Problemas de valores iniciales conservativos

Ing. Diego Ezcurra

1. Introducción

Los métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias cuyo comportamiento presenta alguna magnitud que se conserva, requieren considerar esta situación de manera que la solución numérica obtenida mantenga esta característica.

Ejemplo 1

Vamos a resolver la siguiente EDO, correspondiente al oscilador armónico, por el método de Newmark.

$$\boldsymbol{u'' + \omega^2 u = 0}$$

El método de Newmark es el siguiente, siendo α y β = 1/2:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h * u'_n + \dfrac{h^2}{2}[\alpha * u''_n + (1-\alpha) * u''_{n+1}] \\ u'_{n+1} = u'_n + h[(1-\beta) * u''_n + \beta * u''_{n+1}] \end{cases}$$

Este esquema, con α y β = ½ queda de la siguiente manera:

$$\text{Esquema} \begin{cases} u_{n+1} = u_n + h * u'_n + \dfrac{h^2}{4}(u''_n + u''_{n+1}) \\ u'_{n+1} = u'_n + \dfrac{h}{2}(u''_n + u''_{n+1}) \end{cases}$$

Aplicando la discretización a la ecuación diferencial:

$$\text{Discretización} \begin{cases} u_{n+1} = u_n + h * u'_n - \dfrac{h^2}{4}(\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n+1}) \\ u'_{n+1} = u'_n - \dfrac{h}{2}(\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n+1}) \end{cases}$$

Podemos ver que el método es de paso simple implícito. En este caso, dado que la ecuación diferencial es lineal, el termino u_{n+1} puede despejarse y transformar la expresión en una explicita.

Algoritmo de cálculo

$$\begin{cases} u_{n+1} = \left[u_n \left(1 - \frac{h^2\omega^2}{4}\right) + u'_n \right] * \left(1 + \frac{h^2\omega^2}{4}\right)^{-1} \\ u'_{n+1} = u'_n - \frac{h}{2}(\omega^2 u_n + \omega^2 u_{n+1}) \end{cases}$$

De esta manera, con las condiciones iniciales, u_0 y u'_0, se puede resolver la ecuación diferencial.

Ejemplo 2

Resolveremos la EDO siguiente:

$$u" + 40\,u = 10 \quad , \quad con\; u(0) = 0\,;\; u'(0) = 0$$

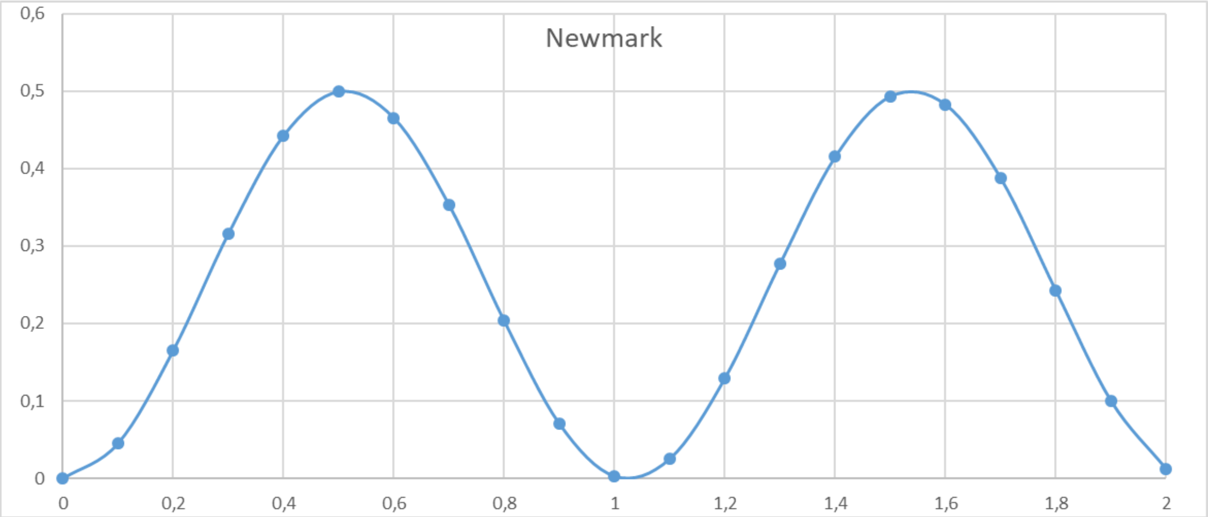
Aplicando el método de Newmark:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + h * u'_n + \frac{h^2}{4}(10 - 40u_n + 10 - 40u_{n+1}) \\ u'_{n+1} = u'_n + \frac{h}{2}(10 - 40u_n + 10 - 40u_{n+1}) \end{cases}$$

Nuevamente, al ser la ecuación diferencial lineal, se puede transformar este esquema en uno explicito, quedando el algoritmo de cálculo siguiente:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n(1 - 10\,h^2) + h\,u'_n + 5\,h^2}{1 + 10\,h^2} \\ u'_{n+1} = u'_n - 20\,h\,u_n - 20\,h\,u_{n+1} + 10h \end{cases}$$

Resolviendo hasta t = 2:



Vemos que la amplitud se conserva.

