Guía de ejercicios resueltos y propuestos – Unidad 1

1. Tiro oblicuo

Ejercicio 1

Un hombre está parado en la azotea de un edificio de 30 m y lanza una roca con una velocidad de 40 $\frac{m}{s}$, a 37° sobre la horizontal. Puede ignorarse la resistencia del aire. Calcule:

a) la posición de la roca (coordenadas x e y) a los 1 s; 3 s y a los 8 s después de haber partido;

b) la altura máxima que alcanza la roca sobre la azotea;

c) la rapidez de la roca justo antes de golpear el suelo;

d) la distancia horizontal desde el edificio hasta el punto donde la roca golpea el suelo;

e) el instante en que vuelve a pasar por el nivel de la azotea.

Respuestas:

a) $\vec{r}(1\,\mathrm{s}) = (31.95\,\mathrm{m}; 49.17\,\mathrm{m})$; $\vec{r}(3\,\mathrm{s}) = (95.84\,\mathrm{m}; 58.12\,\mathrm{m})$; $\vec{r}(8\,\mathrm{s}) = (255.56\,\mathrm{m}; -91.02\,\mathrm{m})$

b) 29.38 m;

c) $v_f = 46.7\,\frac{m}{s}$

d) $d = 189.4$ m;

e) $t = 4.91$ s.

Ejercicio 2

Se lanza una piedra horizontalmente con una velocidad inicial de 10 m/s desde un balcón de 4 m de altura con respecto al piso. Simultáneamente, se suelta una segunda piedra del mismo punto. ¿Cuál de las dos llega primero al piso?

Respuesta: Llegan al mismo tiempo.

Ejercicio 3

Un jugador de rugby patea la pelota que parte desde el piso con una velocidad de 18 $\frac{m}{s}$ y un ángulo de 37° con respecto a la horizontal. A 30 metros de donde parte la pelota, medidos en forma horizontal, se encuentra la “hache” con un travesaño a 3 m de altura del piso (ver Figura 1).

a) Determinar si la pelota pasa por encima o por debajo del travesaño y a qué distancia de éste lo hace.

b) ¿En qué punto de la trayectoria la velocidad de la pelota forma un ángulo de –30° hacia abajo con la horizontal?

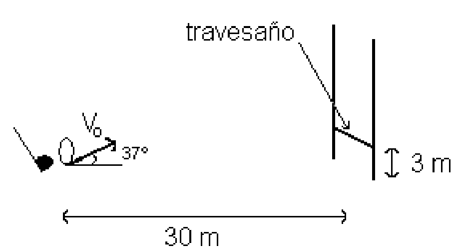


Figura 1

Respuestas:

a) 2 m (aprox.) por debajo;

b) $x = 27.4$ m; $y = 2.4$ m.

Ejercicio 4

Una pelota lanzada a 53° sobre la horizontal golpea un edificio situado a 36 m en un punto a 3 m por sobre el punto de lanzamiento. Puede ignorarse la resistencia del aire.

a) Calcule el módulo de la velocidad inicial de la bola.

b) Obtenga el módulo y dirección de la velocidad de la pelota justo antes de golpear el edificio.

Respuestas:

1. $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;
2. $v_\mathrm{f} = 18.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\theta = -49.4°$.

Ejercicio 5

Una partícula A se lanza con cierta velocidad inicial cuyo módulo es de $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ y que forma un ángulo inicial θ_0 con la horizontal, tal que $\tan\theta_0 = \frac{4}{3}$, desde una altura inicial de 10 m, en el instante $t_0 = 0$ s. En ese mismo instante, una partícula B parte del reposo en el punto $(x_0; 0)$ y se desplaza hacia la derecha a lo largo del eje x con aceleración constante. La Figura 2a muestra un esquema de la situación planteada. Despreciando el rozamiento con el aire, calcular:

a) El instante de tiempo en el cual la partícula A alcanza la altura máxima y las coordenadas de este punto, $(x_{y_{\max}}; y_{\max})$.

b) El instante de tiempo $(t_{x_{\max}})$ y las coordenadas del punto $(x_{\max}; 0)$ en el que la partícula A intersecta el eje x.

c) El valor de la aceleración para el cual las partículas se encuentran en el instante en el que la rapidez de la partícula B es igual a la componente x de la velocidad de la partícula A.

d) El valor de x_0.

Sugerencia: Antes de comenzar a resolver el ejercicio, tenga en cuenta las condiciones iniciales de las dos partículas, es decir, en $t_0 = 0$ s:

- Partícula A: $x_A(0) = 0$, $y_A(0) = 10\,\mathrm{m}$, $v_{A,x}(0) = v_0\cos\theta_0$, $v_{A,y}(0) = v_0\,\mathrm{sen}\,\theta_0$.
- Partícula B: $x_B(0) = x_0$, $v_B(0) = 0$.

Escriba a continuación las ecuaciones que dan la posición y velocidad de cada partícula en función del tiempo: $x_A(t)$, $y_A(t)$, $v_{A,x}(t)$, $v_{y,A}(t)$, $x_B(t)$ y $v_B(t)$:

Partícula A:	Partícula B:
$x_A(t) =$	$x_B(t) =$
$y_A(t) =$	
$v_{A,x}(t) =$	$v_{B,x}(t) =$
$v_{A,y}(t) =$	

Además, pensando en la condición de encuentro, responda las siguientes preguntas:

- ¿en qué punto del plano se encuentran ambas partículas?
- ¿cuál es el instante (t_e) en el que se encuentran?

Ejercicio 6

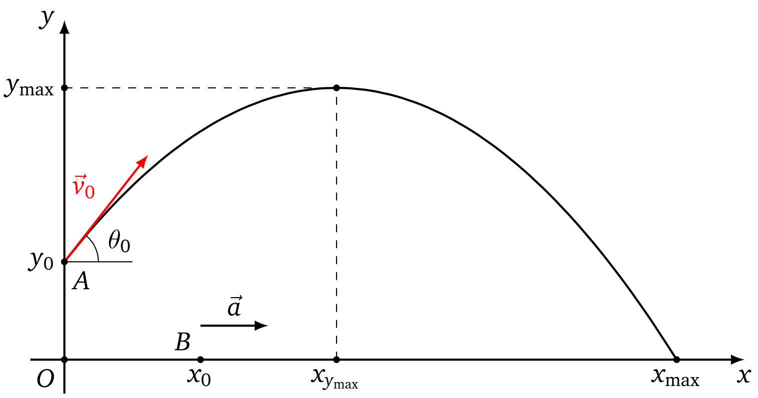
Un bloque se encuentra en el punto más alto de un plano inclinado un cierto ángulo θ respecto a la horizontal. Dicho ángulo es tal que $\tan\theta = \frac{3}{4}$. El coeficiente de rozamiento entre este y la superficie del plano es 0.25. El bloque parte del reposo y se desplaza 10 m hasta que llega al final del plano y cae una altura $h = 50$ m alcanzando una distancia horizontal d desde el borde del plano inclinado, tal como se muestra en la Figura 2b. Hallar:

(a) La aceleración del bloque mientras se desplaza por el plano inclinado.

