Sistemas de partículas y cuerpo rígido

Unidad 2

Física III

Instituto de Tecnología e Ingeniería

Universidad Nacional de Hurlingham

Segunda parte

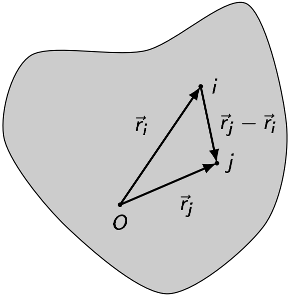
En esta clase veremos:

Concepto de cuerpo rígido

Cuerpo rígido

Definición

Un cuerpo rígido es un sistema de partículas en el que la distancia entre cada par de partículas que lo conforman es constante.



La distancia entre cada par de partículas i y j no cambia en el tiempo. Esto es:

$$\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\| = \text{constante}$$

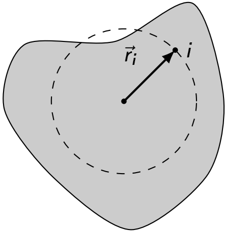
En otras palabras, un cuerpo rígido es un sistema de partículas *indeformable*.

Si bien es una idealización, el concepto de cuerpo rígido es muy útil y, en muchos casos, es una buena aproximación a la realidad.

Rotación de un rígido alrededor de un eje fijo

Rotación de un rígido alrededor de un eje fijo

Vamos a estudiar el movimiento de sólidos rígidos alrededor de un eje fijo.



- La velocidad angular de todas las partículas es la misma $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \ldots = \vec{\omega}_i = \ldots = \vec{\omega}_N$.
- Por lo tanto, podemos hablar de la *velocidad angular del cuerpo rígido* ($\vec{\omega}$).
- Lo mismo ocurre con la aceleración angular ($\vec{\alpha}$).

Rotación de un rígido alrededor de un eje fijo

El estado dinámico de una masa puntual se especifica indicando su posición y su velocidad.

De forma análoga, el estado dinámico de un cuerpo rígido se especifica unívocamente en cada instante de tiempo indicando su orientación y su velocidad angular.

Si asumimos que el cuerpo rígido rota con velocidad angular constante, entonces la posición de cada partícula se determina conociendo su distancia al eje (r_i) y el ángulo (θ_i) que forma el vector de posición con el semieje de los x positivos, por ejemplo, donde

$$\theta_i(t) = \omega\,(t - t_0) + \theta_{0,i}$$

Rotación de un rígido alrededor de un eje fijo

Ahora bien, al cabo de un intervalo de tiempo arbitrario, el desplazamiento angular será el mismo para todos los puntos que conforman el cuerpo rígido.

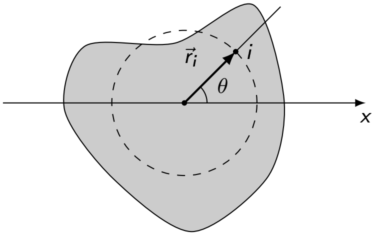
En este sentido, la orientación del cuerpo rígido queda especificado por el ángulo que forma el vector de posición de una cualquiera de las partículas antes mencionadas.

Por lo tanto, podemos identificar dicho ángulo como aquél que da la orientación del cuerpo rígido en un instante de tiempo determinado.

Así, en el caso aquí considerado, se puede afirmar que la *orientación* del cuerpo rígido queda determinada por la expresión:

$$\theta(t) = \omega\,(t - t_0) + \theta_0$$

donde ahora θ es el ángulo que forma la recta que une el punto de intersección del eje alrededor del cual gira el cuerpo rígido con otro punto arbitrario del mismo, que se toma como referencia.



Momento angular de un cuerpo rígido

Momento angular de un cuerpo rígido

El momento angular de cada partícula del cuerpo rígido que se mueve en una trayectoria circular es:

$$\vec{L}_i = I_i \, \vec{\omega}_i = m_i \, r_i^2 \, \vec{\omega}_i$$

Luego, el momento angular total de un sistema de partículas es la suma de los momentos angulares de cada partícula:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, r_i^2 \, \vec{\omega}_i$$

Momento angular de un cuerpo rígido

Nuevamente, como la velocidad angular es la misma para todas las partículas que componen el cuerpo rígido, $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}$, entonces:

$$\vec{L} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, r_i^2 \right) \vec{\omega}$$

En consecuencia:

$$\boxed{\vec{L} = I \, \vec{\omega},}$$

donde ahora I es el momento de inercia del cuerpo rígido:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \, r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

donde $I_i = m_i \, r_i^2$ es el momento de inercia de cada partícula que conforma el cuerpo rígido.

