Sistemas de partículas y cuerpo rígido

Física III

Ecuación de movimiento del CR

Conservación del momento angular

Torque resultante y torque de la resultante

Centro de gravedad y centro de masa

Equilibrio de un cuerpo rígido

Sistemas de partículas y cuerpo rígido

Unidad 2

Física III

Instituto de Tecnología e Ingeniería

Universidad Nacional de Hurlingham

Tercera parte

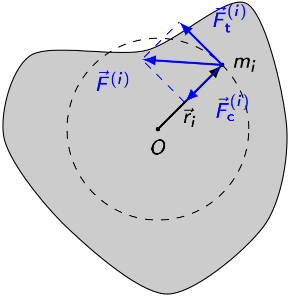
En esta clase veremos:

Ecuación de movimiento del CR

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

En general, cada partícula que forma un cuerpo rígido puede estar sometido a fuerzas externas e internas.

Consideremos la *fuerza resultante* sobre una partícula arbitraria del cuerpo rígido.



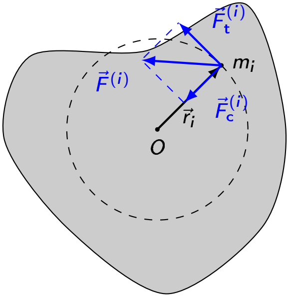
La fuerza resultante $\vec{F}^{(i)}$ que actúa sobre la partícula i, de masa m_i se puede descomponer en sus componentes tangencial, $\vec{F}_t^{(i)}$, y centrípeta, $\vec{F}_c^{(i)}$.

De las dos componentes, solamente la tangencial es la que produce un efecto de rotación, es decir, un torque o un momento.

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

El torque o momento producido por la fuerza $\vec{F}^{(i)}$ que actúa sobre la partícula i, respecto del punto O, es:

$$\vec{T}^{(i)} = \vec{r}_i \times \vec{F}^{(i)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{\mathrm{t}}^{(i)}.$$



Habíamos visto que este torque produce una aceleración angular α_i sobre la partícula, esto es:

$$T_i = I_i\, \alpha_i$$

donde T_i y α_i son las componentes z del torque y de la aceleración angular, respectivamente, e $I_i = m_i\, r_i^2$ es el momento de inercia de la partícula.

Por otro lado, tenemos que el momento angular del cuerpo rígido es

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Podemos entonces preguntarnos qué es lo que causa la variación o cambio en el tiempo de este vector. Para responder esta pregunta podemos comenzar derivando la expresión de $\vec{L}$ con respecto al tiempo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

El momento de inercia del cuerpo rígido es constante puesto que la masa de cada partícula es constante, así como también lo son las distancias entre ellas, en general (por definición del cuerpo rígido), y en particular la distancia de cada una al eje alrededor del cual gira el cuerpo rígido.

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Independientemente de la causa, la derivada temporal de la velocidad angular es lo que conocemos como *aceleración angular* ($\vec{\alpha}$):

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

la cual, como cabe suponer, es la aceleración angular de todo el cuerpo rígido. Entonces, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I\vec{\alpha}$$

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Si ahora tenemos en cuenta la expresión del momento de inercia del cuerpo rígido:

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

la derivada temporal del momento angular del cuerpo rígido se puede expresar también como:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_{i=1}^{N} I_i \right) \vec{\alpha}$$

A continuación, podemos distribuir la aceleración angular dentro de la suma entre paréntesis:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} (I_i \vec{\alpha})$$

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Ahora bien, en virtud de su definición, la aceleración angular del cuerpo rígido debe ser la misma para cada partícula que lo compone, esto es:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2 = \ldots = \vec{\alpha}_i = \ldots = \vec{\alpha}_N$$

En consecuencia, podemos escribir:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \left(I_i \vec{\alpha}_i \right),$$

de donde se ve claramente que la magnitud entre paréntesis no es otra cosa que el torque aplicado sobre la partícula i:

$$\vec{T}_i = I_i \, \vec{\alpha}_i$$

Entonces, vemos que, por un lado:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{T}$$

donde ahora

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^{N} \vec{T}_i$$

es el *torque resultante* aplicado sobre todo el cuerpo rígido, es decir, la suma vectorial de los torque aplicados a cada partícula. Por otro lado, teníamos que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I\vec{\alpha}$$

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Finalmente, igualando las dos expresiones de la derivada temporal del momento angular, llegamos a la

Ecuación de movimiento rotacional del cuerpo rígido

$$\vec{T} = I\,\vec{\alpha}$$

donde $\vec{T}$ es el torque resultante, I es el momento de inercia del cuerpo rígido y $\vec{\alpha}$ es su aceleración angular.