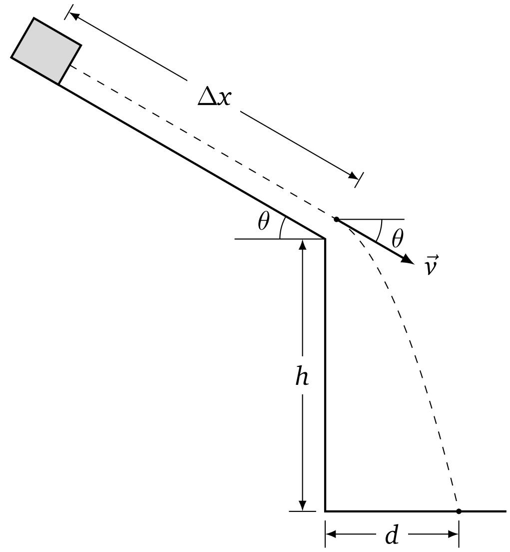
(b) El módulo de la velocidad del bloque cuando este llega al final del plano inclinado.

(c) El tiempo necesario para llegar al final del plano inclinado.

(d) La distancia horizontal d.



(a) Esquema del Ejercicio 5.



(b) Esquema del Ejercicio 6.

2. Movimiento circular uniforme

Ejercicio 7

¿Qué ángulo en radianes corresponde a un arco de 90 cm de longitud situado sobre una circunferencia cuyo radio es de 60 cm? ¿Cuál es el valor de este ángulo en grados?

Solución: La relación entre el ángulo en radianes (θ), la longitud de arco (s) y el radio (R) de una circunferencia es:

$$s = R\,\theta$$

Por lo tanto, el ángulo en radianes puede calcularse como:

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{90\,\text{cm}}{60\,\text{cm}} = 1.5\,\text{rad}$$

Para convertir esta medida a grados, podemos usar el hecho de que $360^\circ = 2\,\pi\,\text{rad}$:

$$\theta = 1.5\,\text{rad}\left(\frac{360^\circ}{2\,\pi\,\text{rad}}\right) = 85^\circ\,56'\,37.21''$$

Ejercicio 8

¿Qué ángulo en radianes corresponde a un arco de 78.54 cm de longitud situado sobre una circunferencia cuyo diámetro es de 100 cm? ¿Cuál es el valor de este ángulo en grados?

Respuesta: $\theta = 1.5748\,\text{rad} = 90^\circ\,13'\,45.82''$.

Ejercicio 9

El ángulo comprendido entre dos radios de una circunferencia es 0.60 rad. ¿Cuál es la longitud del arco correspondiente en una circunferencia de radio 200 cm?

Respuesta: $s = 120\,\text{cm} = 1.20\,\text{m}$.

Ejercicio 10

La tierra da una vuelta sobre sí misma una vez cada 24 hs.

(a) Calcular la velocidad angular de rotación de la Tierra en radianes por segundo.

(b) ¿Cuántos grados se desplaza cada una hora?

(c) ¿Cuál es el módulo de la velocidad tangencial de un cuerpo situado en la superficie del ecuador terrestre?

Solución:

(a) La Tierra da una vuelta cada 24 hs, esto significa que gira un ángulo 2π radianes en 24 hs. Como sabemos que cada hora tiene 3600 segundos, entonces:

$$24\,\mathrm{h}\left(\frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}}\right) = 86\,400\,\mathrm{s}$$

Luego:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\,\pi\,\mathrm{rad}}{86400\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{43200}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \approx 7.27\times 10^{-5}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

(b) El desplazamiento angular se puede calcular mediante:

$$\Delta\theta = \omega\,\Delta t$$

En este caso, $\Delta t = 1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$. En consecuencia:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{43200}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\times 3600\,\mathrm{s} = \frac{\pi}{12}\,\mathrm{rad}\times\left(\frac{360^\circ}{2\,\pi\,\mathrm{rad}}\right) = 15^\circ$$

(c) El módulo de la velocidad tangencial viene dado por:

$$v = R_\oplus\,\omega$$

donde $R_\oplus$ es el radio de la Tierra. Teniendo en cuenta el valor antes calculado de ω y que $R_\oplus = 6.37\times 10^6\,\mathrm{m}$, obtenemos:

$$v = 6.37\times 10^6\,\mathrm{m}\times 7.27\times 10^{-5}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \approx 463.01\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 1667.16\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Ejercicio 11

Calcular la velocidad angular, en radianes por segundo, del cigüeñal de un auto cuyo motor gira a 3600 rpm.

Respuesta: $\omega = 120\,\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Ejercicio 12

Un motor de avión, con su hélice, se coloca sobre un banco de pruebas. Las palas de la hélice tienen, cada una, 1.8 m de longitud.

(a) Calcular la velocidad de los extremos de las palas cuando la hélice gira a 1200 rpm.

(b) ¿Cuál es la velocidad tangencial de un punto de la pala situado a igual distancia del eje y del extremo?

Solución:

(a) En primer lugar, la velocidad angular es:

$$\omega = 1200\,\mathrm{rpm} = 1200\times\frac{2\,\pi}{60}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 40\,\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Luego:

$$v = R\,\omega = 1.8\,\mathrm{m}\times 40\,\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 72\,\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 226\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 813.6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

(b) La velocidad tangencial en la mitad de la distancia entre el eje y el extremo de la pala es:

$$v = \frac{R}{2}\,\omega = 0.9\,\mathrm{m}\times 40\,\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 36\,\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 113\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 406.8\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Ejercicio 13

Un cilindro de 15 cm de diámetro gira en un torno a 750 rpm.

(a) ¿Cuánto vale la velocidad angular en radianes por segundo?

(b) ¿Cuál es el período de rotación?

(c) ¿Cuál es la velocidad tangencial de la superficie del cilindro?

(d) ¿Cuál es el módulo de la aceleración centrípeta?

(e) La velocidad tangencial adecuada para trabajar el hierro fundido es 60 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, aproximadamente. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe girar en un torno, una pieza de 5 cm de diámetro?

