Sistemas de partículas y cuerpo rígido

Unidad 2

Física III

Instituto de Tecnología e Ingeniería

Universidad Nacional de Hurlingham

Primera parte

En esta clase veremos:

Definición

Definición de un sistema de partículas

Definición

Un sistema de partículas es un conjunto de cuerpos cuyas dimensiones son irrelevantes a los fines del problema, o bien son despreciables respecto a las demás dimensiones del problema, y que interactúan entre sí.

Centro de masa

Centro de masa

Centro de masa

El centro de masa (CM) de un sistema de partículas es un punto tal que el sistema se comporta dinámicamente como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto.

Coordenadas del CM

En el plano, las coordenadas del CM se calculan con las expresiones:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, x_i \quad \text{e} \quad y_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\, y_i$$

donde $M = \sum_{i}^{N} m_i$, es decir, la masa total.

Centro de masa

Consideremos un sistema de dos partículas.

Con las componentes x_{cm} e y_{cm} del centro de masa, podemos definir el vector de posición del CM:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = (x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}) = \left(\frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{M}, \frac{m_1\, y_1 + m_2\, y_2}{M} \right)$$

donde $M = m_1 + m_2$. Esta expresión se puede reescribir como:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \left(m_1\, x_1 + m_2\, x_2, m_1\, y_1 + m_2\, y_2 \right)$$

Centro de masa

La masa se puede pasar multiplicando al lado izquierdo y el lado derecho se puede expresar como una suma de vectores:

$$M\,\vec{r}_{\text{cm}} = (m_1\,x_1\,,\,m_1\,y_1) + (m_2\,x_2\,,\,m_2\,y_2)$$

Más aún:

$$M\,\vec{r}_{\text{cm}} = m_1\,(x_1\,,\,y_1) + m_2\,(x_2\,,\,y_2)$$

En consecuencia:

$$M\,\vec{r}_{\text{cm}} = m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2$$

Dinámica de un sistema de partículas

Dinámica de un sistema de partículas

Podemos derivar a ambos lados de la relación $M\,\vec{r}_{\rm cm} = m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2$ con respecto al tiempo.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\,\vec{r}_{\rm cm}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2\right)$$

$$M\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\rm cm}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t}$$

donde $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{\rm cm}}{\mathrm{d}t}$ es la velocidad del CM, $\vec{V}_{\rm cm}$. Además, $\vec{v}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t}$ y $\vec{v}_2 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t}$.

Luego,

$$M\,\vec{V}_{\mathrm{cm}} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2$$

Momento lineal del CM

El momento lineal total del sistema es igual al momento lineal del CM

$$\vec{P}_{\mathrm{cm}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

donde

$$\vec{P}_{\mathrm{cm}} = M\,\vec{V}_{\mathrm{cm}}$$

Dinámica de un sistema de partículas

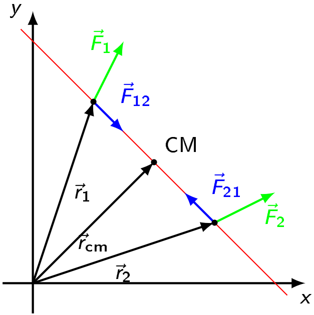
Podemos derivar la relación $M\,\vec{V}_{\rm cm} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2$ respecto al tiempo una vez más:

$$M\,\frac{\mathrm{d}\vec{V}_{\rm cm}}{\mathrm{d}t} = m_1\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}$$

donde $\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_{\rm cm}}{\mathrm{d}t} = \vec{A}_{\rm cm}$ es la aceleración del centro de masa. Esto es,

$$M\,\vec{A}_{\rm cm} = m_1\,\vec{a}_1 + m_2\,\vec{a}_2 = \vec{F}_{\rm R}$$

Ahora bien, la fuerza resultante $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ es el resultado de sumar las fuerzas internas y externas aplicadas a las partículas que forman el sistema.



$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$

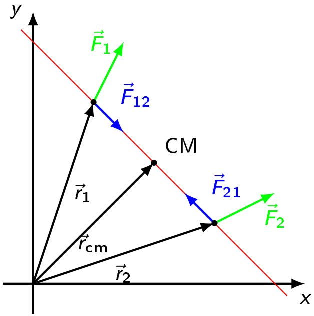
Pero, en virtud de la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Por lo tanto

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Dinámica de un sistema de partículas



Entonces:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_R^{(e)}$$

Luego,

$$\boxed{M\,\vec{A}_{cm} = \vec{F}_R^{(e)}}$$

Conservación del momento lineal

Conservación del momento lineal

Si $\vec{F}_{\mathrm{R}}^{(\mathrm{e})} = \vec{0}$ entonces:

$$M\,\vec{A}_{\mathrm{cm}} = \vec{0}$$

Esto significa que

$$\vec{A}_{\mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}_{\mathrm{cm}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$

Es decir,

$$\vec{V}_{\mathrm{cm}} = \text{constante}$$

En otras palabras, el CM del sistema se mueve en una trayectoria rectilínea a velocidad constante.