Esta es la ecuación que describe la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. En otras palabras, es la versión de la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación.

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

donde $\vec{T}$ juega el papel de la fuerza, I el de la masa y $\vec{\alpha}$ el de la aceleración lineal.

Ecuación de movimiento rotacional de un cuerpo rígido

Concepto de momento de inercia

En virtud de la ecuación de movimiento rotacional, $\vec{T} = I\,\vec{\alpha}$, el momento de inercia (I) mide la resistencia que ofrece un cuerpo a adquirir una aceleración angular $\vec{\alpha}$ cuando se le aplica un torque o momento $\vec{T}$.

Conservación del momento angular

Momento angular de un cuerpo rígido

Una consecuencia inmediata de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{T}$$

es que si el torque o momento resultante de las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido es nulo, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

Lo cual implica que el momento angular se conserva en el tiempo.

Esto puede corresponder a que no hay fuerza alguna que pueda producir un torque, o bien que la sumatoria de los torques producidos por algunas o todas las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual a cero.

Así, llegamos al:

Teorema de conservación del momento angular

Si el momento resultante de las fuerzas *externas* aplicadas a un sistema de partículas es nulo, entonces se conserva el momento angular total del sistema.

Torque resultante y torque de la resultante

Torque resultante y torque de la resultante

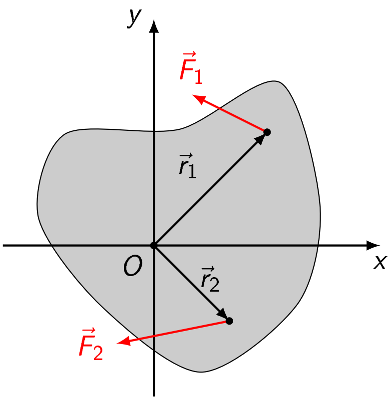
Cuando trabajábamos con un conjunto de fuerzas aplicadas a una masa puntual, determinábamos la fuerza resultante como la suma vectorial de las fuerzas aplicadas y considerábamos que esta estaba aplicada sobre la masa puntual. Así, la resultante produce el mismo efecto dinámico que e conjunto de fuerzas aplicadas.

Ahora, para el estudio del movimiento de rotación de un cuerpo extenso, no solamente debemos considerar las fuerzas en sí sino que también hay que tener en cuenta dónde está aplicada cada una de ellas.

El objetivo es determinar las coordenadas $(x_R; y_R)$ del punto donde debe aplicarse la resultante para producir un torque igual al torque resultante.

Torque resultante y torque de la resultante

Consideremos un sistema sencillo formado por dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, aplicadas a un cuerpo rígido en los puntos ubicados por los vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente. Las componentes cartesianas de estos vectores son:



$$\vec{r}_1 = (x_1\,;\,y_1) \qquad \vec{r}_2 = (x_2\,;\,y_2) \qquad \vec{r}_R = (x_R\,;\,y_R)$$

$$\vec{F}_1 = (F_{1x}\,;\,F_{1y}) \quad \vec{F}_2 = (F_{2x}\,;\,F_{2y}) \quad \vec{R} = (R_x\,;\,R_y)$$

donde $R_x = F_{1x} + F_{2x}$ y $R_y = F_{1y} + F_{2y}$. El torque resultante es:

$$\vec{T}_R = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

donde:

$$\vec{T}_1 = (x_1\,F_{1y} - y_1\,F_{1x})\,\hat{e}_z$$

$$\vec{T}_2 = (x_2\,F_{2y} - y_2\,F_{2x})\,\hat{e}_z$$

$$\vec{T}_R = (x_R\,R_y - y_R\,R_x)\,\hat{e}_z$$

Torque resultante y torque de la resultante

Como ambas fuerzas están contenidas en un mismo plano, al igual que sus puntos de aplicación, los torques solamente tienen componente en la dirección z, perpendicular a la figura. Por lo tanto, podemos trabajar con dichas componentes:

$$T_{Rz} = T_{1z} + T_{2z}$$

Esto es:

$$x_R\, R_y - y_R\, R_y = x_1\, F_{1y} - y_1\, F_{1x} + x_2\, F_{2y} - y_2\, F_{2x}$$