Aplicando el método de Nystrom:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + 40u_n = 10$$

Pasando el termino h^2:

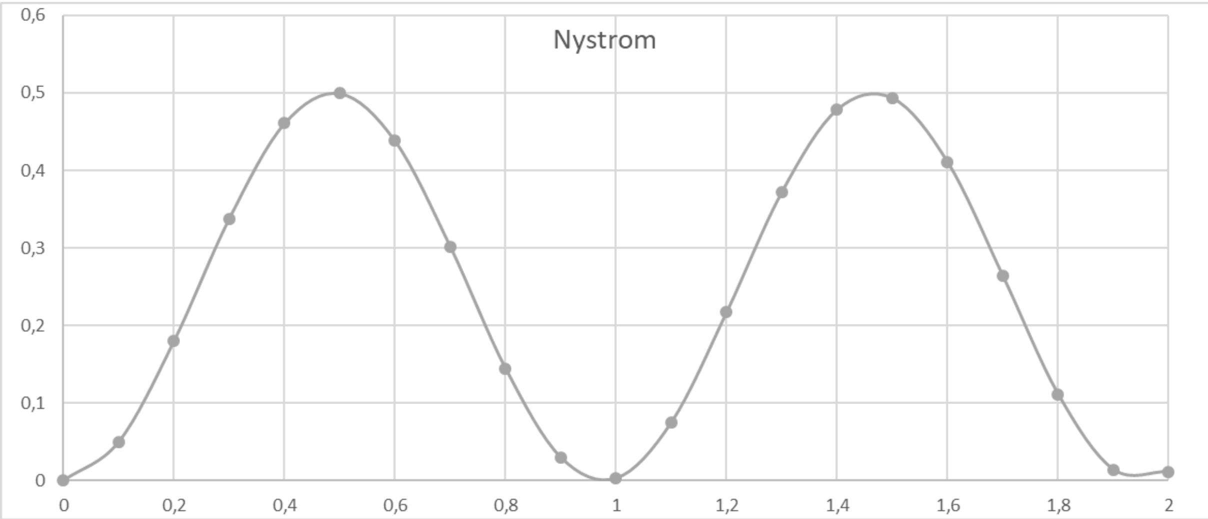
$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + 40h^2u_n = 10h^2$$

Despejando:

$$u_{n+1} = 10h^2 + u_n(2 - 40h^2) - u_{n-1}$$

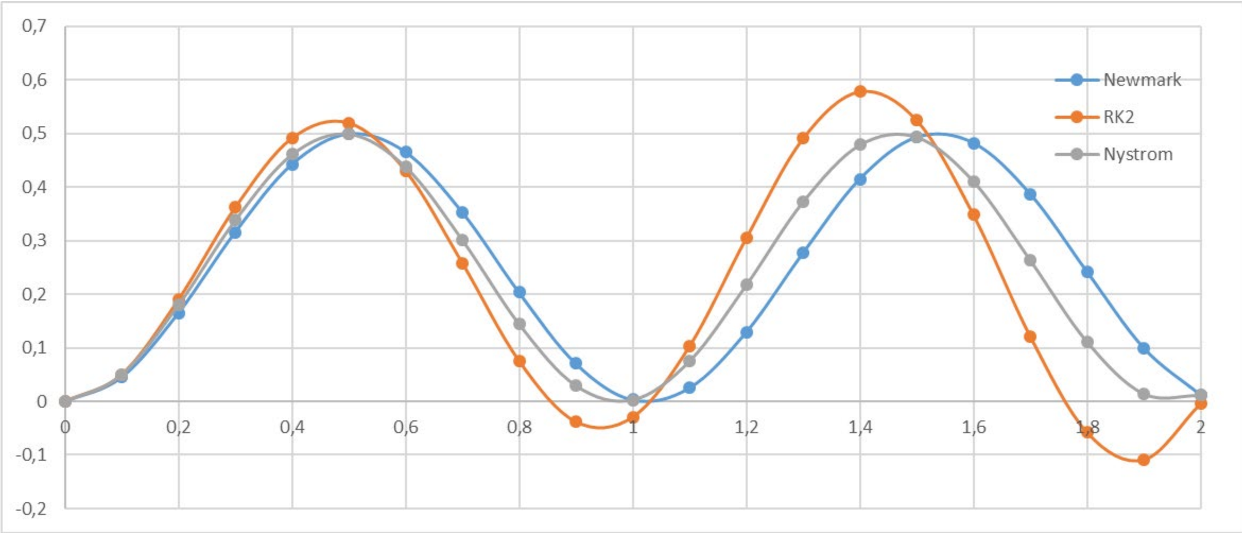
Podemos ver claramente que el método de Nystrom es un método de paso múltiple, por lo que requiere de otro método de paso simple, de igual orden, para poder arrancar el cálculo, por ejmplo, RK2.

Resolviendo hasta t = 2:



Vemos nuevamente que la amplitud se conserva.

Para finalizar, graficaremos ambas soluciones conjuntamente con una tercera, obtenida aplicando el método de RK2.



Vemos en este caso que la amplitud de la solución obtenida por RK2 aumenta, producto de los errores de truncamiento, dado que no es un método conservativo. En contrapartida, la manifestación del error de truncamiento en los métodos conservativos, se manifiesta en un corrimiento de la fase de la oscilación.

Esto se ve claramente si continuamos la solución durante un tiempo mayor, como se muestra en el siguiente gráfico.