

Introducción a la teoría de la elasticidad

Unidad 3

Física III

Instituto de Tecnología e Ingeniería

Universidad Nacional de Hurlingham

En esta clase veremos:

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

1 Introducción

2 Deformación

3 Tensión y fuerzas corporales

4 Ecuaciones constitutivas y módulos elásticos.

5 Coeficiente de Poisson

6 Relaciones entre las constantes elásticas

7 Ecuaciones de movimiento

Introducción

Cuando estudiamos el cuerpo rígido, lo definimos como un sistema de partículas indeformable. Sin embargo, la experiencia nos muestra que todos los cuerpos se deforman en mayor o menor medida cuando se aplican fuerzas sobre ellos.

El propósito de esta unidad es estudiar los aspectos básicos de la denominada *Teoría de la elasticidad*:

Teoría de la elasticidad

Puede decirse que la elasticidad es la rama de la Física que se ocupa de estudiar la deformación de los cuerpos.

A continuación, vamos a comenzar el estudio de la elasticidad definiendo la deformación.

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Deformación

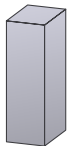
Cuando estudiamos el movimiento del cuerpo rígido, lo definimos como un sistema de partículas cuyas distancias relativas son constantes:

$$\ell_{ij} = ||\vec{r}_i - \vec{r}_j||$$

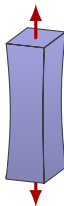
donde ℓ_{ij} es la distancia entre las partículas i y j que se encuentran en los puntos \vec{r}_i y \vec{r}_j , respectivamente.

Tal como su nombre lo indica, la deformación implica un cambio o una variación de la forma de un cuerpo.

Existen diversos tipos de deformación, según la manera en que se apliquen las fuerzas.



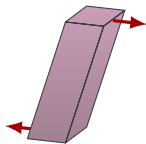
(a) Sin deformar.



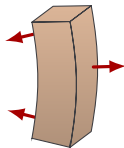
(b) Tracción.



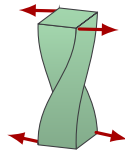
(c) Compresión.



(d) Corte o cizalladura.



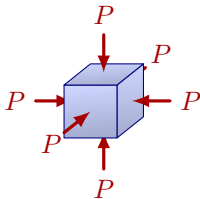
(e) Flexión.



(f) Torsión.

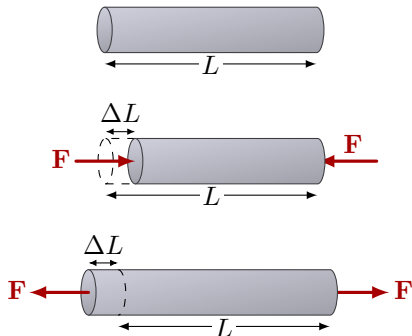
Figura: Tipos de deformación.

Además de las anteriormente consideradas, existe también la deformación debida a la presión hidrostática.



En esta unidad vamos a estudiar qué ocurre cuando relajamos esta condición. Para ello, debemos primero ver cómo se describe matemáticamente la deformación.

Consideremos, en primer lugar, una barra de longitud L , la cual se somete a una fuerza \vec{F} , de tracción o de compresión, y que, como consecuencia experimenta un cambio de longitud ΔL .



Definimos la deformación unitaria por tracción o por compresión (ε) como el cambio de longitud por unidad de longitud:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Deformación unitaria

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

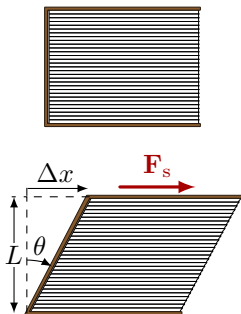
Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

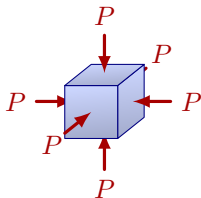
La deformación por corte o cizalladura se origina cuando una fuerza se aplica en dirección paralela a una de las caras del cuerpo.