Solución:

(a) El cilindro gira a 750 rpm. Como

$$1\,\text{rpm} = \frac{2\,\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

tenemos:

$$\omega = 750\,\text{rpm} \times \left(\frac{2\,\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) = 25\,\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(b) El período está dado por

$$P = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{25\,\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 0.08\,\text{s}$$

(c) La velocidad tangencial está dada por

$$v = R\,\omega$$

donde R es el radio de la trayectoria circular y ω es la velocidad angular expresada en radianes por segundo. Sabemos que $R = 7.5$ cm. Luego:

$$v = 7.5\,\text{cm} \times 25\,\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 187.5\,\pi\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 589\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 5.89\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d) El módulo de la aceleración centrípeta viene dado por:

$$a_c = v\,\omega = \frac{v^2}{R}$$

Entonces:

$$a_c = 187.5\,\pi\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \times 25\,\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 4687.5\,\pi^2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 46.875\,\pi^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 462.64\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(e) Ahora, tenemos que $R = 2.5\,\text{cm}$ y que $v = 60\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Por lo tanto, podemos calcular el valor de ω:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{60\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2.5\,\text{cm}} = 24\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Usando nuevamente el hecho de que

$$1\,\text{rpm} = \frac{2\,\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

se obtiene:

$$24\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times \left(\frac{1\,\text{rpm}}{\frac{2\,\pi}{60}\frac{\text{rad}}{\text{s}}}\right) \approx 230\,\text{rpm}$$

Ejercicio 14

Un motor eléctrico gira a 1800 rpm y tiene sobre su eje tres poleas de diámetros 5, 10 y 15 cm, respectivamente. Calcular la velocidad tangencial en la superficie de cada polea, en metros por segundo.

Respuesta: Para $R = 2.5$ cm, $v = 4.71\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Para $R = 5$ cm, $v = 9.42\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Para $R = 7.5$ cm, $v = 14.14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ejercicio 15

Hallar los valores correspondientes del módulo de la aceleración centrípeta de un punto en la superficie de cada polea. Expresarlas en metros por segundo al cuadrado.

Respuesta: Para $R = 2.5$ cm, $a_c = 887.36\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Para $R = 5$ cm, $a_c = 1774.73\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Para $R = 7.5$ cm, $a_c = 2665.86\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ejercicio 16

Una partícula, que tiene una masa de 800 g, describe una trayectoria circular de 15.7 m de radio. El periodo de dicho movimiento es constante. Se sabe que en el instante $t_1 = 2.8$ s, la posición angular θ_1 es de 15° y que en el instante $t_2 = 3.2$ s es $\theta_2 = 20°$. Determinar:

(a) La frecuencia angular ω.

(b) El periodo (P) y la frecuencia física (f).

(c) El módulo de la velocidad tangencial v.

(d) El módulo de la aceleración centrípeta a_c.

(e) El módulo de la fuerza centrípeta F_c.

(f) El momento de inercia de la partícula.

(g) El módulo del momento angular.

Solución:

(a) Como se sabe, en $t_1 = 2.8$ s, $\theta_1 = 15°$ y en $t_2 = 3.2$ s, $\theta_2 = 20°$. La partícula describe un MCU, puesto que el periodo es constante, y por lo tanto la frecuencia angular puede calcularse como:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{20° - 15°}{3.2\,\text{s} - 2.8\,\text{s}} = \frac{5°}{0.4\,\text{s}} = 12.5\frac{°}{\text{s}} \approx 0.22\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(b) El periodo se puede calcular usando la relación

$$P = \frac{2\,\pi\,\text{rad}}{\omega} = \frac{2\,\pi\,\text{rad}}{0.22\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 28.8\,\text{s}.$$

Una vez determinado el periodo, la frecuencia física se puede calcular mediante:

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{28.8\,\text{s}} \approx 0.035\,\text{Hz} = 2.08\,\text{rpm}$$

(c) El módulo de la velocidad tangencial se determina con la expresión:

$$v = R\,\omega = 15.7\,\text{m} \times 0.22\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 3.42\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d) Podemos calcular el módulo de la aceleración centrípeta con:

$$a_c = R\,\omega^2 = 15.7\,\text{m} \times \left(0.22\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \approx 0.75\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(e) Multiplicando el módulo de la aceleración centrípeta antes calculado, podemos determinar el módulo de la fuerza centrípeta usando la segunda ley de Newton:

$$F_c = m\,a_c = 0.8\,\text{kg} \times 0.75\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \approx 0.6\,\text{N}$$

(f) A partir de su definición, el momento de inercia se calcula como:

$$I = m\,R^2 = 0.8\,\text{kg} \times \left(15.7\,\text{m}^2\right) = 197.19\ \text{kg}\,\text{m}^2$$

(g) Por último, y aprovechando el resultado anterior, podemos calcular el módulo del momento angular:

$$L = I\,\omega \approx 197.19\ \text{kg}\,\text{m}^2 \times 0.22\frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 43\,\text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Ejercicio 17

Una pelota de 200 g de masa gira en un péndulo cónico con una cuerda de 50 cm de longitud que forma un ángulo de 10° con la vertical, describiendo un movimiento circular uniforme. Hallar:

(a) La tensión de la cuerda.

(b) La velocidad tangencial de la pelota.

(c) El período con el que gira la pelota.

Solución:

(a) Observando la Figura 3a se pueden obtener las componentes de los vectores tensión $\vec{T}$ y peso $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_{\mathrm{T}} = F_{\mathrm{T}} \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\mathbf{e}}_r + F_{\mathrm{T}} \cos\varphi\, \hat{\mathbf{e}}_z$$
$$\vec{F}_g = -m\, g\, \hat{\mathbf{e}}_z$$

Estas son las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota.

Planteamos ahora las sumatorias de las componentes de las fuerzas en la dirección vertical y en la dirección radial:

$$R_z = T\cos\theta - m\, g = 0$$
$$R_r = T\operatorname{sen}\theta = m\, a_{\mathrm{c}}$$

De la sumatoria de fuerzas en el eje y se obtiene:

$$T = \frac{m\, g}{\cos\theta} = \frac{0.2\,\mathrm{kg} \times 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\cos 10^\circ} \approx 2\,\mathrm{N}$$

(b) A partir de la sumatoria de fuerzas en el eje x se puede obtener una expresión de la aceleración centrípeta:

$$a_{\mathrm{c}} = \frac{T\operatorname{sen}\theta}{m}$$

Reemplazando en esta última la expresión de la tensión obtenida antes:

$$a_{\mathrm{c}} = g\, \tan\theta$$

Por otro lado, la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta se relacionan mediante:

$$a_{\mathrm{c}} = \frac{v^2}{R}$$

El radio de la trayectoria circular se puede obtener observando nuevamente la figura. Esto es, $R = L\operatorname{sen}\theta$ y por lo tanto:

$$v^2 = a_{\mathrm{c}} L \operatorname{sen}\theta = g\, L\, \tan\theta \operatorname{sen}\theta$$

Es decir:

$$v = \sqrt{g\, L\, \tan\theta \operatorname{sen}\theta} = \sqrt{9.8\,\frac{\mathrm{m}}{s}^2 \times 0.5\,\mathrm{m} \times \tan 10^\circ \times \operatorname{sen} 10^\circ} \approx 0.387\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(c) La aceleración centrípeta está relacionada con la velocidad angular mediante

$$a_{\mathrm{c}} = R\,\omega^2$$

De donde podemos despejar ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\mathrm{c}}}{R}} = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{L\cos\theta}} = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

Luego, podemos calcular el periodo con:

$$P = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

Reemplazando los valores:

$$P = 2\,\pi\sqrt{\frac{0.5\,\mathrm{m}\cos 10^\circ}{9.8\,\frac{\mathrm{m}}{s}^2}} \approx 1.41\,\mathrm{s}$$

Ejercicio 18

Una piedra de masa 2 kg, unida a una cuerda de 50 cm de longitud y cuya resistencia a la rotura es de 500 N, gira en una circunferencia horizontal. ¿Qué velocidad debe llevar la piedra para que su velocidad angular sea la suficiente para provocar la rotura de la cuerda?

