Oscilador armónico simple

Unidad 6

Física

Instituto de Tecnología e Ingeniería

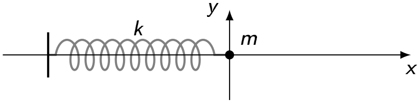
Universidad Nacional de Hurlingham

En esta clase veremos:

Definición

Definición

Un oscilador armónico simple es un sistema formado por un cuerpo, de masa m, unido a uno de los extremos de un resorte de constante k mientras que el otro extremo se encuentra fijo.

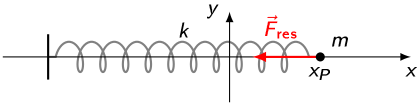


Consideremos un sistema de referencia centrado en el cuerpo de masa m cuando el resorte está en su longitud natural (no deformado), tal como se muestra en la figura. Vamos a asumir que el cuerpo se mueve a lo largo de la dirección horizontal.

Ecuación de movimiento

Ecuación de movimiento

Supongamos que el cuerpo se desplaza una cierta distancia x_P hacia la derecha, donde P se refiere al punto representativo del cuerpo, y se lo mantiene en equilibrio en esa posición. Este desplazamiento es, por supuesto, igual a la deformación del resorte.



Así, el vector de posición del cuerpo (o del punto representativo del mismo, P) es $\vec{r}_P = (x_P; 0)$. Por otro lado, sobre el cuerpo actúa la fuerza que el resorte ejerce sobre el mismo, la cual está dada por

$$\vec{F}_{\text{res}} = (F_{\text{res}}; 0) = (-k\, x_P; 0)$$

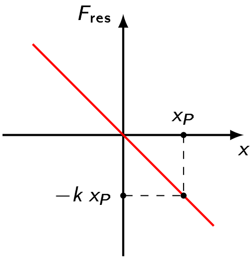
Ecuación de movimiento

La fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo se conoce también como *fuerza recuperadora elástica* dado que siempre apunta hacia el centro del sistema de referencia que corresponde a la posición de equilibrio del sistema.

Esto se puede apreciar más fácilmente observando la gráfica del módulo de la fuerza en función de la posición del cuerpo.

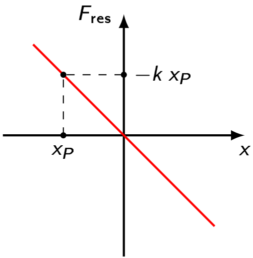
Ecuación de movimiento

Si el cuerpo está a la derecha de la posición de equilibrio, $x_P > 0$, y por lo tanto $-k\,x_P < 0$



En consecuencia, el vector $\vec{F}_{\text{res}}$ tiene sentido hacia la izquierda.

Si el cuerpo está a la derecha de la posición de equilibrio, $x_P < 0$, y por lo tanto $-k\,x_P > 0$



En consecuencia, el vector $\vec{F}_{\text{res}}$ tiene sentido hacia la derecha.

Ecuación de movimiento

Vamos a asumir que el oscilador se encuentra en equilibrio en la dirección vertical.

En virtud de la segunda ley de Newton tenemos que:

$$\sum f_x = -k\, x_P = m\, a_x$$

De donde se obtiene que:

$$a_x = -\frac{k}{m} x_P$$

Sabemos que $a_x = \frac{\mathrm{d} v_{P,x}}{\mathrm{d} t}$ y que $v_{P,x} = \frac{\mathrm{d} x_P}{\mathrm{d} t}$, en consecuencia, $a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x_P}{\mathrm{d} t^2}$. Luego:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_P}{\mathrm{d} t^2} = -\frac{k}{m} x_P$$

Ecuación de movimiento

En otras palabras, la aceleración que la fuerza recuperadora elástica le imprime al cuerpo produce una variación en el tiempo de la posición del mismo.

A su vez, como la aceleración es proporcional a la posición, esta también varía en el tiempo al igual que la velocidad de la partícula.