En este caso, la deformación unitaria por corte o cizalladura se define como el desplazamiento en la dirección de la fuerza por unidad de longitud en la dirección perpendicular a la misma:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{L} = \tan \theta \approx \theta$$

Por último, vamos a considerar la deformación debida a la presión hidrostática, la cual genera una variación del volumen del cuerpo, más específicamente una *disminución*, puesto que esta presión se deba a fuerzas perpendiculares a todas las caras del cuerpo que tienden a comprimir al cuerpo.



Así, la deformación unitaria por presión hidrostática se define como el cambio de volumen por unidad de volumen:

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V}$$

Tensor de deformación

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

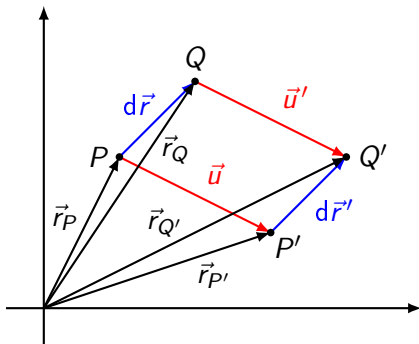
Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Si bien es útil comenzar el estudio de la deformación de un cuerpo viendo cada tipo de deformación por separado, la realidad es que un sólido siempre está sometido a diversas fuerzas que lo deforma en varias direcciones simultáneamente. Es por este motivo que resulta necesaria una descripción más general de la deformación.

Consideremos dos puntos, P y Q , de un sólido.



Sean \vec{r}_P y \vec{r}_Q los vectores de posición de los puntos P y Q , respectivamente, antes de la deformación. Si asumimos que estos puntos están separados una distancia infinitesimal, entonces:

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + d\vec{r},$$

donde $d\vec{r}$ es el vector posición relativa del punto Q respecto del punto P .

Tensor de deformación

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

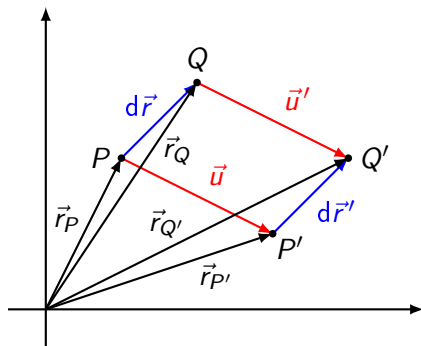
Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Como consecuencia de la deformación, el punto P se traslada al punto P' y el punto Q se traslada al punto Q' . Sean \vec{u} y \vec{u}' los respectivos desplazamientos de estos puntos.



En consecuencia:

$$\vec{r}_{P'} = \vec{r}_P + \vec{u}$$

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_Q + \vec{u}'$$

Por otro lado, además,

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_{P'} + d\vec{r}'$$

Reemplazando las expresiones de $\vec{r}_{P'}$ y de $\vec{r}_{Q'}$ en la última relación, se obtiene:

$$\vec{r}_Q + \vec{u}' = \vec{r}_P + \vec{u} + d\vec{r}'$$

Tensor de deformación

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Pero como $\vec{r}_Q = \vec{r}_P + d\vec{r}$:

$$\vec{r}_P + d\vec{r} + \vec{u}' = \vec{r}_P + \vec{u} + d\vec{r}',$$

o, lo que es lo mismo:

$$\vec{u}' - \vec{u} = d\vec{r}' - d\vec{r}$$

Podemos ver entonces que la diferencia entre los desplazamientos de los puntos P y Q es infinitesimal, puesto que consideramos que estos puntos están separados una distancia infinitesimal antes y después de la deformación, esto es $d\vec{u} = \vec{u}' - \vec{u}$.

Ahora bien, si el desplazamiento fuese constante, $\vec{u} = \vec{u}_0$, tendríamos que $d\vec{u} = \vec{0}$, lo que corresponde a una traslación rígida del cuerpo, lo que implica que $d\vec{r}' = d\vec{r}$ y, por lo tanto, no habría deformación.

Se deduce entonces que \vec{u} debe ser una función de la posición del punto \vec{r} y posiblemente del tiempo: $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$.