Respuesta: $v = 11.18\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ejercicio 19

Una pelota de 2.5 kg de masa gira en un péndulo cónico con una cuerda de 50 cm de longitud que forma un ángulo de 60° con la vertical, describiendo un movimiento circular uniforme contenido en un plano horizontal (Figura 3a). Hallar:

(a) La tensión de la cuerda.

(b) La velocidad tangencial de la pelota.

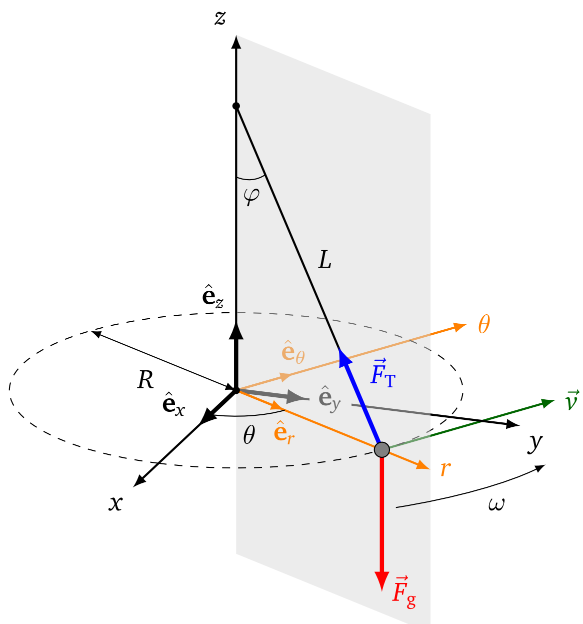
(c) El período con el que gira la pelota.

Respuestas:

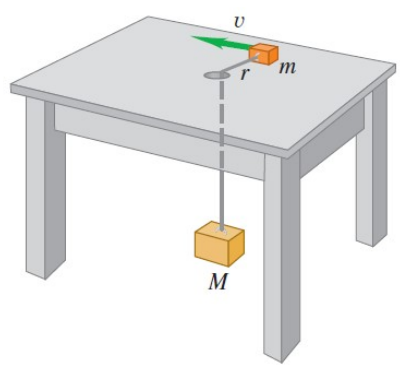
(a) $T = 49$ N.

(b) $v = 2.71\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(c) $P = 1$ s.



(a) Esquema del Ejercicio 19.



(b) Esquema del Ejercicio 20.

Figura 3

Ejercicio 20

Un bloque pequeño de masa m descansa sobre una mesa horizontal sin fricción, a una distancia r de un agujero en el centro de la mesa (figura 3b). Un cordón atado al bloque pequeño pasa por el agujero y está atado por el otro extremo a un bloque suspendido de masa M. Se imprime al bloque pequeño un movimiento circular uniforme con radio R y rapidez v. Obtener las expresiones de la velocidad tangencial (v) y del período del movimiento circular uniforme (P) en función de m, M y R.

Respuesta: $v = \sqrt{\dfrac{M\,g\,R}{m}}$ y $P = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{m\,R}{M\,g}}$.

Ejercicio 21

Demostrar que la distancia d a la cual debería colocarse un satélite artificial, de masa m, para que complete una trayectoria circular alrededor del centro de la Tierra en un intervalo de tiempo igual al periodo de rotación terrestre, asumiendo que este último es constante, está dada por:

$$d = \sqrt[3]{\frac{G \times M_{\oplus} \times P^2}{4 \times \pi^2}}$$

donde G es la constante gravitatoria, $M_\oplus$ es la masa de la Tierra y P es el periodo del movimiento circular asociado al satélite. Una vez obtenida la expresión, calcular:

a) El valor de d (expresado en metros) con los datos consignados a continuación y el valor de $\frac{d}{R_\oplus}$, donde $R_\oplus$ es el radio de la Tierra.

b) El módulo de la velocidad tangencial, expresado en kilómetros por segundo.

Datos: $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$; $M_\oplus = 5.98 \times 10^{24}$ kg; $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m. El periodo de rotación de la Tierra es de 86400 s.

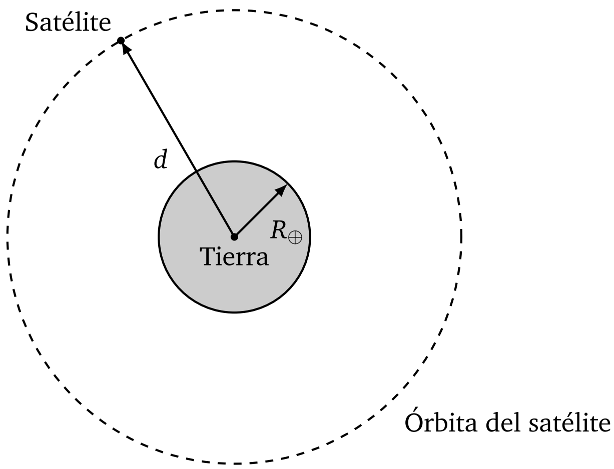


Figura 4: Esquema del ejercicio 2.

Sugerencia: Asuma que la Tierra es una distribución perfectamente esférica y homogénea de masa que interactúa con el satélite a través de la fuerza de atracción gravitatoria, cuyo módulo está dado por:

$$F_{\mathrm{grav}} = G\,\frac{M_\oplus\, m}{d^2}$$

donde d es la distancia entre el satélite artificial y el centro de la Tierra. Puede suponer, además, que la órbita del satélite está contenida en un plano que pasa por el centro de la Tierra, tal como se muestra en la Figura 4.

Responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el periodo del movimiento circular asociado al satélite artificial?
- ¿Cómo se puede calcular su frecuencia angular ω?
- ¿Cómo están relacionadas ω y la aceleración centrípeta a_c?
- ¿Cuál es la fuerza centrípeta F_c que origina la aceleración centrípeta y obliga al satélite a describir una trayectoria circular?
- ¿Cómo se relacionan F_c y a_c?