En consecuencia, tanto la posición x_P como la velocidad $v_{P,x}$ y la aceleración a_x son funciones del tiempo.

Ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento deberá entonces escribirse como:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_P(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m} x_P(t)$$

El objetivo es encontrar la forma funcional de $x_P(t)$ que, a su vez, nos da las expresiones de $v_{P,x}(t)$ y de $a_x(t)$, es decir, la solución de la ecuación de movimiento.

Para hallar la expresión de $x_P(t)$ deberíamos resolver la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\ddot{x}_P(t) + \omega^2 x_P(t) = 0$$

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ es una constante positiva. Sin embargo, es posible llegar a la solución de esta ecuación de otra manera.

Ecuación de movimiento

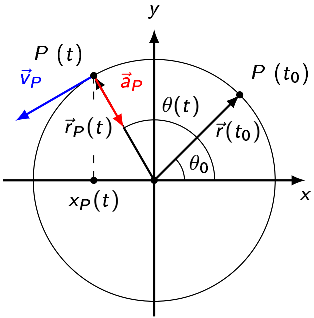
Por un lado, a partir de la expresión

$$a_x = -\frac{k}{m} x_P$$

podemos observar que, al igual que la fuerza, el vector aceleración siempre apunta hacia la posición de equilibrio ($x_P = 0$).

Es decir, cuando el cuerpo está a la derecha de dicha posición, el vector apunta hacia la izquierda. En cambio, cuando el cuerpo está a la izquierda de la posición de equilibrio, el vector aceleración apunta hacia la derecha.

Ecuación de movimiento



A partir del estudio del movimiento de un punto en una trayectoria circular de radio A y con frecuencia angular ω constante, tenemos que:

$$\theta(t) = \omega\,(t - t_0) + \theta_0$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_P(t) &= (x_P(t); y_P(t)) && = (A\cos\theta(t); A\,\mathrm{sen}\,\theta(t)) \\
\vec{v}_P(t) &= (v_{P,x}(t); v_{P,y}(t)) && = (-A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta(t); A\,\omega\cos\theta(t)) \\
\vec{a}_P(t) &= (a_{P,x}(t); a_{P,y}(t)) && = \left(-A\,\omega^2\cos\theta(t); -A\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\right)
\end{aligned}$$

Ecuación de movimiento

Podemos observar que la coordenada $x_P(t)$ del punto P realiza un movimiento de ida y vuelta análogo al del oscilador armónico simple. Más aún, nada impide asociar a $x_P(t)$ con la ley de movimiento de un punto que se desplaza a lo largo de eje x según:

$$x_P(t) = A\cos\theta(t)$$

La velocidad de este punto está entonces dada por la componente x de la velocidad tangencial:

$$v_{P,x}(t) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

Ecuación de movimiento

Además, la aceleración de dicho punto corresponde a la componente x de la aceleración centrípeta:

$$a_{P,x}(t) = -A\,\omega^2 \cos\theta(t)$$

Teniendo en cuenta que $x_P(t) = A\cos\theta(t)$ podemos escribir:

$$a_{P,x}(t) = -\omega^2\, x_P(t)$$

Expresión totalmente análoga a la de la aceleración impresa al cuerpo de masa m del oscilador armónico simple:

$$a_x = -\frac{k}{m}x_P$$

Ecuación de movimiento

Comparando ambas expresiones tendríamos que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Por supuesto, las dimensiones son consistentes:

$$[\omega^2] = \frac{1}{\mathrm{s}^2} \quad \text{y} \quad \left[\frac{k}{m}\right] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\frac{1}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}{\mathrm{m}}\frac{1}{\mathrm{kg}} = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

Además de este análisis, podemos demostrar formalmente esta igualdad.

