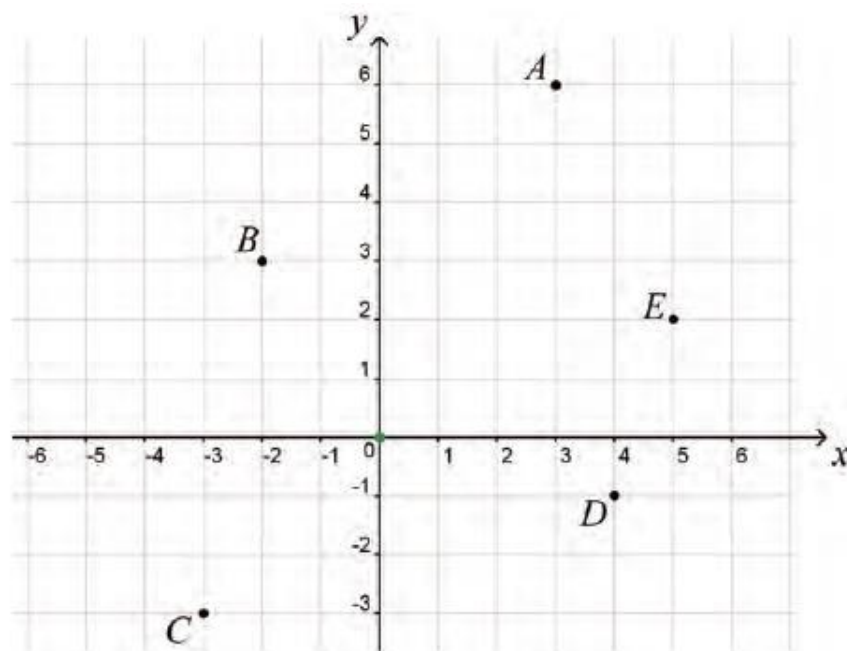


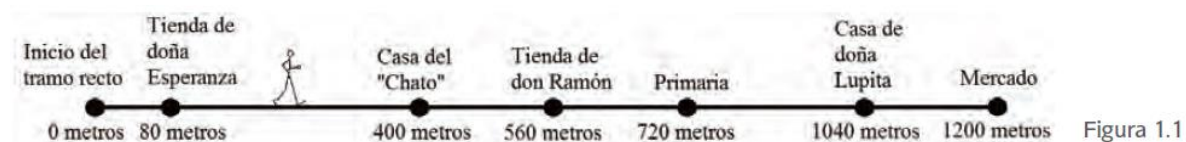
Figura 1.4

La forma de ubicar un punto en el plano (en este caso cada punto corresponde a la posición de los cinco oficinistas) es asignarle dos números que constituirán sus coordenadas; estos números corresponden a la distancia que hay que desplazarse a lo largo de cada eje (partiendo desde el origen, y comenzando siempre por el eje horizontal) para llegar al punto en cuestión.

Por ejemplo, para llegar desde el origen (la posición de Juan) hasta la posición del oficinista A, se deben recorrer tres unidades en la dirección positiva del eje horizontal, y después seis unidades en la dirección positiva del eje vertical. Esto se escribe (3, 6). Esas son las coordenadas del punto A. De esta manera, a todo punto en el plano le corresponde una pareja de números, sus coordenadas, que indican su ubicación respecto al origen de coordenadas. Por último, es importante saber que, en un plano cartesiano, al eje vertical también se le llama eje de las ordenadas, mientras que el horizontal recibe el nombre de eje de las abscisas.

ACTIVIDAD 1

1. Analiza la situación de Don Martín retomando la figura 1.1 y la tabla 1.1, para responder las siguientes preguntas:



Vecino	Hora a la que ve pasar a Don Martín
Doña Esperanza	7:11
"Chato"	7:15
Don Ramón	7:17
Conserje de la primaria	7:19
Doña Lupita	7:23

Tabla 1.1

A. ¿Cuál es la rapidez de Don Martín cuando va de la tienda de Doña Esperanza a la casa de su amigo "El Chato"?

- a) 80 m/min
- b) 70 m/min
- c) 90 m/min
- d) 60 m/seg

B. ¿Cuál es su rapidez al ir de la casa de “El Chato” a la tienda de Don Ramón?

- a) 80 m/min
- b) 70 m/min
- c) 90 m/min
- d) 60 m/seg

C. ¿Y al moverse de la tienda de Don Ramón a la primaria?

- a) 80 m/min
- b) 70 m/min
- c) 90 m/min
- d) 60 m/seg

D. Calcula también su rapidez al ir de la primaria a la casa de doña Lupita, y finalmente al trasladarse de la casa de doña Lupita al mercado.

- a) 80 m/min
- b) 70 m/min
- c) 90 m/min
- d) 60 m/seg

E. La rapidez de Don Martín en su recorrido, ¿es variable o constante?

- a) Constante
- b) Variable

2. En el siguiente problema, convertiremos la estatura de la señora María en pies, conocemos que la estatura de María es de 168 centímetros, ayúdala a conocer su estatura en pies. Recuerda que debes investigar cuántos centímetros equivale un pie.

- a) 5.51 pies
- b) 0.18 pies
- c) 4 pies
- d) 55.1 pies

3. Ahora trata de resolver la siguiente situación. Un automóvil se mueve a 100 km/h. ¿Cuántos metros recorre cada minuto?

- a) 1666.6 m/min
- b) 166.6 m/min
- c) 100 m/min
- d) 116 m/min

4. Supón que el avión que lleva la ayuda a un pueblo, viaja a 200 km/h. Calcula su velocidad en m/s.

- a) 55.5 m/s
- b) 100 m/s
- c) 40.5 m/s
- d) 66.6 m/min

5. Tomemos como base el recorrido de Don Martín, recuerda que Don Martín recorre 80 metros cada minuto. Entonces puedes calcular a los cuántos minutos había recorrido 400 metros, y también cuántos metros llevaba recorridos después de 9 minutos. Tomándolo con calma y razonando cuidadosamente lograrás llenar todos los espacios. La tabla siguiente ilustra el tiempo trascurrido por Don Martín y la distancia recorrida. Reflexiona cuidadosamente y completa los espacios vacíos:

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros)
0	0
	80
	400
	560
9	
	1040
15	

6. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos B, C, D y E?

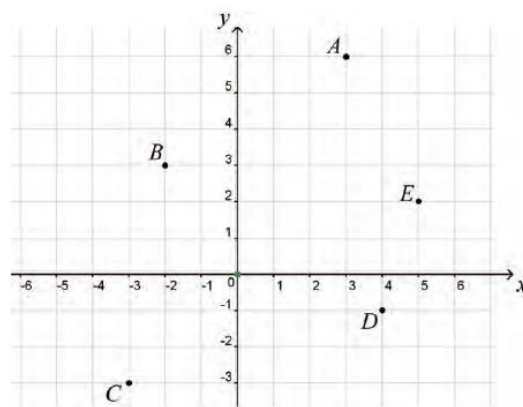


Figura 1.4

- a) B(-2,3), C(-3,-3), D(4,-1), E(5,2)
- b) B(-2,3), C(-3,3), D(4,1), E(5,2)
- c) B(2,3), C(-3,-3), D(4,-1), E(5,-2)
- d) B(2,3), C(-3,3), D(4,1), E(5,-2)

Representando funciones

Volveremos a la que trabajamos anteriormente. Aquí está completa:

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros)
0	0
1	80

Puedes considerar a cada pareja tiempo-distancia como las coordenadas de un punto en un plano cartesiano, en el que la variable independiente (recuerda, el tiempo) se representa en el eje horizontal mientras que la variable dependiente (en este caso, la distancia) se representa en el eje vertical. Mira la figura 1.5

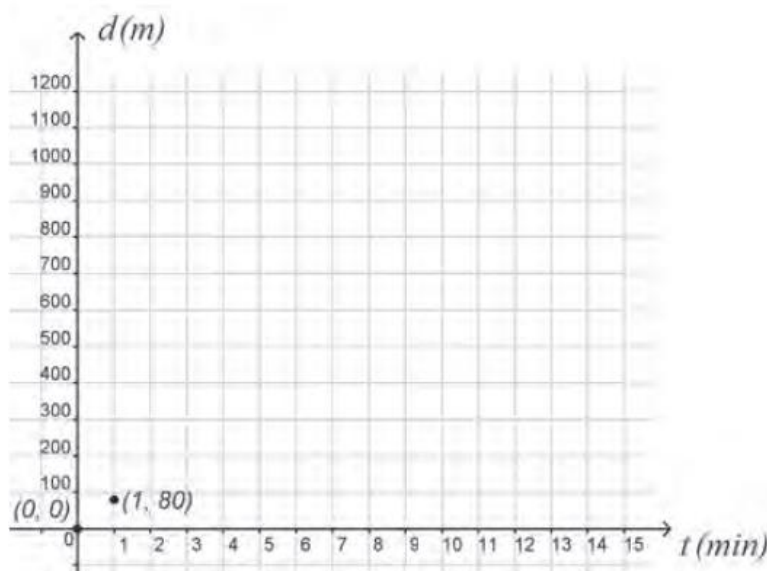


Figura 1.5

Las letras d y t significan, respectivamente, distancia y tiempo. Es usual representar a las variables con letras, y así lo haremos en adelante. Cuando se escribe $d(m)$ se está diciendo que la distancia se mide en metros, mientras que $t(\text{min})$ indica que el tiempo se mide en minutos.

En esta figura ya aparecen graficados dos puntos: el $(0,0)$ que corresponde al primer renglón de la tabla, donde $t = 0$ y $d = 0$. También aparece el punto $(1,80)$, que corresponde al segundo renglón donde $t = 1$ y $d = 80$.

Analiza cuidadosamente los datos que contiene y escribe una ecuación que se ajuste a ella. Para ello, sólo pregúntate: ¿qué operaciones aritméticas hay que efectuar con cada valor de t para obtener el correspondiente valor de d ? (desde luego, en todos los casos las operaciones deben ser idénticas).

Analicemos el siguiente ejemplo:

Una hormiga sale de su hormiguero y se mueve en línea recta alejándose de él. Metro y cronómetro en mano, vamos tomando medidas de la distancia (d) que ha recorrido y del tiempo (t) que ha pasado desde que salió del hormiguero. Con esas medidas se construye la tabla siguiente:

t (minutos)	d (metros)
0	0
2	4
3	6
4	8

Quisiéramos obtener una ecuación que nos permita calcular los distintos valores de d a partir de los correspondientes valores de t . Si observas con atención, puedes darte cuenta de que si se multiplican los valores de t por 2, se obtienen los correspondientes valores de d . Esto significa que:

$$d = 2t$$

con lo que tenemos la ecuación que queríamos.

Analiza un segundo ejemplo:

Esta otra tabla describe el movimiento de una segunda hormiga, que para el momento en que echamos a andar nuestro cronómetro ya se había alejado cierta distancia del hormiguero. Tomando mediciones similares a las del caso anterior, se obtiene esta tabla:

t (minutos)	d (metros)
0	10
2	12
3	13
4	14

Nuevamente, queremos una ecuación que permita calcular los valores de d a partir de los de t . Esta vez el patrón es un poco distinto, pero si lo piensas un poco descubrirás que los valores de d se obtienen al sumar 10 a los de t . Esto se escribe

$$d = t + 10$$

la cual es la ecuación que estábamos buscando.

Pon mucha atención al siguiente ejemplo:

En el caso de que la ecuación fuera $d = 4t$ Podríamos calcular cuántos minutos deben pasar para recorrer 40 metros, si sustituimos el valor $d = 40$ (recuerda, d es la distancia recorrida) en la ecuación. Tendríamos $40 = 4t$ Y podemos despejar a t de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 40 &= 4t && \text{Esta es la ecuación una vez que sustituimos } d=40 \\
 \Rightarrow \frac{40}{4} &= t && \text{Dividimos entre 4 ambos lados de la ecuación} \\
 \Rightarrow 10 &= t && \text{Tenemos nuestro resultado}
 \end{aligned}$$

Entonces, para recorrer 40 metros en este ejemplo, deben pasar 10 minutos.

Resumiendo, una función es la relación de dependencia entre dos variables, llamadas dependiente e independiente, de manera que, si se conoce el valor de una de ellas, puede obtenerse el valor de la otra. Existen muchas maneras de representar una función. Entre ellas, tres nos interesan particularmente: tablas, gráficas y ecuaciones, recuerda que una función se llama lineal si sucede que:

- Su tabla presenta valores proporcionales,
- Su gráfica es una línea recta, y
- Su ecuación es lineal.

Las mañanas sabatinas de Citlalli

Hasta el momento has estudiado movimientos rectilíneos uniformes que, al graficarse en el plano cartesiano, arrojan rectas que parten del origen del plano (revisa tus gráficas). Pero no siempre tiene que ser así. Analicemos la situación de Pablo y Citlalli para estudiar otros tipos de movimiento.

Pablo y Citlalli son muy buenos amigos. Son vecinos de la misma colonia en la Hermosillo, y sus casas están separadas por una distancia de 60 metros. Todos los sábados por la mañana Citlalli sale a tomar su clase de inglés a un centro de idiomas cercano. Es una chica a la que le gusta mucho caminar así que va a su clase a pie, recorriendo 50 metros cada minuto en línea recta, siguiendo la avenida sobre la que están: su casa, la casa de Pablo y el centro de idiomas (en ese orden).

Tiempo (t) (min)	Distancia (d) (m)
0	60
1	110
2	160
4	260
5	310
6	360
7	410
8	460
10	560

Ahora bien, a diferencia de las gráficas que hemos encontrado hasta el momento, esta recta no pasa por el origen. Esto se debe a que, en el instante $t = 0$, Citlalli no estaba a 0 metros de Pablo, sino a 60 metros de él. Este valor de la variable distancia, cuando la variable tiempo vale cero, se llama ordenada al origen.

En una función lineal, la ordenada al origen es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero. Gráficamente, la ordenada al origen es el punto en donde la recta corta al eje de las ordenadas.

Sistemas de referencia

Probablemente hayas escuchado una famosa frase según la cual “todo es relativo”. En física, eso resulta en cierto modo correcto, y en el estudio del movimiento es una afirmación bastante importante. La gráfica que representa el movimiento de Citlalli se dibujó tomando en cuenta datos de tiempo transcurrido y distancia recorrida... pero la distancia se estaba midiendo respecto a su amigo Pablo. Eso ocasionó que la gráfica no pasara por el origen y tuviera un aspecto como este:

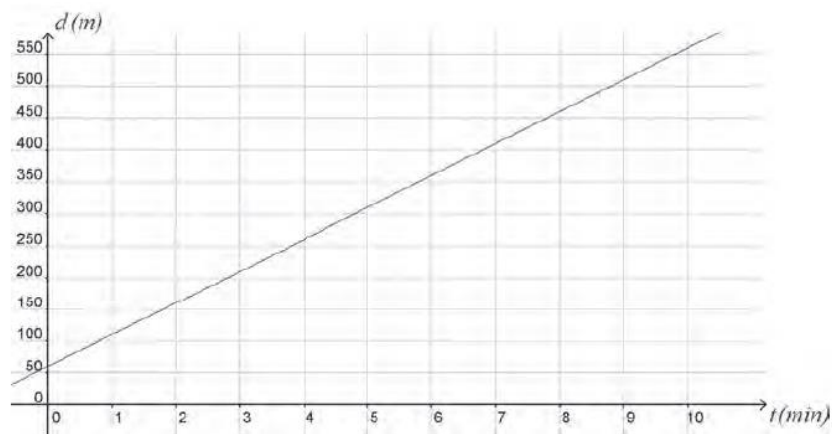


Figura 1.7

Pero ¿qué habría sucedido en caso de medir las distancias respecto a Rosario, la mamá de Citlalli, quien vive con ella y pasa la mañana en casa? Justo antes de ponerse en camino ($t = 0$), la distancia d entre Citlalli y su madre es cero metros. Luego, Citlalli sale de casa y comienza a avanzar 50 metros cada minuto. Esto nos dará una gráfica como esta:

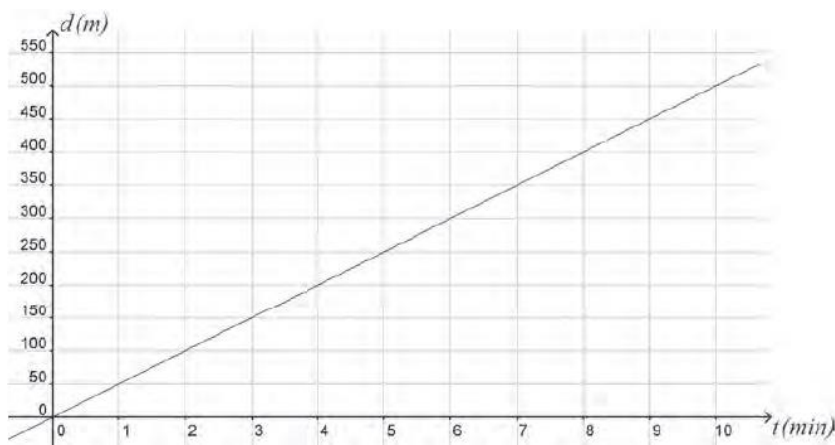


Figura 1.8

Esta vez la recta sí pasa por el origen.

Los sistemas de referencia suelen representarse con la ayuda de un plano cartesiano; todo lo que hay que hacer es especificar en dónde se colocará el origen de ese plano. En el caso de Citlalli, su movimiento se verá de una manera si el origen del sistema de referencia es Pablo, y de otra distinta si es Rosario.

¿Proporcionalidad en el movimiento de Citlalli?

Vamos a revisar la definición de Proporcionales: dos variables son proporcionales si cuando una cambia de valor, la otra también lo hace y además lo hace en la misma “proporción” que la primera. Por ejemplo, si la primera aumenta al doble, la segunda se incrementa también al doble.

Volvamos a la tabla, acerca de la trayectoria de Citlali:

Tiempo (t) (min)	Distancia (d) (m)
0	60
1	110
2	160
4	260
5	310
6	360
7	410
8	460
10	560

¿Son proporcionales los valores de las variables d y t ?

Es posible que no lo parezca a primera vista, pero en realidad esta tabla sí esconde Proporcionalidad.

Para calcular los distintos incrementos que sufre t al pasar de una fila a la siguiente (es decir, cuánto aumenta de una fila a la que sigue), y haz lo propio con los correspondientes incrementos para d .

Ejemplo

Al pasar de la segunda fila a la tercera, el tiempo se incrementa en 1 minuto. Correspondientemente, la distancia se incrementa en 50 metros. La razón “incremento en distancia” / “incremento en tiempo” es

$$\frac{50 \text{ metros}}{1 \text{ minuto}} = 50 \text{ m/min}$$

Por otro lado, al pasar de la tercera fila a la cuarta, el tiempo se incrementa en 2 minutos, mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. La razón “incremento en distancia” / “incremento en tiempo” es ahora

$$\frac{100 \text{ metros}}{2 \text{ minutos}} = 50 \text{ m/min}$$

Entonces ambas razones son iguales, y efectivamente hay proporcionalidad.

Te toca: calcula las razones “incremento en distancia” / “incremento en tiempo” para el resto de las filas, y determina si la proporcionalidad se mantiene o no.

Ahora vayamos un poco más lejos. Habrás notado que cuando dos cantidades son proporcionales, la razón que se forma entre ellas es una constante. Esta constante recibe el nombre de “constante de proporcionalidad”. En este caso, ¿cuánto vale la constante de proporcionalidad? Ese valor, ¿lo habías visto antes en el movimiento de Citlalli?

- En un movimiento rectilíneo uniforme, los incrementos de tiempo y de distancia son cantidades proporcionales.
- La constante de proporcionalidad entre ambos incrementos es igual a la rapidez del objeto móvil.
- La pendiente de una recta es un número que mide la “inclinación” de dicha recta. Si consideramos dos puntos que pertenezcan a la recta, la pendiente es la razón “desplazamiento vertical” / “desplazamiento horizontal” al ir de un punto al otro.

La constante de proporcionalidad también recibe el nombre de pendiente, sobre todo cuando se trabaja con la gráfica que representa el movimiento en cuestión. En el caso de Citlalli, la gráfica que corresponde a su movimiento se muestra de nuevo a continuación:

En la gráfica, la constante de proporcionalidad —la pendiente— se puede calcular fácilmente, con un proceso completamente análogo al que se lleva a cabo cuando se tiene la tabla; por ejemplo, observa los puntos B y C. Para pasar de uno a otro, el tiempo debe aumentar en 2 minutos mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. Entonces la pendiente vale, como ya sabíamos, $100 \text{ metros} / 2 \text{ minutos} = 50 \text{ m/min}$.

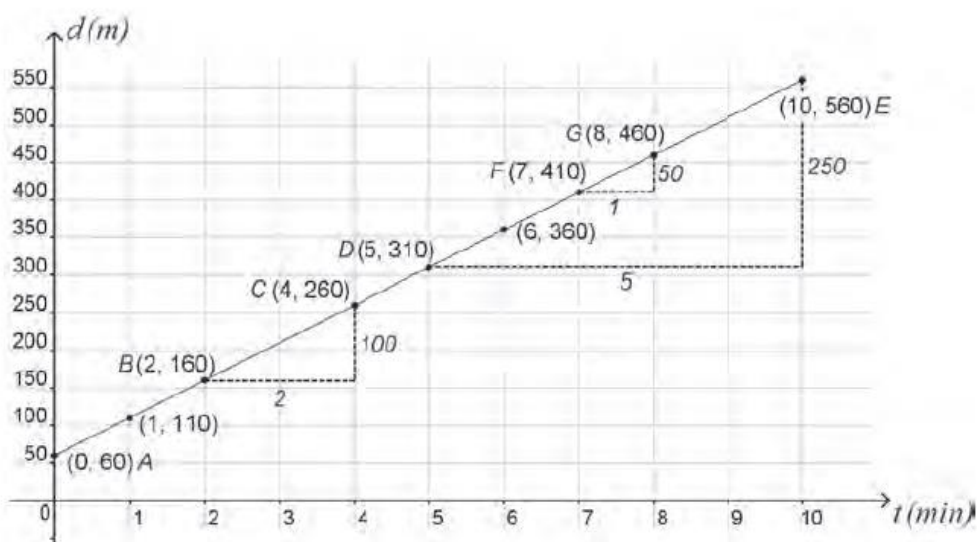


Figura 1.9

La razón de que a la constante de proporcionalidad se le llame “pendiente” es que su valor determina qué tan “empinada” será la recta, de manera que una pendiente grande dará una recta muy “empinada”, y viceversa.

