PVI: PROBLEMAS DE VALORES INICIALES.

Segunda parte: métodos de paso simple

Autor: Alderete, Iván Martín – Mail: ialderete@fi.uba.ar

1. **PROBLEMA:**

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} y' = -y + t^2 + 2t - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución analítica es $y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2$. Vamos a resolver este sistema en el intervalo [0, 2] por métodos numéricos, utilizando pasos de avance de 0,4; 0,2 y 0,1.

a. **MÉTODO IMPLÍCITO PONDERADO (Crank Nicholson):**

Es el método a partir del cual podemos generalizar los métodos de Euler:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[\beta\left(f(u^{(n+1)},\, t^{(n+1)})\right) + (1-\beta)\left(f(u^{(n)},\, t^{(n)})\right)\right]$$

Se puede observar que para $\beta = 0$ conseguimos el método de Euler Explícito, y para $\beta = 1$ obtenemos Euler Implícito. Utilizando las aproximaciones para nuestro problema inicial:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[\beta\left(-u^{(n+1)} + ((n+1)h)^2 + 2 * ((n+1)h) - 2\right) + (1-\beta)\left(-u^{(n)} + (nh)^2 + 2 * (nh) - 2\right)\right]$$

Dado que la EDO es lineal, podemos despejar el término $u^{(n+1)}$. Simplifico la notación llamando $a = ((n+1)h)^2 + 2 * ((n+1)h) - 2$ y $b = -u^{(n)} + (nh)^2 + 2 * (nh) - 2$, entonces:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[\beta\left(-u^{(n+1)} + a\right) + (1-\beta)b\right]$$

Despejando el término $u^{(n+1)}$ obtenemos que:

$$u^{(n+1)} = \frac{u^{(n)} + h * [\beta a + (1-\beta)b]}{1 + h\beta}$$

Se presentan los resultados para el paso de cálculo $h = 0{,}4$, empleando $\beta = 0{,}5$ (método de Crank Nicholson, de orden 2), en la tabla siguiente (*NOTA: la misma tabla para los otros valores de h se pueden ver en el anexo, al final de este apunte*):

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	a	b	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-1,04	-2	-0,50666667	-0,49935991	-0,00730676
1	0,4	-0,50666667	0,24	-0,53333333	-0,47111111	-0,46134207	-0,00976904
2	0,8	-0,47111111	1,84	0,71111111	0,03259259	0,04238842	-0,00979583
3	1,2	0,03259259	3,76	1,80740741	0,95506173	0,96379304	-0,00873131
4	1,6	0,95506173	6	2,80493827	2,26337449	2,27067057	-0,00729608

TABLA 1: Método de Crank Nicholson para paso de cálculo $h = 0{,}4$

¿Pueden ver cómo los errores, en comparación con los métodos vistos en la primera parte, se redujeron considerablemente? Miremos las gráficas de las soluciones y de los errores, en donde podemos notar nuevamente como la reducción del paso favorece a la reducción del error global, y que los puntos obtenidos por esta discretización dan una buena aproximación a la solución real.

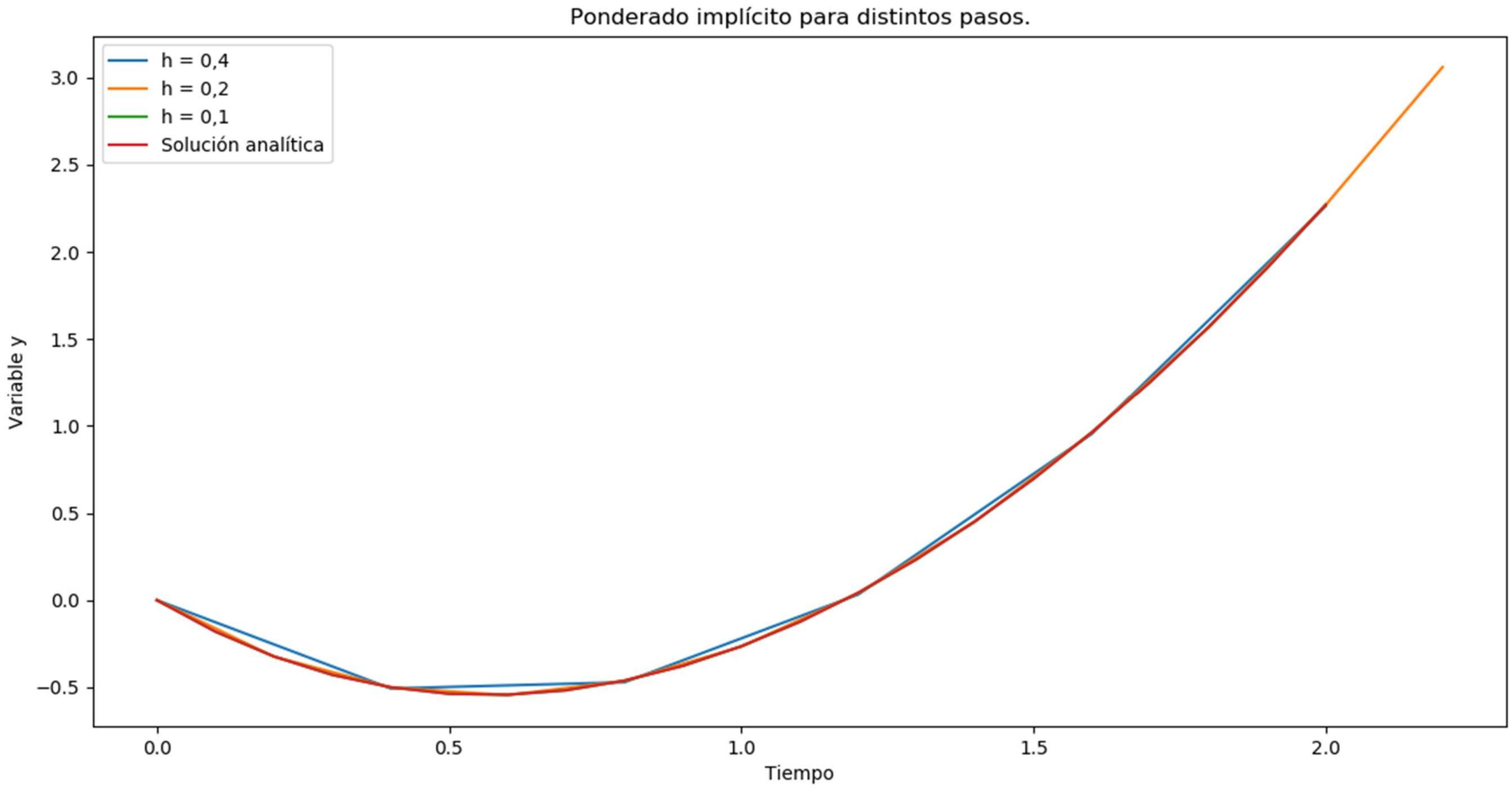

GRÁFICO 1: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Crank Nicholson.