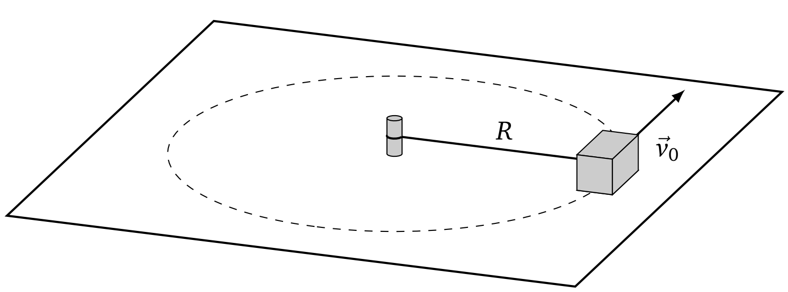


Figura 5

Ejercicio 22

Un bloque de 5 kg de masa está atado a un clavo situado en el centro de una superficie horizontal sin rozamiento. Se desprecia también el efecto de cualquier otra fuerza externa, como la resistencia del aire. El hilo que une el bloque con el clavo está totalmente estirado y tiene una longitud de 25 cm. Se le imprime al bloque una velocidad inicial tal que el bloque tarda 0.1π segundos en describir una trayectoria circular completa alrededor del clavo tal como se muestra en la Figura 5.

(a) ¿Cuál es el periodo (P) del movimiento? Informar el valor con su respectiva unidad.

(b) Hallar la frecuencia angular (ω) del movimiento.

(c) ¿Con qué rapidez describe el bloque la trayectoria circular?

(d) ¿Cuánto vale el módulo de la aceleración centrípeta?

(e) Calcular el módulo de la tensión del hilo.

Respuestas:

a) $P = 0.1\pi$ s.

b) $\omega = 20\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

c) $v = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

d) $a_c = 100\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

e) $F_T = 500\,\text{N}$.

Ejercicio 23

Un proyectil que tiene una masa de 20 g se dispara contra un bloque de 4.98 kg. El primero tiene una velocidad de 500 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, mientras que el bloque está inicialmente en reposo antes de ser impactado por el proyectil. Después del choque el proyectil y el bloque quedan unidos. El bloque está atado, mediante un hilo completamente estirado de 50 cm de longitud, a un clavo situado en el centro de una superficie sin rozamiento sobre la cual el conjunto formado por el proyectil y el bloque describe una trayectoria circular alrededor de dicho clavo, tal como se muestra en la Figura 6. Determinar:

(a) La velocidad del conjunto formado por el proyectil y el bloque después del choque.

(b) La frecuencia angular ω y el periodo del movimiento circular uniforme que describe dicho conjunto.

(c) La tensión del hilo.

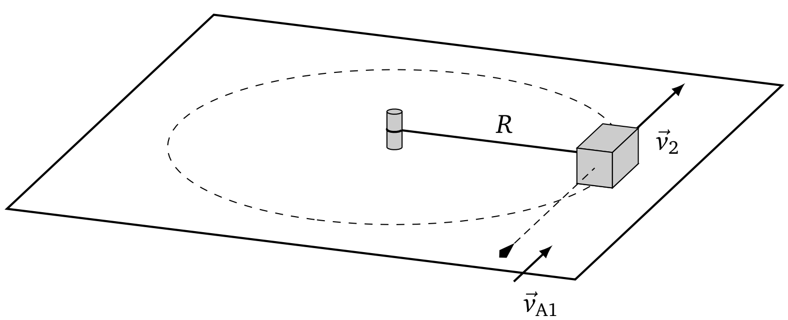


Figura 6

Respuestas:

(a) $v_2 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(b) $\omega = 4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$; $P = 1.57\,\text{s}$.

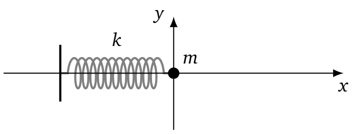
(c) $T = 40\,\text{N}$.

3. Oscilador armónico simple

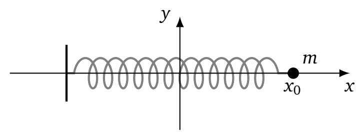
Ejercicio 24

Una masa de 5 kg se sujeta a un resorte de constante $k = 500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ que se encuentra en posición horizontal (Figura 7a). Luego manualmente se estira 5 cm el resorte, tal como se muestra en la Figura 7b y se lo suelta.

a) Hallar la frecuencia angular (ω).
b) Escribir las expresiones de $x(t)$ y de $v(t)$.
c) Calcule la frecuencia (f) y el período (P).
d) ¿Cuál es la rapidez máxima del cuerpo?
e) ¿Cuándo alcanza el cuerpo por primera vez su posición de equilibrio? Calcule la aceleración en ese instante.



(a)



(b)

Figura 7

Solución:

a) La frecuencia angular está dada por la expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Teniendo en cuenta los valores correspondientes, se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{500\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{100\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

b) La forma general de la elongación en función del tiempo es:

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega\,t + \theta_0\right),$$

donde A es la amplitud del movimiento y θ_0 es la fase inicial. Por otro lado, la rapidez del oscilador viene dada por:

$$v(t) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\left(\omega\,t + \theta_0\right)$$

Si se asume que el movimiento comienza en $t = 0$, instante en el que la posición inicial del oscilador es $x_0 = 0.05\,\mathrm{m}$ y su rapidez inicial es nula, tenemos que:

$$x(0) = A\cos\theta_0 = x_0 \qquad \text{y que} \qquad v(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = v_0$$

Podemos ver entonces que, en términos generales:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad \tan\theta_0 = -\frac{v_0}{\omega\,x_0}$$

Como $v_0 = 0$, entonces

$$A = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = 0.05\,\mathrm{m}$$

y

$$\tan\theta_0 = -\frac{0}{\omega\,x_0} = 0$$

El hecho de que $\tan\theta_0 = 0$ podría significar, en principio que $\theta_0 = 0$ o que $\theta_0 = \pi$, pero como $x_0 > 0$, entonces es evidente que la solución correspondiente es $\theta_0 = 0$. Así, las expresiones de la elongación y de la rapidez en función del tiempo son

$$x(t) = 0.05\,\mathrm{m}\cos\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t\right);$$

$$v(t) = -0.05\,\mathrm{m}\times 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{sen}\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t\right) = -0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{sen}\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t\right)$$

c) La frecuencia “física” f está relacionada con la frecuencia angular mediante:

$$\omega = 2\pi f$$

Entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{2\pi} = \frac{5}{\pi}\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 1.59\,\mathrm{Hz}$$

Por otra parte, el periodo se puede calcular usando la expresión

$$P = \frac{2\pi}{\omega}$$

o bien:

$$P = \frac{1}{f}$$

De cualquiera de las dos formas se obtiene:

$$P = \frac{\pi}{5}\,\mathrm{s} \approx 0.63\,\mathrm{s}$$

d) La rapidez máxima del oscilador puede pensarse como la “amplitud” de la función periódica $v(t)$, es decir:

$$v_{\max} = 0.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

e) El instante en que el oscilador alcanza por primera vez la posición de equilibrio se puede determinar de la siguiente manera. En virtud de que

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

podemos reescribir, de forma general, la expresión de $x(t)$ como:

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{P}\,t\right)$$

Se llamamos t_{eq} a dicho instante, entonces: $x(t_{\mathrm{eq}}) = 0$, entonces:

$$x(t_{\mathrm{eq}}) = A\cos\left(\frac{2\pi}{P}\,t_{\mathrm{eq}}\right) = 0$$

Esto es:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{P}\,t_{\mathrm{eq}}\right) = 0$$

Como sabemos, el coseno es cero “por primera vez” cuando su argumento es igual a $\frac{\pi}{2}$, luego:

$$\frac{2\pi}{P}\,t_{\mathrm{eq}} = \frac{\pi}{2},$$

de donde se obtiene que

$$t_{\mathrm{eq}} = \frac{P}{4}$$

Así, podemos observar que el oscilador alcanza la posición de equilibrio por primera vez después de que ha transcurrido un intervalo de tiempo igual a la cuarta parte del periodo del mismo. Entonces:

$$t_{\mathrm{eq}} \approx 0.158\,\mathrm{s}$$

Por último, en el instante en que el oscilador pasa por la posición de equilibrio, en virtud de la relación $a(t) = -\omega^2 x(t)$, resulta claro que la aceleración debe ser igual a cero en dicho instante.