Citlalli de regreso

Cuando Citlalli sale de su clase de inglés, va a visitar a Pablo. La gráfica siguiente representa el movimiento de la chica, visto desde el sistema de referencia de Pablo:

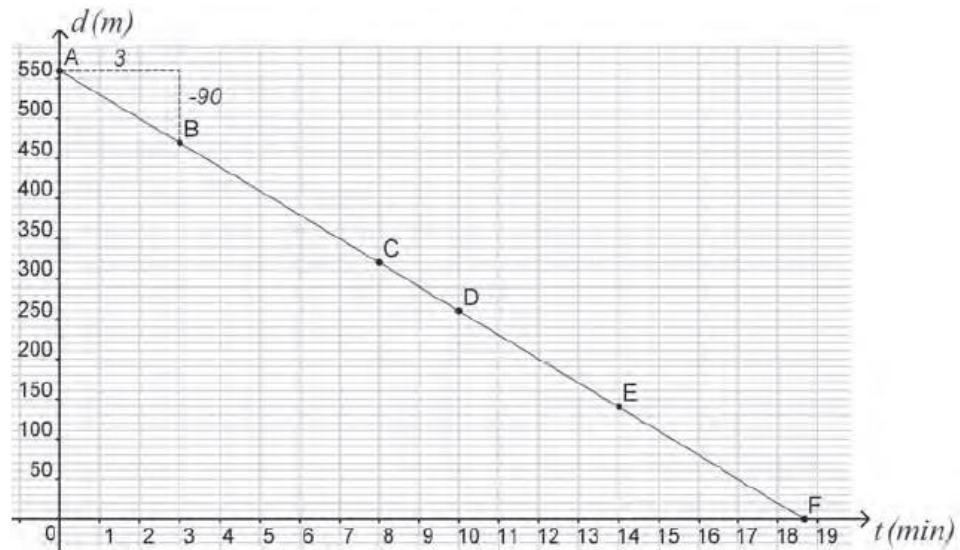


Figura 1.10

Calculemos la rapidez de Citlalli cuando va del punto A al B. Para ir de uno a otro, ella recorre 90 metros (observa la figura 1.10 cuidadosamente) mientras pasan 3 minutos. Entonces su rapidez es

$$v = \frac{-90 \text{ metros}}{3 \text{ minutos}} = -30 \text{ m / min}$$

(para representar a la rapidez usaremos la letra v , de “velocidad”; como veremos más adelante, rapidez y velocidad son dos conceptos diferentes, pero por el momento podemos considerarlos equivalentes).

¿Por qué se tomó negativa la distancia que recorre Citlalli en este tramo? La razón es que, como se puede deducir observando la gráfica, al avanzar el tiempo esa distancia no aumenta sino disminuye (lo que significa que la chica se está acercando a casa de Pablo). Cuando una cantidad aumenta su valor su incremento es positivo, pero si lo disminuye, el incremento se considera negativo.

Esto tiene como consecuencia que su rapidez -la pendiente de la función- sea también negativa. Gráficamente, la recta está “dirigida” hacia abajo.

Ejemplo

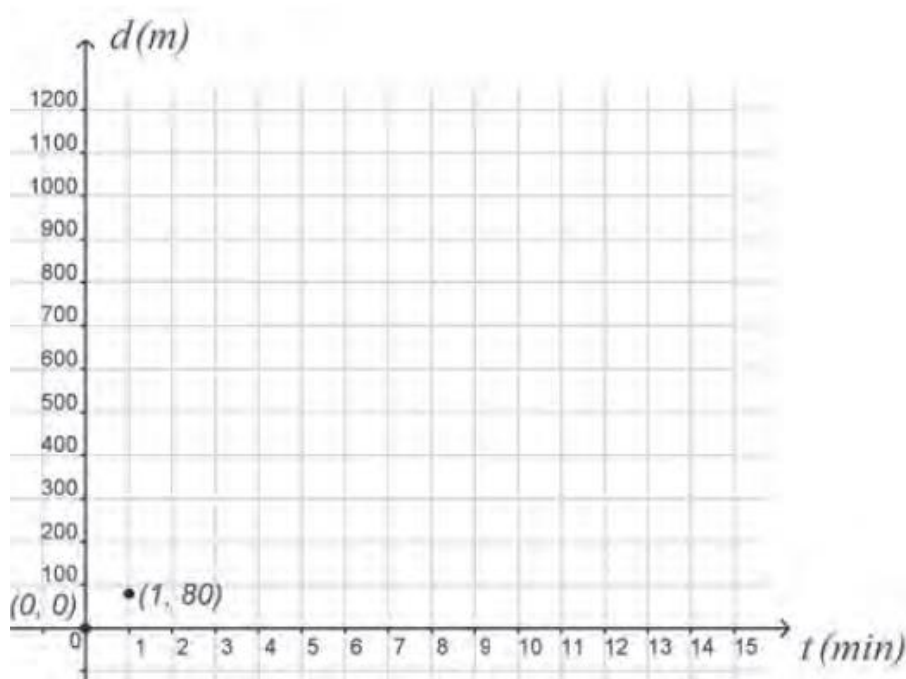
Si la ecuación fuera $d = -20t + 50$ y quisiéramos saber cuánto tiempo debe transcurrir para que la distancia d valga 10 metros, sólo necesitamos sustituir el valor $d = 10$ en la ecuación y despejar t :

$10 = -20t + 50$	Esta es la ecuación, con el valor de d ya sustituido.
$\Rightarrow 10 - 50 = -20t + 50 - 50$	Se resta 50 a ambos lados de la ecuación.
$\Rightarrow -40 = -20t$	En el miembro izquierdo, 10 menos 50 da -40. En el derecho, 50 menos 50 da cero, y ya no se escribe.
$\Rightarrow \frac{-40}{-20} = \frac{-20t}{-20}$	Se dividen entre -20 ambos miembros de la ecuación.
$\Rightarrow 2 = t$	En el miembro izquierdo, -40 entre -20 da 2. En el derecho, -20 entre -20 da 1, y sólo se escribe la t . Hemos terminado.

En el ejemplo que acabas de analizar, la variable tiempo da como resultado igual a 2 después de realizar los respectivos despejes en la suposición de que la variable distancia $d = 10$, recuerda que el planteamiento inicial fue determinar el tiempo que tarda en recorrer Citlali 10 metros, considerando que la ecuación de su trayectoria es $d = -20t + 50$, por lo que tuvimos que despejar la variable t y concluir que tardaría 2 minutos en recorrer dicha distancia.

ACTIVIDAD 2

1. Ubica en el siguiente plano cartesiano los puntos que corresponden a los demás renglones de la tabla que a continuación se te muestra, y observa con detenimiento el modo en que quedan ubicados. Posteriormente une todos los puntos, ¿Qué figura conocida forman?



Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros)
0	0
1	80
5	400
7	560
9	630
13	1040
15	1200

- a) Un cuadrado
- b) Un triángulo
- c) Una línea recta
- d) Un rombo

2. Trabajemos con la tabla 1.2, escribe la ecuación que permite calcular los valores de d a partir de los de t .

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros)
0	0
1	80
5	400
7	560
9	630
13	1040
15	1200

- a) $d = 80 t$
- b) $d = 40 t$
- c) $d = 80 + t$
- d) $d = 40 - t$

3. Empleando la ecuación **$d = 80 t$** que hallaste para el caso de la trayectoria de Don Martín, responde las siguientes preguntas y relaciónalas con la respuesta correcta:

Preguntas	Respuestas
Cuando han pasado 11 minutos, ¿qué distancia se ha recorrido?	
Si han pasado 14 minutos, ¿cuántos metros lleva recorridos?	
¿Cuántos minutos deben transcurrir para que se recorran 160 metros?	
¿En cuánto tiempo se recorrerían 640 metros?	

4. Usa papel y lápiz para dibujar un plano cartesiano en el que grafiques los datos de la siguiente tabla al cual describe el movimiento de Citlali. Examina atentamente tanto la tabla como la gráfica que elaboraste, y responde:

Tiempo (t) (min)	Distancia (d) (m)
0	60
1	110
2	160
4	260
5	310
6	360
7	410
8	460
10	560

Preguntas	Respuestas
¿El movimiento de Citlalli es rectilíneo uniforme?	
Encuentra una ecuación que se ajuste a los valores de la tabla. (Sugerencia: a diferencia de las tablas que hemos manejado hasta el momento, esta vez harán falta dos operaciones aritméticas para obtener d a partir de t). Escribe la ecuación.	

5. Observa la gráfica y responde:

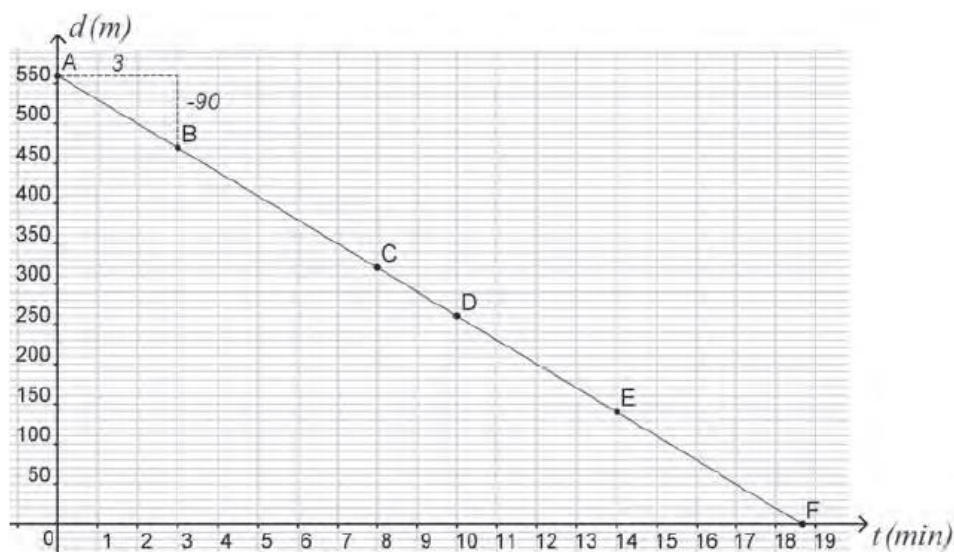


Figura 1.10

Preguntas	Respuestas
¿Cuánto vale la ordenada al origen en esta función?	560
Ahora, encuentra la ecuación que representa el movimiento de Citlalli rumbo a la casa de Pablo (sugerencia: recuerda que la ecuación deberá tener la forma, en donde v es la rapidez de quien se mueve mientras d_0 es su posición inicial respecto al origen del sistema de referencia).	
¿En cuánto tiempo llega Citlalli a casa de Pablo?	
¿Cuántos minutos deben transcurrir para que Citlalli se encuentre a 100 metros de la casa de Pablo?	
Cuando Citlalli lleva 11 minutos de camino, ¿a qué distancia está de la casa de su amigo?	

FIN DE LA ACTIVIDAD

Otra clase de movimiento

Un automóvil está detenido frente a un semáforo de la avenida Cinco, en la ciudad de Obregón, Sonora. El semáforo cambia al verde, y el automóvil arranca. Su movimiento queda descrito por la gráfica siguiente:

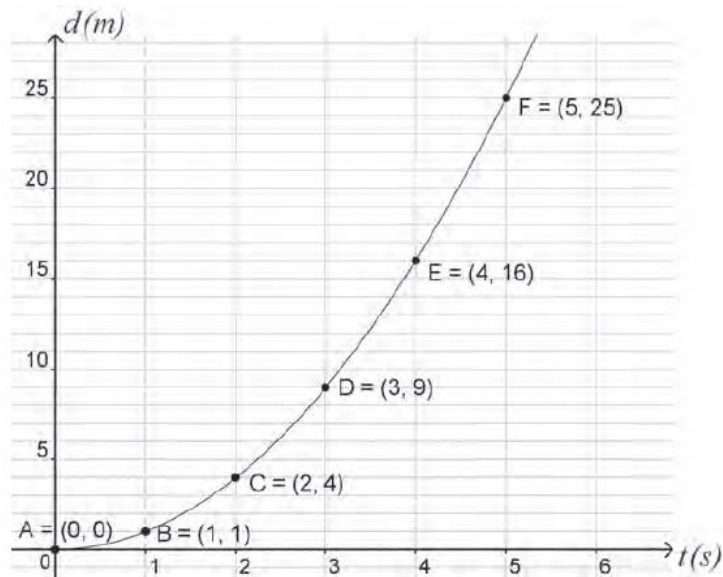


Figura 1.11

El auto se está moviendo en línea recta a lo largo de la avenida. ¿Por qué entonces la gráfica no es una línea recta? Analiza cuidadosamente la gráfica.

Ahora vamos a calcular la rapidez del punto A al punto B, recuerda que la rapidez se calcula dividiendo “distancia recorrida” entre “tiempo empleado para recorrerla”. Entonces:

Al ir de A a B, recorrió de 0 a 1 metro, en un tiempo de 0 a 1 segundo, por lo que $d=1\text{m}$ y $t=1\text{s}$, es decir que la rapidez es de 1m entre $1\text{s} = 1\text{ m/s}$.

¿La rapidez será la misma en los recorridos de B-C, C-D, D- E, E-F?, Recordemos que para que una trayectoria tenga un movimiento rectilíneo uniforme la rapidez debe ser constante.

El cambio en la velocidad por unidad de tiempo recibe el nombre de aceleración. Esto se escribe:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Cambio en la velocidad}}{\text{Tiempo que toma el cambio}}$$

Observa que hasta ahora no habíamos hablado de “velocidad”, sino de “rapidez”. Este cambio de lenguaje, que podría parecer inofensivo, es bastante importante en física. En el lenguaje informal, se suele usar rapidez y velocidad como sinónimos; sin embargo, hablando en forma estricta existe una diferencia entre ambos conceptos: si sólo decimos que un objeto se mueve a 10 m/s, estamos especificando su rapidez. Pero si decimos que se mueve a 10 m/s en dirección sur, estamos dando su velocidad.

Cuando se especifican tanto la rapidez como la dirección de un movimiento, se está hablando de su **velocidad**.

Ejemplo de movimiento en el que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es: Un automóvil que toma una serie de curvas manteniendo una rapidez de 50 km/h. La rapidez es constante porque el automóvil recorre la misma distancia en el mismo tiempo; la velocidad no lo es porque el movimiento cambia continuamente de dirección.

Otro ejemplo de movimiento en el que la rapidez es constante pero la velocidad no lo es: Un niño hace girar sobre su cabeza un objeto de plástico amarrado a una cuerda. La rapidez del objeto de plástico se mantiene constante si el niño no lo hace girar a veces más lento y a veces más rápido; sin embargo, la velocidad cambia de cualquier manera porque el objeto se mueve en círculos, lo que significa que cambia continuamente su dirección.

Así que la diferencia principal entre velocidad y rapidez es que la primera especifica la dirección en la que ocurre el movimiento; por el momento seguiremos estudiando

movimientos rectilíneos, porque los cambios de dirección no los necesitamos aún, y podemos hablar de rapidez y velocidad como si fueran sinónimos. Pero es importante que desde ahora seas consciente de que no lo son.

Volvamos a la aceleración:

En el automóvil de la sección anterior, se deduce que está acelerando, pues como habrás notado, su rapidez está cambiando. La aceleración de un objeto es una medida de qué tan rápido cambia su rapidez (piensa con cuidado en esta frase). Puedes notar que cada segundo, la velocidad del automóvil se incrementa en 2 metros por segundo. Esa es su aceleración (el cambio en la velocidad por unidad de tiempo). Además, esta aceleración sí es constante: 2 metros por segundo cada segundo, o lo que es lo mismo, 2 metros por segundo por segundo.

Nota que el doble uso de “por segundo” viene del hecho de que la unidad de tiempo interviene dos veces: una vez en la velocidad, y otra más en el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio de velocidad. Esto se abrevia escribiendo metros/segundo², o empleando abreviaturas, m/s².

Si la distancia se expresa en metros y el tiempo en segundos, las unidades de la aceleración serán m/s².

Entonces, la aceleración de este automóvil es de 2 m/s². Reflexiona sobre la naturaleza de la aceleración. ¿Por qué esta sección lleva el título “el cambio del cambio”?

Ecuación del movimiento uniformemente acelerado

Analizaremos la ecuación que describe un movimiento rectilíneo uniforme. La ecuación es $d = vt + d_0$. Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme. En el caso de un movimiento de ese tipo, la velocidad es constante. Pero si ese no es el caso, la ecuación anterior debe tomarlo en cuenta.

Hasta el momento hemos trabajado con la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme, ahora vamos a poner atención en una ecuación que usaremos para calcular el movimiento uniforme acelerado, donde trabajaremos con variables distancia (d), aceleración (a), tiempo (t), velocidad inicial (v_0) y distancia inicial (d_0)

$$d = vt + d_0$$

Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme

$$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$$

Ecuación del movimiento uniformemente acelerado

Ambas ecuaciones son fundamentales en el estudio del movimiento; tómate el tiempo de aprendértelas y más aún, de entender el significado de cada uno de sus componentes.

Retoma el movimiento del automóvil de la sección anterior.

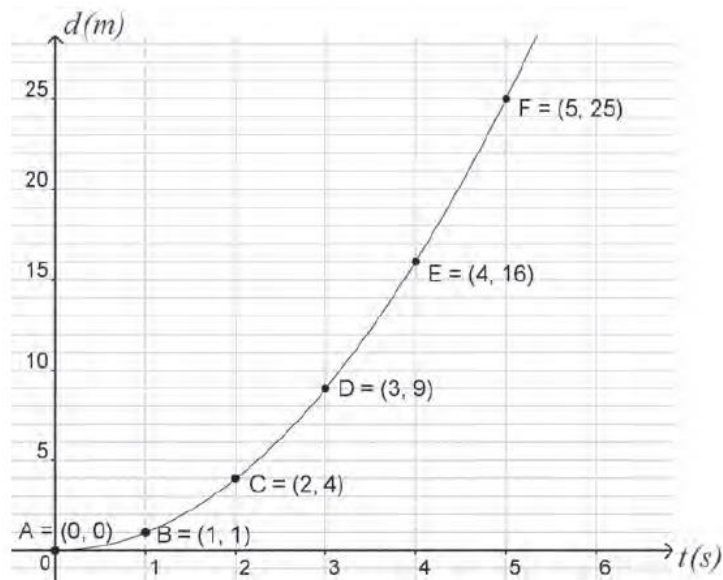


Figura 1.11

Aplica la ecuación del movimiento uniformemente acelerado,

$$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$$

a ese movimiento en particular; conoces el valor de su aceleración y también el de su velocidad inicial. Coloca tu sistema de referencia de manera que la posición inicial del auto sea cero (¿dónde debes colocarlo?).

Al sustituir los valores de la aceleración (2 m/s^2), velocidad inicial (0 m/s) y posición inicial (que también vale cero, si colocas el origen de tu sistema de referencia en la posición desde la que el automóvil comienza a moverse), en la ecuación:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + d_0$$

, se obtendrá

$$d = \frac{1}{2}(2)t^2 + 0(t) + 0$$

que al simplificar se convierte en $d = t^2$

Ejemplo

Encontrar la ubicación del vehículo cuando han pasado 16 segundos, tomando en cuenta que su aceleración es de 2m/s^2 , utiliza la ecuación del movimiento uniformemente acelerado.

$$d = \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(16\text{s})^2 + 0\text{m/s} + 0\text{m}$$

d= 256 metros.

Lo que significa que cuando han pasado 16 segundos, el vehículo ya se encuentra a 256 m de distancia.

¡Fuera abajo!

Todo el mundo sabe lo que sucede si tomas un objeto, lo levantas a cierta altura sobre el piso y lo sueltas. Por razones que parecerían obvias, esta clase de movimiento se conoce como “caída libre”. Sin embargo, en la vida cotidiana es difícil que un cuerpo llegue a estar en una verdadera “caída libre”: eso significaría que nada, absolutamente nada, se opone a su movimiento... y en la superficie de nuestro planeta eso es particularmente difícil. Emplea la ecuación del movimiento uniformemente acelerado,

$$d = \frac{1}{2} a^2t + v_0t + d_0$$

junto con la definición de aceleración, analiza los siguientes ejemplos; ignora en todos los casos el efecto de la fricción del aire (que en la vida real, se opondría a la

aceleración de la gravedad, modificando con ello la ecuación). Considera además que la velocidad inicial es cero.

Ejemplo

¿Desde qué altura debería saltar un paracaidista para llegar al suelo 10 segundos después?

Suponiendo que al saltar el paracaidista no adquiere velocidad inicial y que el origen del sistema de referencia se coloca en el suelo, directamente debajo de donde ocurre el salto, su ecuación de movimiento será:

$$d = \frac{1}{2}(-9.81)t^2 + 0(t) + d_0$$

Recuerda que no conocemos la posición inicial d_0 ; de hecho, esa es la pregunta. La ecuación se simplifica y queda

$$d = -4.90t^2 + d_0$$

Cuando el paracaidista llegue al suelo, su posición será $d = 0$. Como, además queremos que le tome un tiempo de 10 segundos alcanzar esa posición, la ecuación quedará

$$0 = -4.90(10)^2 + d_0$$

Simplificamos y despejamos d_0 , de modo que tenemos

$$0 = -490 + d_0$$

$$d_0 = 490 \text{ metros.}$$

Desde luego, recuerda que, por simplicidad, estamos ignorando el efecto de la fricción del aire. De tomarla en cuenta, la ecuación del movimiento tendría que incluir un término que correspondiera a la “desaceleración” provocada por dicha fricción. Si así lo hiciéramos y tomáramos a la fricción en consideración, ¿cómo crees que se modificarían nuestros resultados? Al llegar al suelo en 10 segundos, ¿el paracaidista tendría que haber saltado desde una posición más alta o más baja? Reflexiona un momento.

¿Qué factores crees que sean estos? ¿Cómo harías para minimizarlos y lograr valores experimentales que coincidan con lo predicho por la teoría?