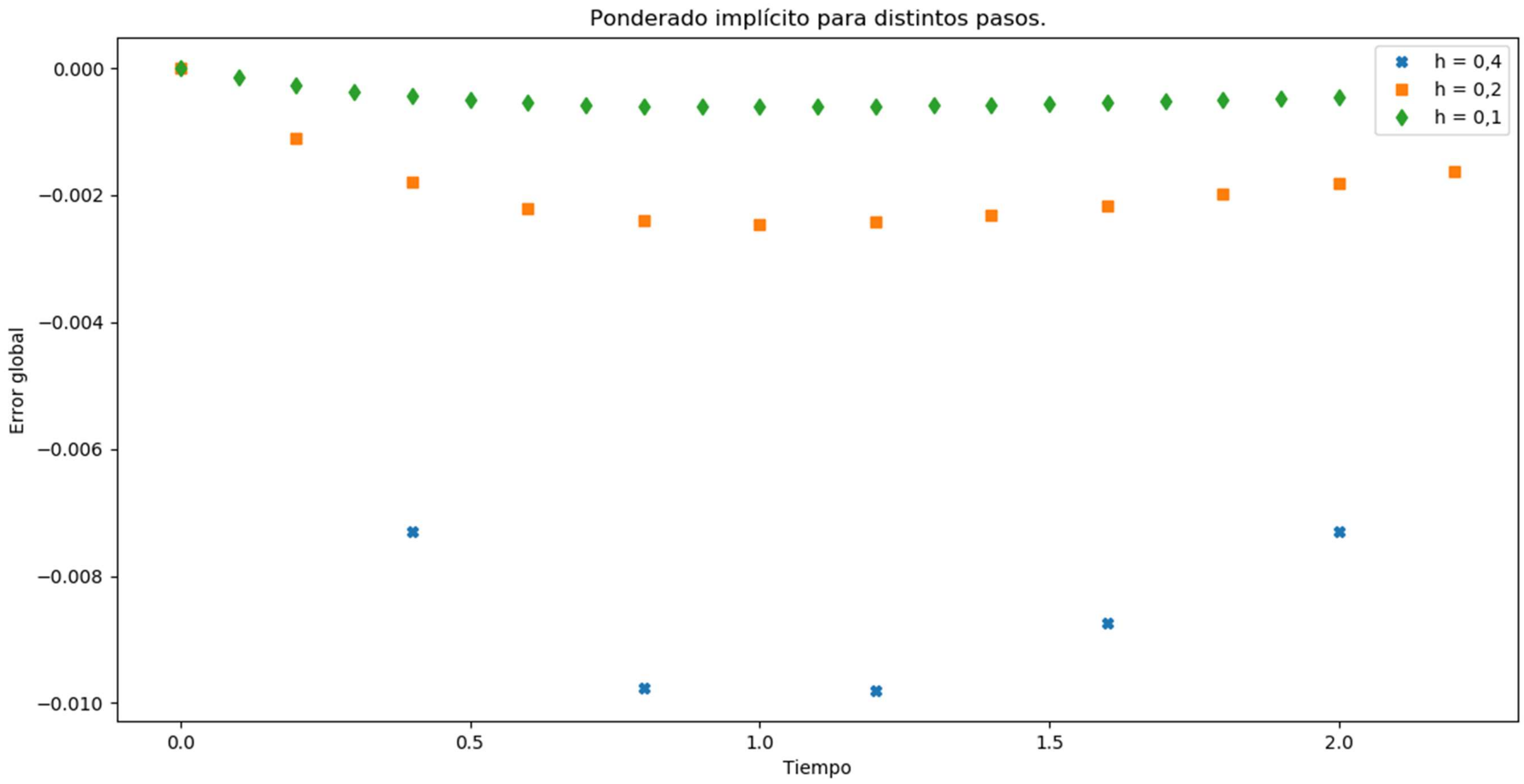

GRÁFICO 2: Comparación de los errores globales para el método de Crank Nicholson.

b. **MÉTODO DE EULER MODIFICADO (Runge Kutta de orden 2):**

Este método posee dos pasos: el primero es un paso predictor y el segundo es un paso corrector:

$$u^{*(n+1)} = u^{(n)} + h * f(u^{(n)},\, t^{(n)})$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2} * \left[f\left(u^{(n)},\, t^{(n)}\right) + f(u^{*(n+1)},\, t^{(n+1)})\right]$$

Notar que este método es explícito, por lo que no dependemos del tipo de EDO que se nos presente, pero habría que realizar el trabajo de analizar la estabilidad del método para asegurar la convergencia. Este método, al igual que Crank Nicholson, posee orden de precisión 2. El trabajo en este caso es igual a lo que ya hemos hecho, solo que debemos calcular primero $u^{*(n+1)}$ para conocer $u^{(n+1)}$. A continuación, los resultados para este método al utilizar el mayor de los pasos de cálculo y las gráficas de las soluciones y de los errores globales cometidos para cada paso de cálculo pedido:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{*(n+1)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-0,8	-0,448	-0,49935991	0,05135991
1	0,4	-0,448	-0,6848	-0,38144	-0,46134207	0,07990207
2	0,8	-0,38144	-0,132864	0,1374208	0,04238842	0,09503238
3	1,2	0,1374208	0,81845248	1,06624614	0,96379304	0,10245311
4	1,6	1,06624614	2,14374769	2,37624738	2,27067057	0,10557681