En consecuencia, $d\vec{u}$ viene dada por

$$d\vec{u} = du_x \hat{e}_x + du_y \hat{e}_y + du_z \hat{e}_z,$$

donde cada componente \vec{u} puede ser una función de las tres coordenadas:

$u_i = u_i(x, y, z)$ con $i = x, y, z$. Luego:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz,$$

$$du_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz,$$

$$du_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

La expresión anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

$$d\vec{u} = \nabla \vec{u} d\vec{r},$$

donde $d\vec{r} = dx \hat{e}_x + dy \hat{e}_y + dz \hat{e}_z$ y

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

que no es otra cosa que el jacobiano de la transformación de las coordenadas del sólido sin deformar a aquellas del estado deformado.

Como toda matriz cuadrada, $\nabla \vec{u}$ puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$\nabla \vec{u} = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T}{2} + \frac{\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}^T}{2},$$

donde $\nabla \vec{u}^T$ es la matriz transpuesta de $\nabla \vec{u}$.

La matriz simétrica representa el *tensor de deformación infinitesimal* (\mathcal{E}) y la antisimétrica es una *matriz de rotación infinitesimal* (\mathcal{R}):

$$\mathcal{E} = \frac{\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T}{2} \quad \mathcal{R} = \frac{\nabla \vec{u} - \nabla \vec{u}^T}{2}$$

Tensión y fuerzas corporales

Como vimos anteriormente, todos los tipos de deformaciones están por supuesto asociadas a alguna fuerza aplicada al cuerpo. Ahora bien, hasta ahora representábamos las fuerzas mediante un vector que tiene un punto de aplicación.

Sin embargo, en términos más estrictos las fuerzas se ejercen mediante el contacto entre dos cuerpos. Este contacto ocurre abarcando cierta área de cada uno de los cuerpos, la cual se denomina superficie de contacto. Así, la fuerza aplicada por un cuerpo sobre otro es en realidad la resultante de las fuerzas distribuidas más o menos uniformemente sobre el área de contacto.

Asimismo, si se considera una cierta área dentro del cuerpo, la fuerza aplicada sobre éste se distribuye casi uniformemente sobre dicha área.

Tensión o esfuerzo

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

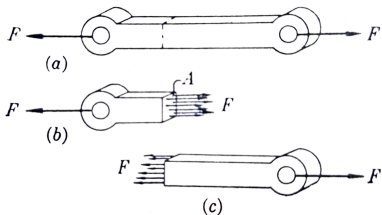
Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

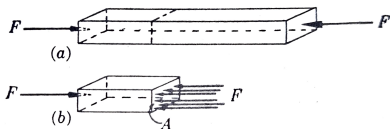
Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento



(a) Tracción



(b) Compresión

Si consideramos una barra, a la cual se le aplica una fuerza de tracción o de compresión, y hacemos un corte transversal a una distancia suficiente de donde se aplica la fuerza, tal como se ve en la figura esa fuerza se distribuye por toda esa superficie. En este caso, la fuerza aplicada produce una deformación por compresión o por tracción.

Si se asume que la fuerza aplicada \vec{F} se distribuye uniformemente sobre la superficie transversal de área A , definimos la tensión (o el esfuerzo), σ como la razón de la fuerza aplicada al área sobre la que se distribuye:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Tensión o esfuerzo

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Consideremos ahora una fuerza que se ejerce en dirección paralela a una de las superficies del cuerpo, tal como muestra la figura. Esta fuerza produce una deformación de corte o cizalladura.

En este caso, la tensión también se define como la fuerza dividida por el área de la superficie sobre la cual se distribuye:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

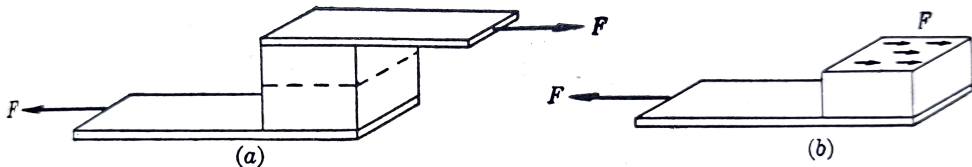
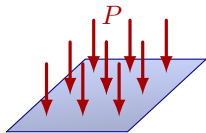


Figura: Corte.