Los científicos se preocupan por lograr lo opuesto: mejorar la teoría para que tome en cuenta más y más factores de la realidad, de modo que las predicciones teóricas se aproximen de manera cada vez más precisa a lo que se observa en la naturaleza.

ACTIVIDAD 3

1. Analiza cuidadosamente la gráfica. En secciones anteriores has dibujado gráficas a partir de tablas; aquí puedes hacer el proceso inverso, construir una tabla a partir de la gráfica. Hazlo y observa con cuidado los datos que obtengas. Empléalos para ayudarte a completar el siguiente cuadro comparativo:

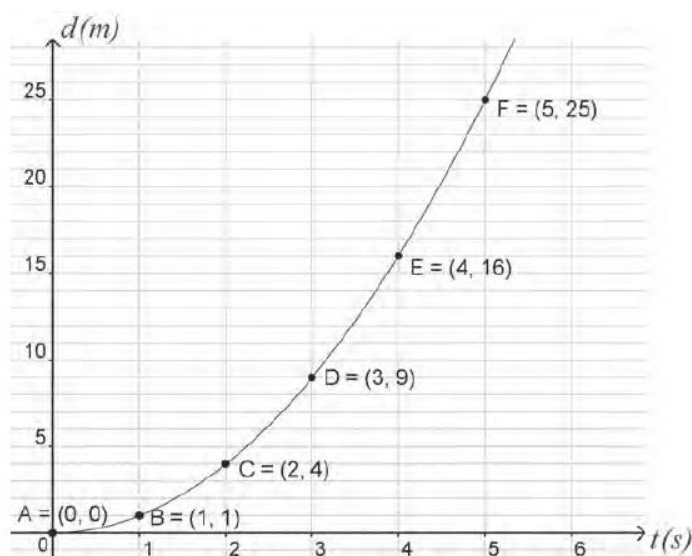
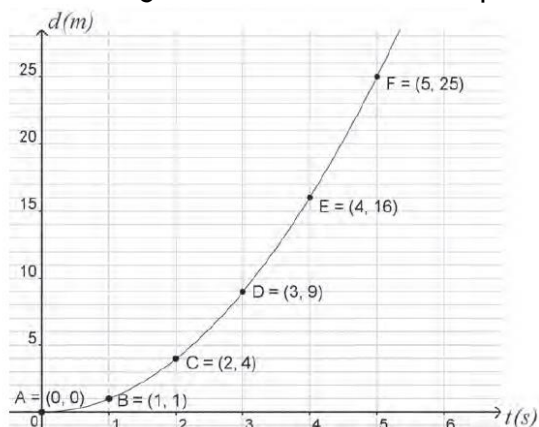


Figura 1.11

	Movimiento rectilíneo uniforme	Nuevo tipo de movimiento
Gráficas tiempo-distancia		Curvas
Tablas tiempo-distancia	Incrementos proporcionales	
Rapidez		No constante

2. Calcula con base en la gráfica la rapidez del automóvil al ir del punto A a B, de B a C, de C a D, de D a E y de E a F. ¿Qué tanto cambia la rapidez de un intervalo



al siguiente?

Recorrido	Distancia (d)	Tiempo (t)	Rapidez
A – B	1 m	1 s	1 m/s
B – C	3 m	1 s	3 m/s
C – D	5 m	1 s	5 m/s
D – E	7 m	1 s	7 m/s
E – F	9 m	1 s	9 m/s

3. Encontrar la ubicación o el tiempo, del vehículo que comienza de un punto cero y tienen una aceleración promedio de 2m/s^2 , utiliza la ecuación del movimiento uniformemente acelerado y calcula:

Pregunta	Respuesta
¿Qué distancia habrá recorrido después de 3 segundos de recorrido?	
¿Qué distancia habrá recorrido después de 10 segundos de recorrido?	
¿En cuánto tiempo habrá recorrido 500 metros desde su posición inicial?	
¿En cuánto tiempo habrá recorrido 700 metros desde su posición inicial?	

4. ¿Desde qué altura debería saltar un paracaidista para llegar al suelo 20 segundos después?

- a) 196 metros.
- b) 960 metros.
- c) 19,600 metros.
- d) 1,960 metros.

5. La altura sobre el suelo de la azotea de la Torre Mayor de la Ciudad de México es de 225 metros aproximadamente. ¿En cuánto **tiempo** (t) llegaría al suelo un objeto que se deja caer desde ahí? Con las suposiciones de velocidad inicial cero, origen del sistema de referencia colocado directamente debajo del punto desde el cual se deja caer el objeto.

- a) 6.78 segundos.
- b) 16.78 segundos
- c) 61.78 segundos
- d) 67.8 segundos

FIN DE LA ACTIIVIDAD

Funciones cuadráticas

En las secciones Funciones y movimiento, y Representando funciones, estudiaste que una función es una relación entre dos variables, de tal manera que, si conoces el valor de una de ellas, puedes calcular el valor de la otra. También aprendiste que una función se puede representar mediante ecuaciones, tablas y gráficas (entre otros medios de los que no nos ocuparemos aquí).

Las funciones que trataste en aquellas secciones se representaban mediante ecuaciones, por lo que se les llama también funciones lineales. Desde la sección Otra clase de movimiento, han aparecido funciones que se representan mediante ecuaciones cuadráticas. Estas funciones se llaman, precisamente, funciones cuadráticas. La gráfica de una función cuadrática no será nunca una línea recta (como en las funciones lineales) sino una curva que recibe el nombre de “parábola”.

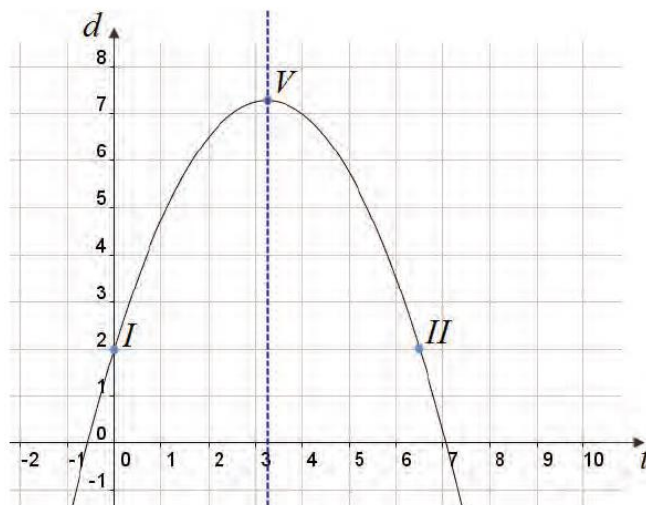


Figura 1.15

Observa con atención la figura 1.15, y reflexiona las siguientes preguntas:

I. ¿A los cuántos segundos alcanza esta pelota su altura máxima?

II. ¿Cuál será esa altura máxima?

Tomate unos minutos para buscar las respuestas a estas preguntas.

Como puedes observar, en la gráfica podemos analizar los puntos de cada uno de los instantes de la pelota, es decir podemos ver la altura que tenía y en qué tiempo estaba en cada uno de los puntos.

Recuerda que el plano cartesiano cuenta con dos ejes el eje vertical d y el eje horizontal t , donde uno mide la distancia y el otro el tiempo de la trayectoria de la pelota.

Ahora bien, observa nuevamente la gráfica de la figura 1.15 y contesta las preguntas:

Como puedes observar la altura y la distancia no se puede determinar de manera exacta sin embargo nos podemos dar una gran idea de sus valores, la altura máxima un poco más de 7 metros y fue en el tiempo de un poco más de 3 segundos. A continuación, veremos la manera calcular dichas cantidades de una forma precisa.

El análisis que acabamos de efectuar lo llevamos a cabo para la ecuación particular:

$$d = -0.5 t^2 + 3.25t + 2$$

Sin embargo, es posible resolverlo y aplicarlo para la ecuación general

$$y = ax^2 + bx + c$$

En la que las variables son x , y , mientras que a , b y c son números constantes conocidos.

Antes de entrar de lleno a la aplicación de la fórmula general, te mostraremos un par de fórmulas para encontrar coordenadas del vértice de una parábola, por lo que a continuación se muestran dichas fórmulas:

Tomemos como ejemplo la ecuación de la figura 1.15.

$$d = -0.5 t^2 + 3.25t + 2$$

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad y = c - \frac{b^2}{4a}$$

Localizaremos los valores de la coordenada del vértice compuesta por (x,y). Primero que nada, debemos identificar quienes son las constantes sustituyendo la fórmula de la parábola con la ecuación de la fórmula general.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$d = -0.5 t^2 + 3.25t + 2$$

Sustituimos:

$$y = d$$

$$x = t$$

$$a = -0.5$$

$$b = 3.25$$

$$c = 2$$

Aplicamos las fórmulas para encontrar los vértices de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad y = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$x = \frac{-3.25}{2(-0.5)} = 3.25$$

Pon atención en los signos, por tal motivo al final el resultado es positivo.

$$y = 2 - \frac{(3.25)^2}{4(-0.5)} = 7.28$$

Atención en los signos, por tal motivo al final el resultado es positivo.

Por lo tanto, podemos concluir que la pelota recorre alcanza su altura máxima de 7.28 metros en un tiempo de 3.25 segundos. Por lo que la coordenada del vértice sería **V(3.25,7.28)**.

Algunas técnicas especiales

Trabajar con funciones cuadráticas requerirá en general de algunas técnicas especiales que no hacían falta cuando las funciones (y sus ecuaciones) eran lineales; lee con atención el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Esperando en la parada del transporte público, ves pasar a un motociclista. Se mueve acelerando

a razón de 8 m/s^2 , a partir de una velocidad inicial de 10 m/s (que llevaba en el momento en que

lo viste pasar) y desde una posición inicial de 4 m (respecto al origen del sistema de referencia,

que colocaremos en el lugar desde donde estás tú). Empleando la ecuación

$$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$$

la ecuación del movimiento para este motociclista resulta ser

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} (8)t^2 + 10t + 4 \\ \Rightarrow d &= 4t^2 + 10t + 4 \end{aligned}$$

Con ella, es posible averiguar la posición del motociclista luego de transcurridos 12 segundos; simplemente tomamos la ecuación y sustituimos los 12 segundos en el lugar de t :

$$\begin{aligned} d &= 4(12)^2 + 10(12) + 4 \\ \Rightarrow d &= 4(144) + 120 + 4 \\ \Rightarrow d &= 576 + 120 + 4 \\ \Rightarrow d &= 700 \end{aligned}$$

Lo que significa que después de 12 segundos, el motociclista se encuentra a 700 metros del origen del sistema de referencia (que, como habíamos comentado, coincide con tu posición). Si, por otra parte, se quiere saber el tiempo que al

motociclista le tomará llegar a los 1000 metros de distancia, se toma la ecuación y se sustituyen esos 1000 m en el lugar de d:

$$1000 = 4t^2 + 10t + 4$$

Resolver esta ecuación cuadrática requiere técnicas particulares. Una de ellas es el empleo de la llamada “fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas”. Para emplear esa fórmula, lo primero que se necesita es igualar la ecuación a cero:

$$\begin{aligned} 0 &= 4t^2 + 10t + 4 - 1000 \\ \Rightarrow 0 &= 4t^2 + 10t - 996 \end{aligned}$$

La fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas establece que en una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

El valor de x se puede hallar a partir de los valores de a, b y c al hacer

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso queremos resolver la ecuación

$$4t^2 + 10t - 996 = 0$$

De manera que a = 4, b = 10 y c = -996. Entonces, la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas se convierte en

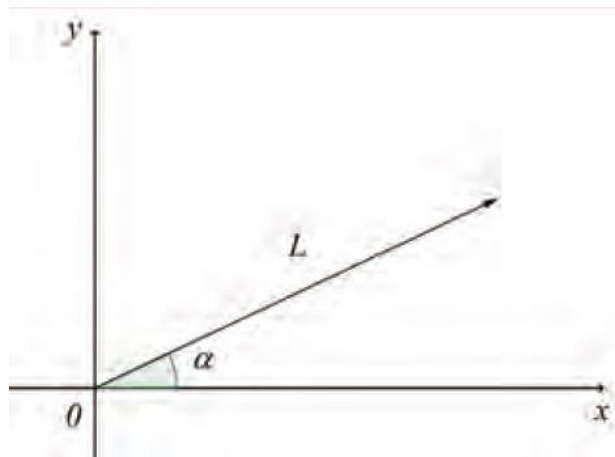
$$\begin{aligned} t &= \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(4)(-996)}}{2(4)} \\ t &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 15936}}{8} \\ t &= \frac{-10 \pm \sqrt{16036}}{8} \\ t &= \frac{-10 \pm 126.63}{8} = \begin{matrix} t_1 = 14.58 \\ t_2 = -17.08 \end{matrix} \end{aligned}$$

Asegúrate de seguir todas las operaciones expuestas y de entender cada una de ellas. El resultado final indica que el tiempo tiene dos posibles valores, uno positivo y el otro negativo; (provenientes de cada uno de los dos signos que se le asignan a la raíz cuadrada); nos quedaremos con el valor positivo, pues el tiempo no toma valores negativos y por lo tanto esa solución, aunque correcta, no tiene un significado físico.

Entonces, para que el motociclista recorra una distancia de 1000 metros, deberán transcurrir aproximadamente 14.58 segundos.

Vectores y una breve introducción a la trigonometría

Cuando en la sección *El cambio del cambio* hablábamos sobre la diferencia entre **rapidez** y **velocidad**, dijimos que la rapidez sólo contempla una magnitud (cuánta distancia recorre un objeto por unidad de tiempo) mientras que la velocidad incluye, además, una dirección. Una cantidad que sólo requiere especificar una magnitud (como la rapidez) se llama **escalar**. Por su parte, una cantidad que (como la velocidad) necesita que se especifique tanto su magnitud como su dirección recibe el nombre de **vector**.



Escalar: un escalar es una cantidad que, para quedar completamente especificada, sólo requiere que se proporcione su magnitud. Por ejemplo, el tiempo es un escalar; no tiene “dirección”, y para especificar por completo un intervalo de tiempo basta

con decir cuál es su duración. Si sólo se dice que un tren viaja a 50 km/h, se está diciendo su rapidez, un escalar. Cuando se especifica también su dirección, se está hablando de su velocidad, un vector.

Vector: cantidad que, para quedar completamente especificada, requiere de magnitud y dirección. Por ejemplo, la velocidad es un vector: no es suficiente con decir que el viento sopla con una rapidez de 60 km/h, hace falta también especificar en qué dirección está soplando. Los vectores se representan en el plano cartesiano empleando flechas; la longitud de la flecha indica la magnitud del vector, la dirección de la flecha es la dirección del vector.

Otro vector importante es el desplazamiento, que es a la cantidad escalar “distancia” lo que la velocidad es a la rapidez: cuando se dice que un objeto se ha movido 15 metros, se está hablando de una distancia; si en cambio se afirma que se ha movido 15 metros en dirección 40º noreste, se está tratando con un desplazamiento. Un vector suele representarse en el plano cartesiano mediante una flecha, cuya longitud r es la magnitud del vector; la flecha hace un cierto ángulo con el eje positivo x , el cual suele representarse mediante la letra griega θ (“theta”), y se considera como la dirección del vector. Mira la figura 1.18.

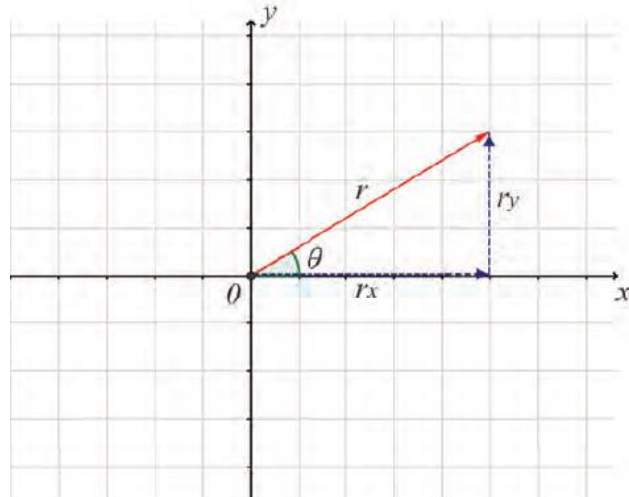
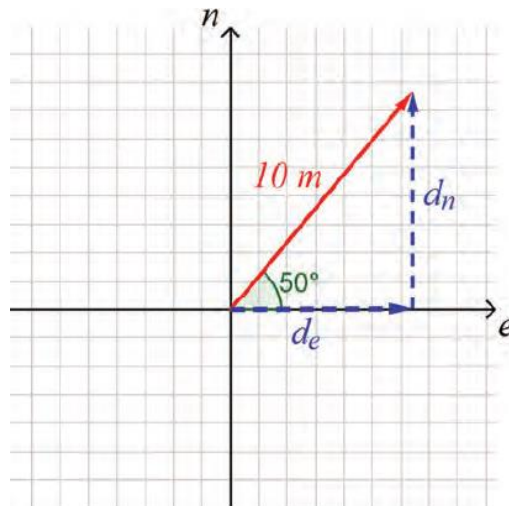


Figura 1.18 En rojo, un vector de magnitud r y dirección θ . En azul, las componentes axiales de este vector

Una característica importante de los vectores es que se pueden separar en dos componentes, una horizontal y otra vertical. Cuando esas componentes son paralelas a los ejes cartesianos, se les llama componentes axiales. En la figura 1.18 se ven las componentes axiales del vector, en color azul.

Veamos el siguiente ejemplo



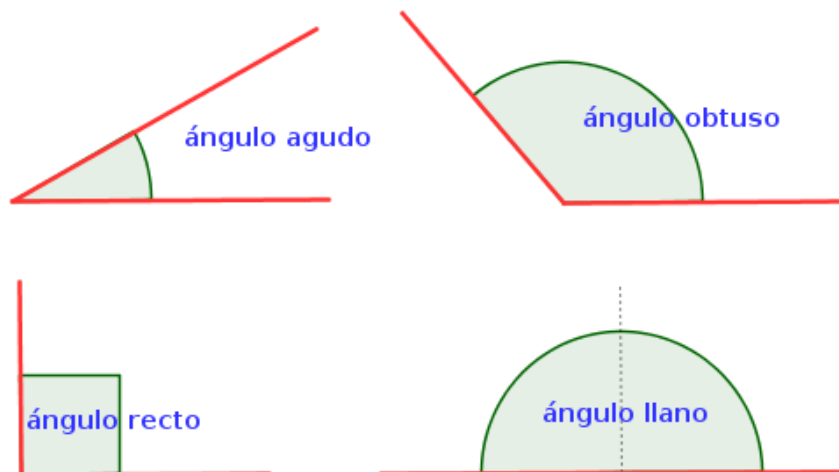
Puedes observar que el vector y sus componentes forman un triángulo rectángulo. En un triángulo rectángulo, los dos lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, mientras que el tercer lado recibe el nombre de hipotenusa. En nuestro caso, la hipotenusa es la magnitud del desplazamiento de 10 metros mientras que los catetos son sus movimientos hacia el este (d_e) y hacia el norte (d_n).

Ángulo recto: si dos rectas se cortan, se formarán entre ellas un total de cuatro ángulos. Si los cuatro ángulos son iguales, cada uno es un ángulo recto.

Ángulo agudo: cualquier ángulo cuya medida sea menor que la de un ángulo recto.

Ángulo llano: cualquier ángulo cuya medida sea igual a la de dos ángulos rectos, es decir, 180° .

Ángulo obtuso: cualquier ángulo cuya medida sea mayor a la de un ángulo recto, pero menor que la de un ángulo llano.



Razón: en matemáticas, una razón es una forma de comparar dos cantidades, al dividir una entre la otra. Por ejemplo, podemos comparar el número 8 con el número 2, dividiendo (obteniendo la razón $8/2$). El resultado es 4, que significa simplemente que el 8 es 4 veces más grande que el 2.

Resulta que con los tres lados de un triángulo pueden formarse seis distintas razones, que se conocen como razones trigonométricas. Estas razones se definen respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo, de modo que se pueda decir cuál es el cateto opuesto y cuál el adyacente. Las seis razones trigonométricas son seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Actividad 4

1. Determina las coordenadas del vértice para cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

I. $y = 2x^2 + 8x - 9$

- a) (-2, -17)
- b) (-1, 1)
- c) (3.25, -10.25)
- d) (2.5, 1.5)

II. $y = 3x^2 + 6x + 4$

- a) (-2, -17)
- b) (-1, 1)
- c) (3.25, -10.25)
- d) (2.5, 1.5)

III. $y = x^2 - 7x + 2$

- a) (-2, -17)
- b) (-1, 1)
- c) (3.25, -10.25)
- d) (2.5, 1.5)

IV. $y = -2x^2 + 10x + 11$

- a) (-2, -17)
- b) (-1, 1)
- c) (3.25, -10.25)
- d) (2.5, 1.5)

2. Don Jacinto es un artesano pirotécnico de Tultepec, en el Estado de México. La noche del 15 de septiembre probará un nuevo modelo de cohete: es uno que despegue desde una base que está a 1 metro del suelo, gracias al impulso que le proporciona una explosión de pólvora luminosa con la que obtiene una velocidad inicial de 40 m/s. Después de eso, el cohete sigue subiendo solamente por ese impulso inicial, pues no lleva más pólvora que continúe impulsándolo.

I. Escribe la ecuación que describe el movimiento de este cohete.

- a) $d = -4.9t^2 + 40t + 1$
- b) $d = -4.9t^2 + 1t + 40$
- c) $d = -9.81t^2 + 40t + 1$
- d) $d = -9.81t^2 + 1t + 40$

II. ¿En cuánto tiempo alcanza su altura máxima?

- a) (4.08, 82.63) ; Es decir, el cohete llegará a su altura máxima de 82.63 metros en 4.08 segundos.
- b) (82.63, 4.08) ; Es decir, el cohete llegará a su altura máxima de 4.08 metros en 82.63 segundos.
- c) (3.25, 10.25) ; Es decir, el cohete llegará a su altura máxima de 10.25 metros en 3.25 segundos.
- d) (10.25, 3.25) ; Es decir, el cohete llegará a su altura máxima de 3.25 metros en 10.25 segundos.