TABLA 2: Método de Euler Modificado para paso de cálculo $h = 0{,}4$

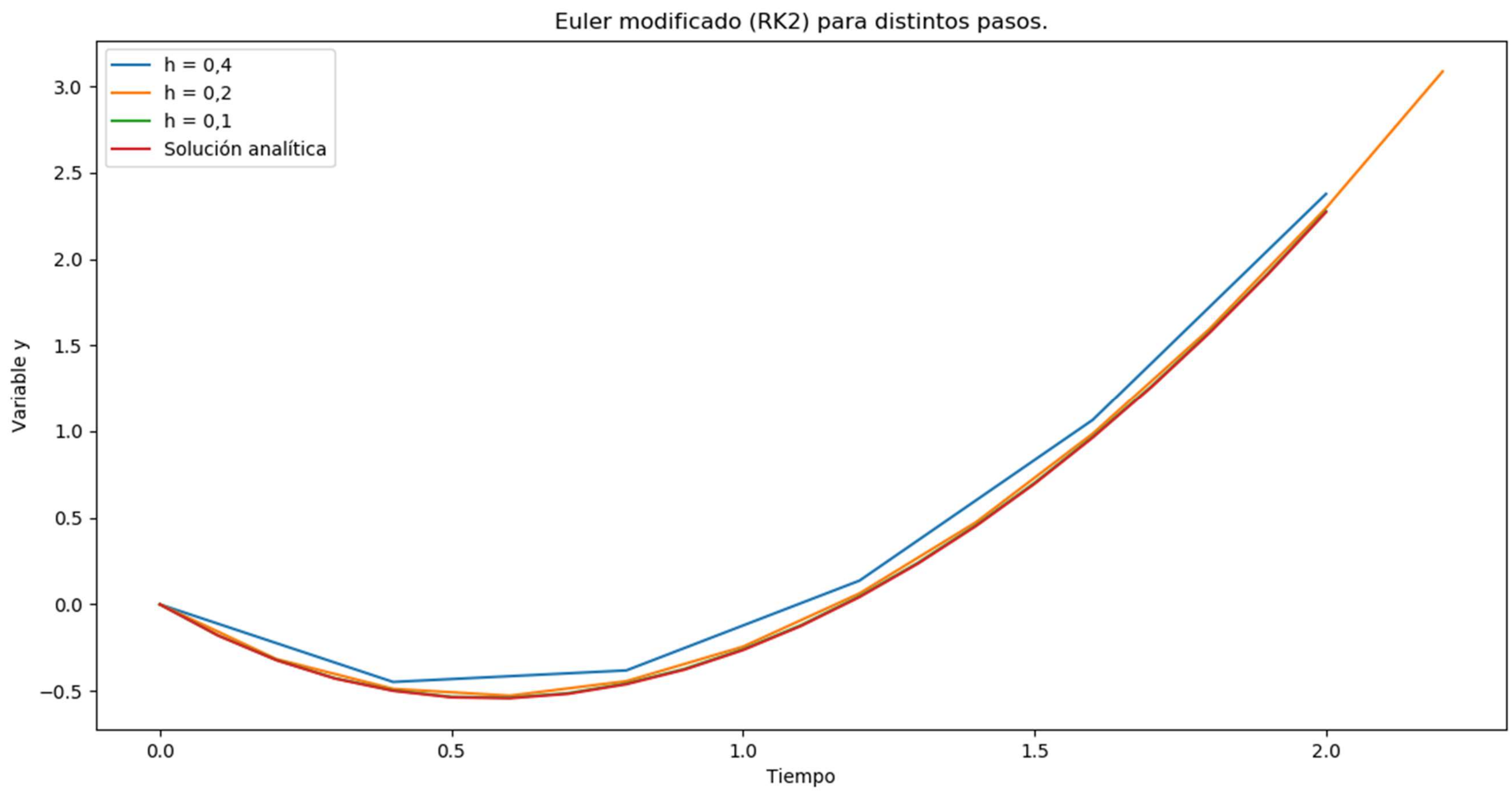

GRÁFICO 3: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Euler Modificado

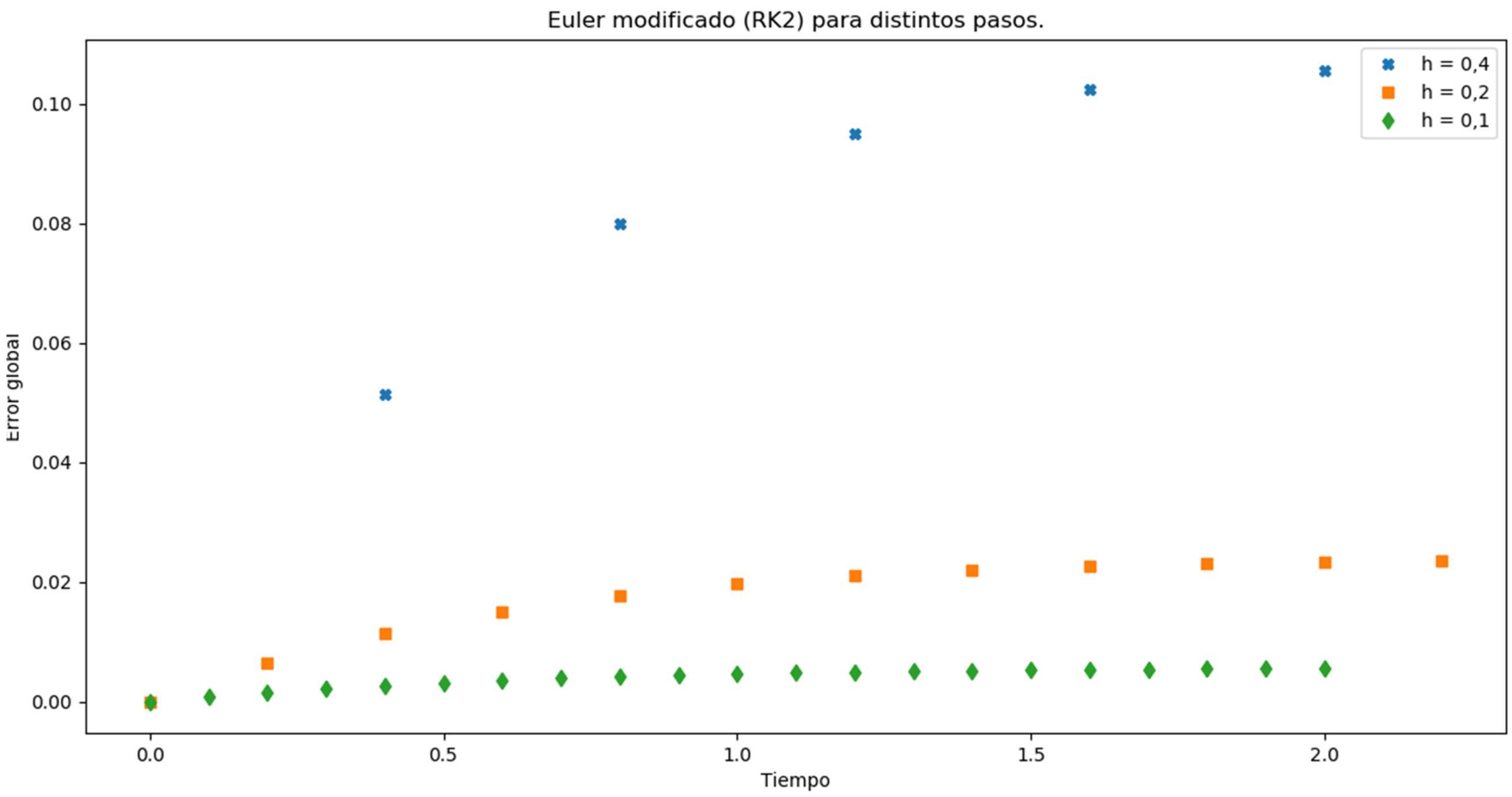

GRÁFICO 4: Comparación de los errores globales para el método de Euler Modificado.

c. **MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE ORDEN 4:**

Este método, al igual que en anterior, posee dos formas distintas de plantearte. Para la resolución de este problema, se eligió la siguiente:

$$q_1 = h * f\left(u^{(n)},\ t^{(n)}\right)$$

$$q_2 = h * f\left(u^{(n)} + \frac{q_1}{2},\ t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$q_3 = h * f\left(u^{(n)} + \frac{q_2}{2},\ t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$q_4 = h * f\left(u^{(n)} + q_3,\ t^{(n+1)}\right)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Se