Conservación del momento lineal

Una consecuencia inmediata de lo anterior es que el momento lineal total del sistema también permanece constante.

$$\vec{P}_{\text{cm}} = M\,\vec{V}_{\text{cm}} = \text{constante}$$

Así llegamos al

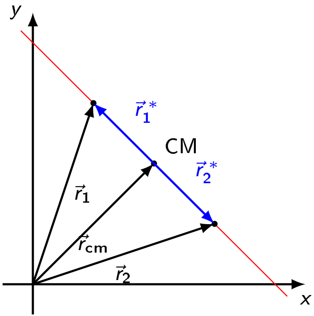
Teorema de conservación del momento lineal

En ausencia de fuerzas externas, el momento lineal total de un sistema de partículas se conserva.

Movimiento relativo al centro de masa

Posiciones relativas al centro de masa

Observemos lo siguiente:



La posición de cada punto respecto del CM es:

$$\vec{r}_1^{\,*} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{\rm cm}$$
$$\vec{r}_2^{\,*} = \vec{r}_2 - \vec{r}_{\rm cm}.$$

De lo cual se obtiene:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^{\,*} + \vec{r}_{\rm cm}$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2^{\,*} + \vec{r}_{\rm cm}.$$

Posiciones relativas al centro de masa

Luego, como:

$$M\,\vec{r}_{\mathrm{cm}} = m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2$$

Tenemos:

$$M\,\vec{r}_{\mathrm{cm}} = m_1\,(\vec{r}_1^{\,*} + \vec{r}_{\mathrm{cm}}) + m_2\,(\vec{r}_2^{\,*} + \vec{r}_{\mathrm{cm}})$$

Desarrollando y reordenando se obtiene:

$$M\,\vec{r}_{\mathrm{cm}} = m_1\,\vec{r}_1^{\,*} + m_2\,\vec{r}_2^{\,*} + (m_1 + m_2)\,\vec{r}_{\mathrm{cm}}$$

En virtud de que $M = m_1 + m_2$, resulta:

$$m_1\,\vec{r}_1^{\,*} + m_2\,\vec{r}_2^{\,*} = \vec{0}$$

Velocidades relativas al centro de masa

Las velocidades de las partículas respecto al centro de masa se calculan derivando las respectivas posiciones relativas al centro de masa con respecto al tiempo:

$$\vec{v}_1^{\,*} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1^{\,*}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_1 - \vec{V}_{\mathrm{cm}}$$
$$\vec{v}_2^{\,*} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2^{\,*}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_2 - \vec{V}_{\mathrm{cm}}.$$

De donde se obtiene:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^{\,*} + \vec{V}_{\mathrm{cm}}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2^{\,*} + \vec{V}_{\mathrm{cm}}$$

Es decir, esta última es la relación entre las velocidades, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, en función de las velocidades relativas al CM y de $\vec{V}_{\mathrm{cm}}$.

Velocidades relativas al centro de masa

Si reemplazamos las expresiones de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en función de las velocidades relativas al CM y de la velocidad del CM en la expresión

$$M\,\vec{V}_{\mathrm{cm}} = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2$$

O bien, si derivamos respecto al tiempo la relación

$$m_1\,\vec{r}_1^{\,*} + m_2\,\vec{r}_2^{\,*} = \vec{0}$$

obtenemos como resultado que:

$$m_1\,\vec{v}_1^{\,*} + m_2\,\vec{v}_2^{\,*} = \vec{0}$$

Energía cinética de un sistema de partículas

Energía cinética de un sistema de partículas

Definición

La energía cinética de un sistema de partículas se define como la suma algebraica de la energía cinética de cada partícula:

$$E_\mathrm{c} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^2$$

Veamos a continuación un hecho interesante.

Energía cinética de un sistema de partículas

En el caso de dos partículas, tenemos:

$$E_c = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i\, v_i^2 = \frac{1}{2} m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, v_2^2$$

En virtud de lo anterior:

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{v}_1^{\,*} + \vec{V}_{cm} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{v}_2^{\,*} + \vec{V}_{cm} \right)^2$$

Desarrollando y reordenando llegamos a:

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} m_1 \, [v_1^*]^2 + \frac{1}{2} m_2 \, [v_2^*]^2 + (m_1\, \vec{v}_1^{\,*} + m_2\, \vec{v}_2^{\,*})\, \vec{V}_{cm}$$

Energía cinética de un sistema de partículas

Luego,

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} M\, V_\mathrm{cm}^2 + \frac{1}{2} m_1\, \left[v_1^*\right]^2 + \frac{1}{2} m_2\, \left[v_2^*\right]^2 .$$

Consecuencia importante

El movimiento de un sistema de partículas se puede describir como el movimiento del centro de masa más el movimiento de las partículas que lo conforman respecto al centro de masa. En otras palabras, el movimiento del sistema se puede separar en dos partes: el movimiento *del* CM y el movimiento *respecto al* CM.