Esta expresión se puede reacomodar de la siguiente manera:

$$\left[x_R - \frac{(x_1\, F_{1y} + x_2\, F_{2y})}{R_y}\right] R_y - \left[y_R - \frac{(y_1\, F_{1x} + y_2\, F_{2x})}{R_x}\right] R_x = 0$$

En virtud de que las componentes de la resultante no son nulas, evidentemente la solución de esta ecuación es:

$$x_R = \frac{x_1\, F_{1y} + x_2\, F_{2y}}{R_y} \quad \text{y} \quad y_R = \frac{y_1\, F_{1x} + y_2\, F_{2x}}{R_x}$$

Torque resultante y torque de la resultante

La extensión de este resultado a un número arbitrario, pero finito (N), de fuerzas no presenta dificultad alguna. El resultado es:

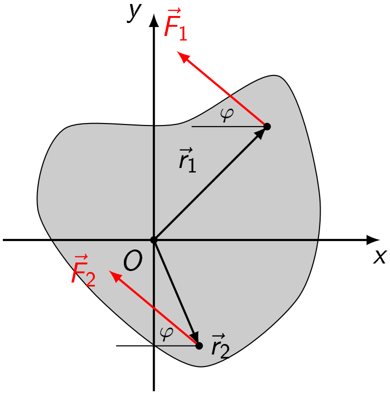
$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \, F_{iy}}{R_y} \quad \text{y} \quad y_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \, F_{ix}}{R_x}$$

donde

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} \quad \text{y} \quad R_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

Torque resultante y torque de la resultante. Fuerzas paralelas

Vamos a considerar ahora que el conjunto de fuerzas aplicadas son todas paralelas entre sí.



La condición de paralelismo se expresa matemáticamente como:

$$\tan\varphi = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{F_{2y}}{F_{2x}}$$

De esta relación puede obtenerse:

$$F_{1y} = F_{2y}\frac{F_{1x}}{F_{2x}}$$

Por otro lado:

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{F_{1y}+F_{2y}}{F_{1x}+F_{2x}}$$

Torque resultante y torque de la resultante. Fuerzas paralelas

Reemplazando la expresión de F_{1y} en la del cociente entre las componentes de la resultante y operando se obtiene:

$$\frac{R_y}{R_x} = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{F_{1y}}{F_{1x}}$$

Es decir, si todas las fuerzas del conjunto son paralelas entre sí, entonces la resultante también debe ser paralela a cada una de las fuerzas que forman dicho conjunto.

A partir de estos resultados, podemos reescribir las expresiones de x_R y de y_R para el caso de un conjunto de fuerzas paralelas. El resultado es:

$$x_R = \frac{x_1\, F_{1x} + x_2\, F_{2x}}{R_x} \quad \text{y} \quad y_R = \frac{y_1\, F_{1y} + y_2\, F_{2y}}{R_y}$$

Torque resultante y torque de la resultante. Fuerzas paralelas

Análogamente, las últimas expresiones pueden extenderse sin mucha dificultad a un número N de fuerzas:

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, F_{ix}}{R_x} \quad \text{y} \quad y_R = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, F_{iy}}{R_y}$$

donde

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} \quad \text{y} \quad R_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

Esto es, para encontrar las coordenadas x_R e y_R, en el caso de un conjunto de fuerzas paralelas, podemos usar estas expresiones o aquellas obtenidas anteriormente para el caso más general.

Centro de gravedad y centro de masa

Centro de gravedad y centro de masa

Un claro ejemplo de un sistema de fuerzas paralelas lo constituye los pesos de las partículas que conforman un cierto sistema. En tal caso, x_R e y_R se conocen como las coordenadas del *centro de gravedad* del sistema $(x_{\rm cg}; y_{\rm cg})$.