vuelve a presentar la tabla para $h = 0{,}4$, y el gráfico comparativo para todos los pasos de cálculo:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	q_1	q_2	q_3	q_4	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-0,8	-0,464	-0,5312	-0,20352	-0,49898667	-0,49935991	0,00037324
1	0,4	-0,49898667	-0,21640533	0,06687573	0,01021952	0,29150686	-0,46077133	-0,46134207	0,00057074
2	0,8	-0,46077133	0,28030853	0,52824682	0,47865917	0,72884486	0,04305624	0,04238842	0,00066781
3	1,2	0,04305624	0,71877751	0,943022	0,89817311	1,12750826	0,96450223	0,96379304	0,0007092
4	1,6	0,96450223	1,11819911	1,32655929	1,28488725	1,50024421	2,27139163	2,27067057	0,00072106

TABLA 3: Método de RK(O(4)) para paso de cálculo $h = 0{,}4$

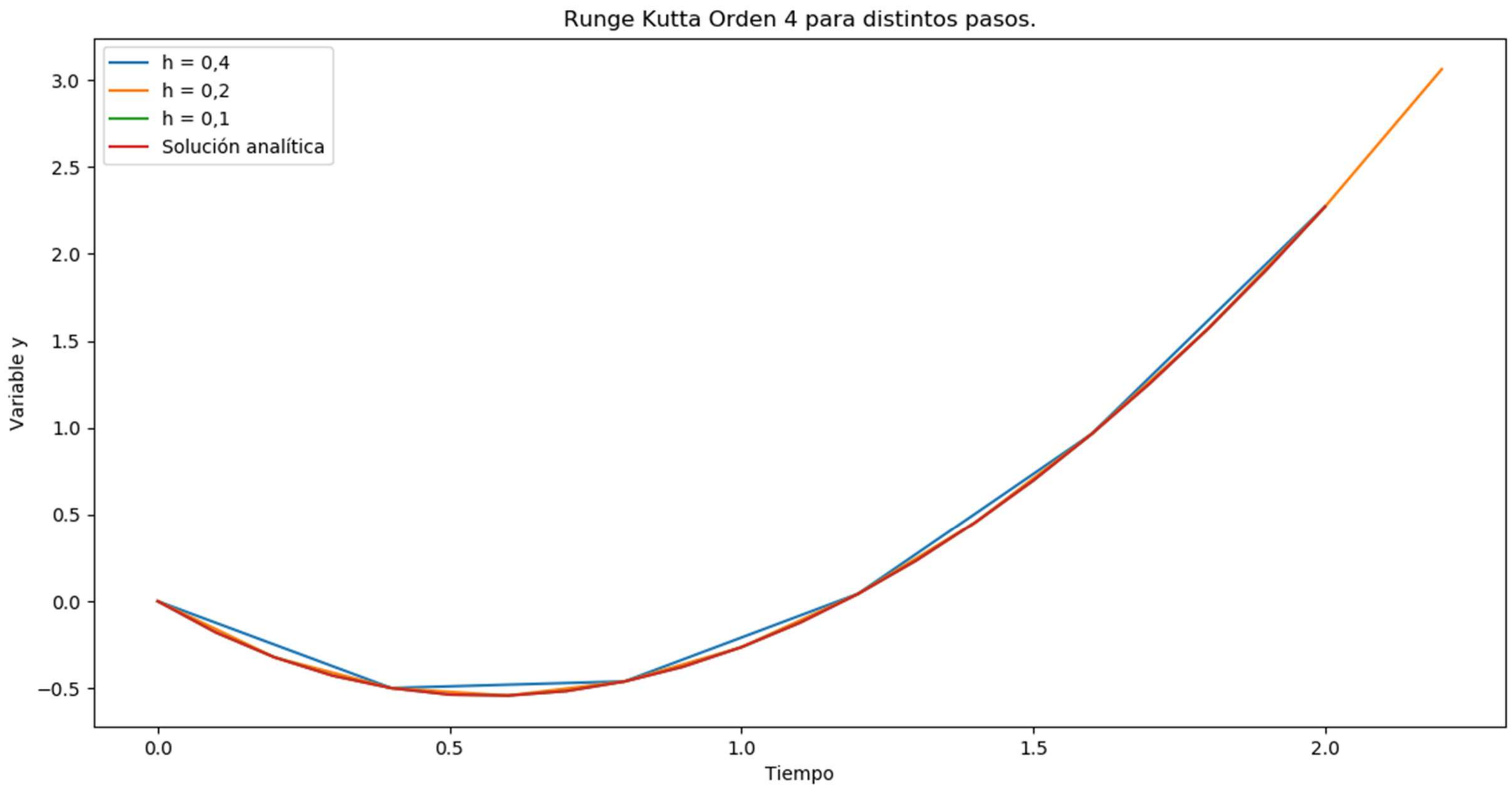

GRÁFICO 5: Comparación de los errores globales para el método de Runge Kutta de orden 4.