De la misma forma se define la tensión o el esfuerzo debido a la presión hidrostática, esto es la fuerza aplicada sobre un área dada del cuerpo:

$$\sigma = \frac{F}{A} = P$$

Fuerzas corporales o de volumen

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

A diferencia de las tensiones, las fuerzas corporales o de volumen son aquellas que actúan en todo el volumen del cuerpo. Tal es el caso de la fuerza de atracción gravitatoria, a través del campo gravitatorio, o la fuerza de interacción eléctrica, a través de un campo eléctrico.

En el caso particular de la fuerza de atracción gravitatoria, podemos considerar el peso de un elemento de masa (dm) del cuerpo. El peso de este elemento de masa es $d\vec{F}_g = \vec{g} dm$. El diferencial de masa puede escribirse como $dm = \rho dV$, donde ρ es la densidad y dV es el volumen del elemento de masa. Entonces:

$$d\vec{F}_g = \vec{g} \rho dV$$

Así, el factor $\rho \vec{g}$ puede identificarse con la fuerza por unidad de volumen, también conocido como peso específico:

$$\vec{f}_g = \frac{d\vec{F}_g}{dV} = \rho \vec{g}$$

Fuerzas corporales o de volumen

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En términos generales, cualquier fuerza corporal o de volumen puede representarse como una fuerza por unidad de volumen \vec{f} . Así, la fuerza aplicada sobre un elemento de volumen del cuerpo viene dada por:

$$d\vec{F} = \vec{f} dV$$

Cabe destacar que \vec{f} representa la fuerza por unidad de volumen del cuerpo, esto es, la fuerza sobre un elemento de volumen que puede deberse a una causa externa, como se mencionó anteriormente, pero también a las llamadas *tensiones internas*, es decir a las fuerzas que se ejercen entre sí los elementos de volumen adyacentes.

Por supuesto, la fuerza por unidad de volumen tiene unidades de fuerza sobre unidad de volumen. En el caso del SI:

$$[\vec{f}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Relación entre las tensiones y las fuerzas de volumen

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Consideremos un cuerpo sometido a un cierto número de fuerzas externas, las cuales se encuentran distribuidas en toda o en ciertas áreas del cuerpo. Como el cuerpo puede tener una forma irregular, podemos pensar que cada elemento de área dA tiene una orientación determinada sobre el cual actúa un diferencial de fuerza $d\vec{F}$. La tensión generada por cada $d\vec{F}$ sobre el elemento de área correspondiente es

$$\sigma_{\parallel} = \frac{dF_{\parallel}}{dA} \quad \text{y} \quad \sigma_{\perp} = \frac{dF_{\perp}}{dA},$$

donde F_{\parallel} y F_{\perp} son las componentes paralela y normal a dA , respectivamente. La primera genera un esfuerzo de corte y la segunda un esfuerzo de tracción o compresión. La resultante de este conjunto de fuerzas se obtiene integrando sobre el área del cuerpo:

$$\vec{R} = \int_A d\vec{F} = \oiint_A \sigma dA$$

Relación entre las tensiones y las fuerzas de volumen

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Debido a estas fuerzas externas, cada elemento de volumen del cuerpo está sometido a una fuerza corporal \vec{f} . Tal como se indicó anteriormente, la fuerza sobre cada elemento de volumen está dada por $d\vec{F} = \vec{f} dV$. La resultante de estas fuerzas se calcula integrando sobre todo el volumen del cuerpo:

$$\vec{R} = \iiint_V \vec{f} dV$$

En el equilibrio, esta resultante debe coincidir que la que se obtuvo antes, por lo cual:

$$\iiint_V \vec{f} dV = \oiint_A \sigma dA$$

Podemos convertir la integral de superficie presente en el lado derecho de esta ecuación en una integral de volumen en virtud del teorema de la divergencia:

$$\oiint_A \sigma dA = \iiint_V \nabla \cdot \sigma dV$$

Relación entre las tensiones y las fuerzas de volumen

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En consecuencia:

$$\iiint_V \vec{f} dV = \iiint_V \nabla \cdot \sigma dV$$

Por lo tanto, vemos que

$$\vec{f} = \nabla \cdot \sigma.$$

Esto es, las fuerzas corporales son las “fuentes” de las tensiones en el cuerpo.