Ejercicio 25

Un proyectil, que tiene 20 g de masa y se desplaza a una velocidad de 200 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en dirección horizontal y sentido hacia la derecha, choca contra un bloque de masa 1.98 kg que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa, y queda incrustado en él. El bloque esta unido a un resorte en hélice como indica la Figura 8. El calibrado del resorte indica que para comprimirlo 1 cm es necesaria una fuerza de 2 N. Luego del choque, el sistema formado por el proyectil, el bloque y el resorte, describe un movimiento armónico simple.

Determinar:

(a) La velocidad del conjunto formado por el bloque y el proyectil inmediatamente después del choque.

(b) La frecuencia angular (ω) y el periodo (P) del oscilador armónico simple.

(c) Las ecuaciones que dan la posición, la velocidad y la aceleración del oscilador en función del tiempo en la forma:

- $x(t) = \quad A\cos(\omega\, t + \theta_0)$.
- $v(t) = -A\,\omega \,\mathrm{sen}\,(\omega\, t + \theta_0)$.
- $a(t) = -A\,\omega^2 \cos(\omega\, t + \theta_0)$.

(d) ¿Cuál es el valor máximo del módulo de la aceleración?

Figura 8

Solución:

a) La velocidad del conjunto formado por el proyectil y el bloque después del choque puede hallarse utilizando la ecuación:

$$m_A\, v_{A1} + m_B\, v_{B1} = m_A\, v_{A2} + m_B\, v_{B2},$$

donde m_A y m_B son la masa del proyectil y la del bloque, respectivamente, v_{A1} y v_{A2} son la rapidez del proyectil antes y después del choque, respectivamente, y v_{B1} y v_{B2} son las correspondientes para el bloque. En virtud de que el bloque estaba en reposo antes del choque, tenemos que $v_{B1} = 0$. Además, como ambos quedan unidos después del choque, sus velocidades son iguales: $v_{A2} = v_{B2} = v_2$. Entonces:

$$m_A\, v_{A1} = (m_A + m_B)\, v_2$$

de donde podemos determinar el valor de v_2:

$$v_2 = \frac{m_A\, v_{A1}}{m_A + m_B}$$

Reemplazando los valores correspondientes:

$$v_2 = \frac{0.02\,\text{kg} \times 200\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.02\,\text{kg} + 1.98\,\text{kg}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Como sabemos, tanto la frecuencia angular como el periodo del oscilador armónico simple depende únicamente de k y de m, mediante:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

En este caso, tenemos que el resorte se comprime un centímetro cada 2 N de fuerza que se le aplica. Por lo tanto:

$$k = 2\frac{\text{N}}{\text{cm}} = 200\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Además, la masa del oscilador es igual a la masa del conjunto formado por el proyectil y el bloque: $m = m_A + m_B = 2\,\mathrm{kg}$. Luego:

$$\omega = \sqrt{\frac{200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{2\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{100\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}} = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Entonces, el periodo es:

$$P = \frac{2\,\pi\,\mathrm{rad}}{10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} = \frac{\pi}{5}\mathrm{s} \approx 0.63\,\mathrm{s}$$

c) Para poder escribir las ecuaciones que dan la elongación, la rapidez y la aceleración en función del tiempo, debemos primero determinar el valor de la amplitud y de la fase inicial. Una manera es considerando las condiciones iniciales. En $t = 0$, el oscilador se encuentra en la posición de equilibrio y su velocidad inicial es igual a v_2 en virtud del impulso adquirido inmediatamente después del choque. Esto es:

$$x(0) = A\cos\theta_0 = 0$$
$$v(0) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = v_2 \Rightarrow A\,\mathrm{sen}\,\theta_0 = -\frac{v_2}{\omega}.$$

Por un lado, podemos elevar ambos miembros de estas dos ecuaciones y luego sumarlas para obtener:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_2}{\omega}\right)^2} = \left|\frac{v_2}{\omega}\right|$$

Reemplazando los valores correspondientes, obtenemos:

$$A = \left|\frac{2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}\right| = 0.2\,\mathrm{m}$$

Por otro lado, podemos calcular el cociente entre la segunda y la primera:

$$\frac{A\,\mathrm{sen}\,\theta_0}{A\cos\theta_0} = \frac{-\frac{v_2}{\omega}}{0}$$

Lo que es equivalente a:

$$\tan\theta_0 = \frac{-\frac{v_2}{\omega}}{0}$$

Como el numerador es negativo y el denominador es nulo, $\tan\theta_0$ tiende a $-\infty$ y, por lo tanto:

$$\theta_0 = \frac{3\,\pi}{2}$$

En consecuencia:

$$x(t) = 0.2\,\mathrm{m}\cos\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t + \frac{3\,\pi}{2}\right)$$
$$v(t) = -2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\mathrm{sen}\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t + \frac{3\,\pi}{2}\right)$$
$$a(t) = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cos\left(10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,t + \frac{3\,\pi}{2}\right)$$

d) El valor máximo de la aceleración corresponde a la “amplitud” de la función periódica que da la aceleración del oscilador en función del tiempo, es decir:

$$a_{\max} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ejercicio 26

Un oscilador armónico está formado por una masa de 100 kg y un resorte de constante k desconocida.

(a) Si el período de las oscilaciones es $P = 1$ s, determinar la constante elástica k.

(b) Si el resorte se reemplaza por otro de $k = 156.8\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ y la masa por otra de valor $m = 10$ kg, hallar la frecuencia de las oscilaciones.

Respuestas:

(a) $k = 3950\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

(b) $f = 0.63$ Hz.

Ejercicio 27

Un cuerpo de masa 10 g se mueve con movimiento armónico simple, de amplitud 24 cm y $P = 4$ s. Cuando $t = 0$, la elongación es de $+24$ cm. Calcular:

(a) La posición del cuerpo en $t = 0.5$ s.

(b) El valor y el sentido de la fuerza que actúa sobre el cuerpo en $t = 0.5$ s.