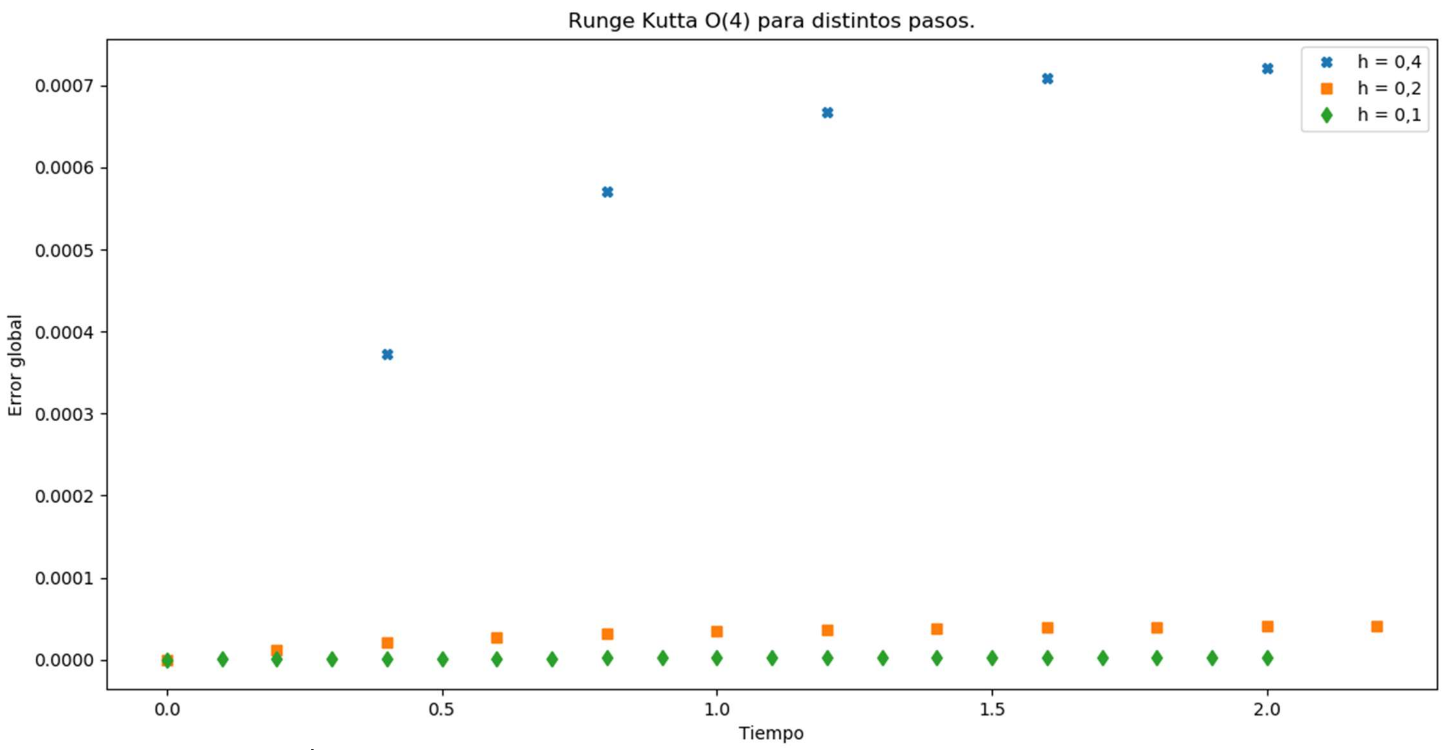

GRÁFICO 6: Comparación de los errores globales para el método de Runge Kutta de orden 4.

Prestemos atención a los gráficos 4 y 6 de este apunte, y al gráfico de los errores globales en el método de Euler Explícito que se muestra luego. Podemos notar el orden de precisión de cada método al ver cómo se reduce el error global en cada punto al pasar de un paso h a otro menor (por ejemplo, a $h/2$).