Choques

Choques

El teorema de conservación del momento lineal total nos permite estudiar algunos casos de choques entre partículas.

Existen tres tipos básicos de choques:

- Perfectamente elásticos. Son aquellos en los que se conserva la energía cinética total del sistema.
- Perfectamente inelásticos o plásticos. La energía cinética total del sistema no se conserva.
- Inelásticos, en los que tampoco se conserva la energía cinética del sistema. Se trata de una situación intermedia entre las dos anteriores.

Sin embargo,

El momento lineal total del sistema se conserva en los tres tipos de choque.

Choques

Consideremos dos bloques A y B, cuyas masas son m_A y m_B, respectivamente, que se mueven uno hacia el otro con las correspondientes velocidades $\vec{v}_{A\,1}$ y $\vec{v}_{B\,1}$ antes de chocar.

Si $\vec{v}_{A\,2}$ y $\vec{v}_{B\,2}$ son las velocidades de los cuerpos A y B después del choque, entonces, se tiene que

$$m_A\,\vec{v}_{A\,1} + m_B\,\vec{v}_{B\,1} = m_A\,\vec{v}_{A\,2} + m_B\,\vec{v}_{B\,2}$$

Choques

Choques perfectamente inelásticos

Si después de chocar ambos bloques quedan unidos, tendremos:

$$m_A\, v_{A\,1} + m_B\, v_{B\,1} = (m_A + m_B)\, v_2$$

Choques perfectamente inelásticos

La energía cinética del sistema antes del choque es:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_A \, v_{A\,1}^2 + \frac{1}{2} m_B \, v_{B\,1}^2$$

y después del choque es:

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \left(m_A + m_B \right) v_2^2$$

Choques

Choques perfectamente elásticos

En este caso, tendremos:

$$m_A\,v_{A\,1} + m_B\,v_{B\,1} = m_A\,v_{A\,2} + m_B\,v_{B\,2}$$

Choques

Choques perfectamente elásticos

La energía cinética del sistema antes del choque es:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_A \, v_{A\,1}^2 + \frac{1}{2} m_B \, v_{B\,1}^2$$

y después del choque es:

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_A \, v_{A\,2}^2 + \frac{1}{2} m_B \, v_{B\,2}^2$$

Además

$$E_{c1} = E_{c2}$$

Choques

Choques perfectamente elásticos

De las relaciones:

$$m_A\, v_{A\,1} + m_B\, v_{B\,1} = m_A\, v_{A\,2} + m_B\, v_{B\,2}$$

y

$$\frac{1}{2} m_A\, v_{A\,1}^2 + \frac{1}{2} m_B\, v_{B\,1}^2 = \frac{1}{2} m_A\, v_{A\,2}^2 + m_B\, v_{B\,2}^2$$

Choques perfectamente elásticos

Se pueden obtener la ecuaciones que dan las velocidades después del choque:

$$v_{B\,2} - v_{A\,2} = -\left(v_{B\,1} - v_{A\,1}\right)$$

$$v_{A\,2} = \frac{2\,m_B\,v_{B\,1} + v_{A\,1}\left(m_A - m_B\right)}{m_A + m_B}$$

$$v_{B\,2} = \frac{2\,m_A\,v_{A\,1} + v_{B\,1}\left(m_B - m_A\right)}{m_A + m_B}$$

Coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución (ε) mide el grado en que el choque entre dos cuerpos es elásticos. En otras palabras, indica "qué tan elástico" es un choque o, "qué tan cerca" está de serlo.

Definición

$$\varepsilon = -\frac{v_{B\,2} - v_{A\,2}}{v_{B\,1} - v_{A\,1}}$$

Podemos ver fácilmente que si el choque es perfectamente elástico $\varepsilon = 1$, porque $v_{B\,2} - v_{A\,2} = -(v_{B\,1} - v_{A\,1})$, y que si el choque es perfectamente inelástico o plástico, $\varepsilon = 0$, porque en tal caso $v_{B\,2} = v_{A\,2}$. Esto implica que siempre

$$0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Esto es todo por hoy

¡Muchas gracias!

Ahora a repasar y practicar.