Ecuaciones constitutivas y módulos elásticos.

Ecuaciones constitutivas

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

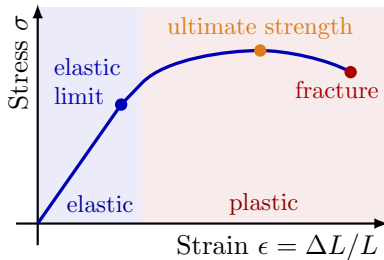
Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En términos generales, se denomina ecuación constitutiva a la relación entre el esfuerzo y la deformación correspondiente. La forma funcional de cada relación se la conoce como *modelo reológico*.



Dentro de cierto límite, existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación, esto es

$$\sigma \propto \epsilon$$

Esto significa que al retirar el esfuerzo aplicado al cuerpo, este recupera totalmente su forma. Para tensiones o deformaciones menores a las definidas por el límite elástico, se dice que el comportamiento del cuerpo es *elástico*.

Tal como se puede apreciar en la Figura, esta relación lineal es válida hasta el denominado *límite elástico*, el cual divide las zonas entre el comportamiento elástico y el comportamiento plástico.

A fin de convertir la proporcionalidad en una igualdad, se debe incluir una constante de proporcionalidad. Dicha constante depende del tipo de esfuerzo y de la deformación correspondiente.

Es importante tener en cuenta que en el régimen elástico, la respuesta en deformación del cuerpo se debe a un *cambio* en la fuerza aplicada. Por ejemplo, la longitud de una barra sometida a un esfuerzo de compresión o de tracción, se modifica de L a $L + \Delta L$ cuando la fuerza aplicada pasa de \vec{F} a $\vec{F} + \Delta\vec{F}$ y, consecuentemente, la tensión varía de σ a $\sigma + \Delta\sigma$.

Si llamamos de forma genérica C a un módulo elástico, entonces

$$C = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

- Para el caso de los esfuerzos y las deformaciones de tracción o de compresión, la constante de proporcionalidad se conoce como *módulo de Young* (E):

$$E = \frac{\Delta F_{\perp}/A}{\Delta L/L} = \frac{L}{A} \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta L}$$

- Cuando se trate de esfuerzos y deformaciones de corte, la constante de proporcionalidad se denomina *módulo de rigidez* (G):

$$G = \frac{\Delta F_{\parallel}/A}{\Delta x/L} = \frac{L}{A} \frac{\Delta F_{\parallel}}{\Delta x}$$

- Por último, el *módulo de compresibilidad* (B) es la constante que relaciona la deformación por presión hidrostática con la tensión correspondiente:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

Muchas veces resulta más conveniente usar el *coeficiente de compresibilidad* (k), o simplemente la compresibilidad, en lugar del módulo de compresibilidad. La compresibilidad se define como el inverso multiplicativo del módulo de compresibilidad:

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta P}$$

El signo negativo en las expresiones de B y de k se deben a que cuando aumenta la presión, el volumen del cuerpo disminuye. En este sentido, tenemos que:

$$-\Delta P = B \frac{\Delta V}{V}$$

Como $\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon$:

$$-\Delta P = B \varepsilon$$

y, por lo tanto, debe ser $\sigma = -\Delta P$.

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación de un cuerpo, puede verse como una generalización de la ley de Hooke.