(c) El tiempo mínimo que es necesario para que se mueva desde la posición inicial hasta el punto de elongación $x = -12$ cm.

(d) La velocidad del cuerpo para $x = -12$ cm.

Respuestas:

(a) $x = 17$ cm.

(b) $F = -0.42 \times 10^{-2}$ N.

(c) $t = 1.33$ s.

(d) $v = \pm 32.6\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Ejercicio 28

Hallar el periodo de oscilación de una partícula, sabiendo que cuando la elongación es de 6.25 cm la aceleración es de $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Respuesta: $P = 1.57$ s.

Ejercicio 29

Un cuerpo de masa 300 kg oscila en el extremo de un resorte sobre una superficie horizontal sin rozamiento. En el gráfico de la Figura 9 se observa la posición del cuerpo en función del tiempo.

(a) Calcule la constante elástica del resorte.

(b) Calcule la velocidad máxima que adquiere el cuerpo.

(c) ¿En qué instantes la aceleración tiene módulo máximo?

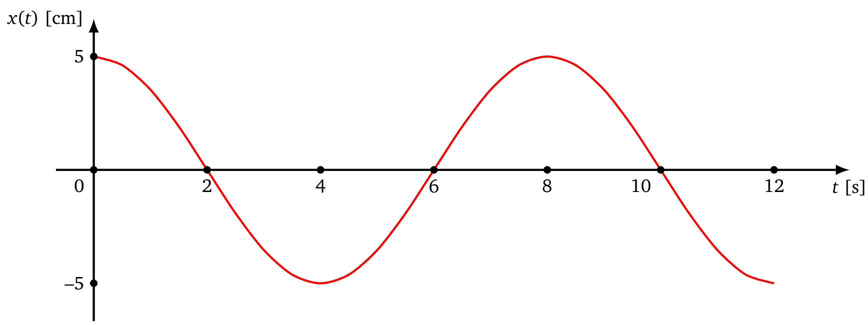


Figura 9

Respuestas:

(a) $k = 185\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$.

(b) $0.039\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(c) 0 s, 4 s y 8 s.

Ejercicio 30

Un cuerpo de masa 0.25 kg está sometido a una fuerza recuperadora elástica de constante de 25 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Se inicia la oscilación del cuerpo con una energía potencial de 0.6 J y una energía cinética de 0.2 J.

(a) ¿Cuál es la amplitud de movimiento?

(b) ¿Cuál es la E_{pe} cuando la elongación es la mitad de la amplitud?

(c) ¿Para qué elongación son iguales la E_{c} y la E_{pe}?

(d) ¿Cuál es la velocidad del cuerpo en el centro de su trayectoria?

Respuestas:

(a) 0.25 m.

(b) 0.2 J.

(c) $x = \pm 0.18$ m.

(d) $v = \pm 2.59\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ejercicio 31

Para el sistema del problema anterior, hallar:

(a) El período P.

(b) La frecuencia f.

(c) La frecuencia angular ω.

(d) La fase inicial θ_0 si la amplitud es $A = 15$ cm, la elongación inicial es $x_0 = 7.5$ cm y la velocidad inicial v_0 es negativa.

(e) Escribir las ecuaciones horarias del movimiento: $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

Respuestas:

(a) $P = 0.628$ s.

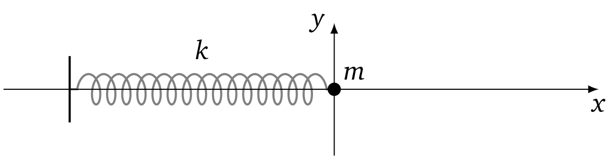
(b) $f = 1.59$ Hz.

(c) $\omega = 10\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

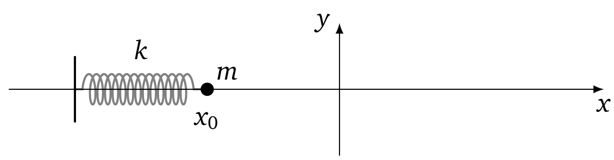
(d) $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$ rad.

Ejercicio 32

Un oscilador armónico simple está formado por una masa puntual de 5 kg y un resorte cuya constante es 2880 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, tal como se muestra en la Figura 10 (a). El resorte se comprime hasta el punto (–50 cm; 0), tal como se muestra en la Figura 10 (b) y luego el sistema se libera partiendo del reposo.



(a)



(b)

Figura 10

(a) Determinar
  I. la amplitud (A),
  II. la frecuencia angular (ω)
  III. el periodo (P) y
  IV. la frecuencia física (f).

  de las oscilaciones.

(b) ¿Para qué valores de x la rapidez de la masa puntual alcanza su valor máximo? Seleccionar todas las opciones correctas:
☐ –0.5 m, ☐ 0 m, ☐ 0.5 m.

(c) ¿Para qué valores de x la rapidez de la masa puntual se anula? Seleccionar todas las opciones correctas:
☐ –0.5 m, ☐ 0 m, ☐ 0.5 m.

(d) ¿Para qué valores de x el módulo de la aceleración impresa a la masa puntual alcanza su valor máximo? Seleccionar todas las opciones correctas:
☐ –0.5 m, ☐ 0 m, ☐ 0.5 m.

(e) ¿Para qué valores de x el módulo de la aceleración impresa a la masa puntual se anula? Seleccionar todas las opciones correctas:
☐ –0.5 m, ☐ 0 m, ☐ 0.5 m.

(f) Si se duplica la amplitud, ¿se modifican los valores de P, f, ω y los resultados de los ítems (b), (c), (d) y (e)? ¿Por qué? Seleccione la respuesta correcta a continuación:
- ◯ Sí, porque al duplicarse la amplitud, se duplican tanto la velocidad como la aceleración y por lo tanto los instantes de tiempo en los que el cuerpo pase por la posición de equilibrio van a ser diferentes.
- ◯ No, porque ω, y por lo tanto f y P, no dependen de las condiciones iniciales.
- ◯ No es posible determinar si los resultados se modifican o no con la información disponible.

Respuestas:

a)
- $A = 0.5$ m.
- $\omega = 24\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
- $P = 0.26$ s.
- $f = 3.82$ Hz.

b) $x = 0$ m.

c) $x = -0.5$ m; $x = 0.5$ m.

d) $x = -0.5$ m; $x = 0.5$ m.

e) $x = 0$ m.

4. Dinámica rotacional y MCUV

Ejercicio 33

Un péndulo está constituido por una pequeña esfera de plomo, de masa 100 g, sujeta al extremo de una cuerda de 1 m de longitud. ¿Cuál es su momento de inercia respecto a un eje que pasa por el extremo superior de la cuerda y es perpendicular a su longitud?