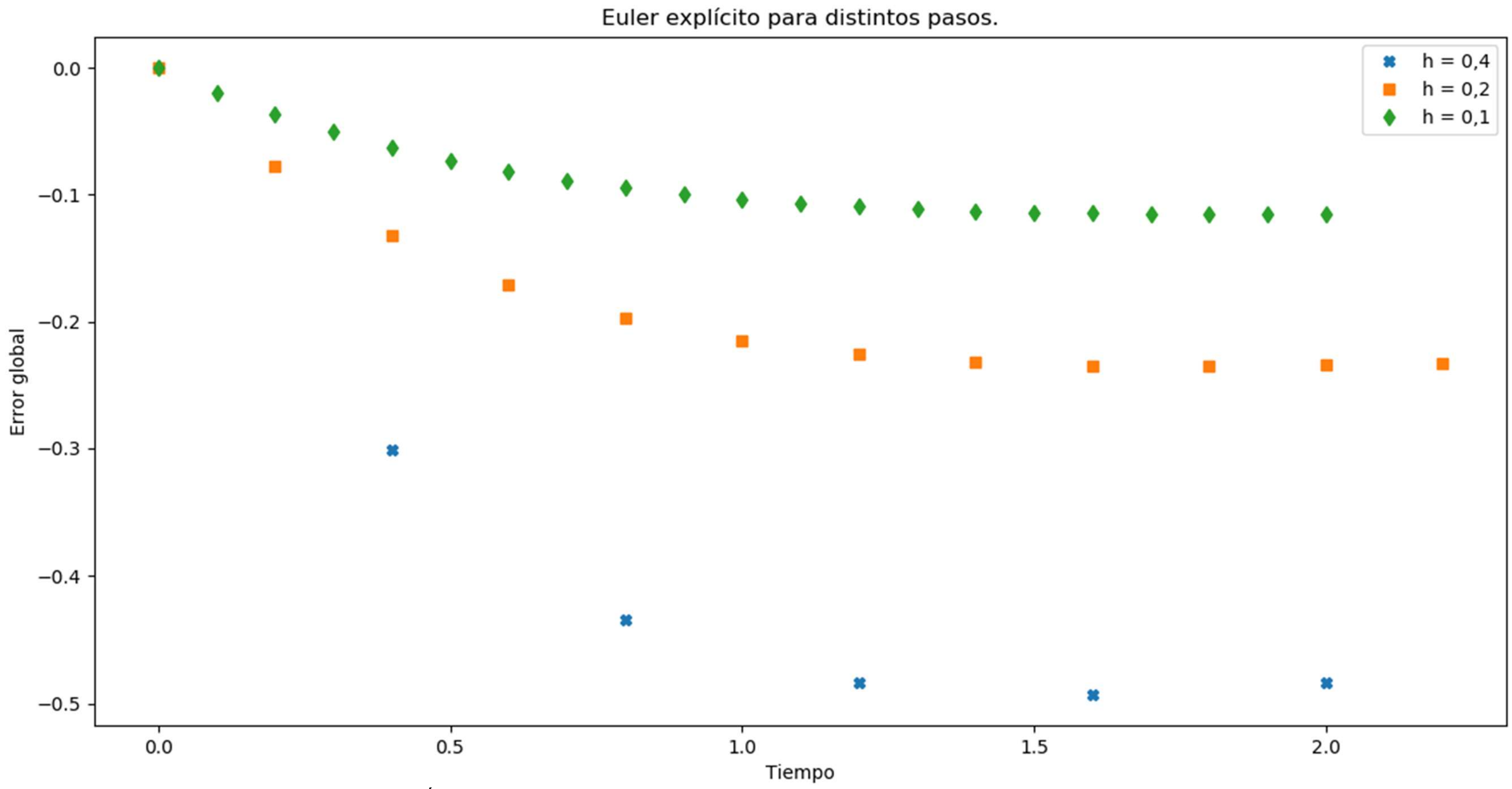

GRÁFICO 7: Comparación de los errores globales para el método de Euler Explícito.

Además, podemos visualizar el cambio de escala en los errores para cada método a paso constante. En el gráfico de abajo se eligió el paso de cálculo h = 0,1, y un método de cada orden (NOTA: se tomaron en cuenta los módulos de los errores para evitar confusiones en las gráficas y sus escalas)

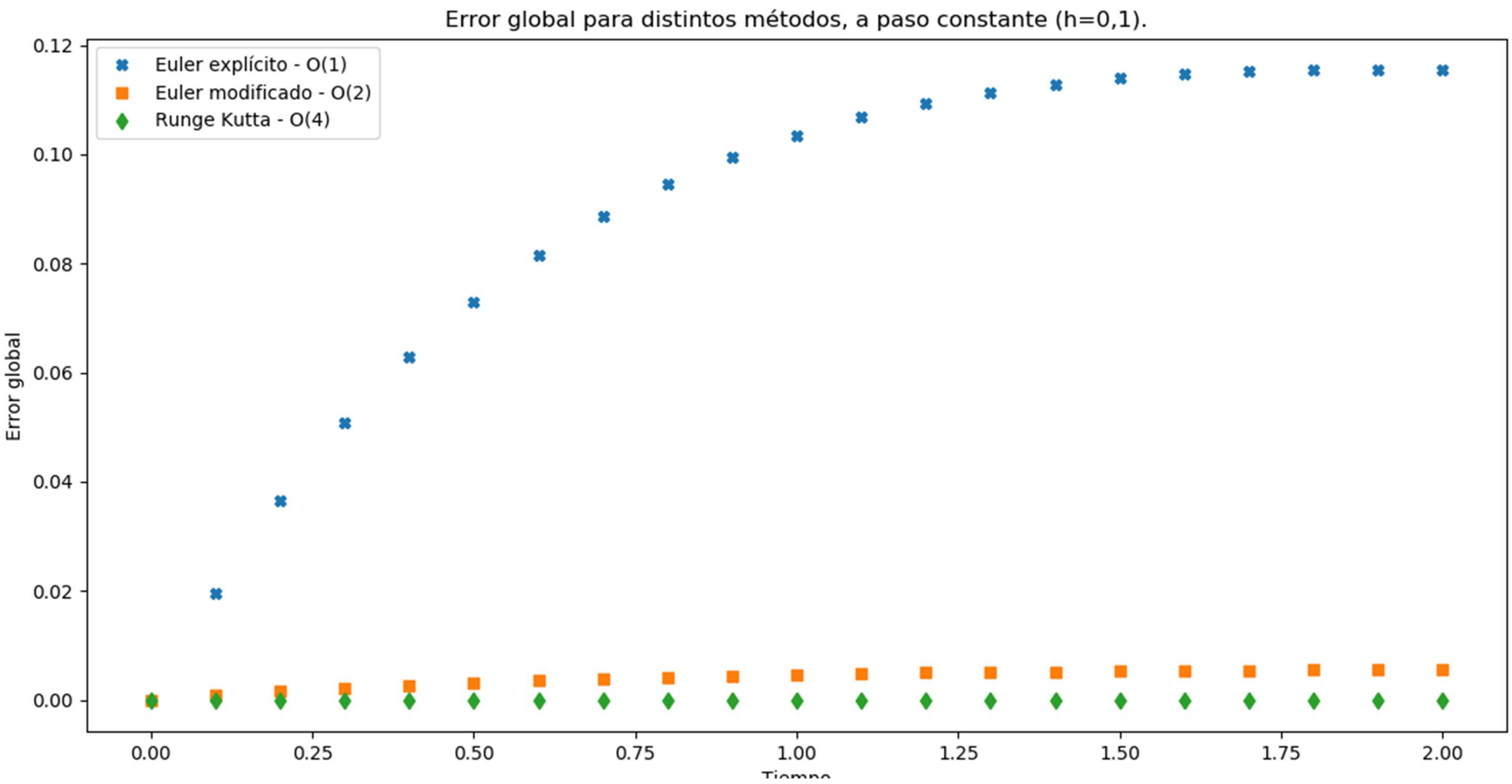

GRÁFICO 8: Comparación de los errores globales para distintos métodos, a paso de cálculo constante.

2. **OTROS EJEMPLOS:**

Los siguientes ejemplos muestran ecuaciones diferenciales particulares, en las cuales hay que tener ciertas consideraciones para la resolución por métodos numéricos.

1) Analicemos la estabilidad de la ecuación diferencial $y' = 2y^2 - y$ por medio del método de Euler explícito.