Ecuación de movimiento

Para ello, vamos a proponer la función $x_P(t) = A\cos\theta(t)$, que se obtiene del MCU, como solución de la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_P(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m} x_P(t)$$

Calculemos la derivada primera de $x_P(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x_P(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A\cos\theta(t)\right] = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\cos\theta(t)\right] = -A\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$$

Luego:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega\left(t - t_0\right) + \theta_0\right] = \omega$$

Ecuación de movimiento

En consecuencia:

$$\frac{\mathrm{d}x_P(t)}{\mathrm{d}t} = -A\,\omega \operatorname{sen}\theta(t)$$

Derivando una vez más se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}x_P(t)}{\mathrm{d}t}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-A\,\omega \operatorname{sen}\theta(t)\right] \\
&= -A\,\omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\operatorname{sen}\theta(t)\right] \\
&= -A\,\omega \cos\theta(t)\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= -A\,\omega^2 \cos\theta(t)
\end{aligned}$$

Ecuación de movimiento

Entonces:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_P(t)}{\mathrm{d}t^2} = -A\,\omega^2 \cos\theta(t) = -\omega^2 x_P(t)$$

En virtud de la ecuación de movimiento tenemos:

$$-\omega^2 x_P(t) = -\frac{k}{m} x_P(t)$$

En la posición de equilibrio, cuando $x_P = 0$, esta relación es verdadera para cualesquiera valores de ω, k y m.

Sin embargo, para cualquier valor de $x_P \neq 0$, la relación es cierta únicamente si

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Ecuación de movimiento

De esta manera se demuestra claramente que el movimiento del oscilador armónico simple está descrito por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \quad A\cos\theta(t)\\
v(t) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\\
a(t) &= -A\,\omega^2\cos\theta(t) = -\omega^2 x(t)
\end{aligned}
$$

donde $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ son las expresiones de la posición, la velocidad y la aceleración del cuerpo de masa m que forma parte del OAS. Además, la función $\theta(t)$ se llama *fase*.

Esto es, el movimiento del OAS se describe como la proyección en el eje x (o el y) del movimiento de un punto que describe una trayectoria circular de frecuencia angular constante.

Frecuencia y periodo

Frecuencia y periodo

En consecuencia, el movimiento del oscilador armónico simple es un tipo de movimiento con periodo constante.

El periodo se define como el intervalo de tiempo necesario para realizar una oscilación completa, que corresponde a una revolución completa del MCU:

$$P = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Luego:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Frecuencia y periodo

Por otro lado, la frecuencia física f es:

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

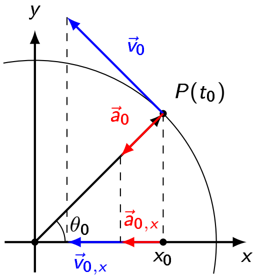
Es interesante notar que tanto ω como P y f son cantidades propias del sistema, es decir, dependen de las magnitudes físicas que caracterizan al oscilador y no de las condiciones iniciales.

A continuación, profundizaremos en las condiciones iniciales.

Condiciones iniciales

Condiciones iniciales

La fase está dada por $\theta(t) = \omega\,(t - t_0) + \theta_0$. Esto es, $\theta(t_0) = \theta_0$. En virtud de las ecuaciones que describen el movimiento del OAS:



$$
\begin{aligned}
x_0 &= x(t_0) = \quad A\cos\theta_0 \\
v_0 &= v(t_0) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta_0 \\
a_0 &= a(t_0) = -A\,\omega^2\cos\theta_0 = -\omega^2 x_0
\end{aligned}
$$

donde x_0, v_0 y a_0 son los valores iniciales de la posición, velocidad y la aceleración.

En la figura: $\vec{v}_{0,x} = v_0\,(1,0)$ y $\vec{a}_{0,x} = a_0\,(1,0)$.

Condiciones iniciales

Es muy común fijar $t_0 = 0$, esto es, la condición inicial corresponde al comienzo del movimiento armónico simple.

Esto parece redundante, pero la condición inicial puede corresponder al estado dinámico del oscilador en cualquier instante de tiempo.

En este caso, las ecuaciones que describen el movimiento del OAS quedan expresadas como:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \theta_0) \\ v(t) &= -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \\ a(t) &= -A\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}$$

donde θ_0 es la *fase inicial*.