III. ¿En cuánto tiempo el cohete alcanza la altura de 41.315 metros? Apóyate en la fórmula general.

- a) 1.17 segundos.
- b) 2.14 segundos.
- c) 1.70 segundos.
- d) 2.54 segundos.

IV. ¿Cuánto tiempo tarda el cohete en volver al suelo, es decir, tiempo que alcanza una distancia de -1 metros?

- a) 8.21 segundos.
- b) 10.14 segundos.
- c) 9.64 segundos.
- d) 11.09 segundos.

3. Cantidad que solo requiere especificar una magnitud como la rapidez, se llama:

- a) Vector
- b) Positivo
- c) Escalar
- d) Magnitud

4. Una cantidad que, como la velocidad, necesita que se especifique tanto su magnitud, como su dirección recibe el nombre de:

- a) Vector
- b) Positivo
- c) Escalar
- d) Magnitud

5. Cualquier ángulo cuya medida sea mayor a la de un ángulo recto, por menor que la de un ángulo llano.

- a) Ángulo obtuso
- b) Ángulo agudo
- c) Ángulo llano
- d) Ángulo recto

6. Es una forma de comparar dos cantidades, al dividir una entre la otra.

- a) Vector
- b) Positivo
- c) Escalar
- d) Razón

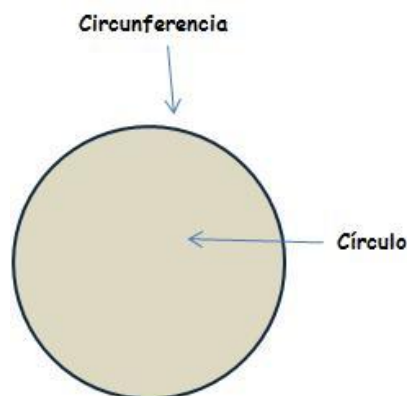
Unidad 2.- Movimiento circular

El propósito de esta unidad es que representes, interpretes y resuelvas situaciones problemáticas en las que se presenten procesos naturales vinculados con el movimiento rectilíneo, el movimiento circular y el movimiento armónico simple, aplicando conceptos tanto algebraicos como geométricos y trigonométricos.

Elementos previos

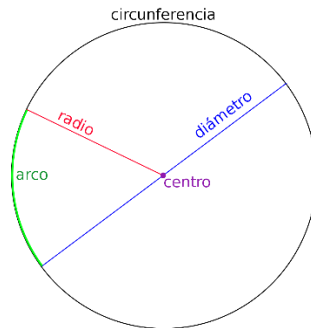
Antes de comenzar conviene que refresques en tu memoria algunos hechos relacionados a una conocida figura geométrica: la circunferencia. ¿Sabes qué es una circunferencia? ¿Es lo mismo círculo, que circunferencia? ¿Qué es el radio de una circunferencia? ¿Qué es el perímetro de una figura geométrica? ¿Qué es un ángulo? ¿Qué es un radián? Lee con atención y toma nota de los siguientes conceptos:

- Una **circunferencia** es una curva formada por todos los puntos que cumplen la siguiente condición: se encuentran todos a la misma distancia de otro punto fijo, el cual es llamado **centro de la circunferencia**.
- El **círculo** es la superficie que queda encerrada dentro de la circunferencia, que como acabamos de decir, es una línea curva.



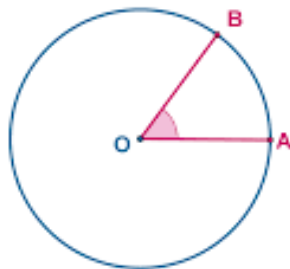
- El **radio** de una circunferencia es un segmento de recta que va desde el centro de la circunferencia hasta un punto cualquiera perteneciente a ella.
- El **diámetro**, por su parte, es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por su centro; la longitud del diámetro es el doble de la longitud del radio.

- El **perímetro** es la longitud del contorno de una figura geométrica cerrada. En el caso de la circunferencia, al perímetro suele llamársele así, “circunferencia”, y se calcula mediante la fórmula $c = 2\pi r$.

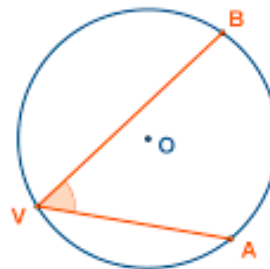


- Un **ángulo inscrito** es la figura que se forma cuando dos segmentos de recta comparten un extremo. Los ángulos pueden medirse en grados ($^{\circ}$), en radianes (rad), o en grados centesimales (grad).
- Un **ángulo central** es el que se forma entre dos radios de una circunferencia.

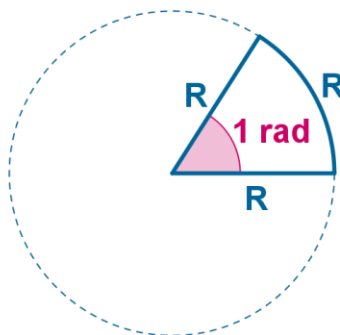
Ángulo central



Ángulo inscrito



- Un **radián** es la medida de un ángulo central que queda determinado por una longitud de arco igual al radio de la circunferencia en cuestión.



Para calcular el área del círculo, se emplea la famosa fórmula $A = \pi r^2$.

Estos conceptos son elementales para la comprensión de los temas que abordaremos en esta unidad. Asegúrate de revisarlos con detenimiento, y luego continúa.

En la rueda de la fortuna

En la feria que visita regularmente la ciudad de Morelia, Michoacán, hay una rueda de la fortuna. Esta rueda tiene la forma de una circunferencia de 10 metros de radio y se muestra en la figura 2.1.



Figura 2.1

Ejemplo

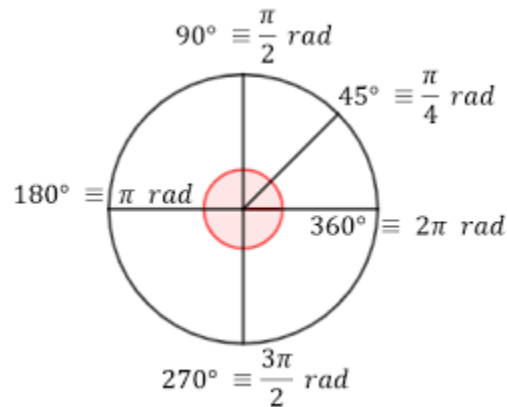
Se puede obtener una equivalencia entre **grados y radianes** de la siguiente manera: Un ángulo de 360° corresponde a un arco cuya longitud es la circunferencia entera; esta longitud (el perímetro de la circunferencia) es $2\pi r$. Desde luego, recuerda que la letra griega π ("pi") se usa para representar un número que aproximadamente vale 3.14159.

Por otro lado, un ángulo que mida un radián corresponde a un arco cuya longitud es igual al radio r de la circunferencia. Ahora bien, ¿cuántos ángulos de un radián "caben" en un ángulo de 360° ?

Si lo piensas un momento, te darás cuenta de que la pregunta anterior es equivalente a esta otra:

¿Cuántas veces cabe el **radio** de la circunferencia en su **perímetro**?

La respuesta (reflexiónalo con cuidado) es $2\pi r/r = 2\pi$ veces. Entonces, 360° equivalen a 2π radianes.



De la misma manera, se puede concluir que 180° equivalen a 1π radianes, equivalencia que en ocasiones es más cómoda de manejar.

Conociendo esto, se pueden emplear las técnicas para convertir de grados a radianes y viceversa.

Por ejemplo, supongamos que se quiere averiguar a cuántos radianes equivalen 60° . Se tendrá

$$60^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{60\pi}{180} \text{ rad}$$

(la abreviatura “rad” significa “radianes”; al efectuar la operación, los grados se “cancelan”). La fracción se puede simplificar, de modo que

$$\frac{60\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{3} \pi \text{ rad}$$

Aún podríamos que efectuar la multiplicación de $1/3$ por el número π ; sin embargo, se acostumbra no hacerlo, y dejar la medida en radianes expresada así: como un múltiplo de π . De esta manera, 60° equivalen a

$$\frac{1}{3} \pi \text{ rad.}$$

En la figura 2.2. Podemos observar que la rueda de la fortuna tiene 20 canastillas igualmente espaciadas entre ellas. El ingeniero que diseñó esta rueda tuvo que preocuparse por la separación entre cada canastilla, pues necesitaba asegurarse de que quedaran lo suficientemente separadas como para que no golpearan entre sí. Para conocer esta distancia, es necesario primero determinar el ángulo entre una canastilla y la siguiente:

I. ¿Cuánto vale el ángulo, en grados, entre una canastilla y la que le sigue? (Sugerencia: recuerda que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360° ; si hay veinte canastillas y todas están colocadas con la misma separación, ¿en cuántas partes iguales queda dividido ese ángulo?)

- Efectivamente, debemos dividir $360 / 20 = 18^\circ$, que es la separación que debe tener cada canasta.

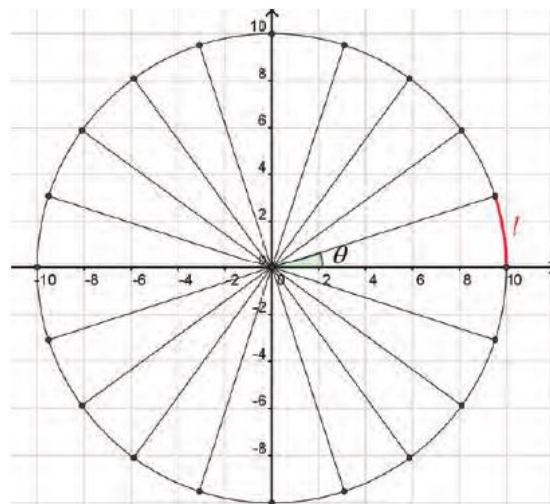


Figura 2.2 Modelo de la rueda de la fortuna, con las canastillas representadas por puntos y con un sistema de referencia colocado en el centro de la rueda.

II ¿Cuánto vale el ángulo entre canastilla y canastilla, medido en radianes? Expresa esto último como un múltiplo de π .

- Como 180° equivalen a π rad, se pueden emplear las técnicas de conversión de unidades de la sección 1.2 Convirtiendo unidades, y se tendrá

$$18^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{18\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$$

En el primer paso, se efectúa la multiplicación y los grados se cancelan, de modo que sólo sobreviven los radianes. En el segundo y último paso se simplifica la

fracción $18/180$, que da $1/10$. Como π es un número irracional (tiene infinita cantidad de cifras decimales que no siguen un patrón periódico), a veces verás que se le deja expresado así, con la letra π , y no escribiendo sus primeras cifras decimales, 3.141592653...

Ya conoces el valor del ángulo θ entre canastilla y canastilla, pero no sabes aún la distancia que las separa. En la figura 2.2 esa distancia es la longitud de la curva señalada con la letra l . Esa curva es un arco de circunferencia, y lo que vas a hacer a continuación es calcular su longitud.

Reflexiona un momento. Si el ángulo θ valiera 360° , el arco cubriría toda la circunferencia, y entonces su longitud sería simplemente el perímetro de la circunferencia (en la sección Elementos previos, se indicó la fórmula para obtener ese perímetro, calcúlalo ahora si no lo has hecho; exprésalo como un múltiplo de π). Ahora bien,

I. ¿Qué pasaría si θ midiera la mitad de los 360° , es decir, 180° ? ¿Cuánto mediría el arco?

- Primero, la circunferencia de la rueda de la fortuna mide $2\pi(10) = 62.83$ metros, aproximadamente (recuerda la fórmula $p=2\pi r$). Esa es la longitud del arco que correspondería a un ángulo de 360° . Si el ángulo se reduce a la mitad, también lo hará la longitud del arco, así que para un arco de 180° (la mitad de 360°), la longitud del arco es **31.41 metros** (aproximadamente).

Es muy importante que quede claro un punto: el ángulo θ no es la medida del arco de circunferencia que nos interesa; un ángulo y un arco no son lo mismo, el ángulo es una medida de la apertura entre dos líneas rectas que coinciden en un punto, mientras que un arco es la longitud de una curva.

Otro elemento importante en una circunferencia y que conviene abordar de una vez

es el sector circular. Un sector circular es la porción de un círculo (recuerda la diferencia entre círculo y circunferencia) limitada por un arco de circunferencia y por los lados de un ángulo central. Figura 2.3

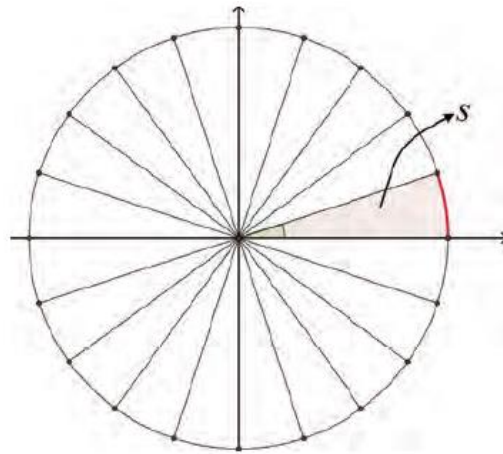


Figura 2.3 Un sector circular s determinado por un ángulo θ en la rueda de la fortuna.

A manera de ejemplo vamos a calcular el área del sector circular representado en la figura 2.3; emplea para ello un razonamiento similar al que te llevó a calcular la longitud del arco l .

Antes que nada, el área cubierta por la circunferencia entera es $\pi(10)^2 = 314.16 \text{ m}^2$. Ahora bien, el sector representado en la figura corresponde a un ángulo de 18° , que como se argumentó antes, representa una fracción de $1/20$ de la circunferencia total. Entonces su área será también $1/20$ del área total de 314.16 m^2 .

Esto significa que, si A_s es el área del sector, tendremos

$$\frac{A_s}{314.16} = \frac{1}{20}$$

de donde se obtiene inmediatamente que el **área del sector** es

$$A_s = 314.16 \frac{1}{20} = \frac{314.16}{20} = 15.71 \text{ m}^2$$

Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?

Cuando una rueda de la fortuna como la de la figura 2.1 se encuentra funcionando, las canastillas se ponen en movimiento siguiendo la trayectoria circular determinada

por la rueda. Mira la figura 2.4.

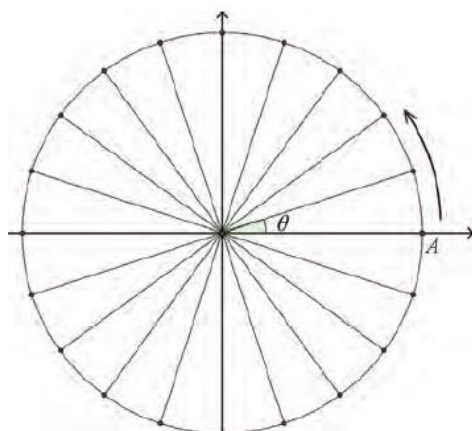


Figura 2.4 Modelo de la rueda de la fortuna girando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

A los pasajeros de la rueda puede interesarles responder la pregunta siguiente: ¿qué tan rápido se mueve una canastilla? Cuando la pregunta se considera con cuidado, uno se da cuenta de que, en este caso, “qué tan rápido” puede referirse a dos cosas:

- La distancia recorrida por una canastilla en un intervalo dado de tiempo, o
- El ángulo recorrido por una canastilla en un intervalo dado de tiempo.

En el primer caso, estamos hablando de la rapidez en el sentido que ya exploramos en la unidad anterior; en un movimiento circular, esta rapidez se llama lineal o tangencial, y para hallarla necesitamos determinar la distancia que recorre una canastilla por unidad de tiempo. En el segundo caso, estamos tratando con una nueva clase de rapidez: la rapidez angular, que básicamente nos dirá cuánto crece el ángulo θ por unidad de tiempo.

Ejemplo

Supongamos que la rueda da tres vueltas por minuto. Si recuerdas, tiene un radio de 10 m, así que al dar una vuelta una canastilla recorre, a lo largo de la circunferencia, una distancia de aproximadamente $2\pi r = 2 \times 3.14 \times 10 = 62.8$ m. Esto significa que, de acuerdo con nuestra suposición, en un minuto la canastilla recorrerá (siempre a lo largo de la circunferencia) una distancia total de $62.8 \times 3 = 188.4$ m. Así que su rapidez lineal será de

$$\frac{188.4 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 3.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Según lo establecido respecto a la rapidez angular, se le calcula dividiendo “ángulo recorrido” / “tiempo empleado para recorrerlo”. Si la rueda da tres vueltas en un minuto, entonces está recorriendo un ángulo de 6π rad (recuerda que se nos pide obtener la rapidez angular en unidades de rad/s, y que 360° equivalen a 2π rad) en un tiempo de 60 segundos. Esto significa que la rapidez angular ω es

$$\omega = \frac{6\pi}{60} = \frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$$

En un movimiento circular, la rapidez lineal o tangencial representa la distancia recorrida por el objeto móvil que en este caso es una longitud de arco circular por unidad de tiempo. Se calcula de la manera usual, dividiendo distancia recorrida entre tiempo empleado para recorrerla. Análogamente, la rapidez angular representa el ángulo recorrido por el objeto móvil, por unidad de tiempo. La manera de calcularla es dividir el ángulo recorrido entre el tiempo empleado para recorrerlo. En el movimiento circular hay otros dos parámetros que es conveniente conocer y comprender; se trata del **periodo** y la **frecuencia** del movimiento.

El **periodo** es el tiempo que le toma al objeto móvil volver a su posición inicial; este recorrido de ida y vuelta a la posición inicial se conoce como ciclo, y es una característica distintiva del movimiento circular y del movimiento armónico simple, que estudiaremos más adelante. La **frecuencia** es el número de ciclos que el objeto realiza, por unidad de tiempo.

Ejemplo

Volviendo a nuestra suposición de que la rueda da tres vueltas en un minuto, y tomando en cuenta que el periodo es el tiempo en que una canastilla vuelve a su posición inicial (es decir, el tiempo en que la rueda da una vuelta completa), puedes darte

$$\frac{60 \text{ s}}{3} = 20 \text{ s.}$$

Respecto a la frecuencia, sólo recuerda que se trata del número de ciclos (vueltas completas, en este caso) que se cumplen por unidad de tiempo. Si nuestra unidad de tiempo son los segundos y la rueda completa tres ciclos cada minuto (60 segundos), entonces la frecuencia es simplemente

$$\frac{3}{60 \text{ s}} = 0.05 \text{ ciclos/segundo}$$

Quiere decir que la frecuencia de la rueda es 0.05 vueltas cada segundo, o bien 0.05 (Hertz).

ACTIVIDAD 5

1. Calcula la longitud del arco l entre canastilla y canastilla de la rueda de la fortuna que tiene 20 canastillas. (Debes calcular el arco de la circunferencia que es la distancia que hay entre cada canastilla, en la imagen está en color rojo representada por la letra l).

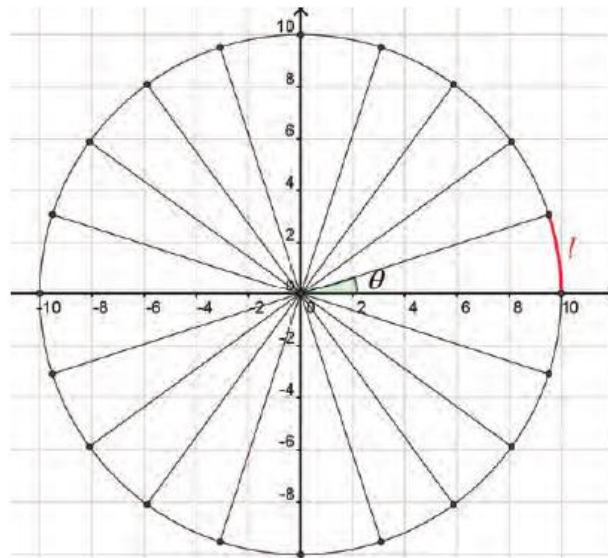


Figura 2.2 Modelo de la rueda de la fortuna, con las canastillas representadas por puntos y con un sistema de referencia colocado en el centro de la rueda.

- a) 3.14 metros.
- b) 5.21 metros.
- c) 2.40 metros.
- d) 3.39 metros.

2. Una rueda de la fortuna con un radio de 10 metros, como la que se pone en la feria ganadera de Hermosillo suele girar de manera que da dos vueltas cada minuto.

En ese caso:

I. ¿Cuál es la rapidez lineal de la canastilla A?

- a) 2.09 m/s.
- b) 5.21 m/s.
- c) 2.40 m/s.
- d) 3.39 m/s.

II. ¿Y su rapidez angular de la canastilla A?

- a) $\pi /15$ rad/s.
- b) $\pi /10$ rad/s.
- c) $\pi /20$ rad/s.
- d) $\pi /5$ rad/s..

3. El periodo es el tiempo que toma completar un ciclo. Si la rueda da dos vueltas (ciclos) por minuto, entonces cual es el periodo de la rueda de la fortuna?

- a) 30 segundos
- b) 60 segundos
- c) 120 segundos
- d) 15 segundos

4. La frecuencia es el número de ciclos que se completan en cada unidad de tiempo (en este caso, cada segundo). ¿Si la rueda da dos vueltas cada minuto (60 segundos), entonces en un segundo sólo completa?

- a) $1/30$ Hz.
- b) $1/60$ Hz.
- c) $1/20$ Hz.
- d) $1/15$ Hz.

5. La punta de la hélice de un ventilador encendido se mueve siguiendo una trayectoria circular cuyo radio es de 0.3 m, con un periodo de 1 segundo. ¿Cuál es su rapidez lineal? ¿Y su rapidez angular?

- a) 1.88m/s y 2π rad/s.
- b) 2.58m/s y 2π rad/s.
- c) 1.74m/s y 1π rad/s.
- d) 1.48m/s y 1π rad/s.

6. Determina la frecuencia de un rotor que sigue un movimiento circular uniforme, con una rapidez angular de $\pi/4$ rad/segundo. ¿Cuál es su rapidez angular, en grados/segundo? (Sugerencia: emplea las técnicas estudiadas en la sección Convirtiendo unidades).

- a) $1/8$ Hz y 45 grados.
- b) $1/4$ Hz y 45 grados.
- c) $2/8$ Hz y 60 grados.
- d) $2/4$ Hz y 60 grados.