Apliquemos al igual que antes perturbaciones luego de la discretización del problema:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[2\left(u^{(n)}\right)^2 - u^{(n)}\right]$$

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[2\left(u^{(n)} + \delta u^{(n)}\right)^2 - \left(u^{(n)} + \delta u^{(n)}\right)\right]$$

Desarrollando el cuadrado del binomio tenemos que:

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[2\left({u^{(n)}}^2 + 2 * u^{(n)} * \delta u^{(n)} + {\delta u^{(n)}}^2\right) - \left(u^{(n)} + \delta u^{(n)}\right)\right]$$

Podemos ver que ya no encontramos los términos de las perturbaciones en forma lineal, por lo cual no podemos despejarlas de igual forma que en los otros ejemplos. Lo que podemos tener en cuenta es que estas perturbaciones tienden a cero, por lo cual su cuadrado también lo hará, entonces estos términos en la suma pueden desestimarse. Obtenemos entonces que:

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[2\left({u^{(n)}}^2 + 2 * u^{(n)} * \delta u^{(n)}\right) - \left(u^{(n)} + \delta u^{(n)}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}} + \delta u^{(n+1)} = \boldsymbol{u^{(n)} + h * \left(2{u^{(n)}}^2 - u^{(n)}\right)} + \delta u^{(n)} + 4h * u^{(n)} * \delta u^{(n)} - h\delta u^{(n)}$$

$$\delta u^{(n+1)} = \delta u^{(n)}(1 + 4h * u^{(n)} - h)$$

$$\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}} = 1 + h(4u^{(n)} - 1)$$

En este caso la estabilidad del problema no depende solo del paso de cálculo, también depende de los valores de $u^{(n)}$.que uno vaya calculando. Este análisis determina que, para que el método sea estable, $0 < h < \frac{-2}{4u^{(n)}-1}$; siendo $u^{(n)} < \frac{1}{4}$

2) Resolvamos la EDO $y'' = 2(2y + t)$ en el intervalo $[0;\ 1]$ con paso de cálculo $h = 0{,}05$ por Euler simplificado y analicemos su estabilidad. Los valores iniciales: $y(0) = 1$ e $y'(0) = -\frac{5}{2}$. La solución analítica del problema es $y(t) = e^{-2t} - \frac{1}{2}t$

La diferencia de este problema con los otros vistos es que aparece una derivada segunda. Para poder aplicar el método de Euler explícito vamos a recurrir a un cambio de variables en la discretización de las derivadas. Llamemos a $z(t) = y'(t)$, entonces $z'(t) = y''(t)$. Luego nos quedamos con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} z' = 2(2y + t) \\ y' = z \end{cases}$$

Podemos discretizar cada variable siguiendo las referencias de ejercicios anteriores:

$$y\left(t^{(n)}\right) = y^{(n)} \approx u^{(n)}$$

$$z\left(t^{(n)}\right) = z^{(n)} \approx v^{(n)}$$

$$t^{(n)} \approx nh$$

En el sistema de ecuaciones obtenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{h} = 2(2u^{(n)} + nh) \\ \dfrac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{h} = v^{(n)} \end{cases}$$

Despejamos entonces $v^{(n+1)}$ y $u^{(n+1)}$:

$$\begin{cases} v^{(n+1)} = v^{(n)} + h\left[2(2u^{(n)} + nh)\right] \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} + hv^{(n)} \end{cases}$$

Dados los valores iniciales podemos avanzar sencillamente en nuestros pasos de cálculo, dado que $u^{(0)} = 1$ y $v^{(0)} = -2{,}5$:

h	0,05						
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$v^{(n)}$	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$	$y^{(n+1)}$	$z^{(n+1)}$
0	0	1	-2,5	0,875	-2,3	0,87983742	-2,30967484
1	0,05	0,875	-2,3	0,76	-2,12	0,76873075	-2,13746151
2	0,1	0,76	-2,12	0,654	-1,958	0,66581822	-1,98163644
3	0,15	0,654	-1,958	0,5561	-1,8122	0,57032005	-1,84064009
4	0,2	0,5561	-1,8122	0,46549	-1,68098	0,48153066	-1,71306132
5	0,25	0,46549	-1,68098	0,381441	-1,562882	0,39881164	-1,59762327
6	0,3	0,381441	-1,562882	0,3032969	-1,4565938	0,3215853	-1,49317061
7	0,35	0,3032969	-1,4565938	0,23046721	-1,36093442	0,24932896	-1,39865793
8	0,4	0,23046721	-1,36093442	0,16242049	-1,27484098	0,18156966	-1,31313932
9	0,45	0,16242049	-1,27484098	0,09867844	-1,19735688	0,11787944	-1,23575888
10	0,5	0,09867844	-1,19735688	0,0388106	-1,12762119	0,05787108	-1,16574217
11	0,55	0,0388106	-1,12762119	-0,01757046	-1,06485907	0,00119421	-1,10238842
12	0,6	-0,01757046	-1,06485907	-0,07081342	-1,00837317	-0,05246821	-1,04506359
13	0,65	-0,07081342	-1,00837317	-0,12123208	-0,95753585	-0,10340304	-0,99319393
14	0,7	-0,12123208	-0,95753585	-0,16910887	-0,91178226	-0,15186984	-0,94626032
15	0,75	-0,16910887	-0,91178226	-0,21469798	-0,87060404	-0,19810348	-0,90379304
16	0,8	-0,21469798	-0,87060404	-0,25822818	-0,83354363	-0,24231648	-0,86536705
17	0,85	-0,25822818	-0,83354363	-0,29990536	-0,80018927	-0,28470111	-0,83059778
18	0,9	-0,29990536	-0,80018927	-0,33991483	-0,77017034	-0,32543138	-0,79913724
19	0,95	-0,33991483	-0,77017034	-0,37842335	-0,74315331	-0,36466472	-0,77067057
20	1	-0,37842335	-0,74315331	-0,41558101	-0,71883798	-0,40254357	-0,74491286

TABLA 4: Método de Euler para paso de cálculo $h = 0{,}05$ para un PVI con EDO de segundo grado