Energía cinética de un cuerpo rígido

Energía cinética de un cuerpo rígido

La energía cinética de un sistema de partículas es

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^2$$

En virtud de que todas las partículas que conforman el cuerpo rígido describen una circunferencia alrededor del punto por donde pasa el eje alrededor del cual gira el cuerpo rígido, entonces $v_i = r_i \, \omega_i$, y por lo tanto:

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, (r_i \, \omega_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, r_i^2 \, \omega_i^2$$

Energía cinética de un cuerpo rígido

Como la velocidad angular de todas las partículas es la misma, $\omega_i = \omega$:

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2\right)\omega^2$$

donde

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i\, r_i^2$$

es el *momento de inercia* del cuerpo rígido. Así, llegamos a la expresión matemática de la

Energía cinética de un cuerpo rígido

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I\, \omega^2$$

Momento de inercia

Momento de inercia

La expresión

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \, r_i^2$$

permite calcular el momento de inercia para un conjunto de partículas. Para una sola partícula: $I = m\, r^2$.

Para un cuerpo sólido considerado como un medio continuo, la suma se transforma en una integral:

$$I = \int_{\text{cuerpo}} r^2 \, \mathrm{d}m$$

La integral se puede interpretar como la suma de infinitos elementos diferenciales de masa dm multiplicados por la distancia de cada uno al eje alrededor del cual giran.

Momento de inercia

Cada elemento de masa puede expresarse como $\mathrm{d}m = \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición del $\mathrm{d}m$. Reemplazando en la integral, se obtiene:

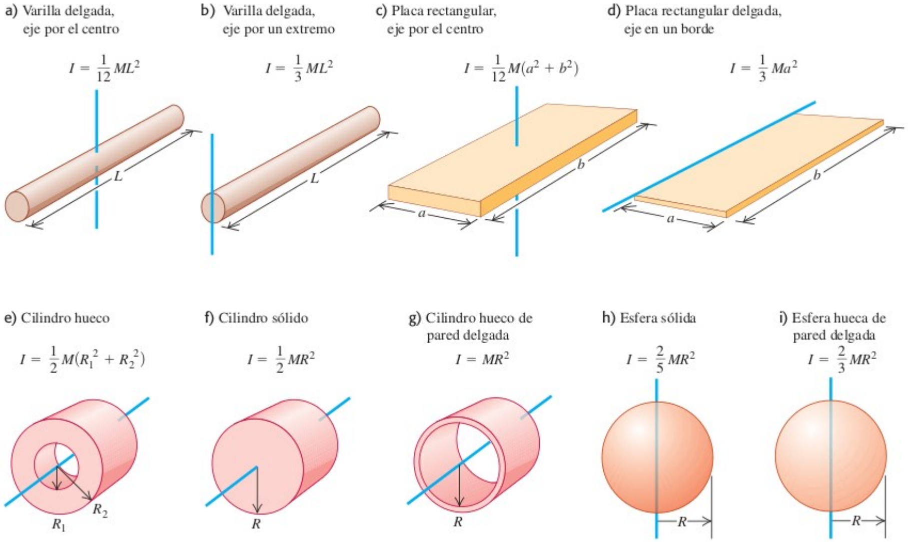
$$I = \int_{\text{cuerpo}} \rho(\vec{r})\, r^2\, \mathrm{d}V$$

Si se asume que la distribución de masa del cuerpo es uniforme, se tiene que $\rho(\vec{r}) = \rho$ y, en consecuencia:

$$I = \int_{\text{cuerpo}} \rho(\vec{r})\, r^2\, \mathrm{d}V = \rho \int_{\text{cuerpo}} r^2\, \mathrm{d}V$$

Así se pueden obtener expresiones analíticas para sólidos que tengan formas geométricas en particular.

Momento de inercia



Momento de inercia

¡Importante!

Como el momento de inercia se puede calcular respecto a un eje arbitrario, se deduce entonces que este *no* es una propiedad intrínseca del cuerpo, tal como su masa.

En otras palabras, el momento de inercia *depende* de dónde se lo mide, en cambio, el valor de la masa de un cuerpo es independiente del sistema de referencia elegido.

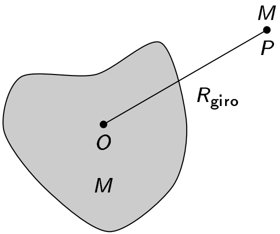
Radio de giro

Independientemente de la forma del cuerpo, *siempre* es posible encontrar una distancia al eje dado a la cual pudiera concentrarse la masa del del cuerpo sin modificar el momento de inercia del mismo respecto al mismo eje.

Esta distancia se conoce como *radio de giro*.

Radio de giro

Sea un cuerpo de forma arbitraria de masa total M y sea $I^{(O)}_{\text{cuerpo}}$ su momento de inercia respecto a un eje que pasa por el punto O. Queremos encontrar la distancia k a la cual debería estar un punto cuya masa es M para que produzca el mismo momento de inercia que el cuerpo.



$$I^{(O)}_{\text{mp}} = M\,R^2_{\text{giro}}$$

$$M\,R^2_{\text{giro}} = I^{(O)}_{\text{cuerpo}}$$

$$R_{\text{giro}} = \sqrt{\frac{I^{(O)}_{\text{cuerpo}}}{M}}$$

Esto es todo por hoy

¡Muchas gracias!

Ahora a repasar y practicar.