FIN DE LA ACTIVIDAD

Ecuaciones del movimiento circular uniforme

Si el movimiento circular de la rueda de la fortuna se lleva a cabo con una rapidez constante, entonces recibe el nombre de **movimiento circular uniforme**. Ese era el caso en las dos secciones anteriores, pues nunca se mencionó que la rapidez lineal, ni la angular, experimentarían algún cambio.

El hecho de que las canastillas de la rueda de la fortuna estén moviéndose implica que, como en la unidad anterior, tenemos cantidades variables (el tiempo que llevan girando, la distancia que han recorrido a lo largo de su trayectoria circular, el ángulo que han avanzado). Además, estas variables están relacionadas unas con otras, de manera que, si conocemos el valor de una de ellas, es posible calcular el de las demás. Es decir, tenemos funciones.

De manera análoga a lo que ocurría en la Unidad 1, estas funciones pueden representarse entre otros medios a través de tablas, gráficas y ecuaciones. Por ahora nos concentraremos en las ecuaciones, y comenzaremos con la ecuación correspondiente a la distancia recorrida por una canastilla en un tiempo determinado.

En la sección Señor operador, ¿qué tan rápido vamos?, se afirmó que la rapidez lineal en un movimiento circular se calcula dividiendo la longitud del arco circular

recorrido entre el tiempo empleado para recorrer dicha longitud; simbólicamente,

$$v = \frac{l}{t}$$

Donde estamos usando v para representar a la rapidez, l para la longitud del arco circular recorrido y t para el tiempo. Si ahora despejas l , llegarás a

$$l = vt$$

Sólo hace falta tomar en consideración la posibilidad de que una canastilla comience su movimiento desde una posición “adelantada”; mira la figura 2.5.

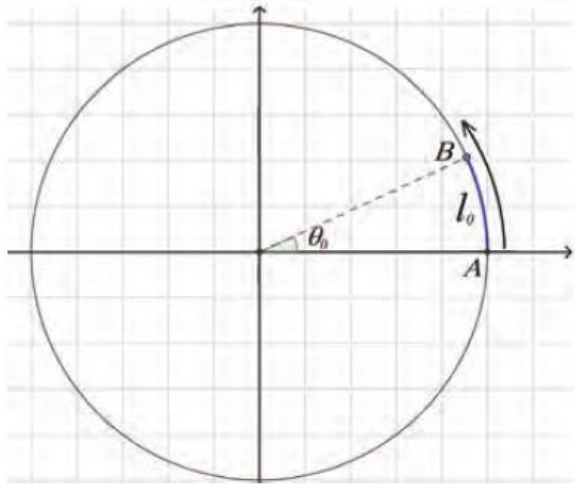


Figura 2.5 Modelo de la rueda de la fortuna. Sólo se han conservado la circunferencia que forma la rueda y dos posiciones hipotéticas para una de las canastillas.

Tomaremos como “posición cero” la posición de la canastilla A en esta figura. Si por alguna razón al iniciar nuestro análisis la canastilla no se encuentra en esa posición cero sino, digamos, en la posición señalada con la letra B, la ecuación $l = vt$ sólo nos dirá la longitud de arco que la canastilla va avanzando a partir de esa posición adelantada; para hallar la longitud del arco que la canastilla ha recorrido sobre la rueda desde la posición cero, tendremos que sumar la longitud del arco correspondiente a la posición adelantada, la cual aparece en la figura 2.5 señalada como l_0 . Simbólicamente, esto se escribe

$l = vt + l_0$ Ecuación del movimiento circular uniforme (variables lineales)

Compara esta ecuación con

$$d = vt + d_0$$

que describía la distancia recorrida por un objeto en movimiento rectilíneo uniforme. ¿Notas algo en particular? Ambas clases de movimiento (el rectilíneo uniforme y el circular uniforme) son análogas en muchos sentidos; los objetos móviles recorren ciertas distancias en determinados tiempos, a una rapidez constante. Sin embargo, es importante que diferencies claramente ambas ecuaciones: la ecuación $d = vt + d_0$ se refería a una distancia recorrida en línea recta, mientras que $l = vt + l_0$ habla de una distancia recorrida a lo largo de una circunferencia.

Además, a diferencia del movimiento rectilíneo uniforme, en el circular uniforme la distancia y el tiempo no son las únicas variables; también está el ángulo que el objeto móvil cubre en su trayectoria circular:

Emplea un argumento análogo al que llevó a la ecuación $l = vt + l_0$, refiriéndote esta vez a la rapidez angular ω (omega), al ángulo θ recorrido por una canastilla y al posible ángulo inicial θ_0 desde el que la canastilla podría comenzar su movimiento, para deducir la ecuación:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad \text{Ecuación del movimiento circular uniforme (variables angulares)}$$

Ambas ecuaciones,

$$\begin{aligned} l &= vt + l_0 \\ \theta &= \omega t + \theta_0 \end{aligned} \quad \text{Ecuaciones del movimiento circular uniforme}$$

describen una parte muy importante de esta clase de movimiento, aunque todavía no de manera completa; hace falta establecer la relación que existe entre la rapidez lineal v y la angular ω . Eso lo harás en la sección En otra parte de la feria.

Ejemplo

Supongamos que la rueda de la fortuna da tres vueltas por minuto ¿qué tan rápido vamos?, por lo que la velocidad lineal es de 3.14 m/s, y que inicialmente la canastilla se encontraba 15° por encima de la “posición cero”; esto significa que su longitud de arco inicial es de

$$l_0 = \frac{2\pi(10)(15^\circ)}{360^\circ} = 0.83\pi$$

Lo anterior implica que la ecuación

$$l = vt + l_0$$

se convierte en

$$l = 3.14t + 0.83\pi$$

Entonces, después de un minuto (60 segundos) la canastilla habrá cubierto una longitud de arco de aproximadamente $l = 3.14(60) + 0.83\pi = 188.4 + 2.6075\pi = 191.0075\text{m}$ (Siempre recuerda que el número π vale aproximadamente 3.14159). Para calcular el ángulo que ha cubierto se necesita el mismo razonamiento, pero empleando la ecuación $\theta = \omega t + \theta_0$

Bajo el mismo supuesto, la velocidad angular ω es de $\pi/10$ rad/s y la canastilla comienza su movimiento a partir de un ángulo inicial θ_0 que vale 15° sobre la “posición cero”. Primero, convertimos estos 15° a radianes,

$$15^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{15\pi}{180} \text{ rad} = \frac{1}{12}\pi \text{ rad}$$

Y ahora sustituimos la velocidad angular y este ángulo inicial en $\theta = \omega t + \theta_0$, quedando

$$\theta = \frac{\pi}{10}t + \frac{1}{12}\pi$$

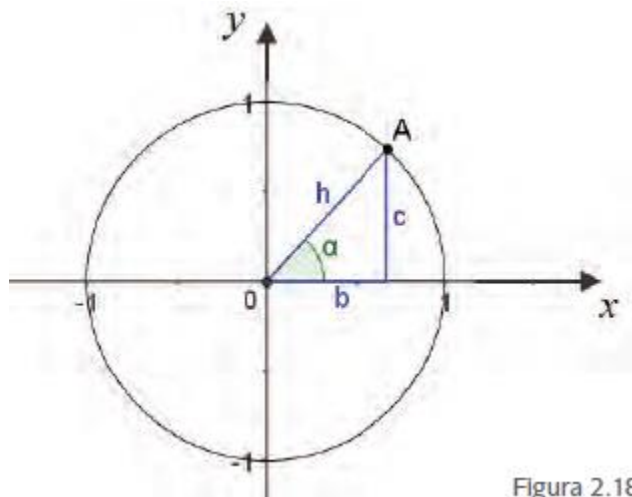
Después de un minuto (60 segundos), la canastilla habrá cubierto un ángulo de

$$\theta = \frac{\pi}{10}(60) + \frac{1}{12}\pi = 6\pi + \frac{1}{12}\pi = \frac{73}{12}\pi \text{ rad}$$

Funciones trigonométricas y el círculo unitario

Una función como la representada por la ecuación **$y = \text{sen } \alpha$** , recibe el nombre de función trigonométrica. Las funciones trigonométricas involucran (como su nombre lo indica) razones trigonométricas de alguna de las variables, y se caracterizan por presentar ciclos que se repiten indefinidamente, cada vez que la variable independiente —en este caso, el ángulo α — llega a ciertos valores.

El intervalo que esa variable debe recorrer para que se cumpla un ciclo se llama periodo de la función; esta característica hace que a las funciones trigonométricas también se les llame periódicas. Una manera útil de concebir a las funciones trigonométricas es mediante lo que se conoce como el círculo unitario. Mira la figura 2.18.



El punto A está colocado sobre la circunferencia del círculo, posibilitando la construcción del triángulo en azul cuya hipotenusa es el radio del círculo, y cuyos catetos son los lados b y c. Empleando este círculo (cuyo radio vale 1, de donde le

viene el nombre de “unitario”), las seis funciones trigonométricas del ángulo α se pueden definir como sigue:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{cot } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\text{csc } \alpha = \frac{c}{a}$$

(Recuerda que la hipotenusa del triángulo es el radio del círculo, y vale 1). Considera, por ejemplo, la función $y = \text{sen } \alpha$. Puedes darte una buena idea del aspecto de su gráfica empleando el círculo unitario y un poco de imaginación: Cuando el ángulo α vale cero, las coordenadas del punto A son (1, 0). Es decir, su coordenada y es cero. Esto significa que $\text{sen } \alpha$ también vale cero.

Conforme el punto A comience a moverse a lo largo de la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, ocurrirá que α también aumentará su valor, al tiempo que lo hace la coordenada y . Por lo tanto $\text{sen } \alpha$ aumentará también, situación que se mantendrá hasta que α llegue a los 90° (o lo que es lo mismo, $\pi/2$). En esa posición, la coordenada y del punto A valdrá 1 y ese será el máximo valor que alcanzará $\text{sen } \alpha$.

A continuación, cuando A siga trasladándose sobre la circunferencia, α seguirá creciendo, pero la coordenada y , comenzará a disminuir, con lo que también disminuirá $\text{sen } \alpha$. Esto continuará así hasta que α alcance los 270° (o $3\pi/2$ rad). En ese momento, $\text{sen } \alpha$ llegará a su mínimo valor, -1 . Si el desplazamiento de A continúa, $\text{sen } \alpha$ comenzará a aumentar de nuevo, desde -1 hasta volver al punto

de partida, cuando α valga 360° (equivalentes a 2π rad). En ese punto, $\sin \alpha$ valdrá cero de nuevo, y se habrá cumplido una primera vuelta al círculo unitario: un primer ciclo, un primer periodo. Ese comportamiento comenzará a repetirse si la rotación de A sigue adelante: $\sin \alpha$ aumentará hasta llegar a 1, luego decrecerá hasta -1 y de ahí subirá de nuevo a cero cuando A complete una vuelta más al círculo unitario.

Todo ello dará como resultado la siguiente gráfica:

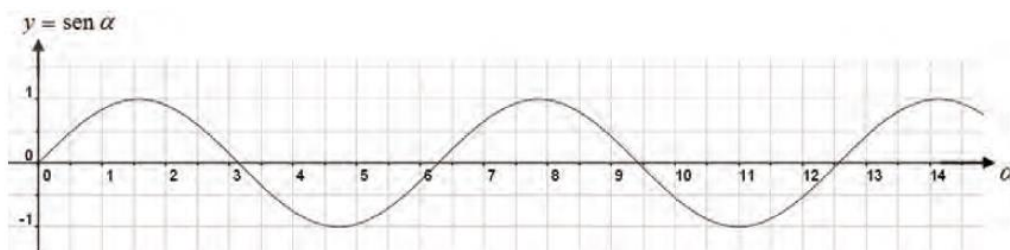


Figura 2.19

Observa que, en esta gráfica, $\sin \alpha$ varía entre 1 y -1 . Por otro lado, fíjate que en esta gráfica α se ha expresado en radianes (siendo que antes se le había expresado en grados). Ello hace que los ciclos de la gráfica no se cumplan cada 360° , sino cada 2π rad: es decir, cada 6.28 unidades, aproximadamente (recuerda cuánto vale el número π).

Funciones trigonométricas y movimiento armónico simple

Una función trigonométrica, como las que acabamos de analizar, $y = \sin \alpha$, se caracteriza por que la variable dependiente “ y ” la cual se comporta oscilando entre un valor máximo y un valor mínimo, a partir de una “posición de equilibrio”, los valores máximo y mínimo fueron 1 y -1 , alrededor de la posición de equilibrio $y = 0$.

A la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente a partir de dicha “posición de equilibrio”, se le llama amplitud de la función. Observa la figura 2.20.

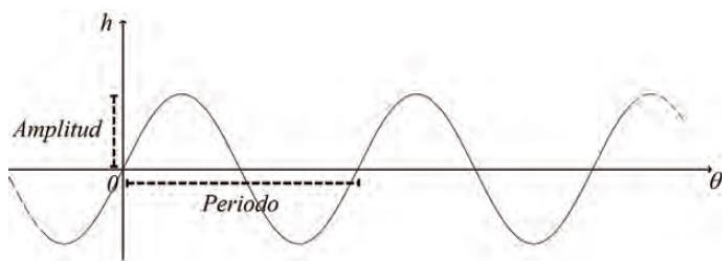


Figura 2.20 La gráfica de una función trigonométrica. El periodo es el intervalo que debe cubrir la variable independiente (en este caso, θ) para que un ciclo se repita. La amplitud es la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente (h , en este caso) a partir de su "posición de equilibrio".

Observemos con atención las siguientes cinco gráficas que usaremos como ejemplo para analizar mejor la amplitud y el periodo de cada una de ellas:

$y = 3\text{sen } \alpha$ -- color verde

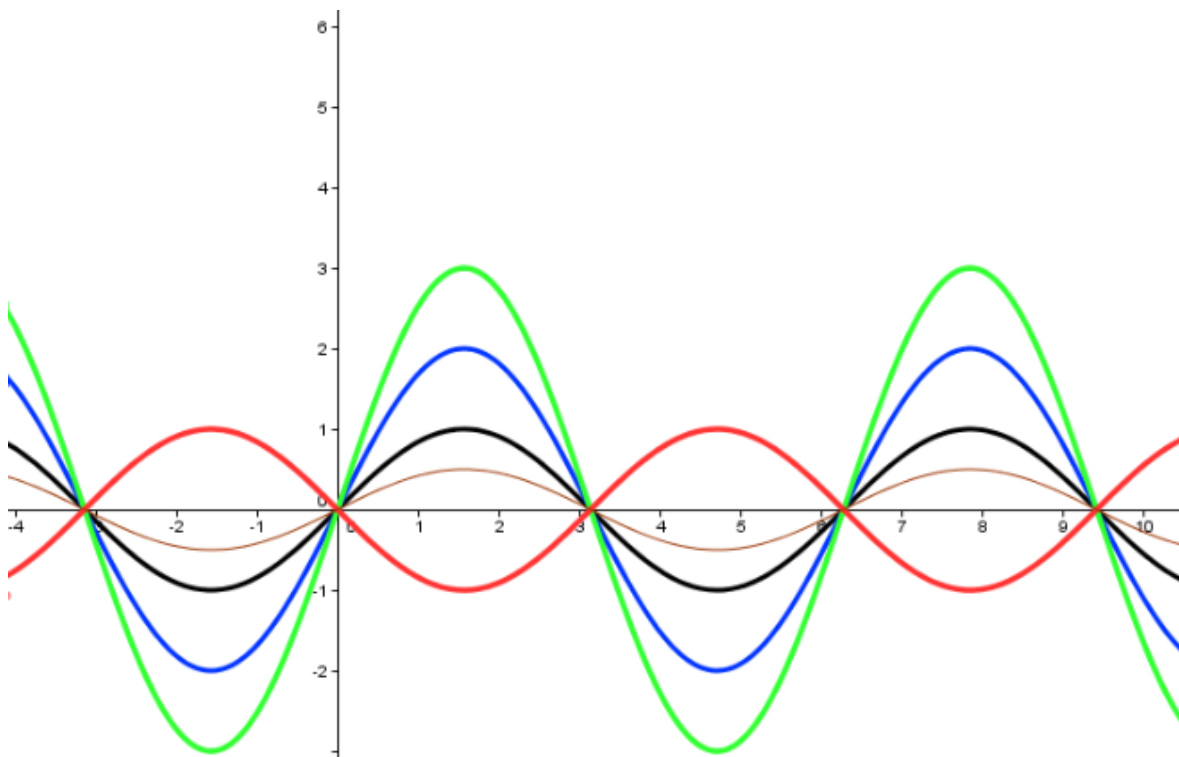
$y = 2\text{sen } \alpha$ -- color azul

$y = 1\text{sen } \alpha$ -- color negro

$y = (1/2)\text{sen } \alpha$ -- color rosa

$y = -1\text{sen } \alpha$ -- color rojo

NOTA: $1\text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha$



Como podemos observar, las gráficas tienen diferente amplitud, todo depende del valor que tenga la función, regresa a las funciones que se graficaron anteriormente y trata de encontrar el valor que hace que cada gráfica tenga una amplitud diferente.

El periodo

Hay dos últimas cuestiones que es importante abordar respecto a las funciones trigonométricas; en el caso de las funciones $y = \sin \alpha$, $y = \cos \alpha$, sabemos que el periodo vale 2π . Eso quiere decir que cuando la variable t se mueve desde 0 hasta 2π , ambas funciones cumplen un ciclo.

Ahora bien, en el caso de $y = \sin (wt)$, $y = \cos (wt)$ podemos efectuar lo que se conoce como un “cambio de variable”: introducimos una nueva variable, digamos u , de manera que $u = wt$. Ello hará que ambas funciones se puedan describir como

$$y = \sin (u)$$

$$y = \cos (u)$$

Y entonces podemos aplicar el mismo criterio que hace un momento: las funciones cumplirán un ciclo cuando u avance desde 0 hasta 2π . Pero recordemos que, en realidad, u es wt . Es decir, las funciones cumplirán un ciclo cuando wt vaya desde 0 hasta 2π .

En otras palabras:

- El ciclo comenzará cuando $wt = 0$.
- El ciclo terminará cuando $wt = 2\pi$.

La fase

En el tema de las funciones trigonométricas. Ya sabes cómo determinar la amplitud de una función seno o coseno, y también puedes hallar su periodo si conoces su rapidez angular (y viceversa, si lo piensas un momento). Sólo te queda un último problema que enfrentar para poder decir que dominas por completo estas cuestiones.

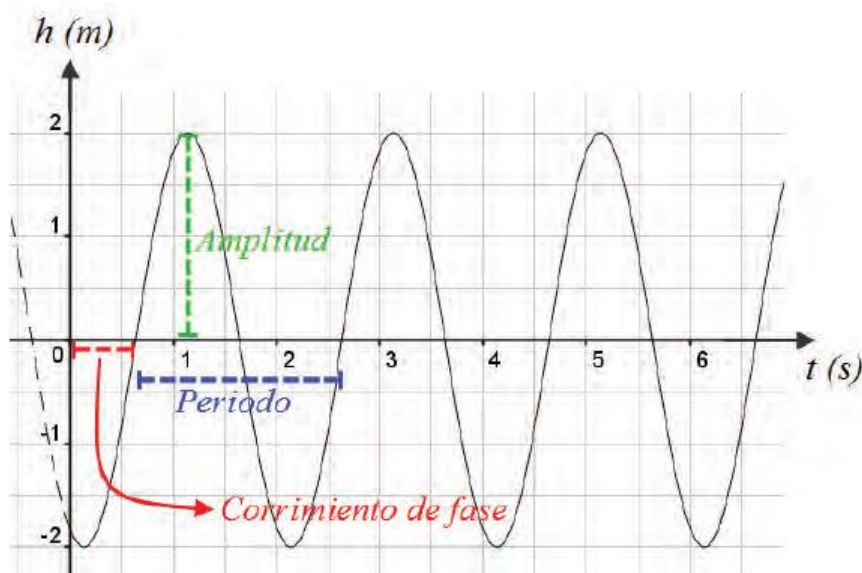


Figura 2.22

En una función trigonométrica de las formas $y = a \sin(wx + \theta_0)$, $y = a \cos(wx + \theta_0)$ el ángulo inicial θ_0 genera gráficamente lo que se conoce como un corrimiento de fase ϕ , corrimiento que se puede calcular mediante la expresión:

$$= -\frac{\theta_0}{\omega}.$$

El péndulo

Los péndulos se encuentran entre los artefactos más sencillos y a la vez más importantes en la historia de la civilización. Básicamente, cualquier peso que cuelgue de algún soporte fijo de manera que pueda oscilar libremente entre dos posiciones, es un péndulo. En la antigüedad, la única manera en que la gente podía medir el tiempo era mediante la observación de los cuerpos celestes y sus ciclos; de esta manera era posible contar el paso de los días, los meses y los años; construyendo relojes de sol incluso se podían medir las horas que duraba un día y, con un buen diseño, llegar incluso a una precisión de minutos.

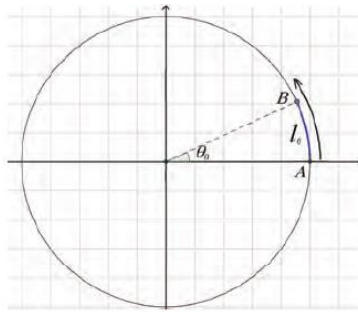
Pero medir intervalos de tiempo más cortos, como el que tarda en caer un objeto de la mano al suelo, era una tarea muy difícil. Por ello resultaba casi imposible que los pensadores de la antigüedad tuvieran una idea correcta del modo en que funcionan muchas leyes de la naturaleza; por ejemplo, el sabio griego Aristóteles pensaba que una piedra caía al suelo con más rapidez que una pluma porque la piedra “buscaba” volver a su “sitio de pertenencia”, el suelo, mientras que la pluma “buscaba” mantenerse en su “sitio de pertenencia”, el aire.

Los péndulos constituyeron la primera forma de medir el tiempo con un grado de precisión suficiente como para permitir un mejor estudio de este y muchos otros fenómenos naturales; gracias a cierta propiedad característica de todos los péndulos –que entre otras cosas descubrirás por tu cuenta en esta sección-, se les empleó en la construcción de los primeros relojes, con los cuales fue posible realizar mediciones de tiempo más y más precisas; así comenzó el camino que lleva a nuestros modernos relojes atómicos, que pueden medir intervalos de tiempo cortos: de hasta la milmillonésima parte de un segundo.