Puede ocurrir que los esfuerzos y, en consecuencia, las deformaciones varíen en el tiempo o en el espacio o en ambas, por lo que en lugar de las variaciones finitas deben considerarse variaciones infinitesimales de los esfuerzos y las deformaciones. En este sentido, los módulos elásticos se definen de la siguiente manera:

- Módulo de Young: $E = \frac{L}{A} \frac{dF_{\perp}}{dL}$
- Módulo de rigidez: $G = \frac{L}{A} \frac{dF_{\parallel}}{dL}$
- Módulo de compresibilidad: $B = -V \frac{dP}{dV}$
- Compresibilidad: $k = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$

En general:

$$C = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

**Coefficiente
de Poisson**

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Coefficiente de Poisson

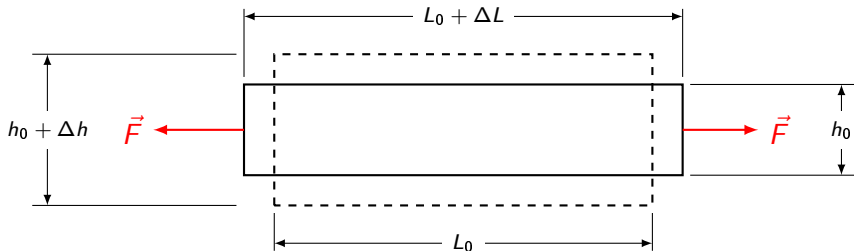
Cuando un cuerpo se somete a esfuerzos de tracción o de compresión, se observa que sus longitudes transversales a la dirección en la que se aplica el esfuerzo disminuyen o aumentan, respectivamente.

El coeficiente de Poisson (ν) se define como la razón entre la deformación unitaria en la dirección transversal a la de la tensión y la deformación unitaria en la dirección paralela a la de la tensión:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$$

Consideremos una barra como se muestra en la Figura, la cual se somete a un esfuerzo de tracción en la dirección horizontal. Como consecuencia, su longitud se incrementa de L_0 a $L_0 + \Delta L$, mientras que su altura h_0 , disminuye hasta $h_0 - \Delta h$. En este caso, el coeficiente de Poisson se expresa como:

$$\nu = -\frac{\frac{\Delta h}{h_0}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$



Coeficiente de Poisson

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coeficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

El signo negativo presente en la definición del coeficiente de Poisson se debe a que un aumento en la longitud paralela a la dirección en la que se aplica la fuerza que deforma el cuerpo implica una disminución de la longitud transversal a esta y viceversa.

Cabe preguntarse si el volumen aumenta o disminuye al producirse la deformación, o si solamente cambia de forma pero su volumen se conserva.

Consideremos un paralelepípedo recto cuyas dimensiones antes de la deformación son a_0 , b_0 y c_0 . Supongamos que se aplica una tensión en dirección paralela al lado de longitud a_0 . Como consecuencia, esta longitud cambia a $a_0 + \Delta a$ y, en virtud de lo visto antes, las dimensiones transversales se modifican a $b_0 + \Delta b$ y $c_0 + \Delta c$.

El volumen antes de la deformación es $V_0 = a_0 b_0 c_0$ y después de la deformación es $V = (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b)(c_0 + \Delta c)$.

Aplicando la propiedad distributiva y despreciando los términos de segundo y tercer grado en las variaciones de las longitudes, se obtiene:

$$V = V_0 + b_0 c_0 \Delta a + a_0 c_0 \Delta b + a_0 b_0 \Delta c$$

o bien

$$\Delta V = b_0 c_0 \Delta a + a_0 c_0 \Delta b + a_0 b_0 \Delta c$$

Dividiendo a ambos lados de esta expresión por V_0 , se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta a}{a_0} + \frac{\Delta b}{b_0} + \frac{\Delta c}{c_0}$$

Coefficiente de Poisson

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En virtud de la definición del coeficiente de Poisson, se tiene que:

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \frac{\Delta a}{a_0} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta c}{c_0} = -\nu \frac{\Delta a}{a_0} \quad (2)$$

Luego:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta a}{a_0}$$

Experimentalmente se halla que $\nu < \frac{1}{2}$, por lo que el factor $1 - 2\nu > 0$ y, en consecuencia, ΔV y Δa tienen el mismo signo, lo que implica que el volumen del cuerpo aumenta cuando se lo somete a tracción ($\Delta a > 0$) y disminuye cuando se lo somete a compresión ($\Delta a < 0$).