Solución: Consideremos la esfera como una masa puntual. El momento de inercia es:

$$I = mL^2 = 0.1\,\text{kg} \times (1\,\text{m})^2 = 0.1\,\text{kg m}^2$$

Ejercicio 34

Una partícula de masa $m = 1.2\,\text{kg}$ describe una trayectoria circular de radio $R = 5\,\text{m}$. En el instante $t_1 = 4.25\,\text{s}$, la frecuencia angular de esta es $\omega_1 = 15\frac{\circ}{\text{s}}$, mientras que en el instante $t_2 = 6.5\,\text{s}$ su frecuencia angular es $\omega_2 = 45\,\frac{\circ}{\text{s}}$. Determinar:

(a) el valor medio de la aceleración angular media,

(b) el momento de inercia de la partícula y

(c) el valor medio de la componente del torque perpendicular al plano del movimiento.

Solución:

(a) En virtud de los datos presentes en la consigna del ejercicio, podemos determinar la aceleración angular utilizando la expresión:

$$\langle\alpha\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Reemplazando los valores correspondientes, se obtiene:

$$\langle\alpha\rangle = \frac{45\,\frac{\circ}{s} - 15\,\frac{\circ}{s}}{6.5\,\mathrm{s} - 4.25\,\mathrm{s}} = \frac{30\,\frac{\circ}{s}}{2.25\,\mathrm{s}} \approx 0.23\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

(b) El momento de inercia de la partícula respecto del punto alrededor del cual describe la trayectoria circular es:

$$I = m\,R^2 = 1.2\,\mathrm{kg} \times (5\,\mathrm{m})^2 = 30\,\mathrm{kg\,m^2}$$

(c) Por último, el valor medio del torque es:

$$\langle\tau\rangle = I\,\langle\alpha\rangle = 30\,\mathrm{kg\,m^2} \times 0.23\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2} = 6.98\,\mathrm{N\,m}.$$

Ejercicio 35

En un determinado instante, una partícula de masa $m = 6\,\mathrm{kg}$ se encuentra sobre el eje x de cierto sistema de referencia a $4.5\,\mathrm{m}$ a la derecha de su origen y sobre ella actúa una fuerza que tiene un módulo de $500\,\mathrm{N}$ y forma un ángulo de $30°$ con la parte positiva del eje x, tal como se muestra en la Figura 11. Determinar el módulo del torque producido por la fuerza y el módulo de la aceleración angular, ambos medidos en el sistema de referencia dado.

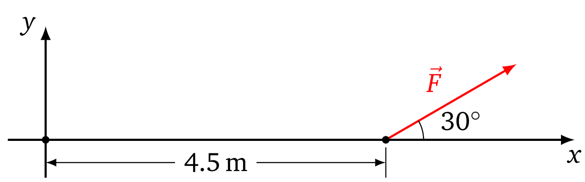


Figura 11

Solución: A partir de la Figura 11, podemos ver que el vector de posición de la partícula es:

$$\vec{r} = (4.5\,\mathrm{m}; 0).$$

Por otro lado, las componentes de la fuerza aplicada sobre la partícula son:

$$\vec{F} = (F\cos\theta; F\,\mathrm{sen}\,\theta)\,,$$

donde $F = \left|\left|\vec{F}\right|\right| = 500\,\mathrm{N}$ y $\theta = 30°$. En consecuencia, el torque es:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \left(500\,\mathrm{N}\,\mathrm{sen}\,30° \times 4.5\,\mathrm{m} - 0 \times 500\,\mathrm{N}\cos 30°\right)\hat{\vec{k}} = 1125\,\mathrm{N\,m}\,\hat{\vec{k}}.$$

de donde se concluye que $||\vec{\tau}|| = 1125\,\mathrm{N\,m}$.
El torque y la aceleración angular están relacionados mediante:

$$\vec{\tau} = I\,\vec{\alpha}.$$

Sin embargo, como ambos vectores son paralelos y tienen la misma dirección que el eje z, perpendicular al plano $x - y$, podemos trabajar directamente con sus módulos:

$$\tau = I\,\alpha,$$

donde $I = m\,R^2$ es el momento de inercia. Para este caso:

$$I = 6\,\mathrm{kg} \times (4.5\,\mathrm{m})^2 = 121.5\,\mathrm{kg\,m^2}.$$

Luego:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{1125\,\mathrm{N\,m}}{121.5\,\mathrm{kg\,m^2}} = 9.26\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ejercicio 36

Un disco de radio 10 cm parte del reposo y comienza a girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro con una aceleración angular de $2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Calcular al cabo de 1 segundo:

(a) la velocidad angular;

(b) el desplazamiento angular;

(c) el módulo de la aceleración centrípeta;

(d) el modulo de la aceleración tangencial;

(e) el módulo de la aceleración resultante.

Solución:

(a)

$$\omega = \omega_0 + \alpha\,\Delta t = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 1\,\text{s} = 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(b)

$$\Delta\theta = \omega_0\,\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\,\Delta^2 = \frac{1}{2} \times 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 1^2\,\text{s}^2 = 1\,\text{rad}$$

(c)

$$a_{\text{c}} = R\,\omega^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta = 2 \times 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times 1\,\text{rad} = 4\,\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}$$

$$a_{\text{c}} = 10\,\text{cm} \times 4\,\frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} = 40\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

(d)

$$a_{\text{t}} = R\,\alpha = 10\,\text{cm} \times 2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

(e)

$$a = \sqrt{a_{\text{c}}^2 + a_{\text{t}}^2} = \sqrt{\left(40\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)^2 + \left(20\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right)^2} = 45.7\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Ejercicio 37

Si ahora se considera que hay rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal del Ejercicio 23, siendo el coeficiente cinético de rozamiento $\mu_{\text{c}} = 0.1$, y se le imprime la misma velocidad inicial ($v_0 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$), determinar:

(a) el valor de la componente z de la aceleración angular y el de la aceleración tangencial y

(b) el intervalo de tiempo transcurrido desde que el bloque inicia su movimiento hasta que se detiene completamente y el desplazamiento angular correspondiente.

Dato: El radio de la trayectoria circular es de 50 cm.

Respuestas:

(a) $\alpha = -1.96\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$; $a_{\text{t}} = -0.98\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

(b) $\Delta t = 2.04\,\text{s}$; $\Delta\theta = 4.08\,\text{rad}$.

Ejercicio 38

Se considera nuevamente la situación esquematizada en la Figura 5, pero esta vez se desconoce la masa del bloque y la longitud del hilo que une al bloque con el clavo es ahora de 50 cm. Además, se considera que hay rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal, siendo $\mu_{\text{c}} = 0.1$, y se le imprime al bloque una velocidad inicial tal que este logra dar una vuelta completa alrededor del clavo antes de detenerse completamente.

(a) Calcular el valor inicial de la frecuencia angular (ω_0).

(b) Hallar el valor del intervalo de tiempo (Δt) que tarda el bloque en dar la vuelta completa.

Respuestas:

a) $\omega_0 = 4.96\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

b) $\Delta t = 2.53$ s.

α (grados)	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
α (radianes)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	–1	0	1	$-\infty$	–1