ACTIVIDAD 6

1. Encuentra la longitud del arco de una canastilla de una rueda de la fortuna al cabo de un minuto (60 segundos), dicha rueda tiene una circunferencia de 62.83 metros, y al comenzar el movimiento se encontraba en una posición inicial de 30° sobre la “posición cero”. Registró una velocidad lineal de 2.09 m/s.

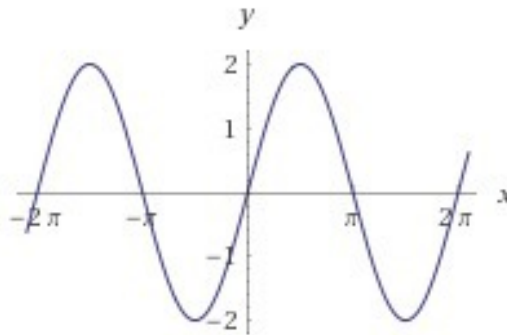


- a) 130.63 metros.
- b) 62.83 metros.
- c) 180.52 metros.
- d) 28.09 metros.

2. Encuentra el ángulo de una canastilla de esta rueda de la fortuna al cabo de un minuto, su circunferencia es de 62.83 metros, si al comenzar el movimiento se encontraba en una posición inicial de 30° sobre la “posición cero”. Además, cuenta con velocidad angular inicial de $\pi/15$ rad/s (que equivale a 12°).

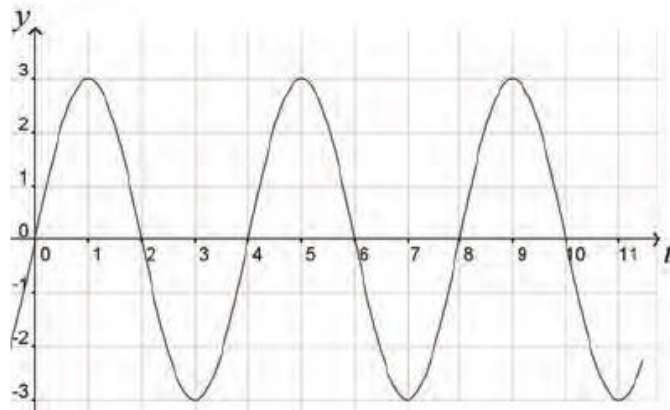
- a) 750 grados.
- b) 350 grados.
- c) 600 grados.
- d) 480 grados.

3. De acuerdo con la siguiente imagen, ¿cuánto valen el periodo y la amplitud de la función trigonométrica $y = 2\sin \alpha$?



- a) Amplitud = 2 y Periodo = 2π
- b) Amplitud = 1 y Periodo = 2π
- c) Amplitud = 2 y Periodo = π
- d) Amplitud = 1 y Periodo = π

4. De acuerdo con la siguiente gráfica, ¿cuánto valen el periodo y la amplitud de la función trigonométrica?



- a) Amplitud = 3 y Periodo = 4
- b) Amplitud = 2 y Periodo = 4
- c) Amplitud = 0 y Periodo = 2
- d) Amplitud = 3 y Periodo = 2

Unidad 3. Dinámica del movimiento

¿Dinámica? Sí, dinámica. En las dos unidades anteriores, has estudiado algunas clases importantes de movimiento. Has analizado varias de sus características (rapidez, velocidad, aceleración...) las has descrito mediante ecuaciones, tablas y gráficas. Sin embargo, algo de lo que no has abordado hasta ahora son las causas del movimiento: ¿qué es lo que hace que un objeto se mueva? ¿Bajo qué condiciones ocurrirá un movimiento, y en qué forma ocurrirá? ¿Es posible que algo se mueva para siempre? La dinámica es una rama de la física que aborda y da respuesta a ese tipo de preguntas: es el estudio del movimiento, ocupándose de sus causas (cuando se estudia el movimiento sin preocuparse por sus causas, se está hablando de cinemática). Gracias a esta disciplina fue posible comprender la forma en que un objeto más pesado que el aire podía volar, el modo en que debían diseñarse los cohetes con los que el ser humano llegó a la Luna y los automóviles que transportan a millones de personas todos los días, entre muchos otros avances que han dado forma a nuestra civilización.

Entendiendo el movimiento

Desde tiempos antiguos, el estudio del movimiento y sus causas habían sido un problema central en filosofía natural (la rama del conocimiento que hoy llamamos “física”). Sin embargo, hasta la época de Galileo Galilei (1564-1642) no se habían logrado muchos progresos en la materia. Antes de Galileo, dominaba la idea aristotélica de que para mantener un cuerpo en movimiento era necesario aplicarle continuamente una fuerza; eso tenía sentido si se pensaba en un bloque de piedra que sólo se mantiene en movimiento mientras lo empujamos, pero ¿qué hay del caso de una flecha, que una vez disparada se sigue moviendo, aunque ya no actúe ninguna fuerza sobre ella —sin contar a la fricción del aire, que en todo caso se opone a su movimiento?

Dificultades como esta hacían sospechar que algo no estaba del todo correcto con las concepciones de Aristóteles sobre el movimiento. Sin embargo, nadie antes de

Galileo había encontrado una alternativa fundamentada que explicara los mismos fenómenos de una manera más satisfactoria. Fue Galileo quien descubrió que el problema principal estaba en suponer que para mantener un cuerpo en movimiento hacía falta aplicarle una fuerza, y propuso que, en realidad un objeto que estuviera moviéndose con rapidez constante continuaría haciéndolo, a menos que una fuerza se opusiera a ello; del mismo modo, un objeto en reposo permanecería en reposo, a menos que una fuerza lo hiciera moverse.

Esta importantísima idea llevó al concepto de **inercia**: la tendencia de un objeto a mantenerse en su estado actual de movimiento, si no actúa sobre él alguna fuerza que se oponga a ello. En la actualidad, tenemos muchas ocasiones de experimentar inercia: cuando vas en un transporte público y el chofer frena bruscamente, sientes un “empujón” hacia adelante porque tu cuerpo “trata” de mantenerse en movimiento. Cuando el transporte está estacionado y de forma brusca el chofer acelera, sientes un “jalón” hacia atrás: tu cuerpo “trata” de mantenerse en reposo. Tu cuerpo “trata” de mantener su estado actual de movimiento, a menos que alguna fuerza (en este caso, proporcionada por el motor del transporte) se oponga a ello.

Sin embargo, en la época de Aristóteles —y en la de Galileo también— no había muchas formas de darse cuenta de que la inercia existía. Es por eso que la idea galileana es tan genial.

Isaac Newton (1643-1727) fue una de las personalidades más extraordinarias que ha visto el mundo. Matemático, filósofo, teólogo, inventor y alquimista inglés, refinó las ideas de Galileo y logró establecer las tres leyes que llevan su nombre, leyes que bastan para explicar prácticamente todo el movimiento en la naturaleza dentro de ciertos límites y que impulsaron el desarrollo de la tecnología hasta los increíbles niveles que vemos hoy. El concepto de **inercia**, como verás en un momento, quedó incluido en la llamada primera ley de Newton.

Las tres leyes de Newton

Las Leyes de Newton parten de la consideración del movimiento como el desplazamiento de un objeto de un sitio a otro, tomando en cuenta el lugar en donde ocurre, el cual también puede moverse en relación a otro lugar, y así sucesivamente hasta alcanzar un punto fijo o inmóvil, que serviría de referencia para obtener valores absolutos.

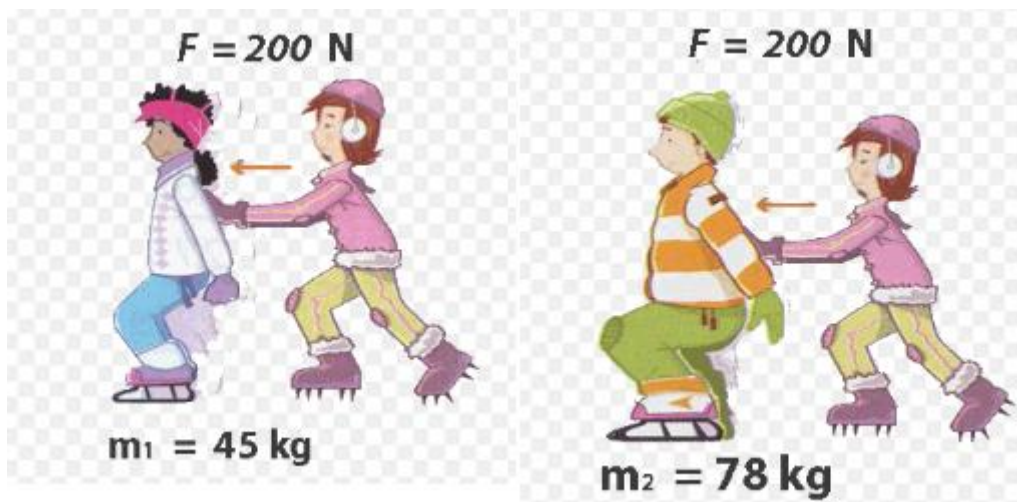
Primera ley o ley de inercia. –

Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que otros cuerpos actúen sobre él.



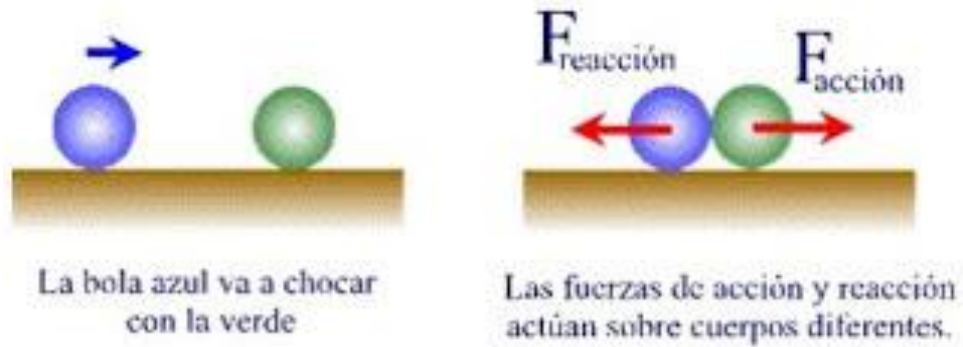
Segunda ley o Principio Fundamental de la Dinámica. –

La fuerza que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a su aceleración.



Tercera ley o Principio de acción-reacción. –

Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y de sentido opuesto.



Si recuerdas la definición de aceleración, te será claro que la afirmación anterior es equivalente a decir que la masa se resiste a cambiar su velocidad: piensa en un tren del metro estacionado. El tren ofrecerá una gran resistencia a ponerse en movimiento, resistencia que su motor deberá vencer. Después, cuando el tren viaja a una velocidad constante y se acerca a la siguiente estación, ofrecerá una gran resistencia a detenerse (el tren “quiere” mantener su velocidad sin cambios). En esta ocasión serán los frenos quienes tendrán que vencer esta resistencia. Es a esta “resistencia” a la aceleración a lo que se conoce como inercia.

La fuerza causa aceleración. Mientras la masa se opone a acelerar, la fuerza es un agente que provoca aceleración. De esta manera, fuerza y masa “luchan” entre sí, una causando aceleración, la otra oponiéndose a ella. Si piensas de nuevo en el tren del metro, su motor ejerce una fuerza sobre él, cuyo efecto es acelerarlo, sacarlo del reposo para ponerlo en movimiento. Esta fuerza debe “luchar” contra la tendencia de la masa del tren a permanecer en reposo. Cuando el tren se acerca a la estación siguiente, los frenos ejercen una nueva fuerza cuyo efecto también es acelerarlo, esta vez para llevarlo al reposo (recuerda que una aceleración es un cambio en la velocidad; detenerse después de llevar una cierta velocidad también

es acelerar). Esta fuerza debe “luchar” contra la tendencia de la masa del tren a continuar en movimiento.

Un vector es una cantidad que posee tanto magnitud como dirección. Una fuerza es, por lo tanto, un vector (para especificar por completo una fuerza, no basta con decir su magnitud, también hay que decir la dirección en la que actúa). La segunda ley de Newton relaciona fuerza y aceleración; expresa en un solo enunciado la resistencia de la masa a acelerar, y el papel de la fuerza como generadora de aceleración. Una de sus implicaciones es que la aceleración también es un vector. Su dirección siempre es la misma que la de la fuerza neta aplicada sobre el objeto en cuestión, como lo veremos en las secciones siguientes.

Fricción

Cuando tratas de empujar tu libro sobre la superficie de la mesa, la fuerza que ejerces sobre el objeto no es la única en juego, como podrás notar si haces la prueba ahora mismo. De hecho, habíamos afirmado en la sección Fuerza neta, que en total hay cuatro fuerzas actuando sobre el libro, contando la que tú ejerces sobre él para empujarlo.

Para lograr que el libro se mueva, debes primero vencer una fuerza de fricción, o rozamiento, que el libro experimenta por su contacto con la superficie de la mesa. Esta fuerza se opone al movimiento, y no tiene que ver con la inercia: la fricción proviene del contacto de dos superficies y se opone siempre al deslizamiento de una de ellas sobre la otra. Para comprender mejor la fricción, primero hay que analizar otras fuerzas involucradas en esta situación: Mientras el libro yace sobre la mesa, la gravedad de la Tierra ejerce sobre él una fuerza que lo jala hacia abajo; se trata del peso del libro. Por supuesto, el libro no acelera hacia abajo porque la mesa ejerce sobre él una fuerza de contacto hacia arriba, que al ser de igual magnitud, pero con dirección opuesta al peso del libro, lo equilibra y da por resultado que permanezca en reposo.

La fuerza que ejerce la mesa sobre el libro se llama fuerza normal, y es directamente proporcional a la fricción: un libro muy pesado hará que la mesa ejerza sobre él una fuerza normal grande, y la fricción será correspondientemente grande; sobre un libro más ligero actuará una fuerza normal menor, por lo que la fricción también será más pequeña. El hecho de que la fricción y la fuerza normal sean directamente proporcionales permite escribir

$$F_r = \mu \cdot N$$

en donde F_r es la fuerza de fricción, N es la fuerza normal, y μ (la letra griega “mu”) es la constante de proporcionalidad entre ambas, que en este caso se denomina coeficiente de fricción. Bajo ciertas condiciones, el valor de μ depende del tipo de superficies involucradas, y existen tablas especializadas que consignan distintos valores de μ para varias parejas de superficies. Conviene señalar que μ es lo que se conoce como una cantidad adimensional: no tiene unidades.

Así que las cuatro fuerzas que actúan sobre el libro cuando lo empujas son:

1. La que ejerces sobre él al empujarlo.
2. La fuerza de fricción, que se opone al movimiento y es la responsable de que el libro se detenga cuando lo dejas de empujar.
3. El peso del libro, que la Tierra ejerce sobre él a través de la atracción gravitacional.
4. La fuerza normal que la mesa ejerce sobre el libro.

Ejemplo

En realidad, es muy sencillo. El coeficiente de fricción cinética para corcho sobre metal es de aproximadamente 0.4. Si 1 kg de corcho se deslizara sobre una superficie de metal.

Primero debemos calcular la fuerza Normal N , por lo que $N = m \cdot g$.

Masa = 1 kg

Gravedad = 9.81 m/s^2

$N = (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \text{ N}$

esto significa que la fricción que se opondría al movimiento quedaría determinada por la ecuación:

$$f_r = \mu N$$

que entonces se convertiría en:

$$f_r = (0.4) (9.81 \text{ N}) = \mathbf{3.92 \text{ N}}$$

(recuerda que la fuerza normal es igual al peso del objeto, pues de lo contrario éste no se encontraría en equilibrio y sucedería una de dos cosas: se hundiría en la superficie, o saldría disparado hacia arriba).

Las tres leyes del movimiento de Newton

En las secciones anteriores has comenzado a explorar estas tres importantes leyes, que gobiernan prácticamente cualquier tipo de movimiento —dentro de límites que sólo se descubrirían con la llegada de dos teorías revolucionarias: la teoría de la relatividad de Einstein y la mecánica cuántica, ambas durante la primera mitad del siglo XX. Examinemos ahora cada una de ellas:

Primera ley: Inercia

Un objeto que se mueve con velocidad constante se mantendrá en ese estado, a menos que incida sobre él una fuerza neta distinta de cero.

Recuerda que la velocidad es un vector, por lo que decir “velocidad constante” es prácticamente equivalente a decir “movimiento rectilíneo uniforme”, con una pequeña excepción: “velocidad constante” también incluye el caso en el que la velocidad vale cero (y el objeto no se mueve), así que la primera ley también afirma que un objeto en reposo se mantendrá así, mientras no incida sobre él una fuerza neta diferente de cero.

Segunda ley: Fuerza, masa y aceleración

Una fuerza neta que actúe sobre un objeto le producirá una aceleración proporcional a la magnitud de la fuerza, y en la misma dirección. Además, esta aceleración será inversamente proporcional a la masa del objeto.

La segunda ley suele resumirse en la expresión $F = m a$; en la que F es la fuerza neta que incide sobre el objeto, cuya masa es m y sufre como consecuencia una aceleración a .

Tercera ley: acción y reacción

Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza neta sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo ejercerá sobre el primero una fuerza igual y en sentido opuesto.

La primera fuerza suele llamarse “acción”, mientras que la segunda suele denominarse “reacción”: si empujas una pared (ejerces una fuerza de acción sobre la pared), sentirás cómo la pared te empuja a ti con una fuerza igual y en sentido contrario a la tuya (la pared ejerce sobre ti una fuerza de reacción). A este respecto, es muy importante que tengas claro un punto: las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre objetos diferentes. Cuando tu libro descansa sobre la mesa, la fuerza normal (sección Fricción) no es una fuerza de reacción al peso del libro. ¿Por qué no? Porque ambas actúan sobre el mismo objeto, el libro.

En realidad, la situación requiere que la analices con más cuidado: Al estar el libro descansando sobre la mesa, ejerce sobre ella una fuerza de contacto. Esta fuerza de contacto es igual en magnitud al peso del libro, pero no actúa sobre él sino sobre la mesa: es una “acción”, a la cual la mesa responde con una “reacción”, la fuerza normal de la mesa sobre el libro. Mira la figura 3.5:

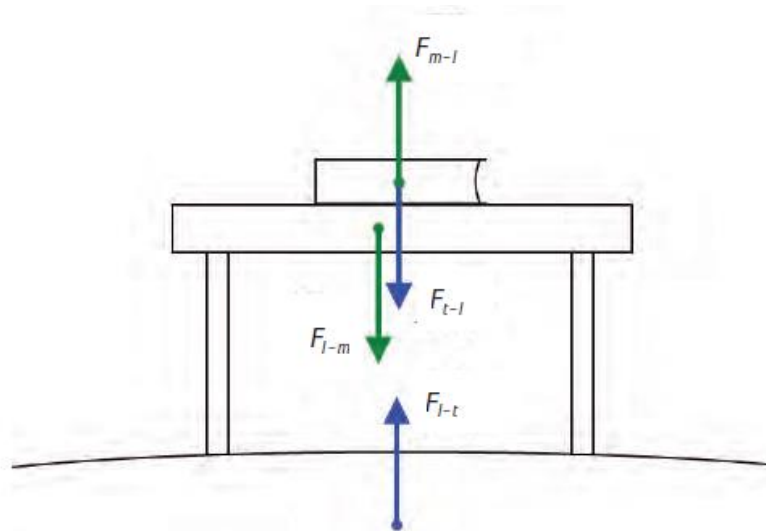


Figura 3.5 Las fuerzas representadas de color verde forman un par acción-reacción; las representadas de color púrpura forman otro par. La fuerza F_{m-l} es la que ejerce la mesa sobre el libro y es la reacción a F_{l-m} , que es la fuerza que el libro ejerce sobre la mesa. Por su parte, F_{t-l} es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el libro (su peso) mientras F_{l-t} es la reacción del libro, que también atrae a la Tierra. ¿Hay más pares acción-reacción que no se hayan incluido en esta figura? ¿Por qué ni la mesa, ni el libro, ni la Tierra experimentan aceleración?

Por otro lado, cuando tú empujas el libro, la reacción a tu empuje no es la fricción (de nuevo, ambas actúan sobre el mismo objeto). La reacción a tu empuje es la fuerza que el libro ejerce sobre tu mano, y que tú sientes como el “contacto” del libro sobre tu piel.

ACTIVIDAD 7

1. Contesta las siguientes preguntas, adaptadas de Hewitt (2004: 65). Si es necesario recurre a fuentes de información diversas; podrías usar, por ejemplo, el propio Hewitt, P. (2004). Física conceptual. 9ª ed. México: Pearson Educación.

PREGUNTAS	RESPUESTAS
¿Cuál es la relación entre inercia y masa?	
¿Cuál es la relación entre masa y peso?	
¿Qué ocurre con el peso de un objeto cuando se le coloca a nivel del mar?	
¿Qué ocurre con el peso de un objeto cuando se le coloca en lo alto del Monte Everest?	
¿Qué ocurre con el peso de un objeto cuando se le coloca en la superficie de la Luna?	.
Una cantidad es “fundamental” para un objeto si es propia de él, si no depende de factores externos al objeto. En ese sentido, ¿cuál es más fundamental, el peso o la masa?	
¿Cuáles son las unidades que emplea el SI para medir masa? ¿Y para medir peso?	
¿Cuál es el peso de un ladrillo de 1 kg?	
¿Cuál es la masa de un costal que pesa 50 N?	

2. Calcula el peso (N) de un de un camión de carga que pesa 50 toneladas de masa (50,000 Kg). Recuerda que $1 \text{ Kg} = 9.81 \text{ N}$.

- a) 490,500 Newtons.
- b) 49,500 Newtons.
- c) 400,500 Newtons.
- d) 90,500 Newtons.

3. Reflexiona acerca del significado de las tres leyes del movimiento, cuyos enunciados acabas de leer, y contesta las siguientes preguntas con todo el detalle que te sea posible.