Relaciones entre las constantes elásticas

Relaciones entre las constantes elásticas

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En la sección anterior vimos que al aplicar un esfuerzo de tracción o compresión a un cuerpo, este sufre una variación relativa de su volumen dada por

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta a}{a_0}$$

En virtud de la relación entre la variación relativa de la longitud a y el esfuerzo aplicado, dada por la definición del módulo de Young:

$$\frac{\Delta F}{A} = E \frac{\Delta a}{a_0},$$

se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1 - 2\nu) \frac{\Delta F}{E A}$$

Relaciones entre las constantes elásticas

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

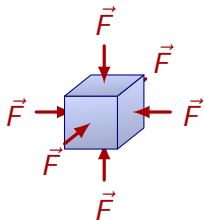
Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Supongamos ahora que se ejercen esfuerzos de compresión a lo largo de las tres direcciones (x , y y z), sobre las seis caras de un cubo. En este caso, el cubo está sometido a la presión hidrostática

$$\Delta P = \frac{\Delta F}{A}$$

El esfuerzo sobre cada par de caras opuestas origina la misma variación relativa de volumen que aquella que se obtuvo para un solo par y, por lo tanto, el cambio total de volumen es tres veces mayor:



$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3(1 - 2\nu) \frac{\Delta F}{EA}$$

O bien:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3(1 - 2\nu) \frac{\Delta P}{E}$$

Relaciones entre las constantes elásticas

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

En virtud de la definición del módulo de compresibilidad:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V}$$

se obtiene:

$$E = -(1 - 2\nu) B$$

Aplicando el mismo tipo de razonamiento a un bloque sometido a un esfuerzo compresor sobre un par de caras opuestas y simultáneamente un par de tracción sobre a otro par de caras opuestas, se obtiene que

$$E = 2 G (1 + \nu)$$

Ecuaciones de movimiento

Consideremos un elemento diferencial del cuerpo sólido, esto es, una porción del mismo que tiene un volumen dV y masa dm . Supongamos, además que este elemento de volumen está sometido a fuerzas o tensiones y que, en determinado instante de tiempo, la fuerza se incrementa en $d\vec{F} = \vec{f} dV$.

Como consecuencia de este incremento en la fuerza aplicada, el elemento de volumen del cuerpo adquiere una aceleración en virtud de la segunda ley de Newton:

$$\vec{f} dV = dm \vec{a}.$$

Como sabemos, $dm = \rho dV$, donde ρ es la densidad de masa. Por otro lado, sabemos que $\vec{f} = \nabla \cdot \sigma$. Luego:

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \vec{a}$$

Ecuaciones de movimiento

Introducción
a la teoría de
la elasticidad

Física III

Introducción

Deformación

Tensión y
fuerzas
corporales

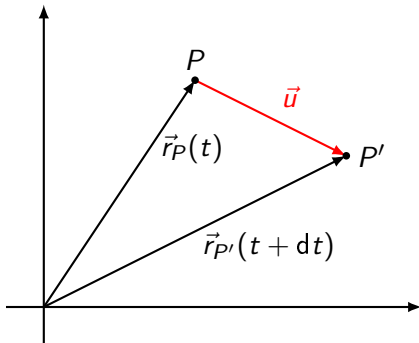
Ecuaciones
constitutivas
y módulos
elásticos.

Coefficiente
de Poisson

Relaciones
entre las
constantes
elásticas

Ecuaciones
de
movimiento

Con respecto a la aceleración, si el elemento de masa se encontraba en el punto P en el instante t antes de la deformación, y se desplaza al punto P' en un intervalo dt luego de la deformación, entonces la velocidad es:



$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\vec{r}_{P'}(t + dt) - \vec{r}_P(t)}{dt}$$

Por supuesto, podemos volver a derivar esta relación para hallar la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Se utilizan las derivadas parciales en virtud de que estamos considerando solamente la variación de la posición en el tiempo, esto es, solamente la dependencia de \vec{u} con el tiempo.

Finalmente, obtenemos que:

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

la cual se conoce como la ecuación de movimiento de un cuerpo elástico.

¡Muchas gracias!

Ahora a repasar y practicar.