Condiciones iniciales

Vamos ahora a estudiar el movimiento del OAS para distintos valores de la fase inicial y para distintos instantes de tiempo.

Para ello, vamos a expresar a ω como

$$\omega = \frac{2\,\pi}{P}$$

en las ecuaciones de movimiento. Se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \quad A\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \theta_0\right) \\ v(t) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \theta_0\right) \\ a(t) &= -A\,\omega^2\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \theta_0\right) \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

Consideremos primero el caso en que $\theta_0 = 0$ y los instantes

$$t = 0, \frac{P}{4}, \frac{P}{2}, \frac{3\,P}{4}, P$$

Las ecuaciones que describen el movimiento del OAS para este caso son:

$$\begin{aligned} x(t) &= \quad A \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right) \\ v(t) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right) \\ a(t) &= -A\,\omega^2 \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right) \end{aligned}$$

Podemos construir una tabla de valores con las expresiones anteriores:

t	0	$\frac{P}{4}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3\,P}{4}$	P
$\frac{2\,\pi}{P}\,t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\,\pi}{2}$	$2\,\pi$
$x(t)$	A	0	$-A$	0	A
$v(t)$	0	$-A\,\omega$	0	$A\,\omega$	0
$a(t)$	$-A\,\omega^2$	0	$A\,\omega^2$	0	$-A\,\omega^2$

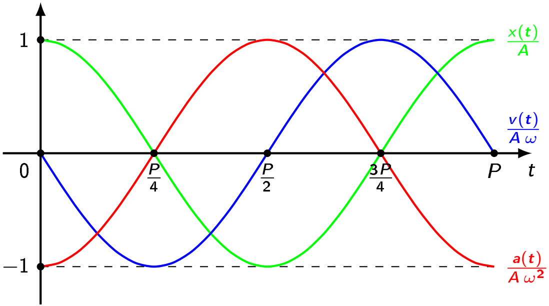
Esto implica que en el instante inicial $t = 0$ la partícula parte del reposo ($v_0 = 0$) en el punto $x_0 = A$ y sobre el cual actúa la fuerza del resorte que le imprime una aceleración cuyo módulo es $A\,\omega^2$ en dirección horizontal y sentido hacia la izquierda.

Condiciones iniciales

Con ayuda de la tabla anterior podemos graficar las expresiones que dan la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo normalizadas para poder incluir las tres curvas en una misma gráfica:

$$
\begin{aligned}
\frac{x(t)}{A} &= \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right) \\
\frac{v(t)}{A\,\omega} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right) \\
\frac{a(t)}{A\,\omega^2} &= -\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}\,t\right)
\end{aligned}
$$

Condiciones iniciales



Podemos observar en esta gráfica que en los puntos extremos del movimiento, es decir en $(A;0)$ y $(A;0)$, $x(t)$ y $a(t)$ alcanzan sus valores máximo o mínimo, mientras que la velocidad es nula. En cambio, en la posición de equilibrio, la velocidad es máxima en un sentido u otro.

Condiciones iniciales

Si $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{x(t)}{A} &= \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{v(t)}{A\,\omega} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{\pi}{2}\right)\\
\frac{a(t)}{A\,\omega^2} &= -\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Condiciones iniciales

En el instante inicial $t = 0$ tendremos:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= \quad A\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
v(0) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -A\,\omega\\
a(0) &= -A\,\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Es decir, el OAS comienza a moverse desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial $v_0 = A\,\omega$, con lo que el vector velocidad inicial tiene dirección horizontal y sentido hacia la izquierda.

Condiciones iniciales

Si $\theta_0 = \pi$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{A} &= \quad \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \pi\right) \\ \frac{v(t)}{A\,\omega} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \pi\right) \\ \frac{a(t)}{A\,\omega^2} &= -\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \pi\right) \end{aligned}$$

Condiciones iniciales

En el instante inicial $t = 0$ tendremos:

$$\begin{aligned} x(0) &= \quad A\cos(\pi) = -A \\ v(0) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\pi) = 0 \\ a(0) &= -A\,\omega^2\cos(\pi) = A\,\omega^2. \end{aligned}$$

Es decir, el OAS comienza a moverse desde el punto $(A; 0)$ desde el reposo. El vector aceleración inicial tiene dirección horizontal y sentido hacia la derecha.