PREGUNTAS	RESPUESTAS
El niño Adrián, de seis años de edad, jala un remolque en el que lleva sus juguetes. Identifica todas las fuerzas de acción y reacción que intervienen en esta situación, y especifica sobre qué objeto actúa cada una.	
Un niño llega con su remolque a un lago congelado y trata de seguir avanzando caminando sobre el hielo. Explica, empleando las leyes del movimiento de Newton, lo que ocurrirá con el movimiento del niño.	
La Tierra ejerce sobre ti una fuerza de atracción debida a la gravedad. ¿Cuál es la fuerza de reacción que le corresponde?	
Estás a bordo de un transporte público cuando éste se descompone y deja de avanzar. Desde el punto de vista de las leyes de Newton, ¿por qué no sirve de nada que todos los pasajeros se pongan a empujar desde la comodidad de sus asientos?	
Un cañón dispara una bala a gran velocidad. ¿Por qué la aceleración que sufre la bala es mayor que la que sufre el cañón, si de acuerdo con la tercera ley, las fuerzas de acción y reacción tienen la misma magnitud?	
A Manuel le pidieron que jalara un remolque a lo largo de cierta distancia. Sin embargo, Manuel —que ha estudiado física— se opone diciendo: “debido a la tercera ley de Newton, la fuerza con la que yo jale el remolque siempre será igual a la	

fuerza con la que el remolque me jale a mí; entonces no tiene sentido que lo intente, pues nunca podré hacer que el remolque se mueva". ¿Tiene razón? ¿Por qué?	
---	--

FIN DE LA ACTIVIDAD

Vectores y las leyes de Newton

Las leyes del movimiento que acabamos de introducir permiten analizar una gran variedad de situaciones que involucren la acción de fuerzas. Lee con detenimiento la siguiente situación:

Jorge, Fabiola y Quetzal son tres amigos que juegan un curioso juego, que consiste en amarrar tres cuerdas a un aro de metal de 1.5 kg, y jalar el aro los tres al mismo tiempo, cada quien en una dirección determinada.

En un momento del juego, los tres amigos están colocados como en la figura 3.6.

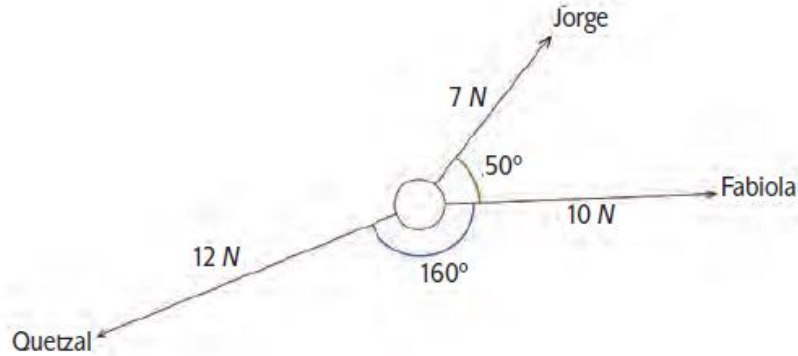


Figura 3.6 Representación de los tres amigos tirando del aro de metal, cada uno en una dirección distinta. La longitud de cada flecha indica la magnitud de la fuerza con la que esa persona está jalando.

En este momento es importante que recuerdes que una fuerza es un vector: tiene magnitud y tiene dirección. En la sección Vectores y una breve introducción a la trigonometría, revisamos algunos aspectos importantes sobre cómo trabajar con vectores. En la figura 3.6 las flechas representan la fuerza con la que cada amigo jala el aro: si recuerdas, la longitud de la flecha indica la magnitud de la fuerza mientras que la dirección de la fuerza queda indicada por el ángulo correspondiente.

La primera pregunta que podemos plantear —y responder— es: En las condiciones de la figura 3.6, ¿en qué dirección se moverá el aro? De acuerdo con la primera ley de Newton, el aro se mantendrá en reposo a menos que actúe sobre él una fuerza neta distinta de cero. La fuerza neta, según lo estudiado en la sección Fuerza neta, es la suma de todas las fuerzas que inciden sobre él.

De acuerdo con la segunda ley, el aro sufrirá una aceleración directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúe sobre él, y en la misma dirección que dicha fuerza neta. Entonces, lo primero que necesitamos es calcular la fuerza neta que actúa sobre el aro: eso significa que necesitamos aprender a sumar vectores. De eso tratan las dos secciones siguientes, así que manos a la obra. (Antes de continuar, nota que usaremos letra en negrita cuando nos estemos refiriendo a un vector, para distinguirlo de las magnitudes escalares).

Suma de vectores por el método del paralelogramo

Existen varios métodos que permiten realizar esa clase de sumas. Uno de ellos es el método del paralelogramo. Mira primero la figura 3.7, que es una representación aún más simplificada de la situación descrita en la sección anterior. Conviene mencionar que cuando dos o más vectores inciden en el mismo punto, como los que se observan en la figura 3.7, se les suele llamar vectores concurrentes (pues concurren en un mismo punto) o también vectores angulares (pues al concurrir, forman ángulos entre ellos).

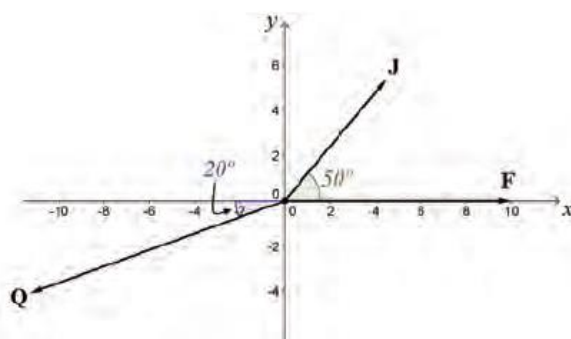


Figura 3.7 Una versión abstracta del juego de los tres amigos. Se incluye un sistema de referencia, cuyo eje positivo x coincide con la dirección de la fuerza \mathbf{F} , correspondiente a Fabiola, y cuyo origen está colocado en la posición del aro, que además se representa por un punto. ¿Por qué el ángulo azul mide 20° ? (Sugerencia: observa con cuidado la figura 3.6.)

Por otro lado, dos vectores que están dirigidos en la misma dirección se llaman vectores colineales. Observa las figuras 3.8a y 3.8b.

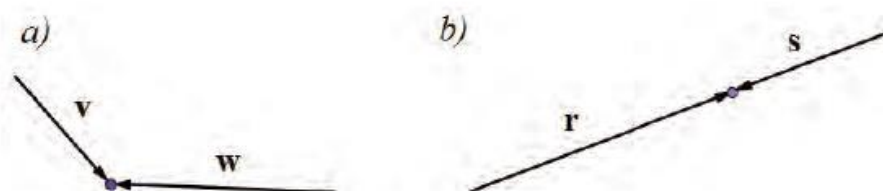


Figura 3.8 a) \mathbf{v} y \mathbf{w} son dos vectores concurrentes, o angulares. b) \mathbf{r} y \mathbf{s} son dos vectores colineales.

Volvamos ahora a la suma de los vectores J , F y Q . Como veremos en un momento, el método del paralelogramo sirve para sumar sólo dos vectores, y aquí tenemos tres. Pero eso no es ningún problema: podemos usarlo para sumar primero dos de ellos, y luego para sumar el resultado con el tercer vector. La idea en este método de suma de vectores es “tomar” al primero de ellos, y trasladarlo desde su posición en el origen de coordenadas hasta la “punta” del segundo vector. Mira la figura 3.9.

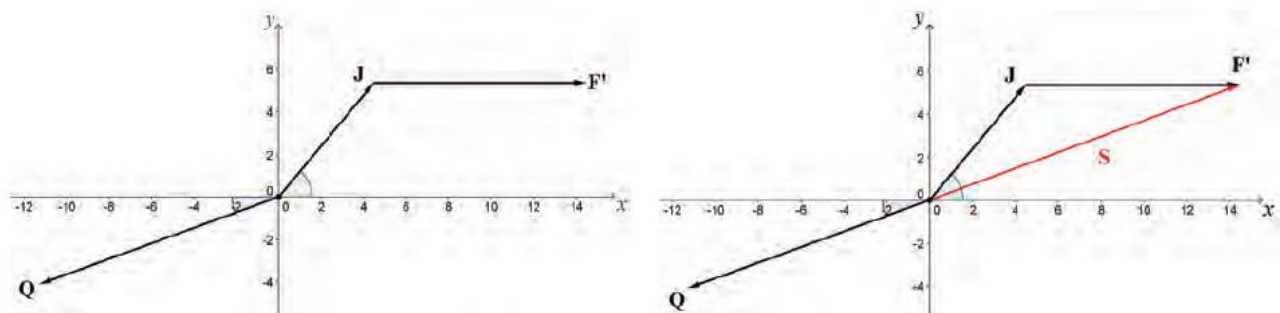


Figura 3.9 Método del paralelogramo para sumar vectores. En la figura 3.4a el vector F ha sido trasladado desde su posición en el origen de coordenadas hasta la punta del vector J ; esta versión trasladada se denota por F' . Por otra parte, en 3.4b, la suma de los vectores F y J se obtiene trazando un nuevo vector, desde el origen de coordenadas hasta la punta del vector trasladado F' . En la figura se ha llamado S a este vector resultante.

Suma de vectores empleando componentes axiales

Mira la figura 3.11:

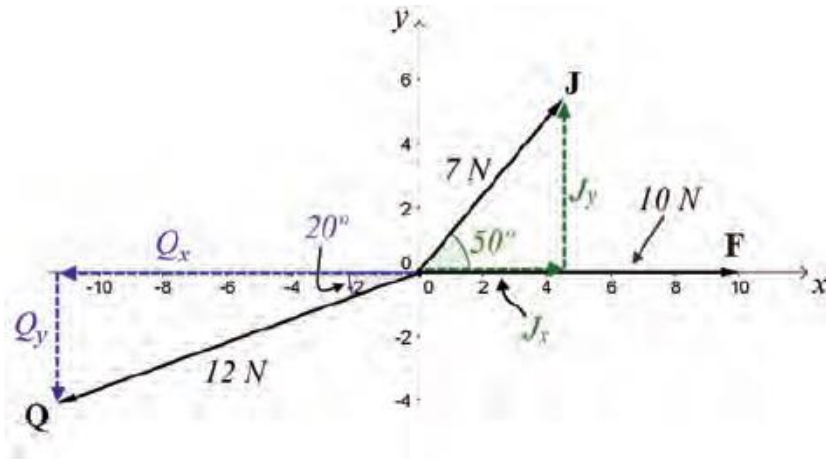


Figura 3.11 Los tres vectores que representan las fuerzas con las que jalar los tres amigos. Se han incluido en el dibujo las componentes axiales (ver sección *Vectores y una breve introducción a la trigonometría*) de **J** y **Q**. ¿Por qué **F** no parece tener componentes axiales?)

La idea en el método de suma por componentes axiales es la siguiente: en lugar de sumar directamente los vectores, descomponerlos en sus componentes axiales y luego sumar estos componentes: los verticales con los verticales y los horizontales con los horizontales. El resultado serán los componentes horizontal y vertical del vector resultante total, con los cuales será posible determinar su magnitud y su dirección. Revisa la sección *Vectores y una breve introducción a la trigonometría*, y la figura 3.11 para verificar por qué las componentes axiales de **J** son:

$$J_x = 7 \cos 50^\circ$$

$$J_y = 7 \sin 50^\circ$$

Mientras que los de **Q** son

$$Q_x = 12 \cos 20^\circ$$

$$Q_y = 12 \sin 20^\circ$$

Gracias a la forma en que decidimos colocar nuestro sistema de referencia, **F** no tiene componente en la dirección **y** (lo cual también puede interpretarse diciendo que esa componente vale cero, $F_y = 0$), mientras que su componente en la dirección **x** coincide con su propia magnitud; en otras palabras,

$$F_x = 10$$

$$F_y = 0$$

Ahora, sumamos todas las componentes horizontales para obtener la “componente horizontal resultante” T_x :

$$T_x = J_x - Q_x + F_x = 7 \cos 50^\circ - 12 \cos 20^\circ + 10 = 3.22$$

Nota que la componente Q_x se restó en lugar de sumarse. Entenderás porqué si observas la figura 3.11: tanto J_x como F_x apuntan en la dirección horizontal positiva del sistema de referencia (es decir, a la derecha), mientras que Q_x lo hace en la dirección horizontal negativa (a la izquierda). Para tomar eso en cuenta, es necesario considerar a Q_x como una cantidad negativa, por lo que al efectuar la suma, Q_x termina restándose a las otras componentes.

Ahora procedemos de manera análoga con las componentes verticales:

$$T_y = J_y - Q_y + F_y = 7 \sin 50^\circ - 12 \sin 20^\circ + 0 = 1.26$$

Nuevamente, J_y y F_y apuntan en la dirección vertical positiva (hacia arriba) por lo que se les toma como positivos, mientras que Q_y apunta en la dirección vertical negativa (hacia abajo), y por ello debe restarse en lugar de sumarse con las demás componentes.

ACTIVIDAD 8

1. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $7 \cos 30^\circ$

- a) 3.5
- b) 5
- c) 14.09
- d) 5.21

2. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $10 \cos 60^\circ$

- a) 3.5
- b) 5
- c) 14.09
- d) 5.21

3. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $15 \cos 20^\circ$

- a) 3.5
- b) 5
- c) 14.09
- d) 5.21

4. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $15 \cos 20^\circ - 10 \cos 25$

- a) 5.03
- b) -15.91
- c) -0.18
- d) 5.21

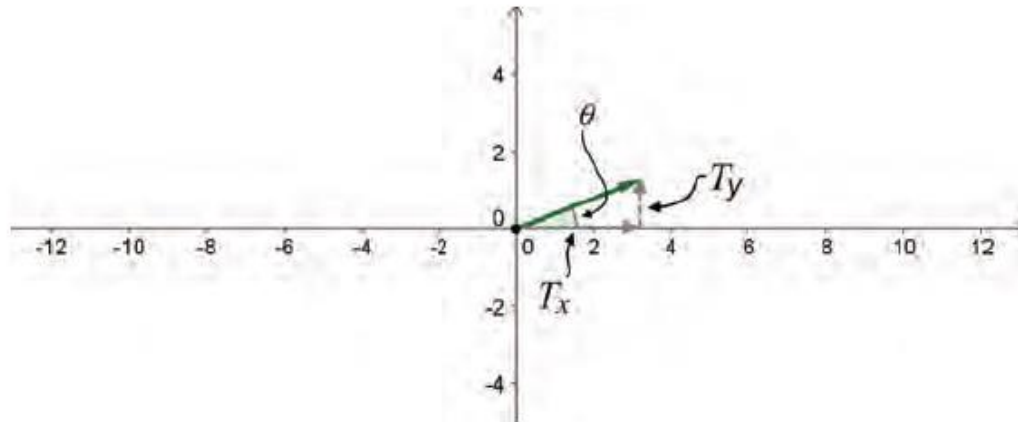
5. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $10 \cos 30^\circ - 30 \cos 35$

- a) 5.03
- b) -15.91
- c) -0.18
- d) 5.21

6. Con el uso de una calculadora científica, calcula: $35 \cos 10^\circ - 40 \cos 30$

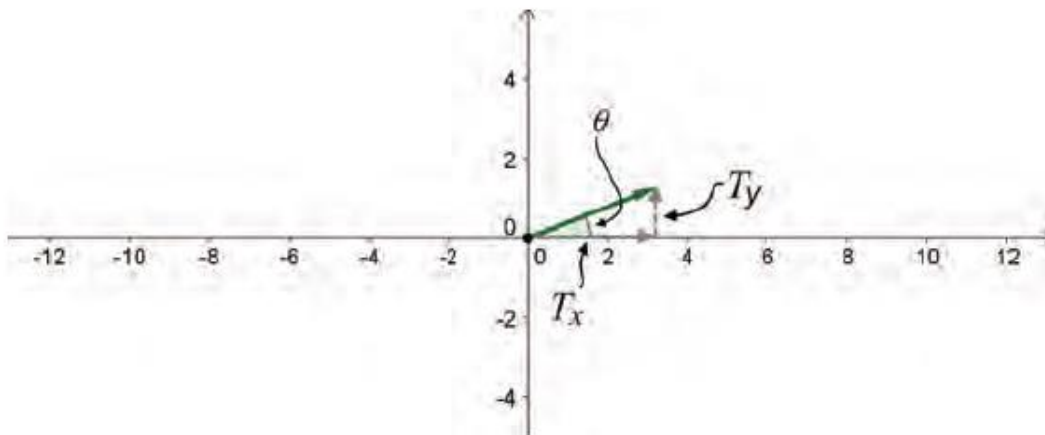
- a) 5.03
- b) -15.91
- c) -0.18
- d) 5.21

7. Observa el siguiente vector T , selecciona las coordenadas del vértice T que le corresponden según la gráfica.



- a) $T(3.22, 1.26)$
- b) $T(6.22, 1.26)$
- c) $T(3.22, 4.26)$
- d) $T(-3.22, 1.26)$

8. Observa el siguiente vector T , según tu experiencia, cuál sería el valor correcto para el ángulo θ según la gráfica.



- a) 21.36 grados
- b) 69.56 grados
- c) 128.37 grados
- d) 360 grados

FIN DE LA ACTIVIDAD

Suma de vectores empleando leyes de los senos y los cosenos

Otra posibilidad para realizar la suma de vectores es mediante el empleo de las llamadas leyes de los senos y los cosenos. Se trata de dos leyes que involucran, respectivamente, a los senos y los cosenos de los ángulos de un triángulo cualquiera; para ilustrar ambas leyes, considera el triángulo de la figura 3.13:

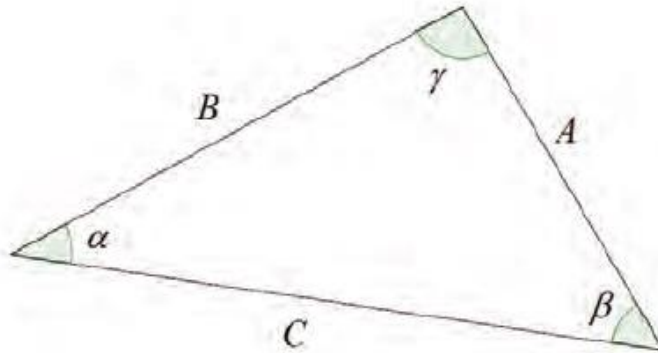


Figura 3.13 La ley de los senos es válida para cualquier triángulo, al igual que la ley de los cosenos.

La ley de los senos establece que, en cualquier triángulo,

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

Es decir, el cociente “longitud de un lado” / “seno del ángulo opuesto” se mantiene constante para los tres lados y los tres ángulos del triángulo.

Por su parte, la ley de los cosenos afirma que, en cualquier triángulo,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

Es decir, uno de los lados (en este caso se eligió a C, pero pudo haberse elegido a cualquier otro) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de esos dos, por el coseno del ángulo que forman.

Para ilustrar el uso de estas leyes en la suma de vectores, volvamos a la situación

planteada en las dos secciones anteriores; efectuaremos la suma de F más J empleando dichas leyes.