Si se tiene, entonces, un sistema de N partículas, y se asume un sistema de referencia en el que el eje y se dispone de forma vertical y se toma el sentido positivo hacia arriba, las componentes de los pesos de cada partícula son:

$$\vec{F}_{\rm g}^{(i)} = (0; -m_i\, g)$$

donde m_i es la masa de la partícula i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Para encontrar los valores de $x_{\rm cg}$ y de $y_{\rm cg}$ podemos usar las expresiones:

$$x_{\rm cg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, F_{iy}}{\sum_{i=1}^{N} F_{iy}} \quad \text{y} \quad y_{\rm cg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, F_{iy}}{\sum_{i=1}^{N} F_{iy}}$$

Centro de gravedad y centro de masa

Se obtiene entonces:

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\,(-m_i\,g)}{\sum_{i=1}^{N} (-m_i\,g)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\,m_i\,g}{\sum_{i=1}^{N} m_i\,g}$$

$$y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\,(-m_i\,g)}{\sum_{i=1}^{N} (-m_i\,g)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\,m_i\,g}{\sum_{i=1}^{N} m_i\,g}$$

Estas son entonces las expresiones que permiten determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sistema de partículas, en general, o de un cuerpo rígido en particular.

Centro de gravedad y centro de masa

De las expresiones anteriores puede verse claramente que la aceleración de la gravedad, al ser constante, puede salir como factor común de las sumatorias:

$$x_{\mathrm{cg}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, m_i\, g}{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g} = \frac{g \sum_{i=1}^{N} x_i\, m_i}{g \sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

$$y_{\mathrm{cg}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, m_i\, g}{\sum_{i=1}^{N} m_i\, g} = \frac{g \sum_{i=1}^{N} y_i\, m_i}{g \sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i},$$

pero estas no son otras que las coordenadas del centro de masa. En otras palabras, las coordenadas del centro de gravedad y del centro de masa coinciden.

Centro de gravedad y centro de masa

¡Importante!

El centro de gravedad puede hallarse siempre que exista un campo gravitatorio. En cambio, siempre se pueden encontrar las coordenadas del centro de masa, haya campo gravitatorio o no.

Centro de gravedad y centro de masa

Para el caso de cuerpos continuos:

$$x_{\mathrm{cm}} = x_{\mathrm{cg}} = \frac{\iiint\limits_V x \,\mathrm{d}m}{\iiint\limits_V \mathrm{d}m}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = y_{\mathrm{cg}} = \frac{\iiint\limits_V y \,\mathrm{d}m}{\iiint\limits_V \mathrm{d}m}$$

donde la integración se extiende a todo el cuerpo.

Puede demostrarse que para figuras geométricas regulares, en las que la masa está uniformemente distribuida, el centro de gravedad y el centro de masa coinciden con su centro geométrico.

Equilibrio de un cuerpo rígido

Equilibrio de un cuerpo rígido

Anteriormente habíamos estudiado la primera condición de equilibrio, la cual aplicamos al conjunto de fuerzas que actuaban sobre una partícula.

Si, además, incluimos la condición de que la velocidad del cuerpo sea también nula ($\vec{v} = \vec{0}$), obteníamos la

Primera condición de equilibrio estático

Un cuerpo se halla en equilibrio si, y solo si, la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula y su velocidad también es nula:

- $\vec{R} = \sum_{i=0}^{N} \vec{F}_i = \vec{0}$,
- $\vec{v} = \vec{0}$.

Evidentemente esta condición puede aplicarse también a un cuerpo rígido.

Segunda condición de equilibrio

Sin embargo, para el caso del cuerpo rígido debemos agregar otra condición más.

En esta unidad vimos que la ley de movimiento asociada a la dinámica rotacional de un cuerpo rígido es:

$$\vec{T} = I\,\vec{\alpha}$$

Si $\vec{T} = 0$, entonces $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$. Esto implica que $\vec{\omega} =$ constante.

Si, en particular, imponemos la condición de que el cuerpo rígido no gira, $\vec{\omega} = \vec{0}$, llegamos a la:

Segunda condición de equilibrio

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{T}_i = \vec{0}.$
- $\vec{\omega} = \vec{0}.$

Segunda condición de equilibrio

En conclusión

Para que un cuerpo rígido permanezca en equilibrio estático se deben cumplir simultáneamente las dos condiciones expuestas anteriormente. De esta forma se puede determinar las componentes de las fuerzas requeridas para lograr dicho equilibrio y dónde deben aplicarse estas.

Esto es todo por hoy

¡Muchas gracias!

Ahora a repasar y practicar.