Condiciones iniciales

Por último, si $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\frac{x(t)}{A} &= \cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{3\pi}{2}\right)\\
\frac{v(t)}{A\,\omega} &= -\operatorname{sen}\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{3\pi}{2}\right)\\
\frac{a(t)}{A\,\omega^2} &= -\cos\left(\frac{2\,\pi}{P}t + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Condiciones iniciales

En el instante inicial $t = 0$ tendremos:

$$\begin{aligned} x(0) &= \quad A\cos(\pi) = 0 \\ v(0) &= -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\pi) = A\,\omega \\ a(0) &= -A\,\omega^2\cos(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Es decir, el OAS comienza a moverse nuevamente desde la posición de equilibrio, pero esta vez el vector velocidad inicial tiene sentido hacia la derecha.

Consideraciones energéticas

Consideraciones energéticas

Vamos a cerrar el análisis del movimiento de un OAS con el balance de energía.

En los puntos extremos del movimiento, cuando $x(t) = A$ o $x(t) = -A$, el OAS solamente tendrá energía potencial elástica, la cual asumirá su valor máximo: $\frac{1}{2} k\, A^2$.

En la posición de equilibrio, donde $x(t) = a(t) = 0$, el OAS solamente tendrá energía cinética, la cual alcanza su valor máximo en este punto: $\frac{1}{2} m\, v^2$.

En cualquier otro punto, el OAS tendrá las dos energías y, por lo tanto, su energía mecánica será:

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$$

Consideraciones energéticas

Ahora bien, $x(t) = A\cos[\theta(t)]$ y $v(t) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}[\theta(t)]$. Entonces:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\left(-A\,\omega\,\mathrm{sen}[\theta(t)]\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(A\cos[\theta(t)]\right)^2$$

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\,A^2\,\omega^2\,\mathrm{sen}^2[\theta(t)] + \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2[\theta(t)]$$

Pero, $\omega^2 = \frac{k}{m}$, entonces:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\,A^2\,\frac{k}{m}\,\mathrm{sen}^2[\theta(t)] + \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2[\theta(t)]$$

O bien:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}k\,A^2\,\mathrm{sen}^2[\theta(t)] + \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2[\theta(t)]$$

Consideraciones energéticas

Podemos sacar factor común $\frac{1}{2} k\, A^2$:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} k\, A^2 \left(\mathrm{sen}^2\left[\theta(t)\right] + \cos^2\left[\theta(t)\right] \right)$$

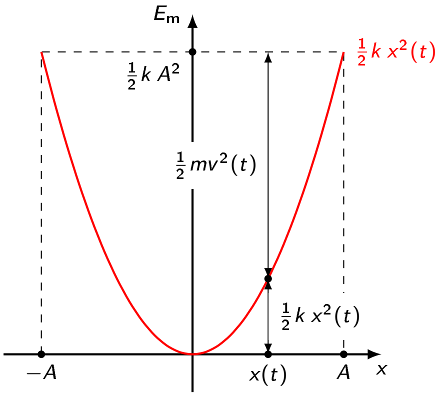
Por último, como $\mathrm{sen}^2\left[\theta(t)\right] + \cos^2\left[\theta(t)\right] = 1$, se obtiene:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} k\, A^2$$

En otras palabras, la energía total de un OAS, para cualquier instante de tiempo es constante e igual al valor máximo de la energía potencial elástica:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} m\, v^2(t) + \frac{1}{2} k\, x^2(t) = \frac{1}{2} k\, A^2$$

Consideraciones energéticas



Esto es todo por hoy

¡Muchas gracias!

Ahora a repasar y practicar.