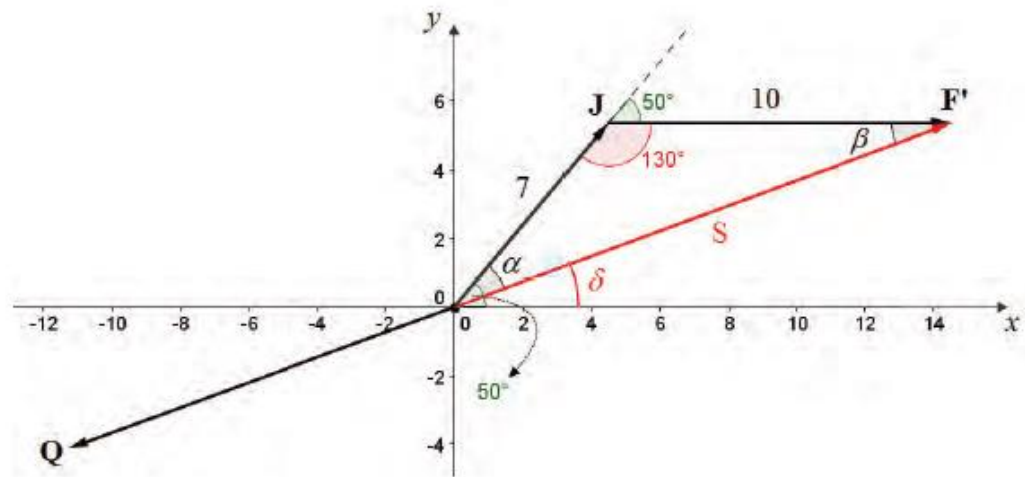


Figura 3.14

Nos concentraremos momentáneamente en el triángulo que se forma con F , J y S . Las magnitudes de F y J son conocidas y se muestran en la figura, al igual que el ángulo que forman entre ellos. Pues bien, como las leyes de los senos y los cosenos se pueden aplicar a cualquier triángulo, podemos aplicarlas a este; la ley de los senos quedaría

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \beta} = \frac{S}{\sin 130^\circ}$$

Mientras que la ley de los cosenos (escribiéndola para el lado S) se convertiría en

$$S^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10) \cos 130^\circ$$

Nota que en ambas leyes se está tratando únicamente con las magnitudes de los vectores, por lo que no se usa negrita. La ley de los cosenos nos permite entonces calcular la magnitud de S ; será

$$S^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10) \cos 130^\circ$$

$$S^2 = 49 + 100 - 140 \cos 130^\circ$$

$$S^2 = 49 + 100 + 89.99$$

$$S^2 = 238.99$$

$$S = \sqrt{238.99}$$

$$S = 15.46$$

Lo cual significa que la magnitud del vector S, resultado de la suma de J más F, es $S = 15.46$. Nos falta calcular su ángulo de dirección α ; para ello, podemos primero usar la ley de los senos para calcular el ángulo α que S forma con J; sustituimos el valor de S en dicha ley, y tendremos

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin \beta} = \frac{15.46}{\sin 130^\circ}$$

Nos quedamos con el primer y el último cociente (por el momento no nos interesa obtener el valor de β , y llegamos a

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{15.46}{\sin 130^\circ}$$

Ahora despejamos el ángulo α como sigue:

$$\frac{10}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{15.46}{\operatorname{sen} 130^\circ}$$

$$10 = \frac{15.46}{\operatorname{sen} 130^\circ} \operatorname{sen} \alpha$$

$$10(\operatorname{sen} 130^\circ) = (15.46) \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{10(\operatorname{sen} 130^\circ)}{15.46} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{10(\operatorname{sen} 130^\circ)}{15.46} = \alpha$$

$$29.70^\circ = \alpha$$

Recuerda que una razón trigonométrica se puede transponer de un miembro al otro de una ecuación empleando su razón inversa; en este caso, se ha usado la razón seno inverso, que se escribe sen^{-1} . Su valor se obtiene con ayuda de la calculadora científica. Observa ahora con atención la figura 3.15:

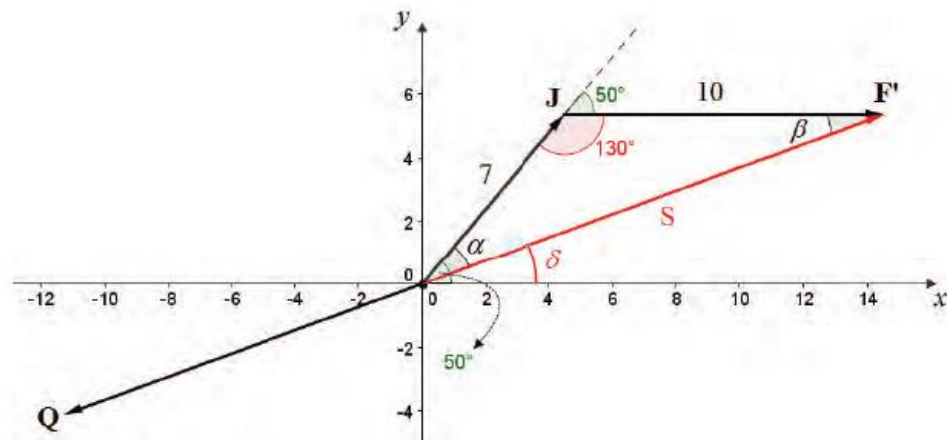


Figura 3.15

Verás que el ángulo que buscamos, δ , se puede obtener como la diferencia entre los 50° de dirección del vector J y los 29.70° que acabamos de calcular para a. Es decir,

$$\delta = 50^\circ - 29.70^\circ = 20.30^\circ$$

Así que hemos hallado tanto la magnitud como la dirección del vector S; en otras palabras, hemos efectuado la suma $J + F$. Para finalizar el problema, el paso siguiente era llevar a cabo la suma $S + Q$; por el método del paralelogramo, ello requiere que el vector Q se traslade hasta la punta del S, como en la figura 3.16:

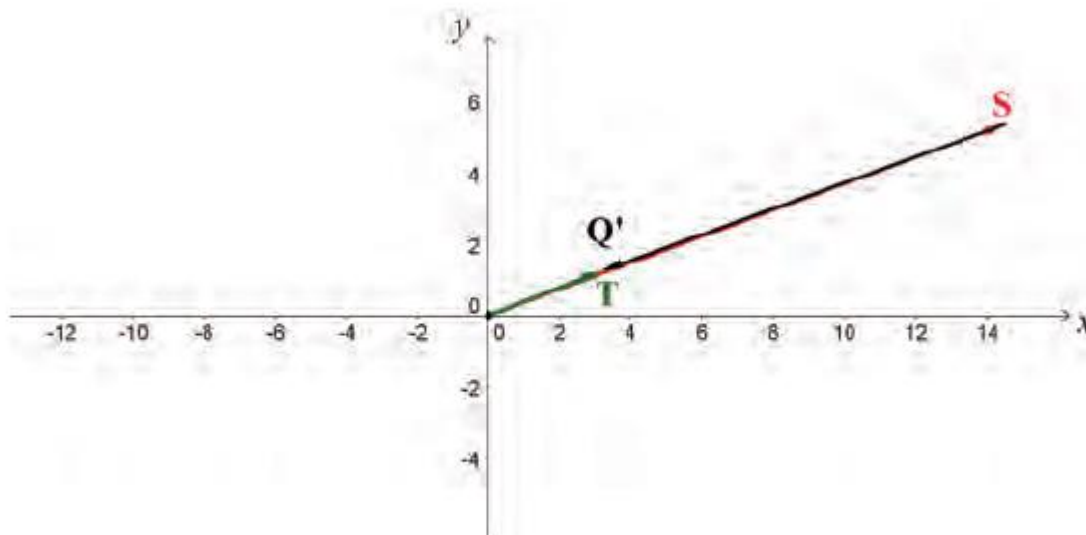
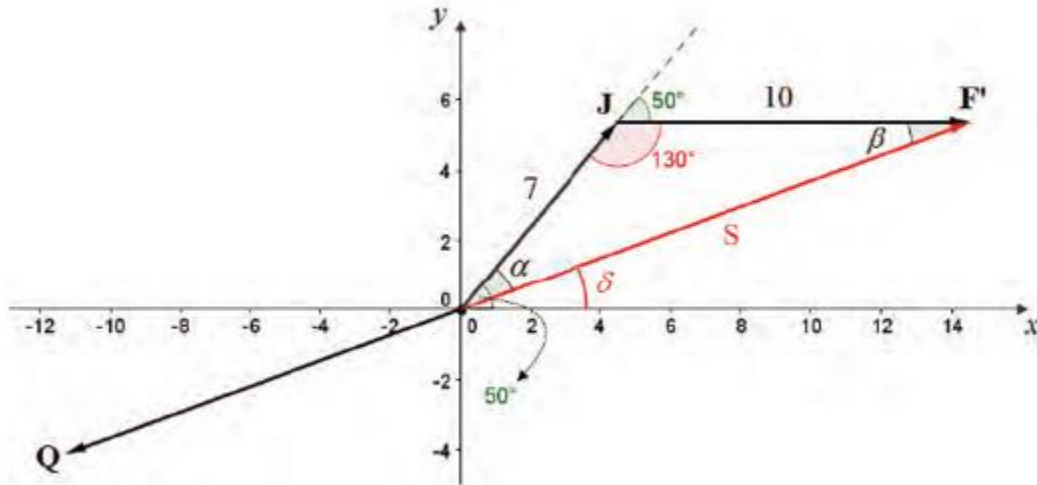


Figura 3.16

El vector T es el resultado de esa suma, y su magnitud y dirección podrían calcularse empleando de nueva cuenta las leyes de los senos y los cosenos; sin embargo, en este caso no es lo recomendable, pues como puedes apreciar, los vectores S y Q son prácticamente colineales, por lo que el “triángulo” que se forma con S, Q y T más bien tiene el aspecto de una línea recta. Entonces conviene calcular T empleando alguno de los otros dos métodos explorados con anterioridad.

ACTIVIDAD 9

1. Observa la siguiente figura, calcula el valor del ángulo Beta (β), encuentra su valor, con ayuda de la ley de los senos o algún otro método que consideres.

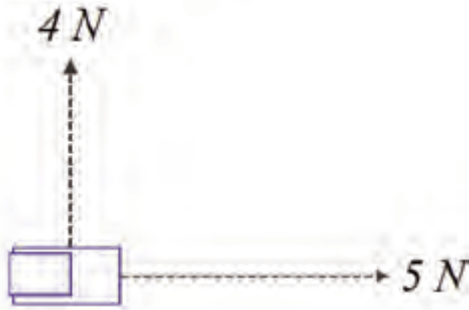


- a) $\beta = 20.3$ grados
- b) $\beta = 30.5$ grados
- c) $\beta = 18.9$ grados
- d) $\beta = 22.9$ grados

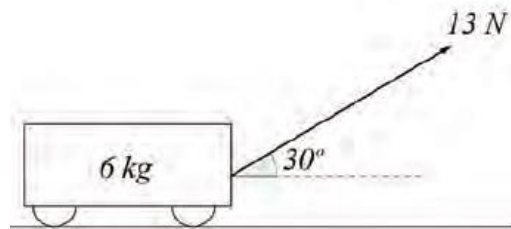
2. Emplea las leyes de Newton y lo que acaba de estudiarse sobre suma de vectores para resolver los siguientes problemas:

PROBLEMAS	PROCEDIMIENTOS
¿Cuál es la aceleración que experimenta un paracaidista de 60 kg que se lanza de un avión, en un momento en el cual el aire le ofrece una fuerza de fricción de 20 N que se opone a su movimiento?	

En un ejido de San Luis Potosí, Don Matías está terminando de arar la tierra para sembrar maíz. Después de quitarle la yunta a sus dos bueyes, tiene un momento de descuido y ambos animales deciden ponerse en movimiento, jalando cada uno por su lado, con fuerzas de magnitudes y direcciones que se muestran en la figura. Si el arado tiene una masa de 9 kg, ¿cuál será la magnitud de la aceleración que experimentará? ¿En qué dirección estará dirigida dicha aceleración? Ignora el efecto de la fricción del arado con la tierra.



Manuel finalmente accede a jalar el remolque como se lo habían pedido. Al jalar, lo hace con una fuerza cuya magnitud y dirección se muestran en la figura. Si el remolque tiene una masa de 6 kg, y suponiendo que las rueditas del remolque lo hacen deslizarse por el suelo sin fricción, ¿cuál será la aceleración que le comunicará Manuel?



FIN DE LA ACTIVIDAD

Energía

La palabra “energía” aparece últimamente en contextos muy diversos. Se habla de energía nuclear, energía eléctrica, energía química, incluso hay quienes hablan de una supuesta energía “psíquica”. A nosotros en este momento nos interesa la llamada energía mecánica.

En física, se entiende por energía la capacidad que tiene un objeto para realizar trabajo.

En ese sentido, efectivamente existen diversos tipos de energía: la energía eléctrica (como la que permite que el motor de un ventilador realice trabajo al mover las aspas), la energía química (como la almacenada en la gasolina, que al quemarse hace que el motor de un automóvil realice trabajo poniendo el auto en movimiento), la energía nuclear (como la de las centrales nucleoelectricas, que mediante la fisión del átomo generan calor, que evapora el agua de un tanque, vapor que realiza trabajo al mover una turbina, la cual genera electricidad).

La energía mecánica, en particular, es la energía que un objeto adquiere como resultado de su velocidad o de su posición.

Energía cinética

Un objeto que se mueve puede realizar trabajo: piensa por ejemplo en una "cascarita" de futbol. Chutas la pelota a la portería del equipo contrario y le pegas al tabique que señala el poste. ¿Qué ocurre?

El balón se desplaza a cierta velocidad, cuando encuentra en su camino un obstáculo (el tabique). Si llevaba la suficiente velocidad, seguramente la pelota moverá el tabique, lo que significa que le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada (que puede ser muy corta si la pelota rebota de inmediato). Lo importante aquí es que la pelota realiza trabajo sobre el tabique.

Esto significa dos cosas:

- Un objeto en movimiento tiene la capacidad de realizar trabajo.
- Un objeto en movimiento tiene energía mecánica, por el solo hecho de encontrarse en movimiento.

Esta clase de energía mecánica que poseen los objetos en movimiento se conoce como energía cinética (del griego kinesis, “movimiento”). La energía cinética k de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad v se expresa mediante la fórmula

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

Energía cinética de un objeto de masa m , que se mueve a una velocidad v . Las unidades del SI que se emplean para medir energía mecánica (y por lo tanto energía cinética) son los joules (J). Si en la fórmula anterior la masa se da en kilogramos y la velocidad en metros/segundo, la energía cinética quedará expresada en joules.

Ejemplo

Consideremos el problema complementario, ¿qué energía cinética alcanza una persona que pesa 60 kg al llegar al suelo después de una caída de 3 m? Para averiguarlo, necesitamos saber con qué velocidad se llega al suelo luego de una caída como esa. Puesto que la velocidad de un objeto que cae va aumentando con el tiempo debido a la aceleración de la gravedad, hace falta obtener primero el tiempo que dura dicha caída.

Ignorando la fricción del aire, la ecuación que describe la caída libre de un objeto desde una altura inicial de 3 m, con una velocidad inicial cero, es

$$d = -\frac{1}{2}(9.81)t^2 + 3$$

Hemos tomado negativa la dirección en la que actúa la gravedad, hacia abajo. En esta ecuación, d representa la posición (la altura) del objeto que cae, después de t segundos de caída. Al llegar al suelo, esta altura vale cero, así que tenemos

$$0 = -\frac{1}{2}(9.81)t^2 + 3$$

Un rápido despeje nos lleva a

$$t = \sqrt{\frac{3(2)}{9.81}} = 0.78 \text{ s}$$

Lo cual significa que toma 0.78 segundos llegar al suelo al caer desde 3 m de altura. En otras palabras, la aceleración de la gravedad actuará durante esos 0.78 segundos. Recordando que la velocidad inicial es cero, la definición de aceleración (en la unidad 1, sección El cambio del cambio) permite escribir entonces

$$9.81 = \frac{v_f - 0}{0.78}$$

Al despejar la velocidad final tendremos

$$v_f = 9.81(0.78) = 7.65 \text{ m/s}$$

Es decir, al caer desde una altura de 3 m con una velocidad inicial cero, se llega al suelo con una velocidad de 7.65 m/s. La energía cinética de una persona que pesa 60 kg al alcanzar esta velocidad será de

$$\frac{1}{2} (60) (7.65)^2 = 1755.67 \text{ J}$$

Energía potencial

Un objeto que se mueve puede hacer trabajo, y por lo tanto tiene energía, denominada energía cinética. Pero un objeto en reposo también puede tener la capacidad de hacer trabajo, si las condiciones son apropiadas. Imagina que tomas una pelota del suelo, la levantas hasta la altura de tus ojos y la mantienes ahí unos momentos. La pelota está en reposo, pero al haberla levantado, le conferiste la capacidad de hacer trabajo: en el momento en que la sueltes, adquirirá velocidad y por lo tanto energía cinética, lo que significa que puede hacer trabajo.

Esta clase de energía, que está “almacenada” en un objeto como resultado de su posición y lista para convertirse en energía cinética, se llama energía potencial (pues tiene el “potencial” de hacer trabajo).

La energía potencial de un objeto es la energía mecánica asociada a su posición o configuración. Es la energía almacenada en el objeto debido a su posición y que se puede transformar en energía cinética o trabajo.

En el caso de la pelota que levantas del suelo, su energía potencial es igual al trabajo que hiciste sobre ella para llevarla hasta la altura de tus ojos. La energía potencial de la pelota es debida a la presencia de la atracción gravitacional de la Tierra, así que también se le denomina energía potencial gravitacional. Podemos obtener una expresión para la energía potencial gravitacional si consideramos que el trabajo que debe efectuarse sobre un objeto para llevarlo hasta una altura h es

$$W = Fh$$

Si el objeto tiene una masa m , la fuerza necesaria para levantarlo del suelo es igual a su peso, mg (donde g es la aceleración de la gravedad), de modo que el trabajo anterior se puede escribir

$$W = mgh$$

Como la energía potencial es igual a este trabajo efectuado para llevar el objeto hasta la altura h , se puede escribir alternativamente

$$U = mgh$$

Energía potencial de un objeto de masa m colocado a una altura h en donde U representa a la energía potencial gravitacional.

Es importante que tomes en cuenta que la altura h se mide respecto a un cierto nivel de referencia: en el caso de la pelota, este nivel de referencia es el suelo, pero también podría ser el quinto piso de un edificio (como sería el caso si tú y la pelota se encontraran en ese piso). Esto significa que la energía potencial, como la energía cinética, es relativa al sistema de referencia desde el cual se realicen las observaciones.

Todo se va a alguna parte: trabajo y conservación de la energía

Probablemente hayas escuchado una famosa frase según la cual, “la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma”. Se trata de una forma de expresar una importante ley física: la conservación de la energía. Básicamente, la idea principal está contenida en dicha frase: la energía nunca “desaparece”, ni tampoco “aparece” energía de la nada; todo lo que ocurre son transformaciones de una clase de energía en otra.

En el caso de la energía mecánica, la energía potencial de un objeto que se encuentra en una posición elevada se puede transformar en energía cinética (cuando el objeto se deja caer y comienza a moverse). Cuando llega al suelo, su energía cinética será igual a la energía potencial que tenía cuando estaba en la

posición elevada: no se pierde ni se gana energía en ningún momento. (En realidad, la fricción del aire hace que la energía cinética del objeto al llegar al suelo sea un poco menor que su energía potencial original, pero eso no significa que haya desaparecido algo de energía: la energía “perdida” se transforma en calor, pues la fricción del aire hace que el objeto se caliente. El calor es, desde luego, otra forma de energía.)

En la sección Energía habíamos definido a la energía como la capacidad de un objeto para hacer trabajo. La relación entre ambas cantidades va más allá: En el caso de la energía potencial debería resultarte claro que así es: se afirmó en la sección Energía potencial, que la energía potencial es igual al trabajo efectuado para llevar un objeto hasta una altura h respecto al suelo.

En el caso de la energía cinética ocurre algo similar: cuando se efectúa trabajo sobre un objeto, se le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada. De acuerdo con la segunda ley de Newton, eso implica que el objeto sufre una aceleración, un cambio en su velocidad. Pero a su vez, eso significa que hay un cambio en su energía cinética; este cambio en la energía es igual al trabajo efectuado sobre el objeto. Lo anterior suele expresarse escribiendo

$$W = \Delta k$$

donde W es el trabajo realizado sobre un objeto, y Δk representa el cambio en su energía cinética (la letra griega delta mayúscula, “ Δ ”, suele emplearse para representar cambio). El hecho de que el trabajo efectuado sobre un cuerpo sea igual al cambio en su energía cinética (y viceversa) constituye otra importante ley física, conocida como el teorema trabajo-energía.

Teorema trabajo-energía: El trabajo efectuado sobre un cuerpo es igual al cambio en su energía cinética, y viceversa.

Este teorema, y la ley de la conservación de la energía, resultan muy útiles a la hora

de estudiar diversas situaciones en las que intervienen fuerzas que alteran el movimiento de un objeto. Estas situaciones pueden ser muy variadas.

Ejemplo

Imagina un objeto cuya masa sea de 100 kg, el cual es llevado a 25 m de altura. Su energía potencial en esa posición es de $U = 100(9.81)(25) = 24,525 \text{ J}$.

Si se le deja caer, al llegar al suelo su energía potencial será cero, pero no habrá desaparecido: en realidad, se habrá transformado por completo en energía cinética. Eso quiere decir que justo antes de tocar el suelo, su energía cinética será también de 24,525 J, lo que permite escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 = 24\,525$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad en el instante antes de tocar el suelo. Como conocemos su masa, podemos despejar dicha velocidad:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(100)v^2 &= 24\,525 \\ v &= \sqrt{\frac{2(24\,525)}{100}} = 22.15 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Entonces, al llegar al suelo el objeto lo hará a una velocidad de 22.15 m/s.

ACTIVIDAD 10

1. Emplea la fórmula $k = \frac{1}{2}mv^2$ y los conocimientos de física que a estas alturas has desarrollado para responder. Un balón de fútbol lleno de aire con un peso de 400 gr. ¿Cuál es la energía cinética del balón si después de un chute viaja con una velocidad de 20 m/s?

- a) 80 Joules.
- b) 40 Joules.
- c) 60 Joules.
- d) 100 Joules.

2. ¿Quién tiene más energía cinética, un automóvil de 1 000 kg que se desplaza a una velocidad de 10 km/h, o un balón de futbol de 400 gr que se mueve a 140 km/h?

- a) El automóvil con una energía cinética de 3864.2 J y el balón 302.49 J.
- b) El automóvil con una energía cinética de 8640.2 J y el balón 325.49 J.
- c) El automóvil con una energía cinética de 3840.2 J y el balón 308.49 J.
- d) El automóvil con una energía cinética de 8360.2 J y el balón 320.49 J.

3. Emplea ahora la expresión $U = mgh$ y los conocimientos de física que a estas alturas has desarrollado para responder: Mario trabaja transportando bloques de hielo. Uno de los bloques que debe manipular tiene una masa de 100 kg, y necesita subirlo a la caja de su camioneta, que está a 1 metro del suelo.

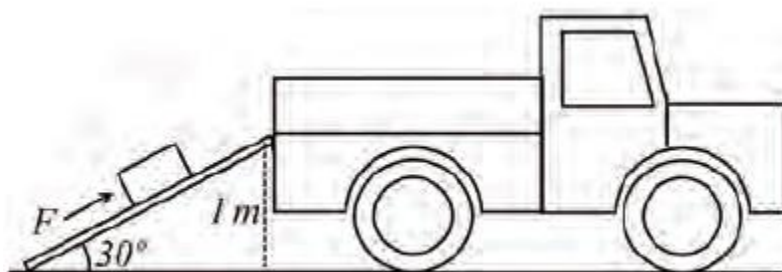


Figura 3.18

PREGUNTAS	SOLUCIONES
¿Cuánta fuerza debe aplicar si levanta el bloque de hielo verticalmente?	
¿Y si lo lleva hasta la caja deslizándolo por una rampa (supón que la fricción con la rampa es tan pequeña que se le puede ignorar) como la que se muestra en la figura 3.18?	
¿Cuál será la energía potencial del bloque una vez que llegue a la caja de la camioneta?	

4. Un automóvil de 800 kg viaja por una avenida a una velocidad de 100 km/h. Repentinamente el conductor aplica los frenos, momento en que los neumáticos dejan de girar. Sin embargo, la velocidad inicial del auto hace que todavía patine varios metros antes de detenerse por completo. Supón un coeficiente de fricción dinámica entre el asfalto y el caucho de los neumáticos de 0.8, ignora el calentamiento de las llantas debido a la fricción, y determina:

DETERMINA	SOLUCIONES
La energía cinética del auto justo antes de frenar.	
El trabajo que debe hacer la fricción sobre el auto para detenerlo por completo.	
La distancia que el auto patina desde el momento en que las llantas dejan de girar hasta que se detiene por completo.	
La aceleración que el auto experimentará desde el momento en que frena hasta que se detiene por completo.	

FIN DE LA ACTIVIDAD

Autor: M.S. Obed Alejandro Yáñez Romero

Co autor: Mtro. Ramón René Alcaraz Félix

El titular de los derechos de esta obra es el Instituto Sonorense de Educación para los Adultos.

Queda prohibida su reproducción o difusión por cualquier medio sin el permiso escrito de este Instituto.