Nos queda realizar el análisis de estabilidad, aplicando perturbaciones a todos los términos discretizados de las funciones y e y'. En el sistema discretizado:

$$\begin{cases} v^{(n+1)} + \delta v^{(n+1)} = v^{(n)} + \delta v^{(n)} + h\left[2(2(u^{(n)} + \delta u^{(n)}) + nh)\right] \\ u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h(v^{(n)} + \delta v^{(n)}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v^{(n+1)}} + \delta v^{(n+1)} = \boldsymbol{v^{(n)} + h\left[2(2u^{(n)} + nh)\right]} + \delta v^{(n)} + 4h\delta u^{(n)} \\ \boldsymbol{u^{(n+1)}} + \delta u^{(n+1)} = \boldsymbol{u^{(n)} + hv^{(n)}} + \delta u^{(n)} + h\delta v^{(n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta v^{(n+1)} = \delta v^{(n)} + 4h\delta u^{(n)} \\ \delta u^{(n+1)} = \delta u^{(n)} + h\delta v^{(n)} \end{cases}$$

El sistema resultante lo podemos escribir en función de una matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{4h} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^{(n)} \\ \delta v^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u^{(n+1)} \\ \delta v^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

La matriz resaltada en **rojo** se conoce como matriz de amplificación (A), y es la que nos va a determinar los pasos de cálculo para los cuales no tenemos problemas de estabilidad: los autovalores de esta matríz deben ser, en módulo, menores a 1. De otra forma, $\rho(A) < 1$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 4h^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm 2h$$

Esta última condición nos determina que para cualquier paso que utilicemos, uno de los autovalores será siempre mayor a la unidad. Por lo tanto, determinamos que el sistema no cumple con la condición de estabilidad.

3) Plantear las discretizaciones para el PVI $y'' = 2(2y + t)$; $y(0) = 1$ e $y'(0) = -\frac{5}{2}$ por medio del método de Euler Modificado (RK O(2))

Del sistema anterior pasamos de una ecuación de segundo grado a dos de grado 1, y obtuvimos que:

$$\begin{cases} z' = \mathrm{f(y(t), z(t), t)} \\ y' = \mathrm{g(y(t), z(t), t)} \end{cases}$$

En donde $f(y(t), z(t), t) = 2(2y(t) + t)$ y $g(y(t), z(t), t) = z(t)$. Recordemos ahora el método para una EDO de grado 1:

$$u^{*(n+1)} = u^{(n)} + h * f(u^{(n)},\ t^{(n)})$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2} * \left[f(u^{(n)},\ t^{(n)}) + f(u^{*(n+1)},\ t^{(n+1)})\right]$$

Ahora, al trabajar con dos EDOs de grado 1 podemos, para cada una, definir un paso predictor y un paso corrector como se nota a continuación:

$$u^{*(n+1)} = u^{(n)} + h * f(u^{(n)}, v^{(n)},\ t^{(n)})$$
$$v^{*(n+1)} = v^{(n)} + h * g(u^{(n)}, v^{(n)},\ t^{(n)})$$
$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2} * \left[f\left(u^{(n)}, v^{(n)},\ t^{(n)}\right) + f(u^{*(n+1)}, v^{*(n+1)}, t^{(n+1)})\right]$$
$$v^{(n+1)} = v + \frac{h}{2} * \left[g\left(u^{(n)}, v^{(n)},\ t^{(n)}\right) + g(u^{*(n+1)}, v^{*(n+1)},\ t^{(n+1)})\right]$$

El trabajo es análogo a lo ya visto: calcular primero $u^{*(n+1)}$ y $v^{*(n+1)}$, dado de conocemos $u^{(0)}$ y $v^{(0)}$, para luego conseguir $u^{(n+1)}$ y $v^{(n+1)}$. Dejo este trabajo para el alumno.

3. RESUMEN:

En este apunte repasamos métodos de discretización de orden de precisión mayor a uno, y cómo el error se reduce al trabajar con métodos de mayor orden.

Además, en los PVI con EDO no lineales, el análisis de estabilidad requiere linealizar los términos de las perturbaciones (ejemplo 1)

En los PVI de segundo grado o mayores, necesitamos realizar cambios de variables y el análisis de estabilidad requiere trabajar con los autovalores de la matriz de amplificación (ejemplo 2).

4. ANEXO: Tablas.

Crank Nicholson para pasos 0,2 y 0,1:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	a	b	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-1,56	-2	-0,32363636	-0,32253849	-0,00109787
1	0,2	-0,32363636	-1,04	-1,23636364	-0,50115702	-0,49935991	-0,00179712
2	0,4	-0,50115702	-0,44	-0,53884298	-0,54458302	-0,54237673	-0,00220629
3	0,6	-0,54458302	0,24	0,10458302	-0,46374974	-0,46134207	-0,00240767
4	0,8	-0,46374974	1	0,70374974	-0,26670434	-0,26424112	-0,00246322
5	1	-0,26670434	1,84	1,26670434	0,03996918	0,04238842	-0,00241924
6	1,2	0,03996918	2,76	1,80003082	0,45088387	0,45319393	-0,00231005
7	1,4	0,45088387	3,76	2,30911613	0,96163226	0,96379304	-0,00216078
8	1,6	0,96163226	4,84	2,79836774	1,56860821	1,57059778	-0,00198956
9	1,8	1,56860821	6	3,27139179	2,26886127	2,27067057	-0,0018093

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	a	b	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-1,79	-2	-0,18047619	-0,18032516	-0,00015103
1	0,1	-0,18047619	-1,56	-1,60952381	-0,32281179	-0,32253849	-0,0002733
2	0,2	-0,32281179	-1,31	-1,23718821	-0,42873448	-0,42836356	-0,00037092
3	0,3	-0,42873448	-1,04	-0,88126552	-0,49980738	-0,49935991	-0,00044748
4	0,4	-0,49980738	-0,75	-0,54019262	-0,53744478	-0,53693868	-0,0005061
5	0,5	-0,53744478	-0,44	-0,21255522	-0,54292623	-0,54237673	-0,0005495
6	0,6	-0,54292623	-0,11	0,10292623	-0,51740944	-0,51682939	-0,00058005
7	0,7	-0,51740944	0,24	0,40740944	-0,46194188	-0,46134207	-0,00059981
8	0,8	-0,46194188	0,61	0,70194188	-0,37747122	-0,37686068	-0,00061054
9	0,9	-0,37747122	1	0,98747122	-0,26485492	-0,26424112	-0,0006138
10	1	-0,26485492	1,41	1,26485492	-0,12486873	-0,12425783	-0,0006109
11	1,1	-0,12486873	1,84	1,53486873	0,04178543	0,04238842	-0,00060299
12	1,2	0,04178543	2,29	1,79821457	0,23447253	0,23506359	-0,00059105
13	1,3	0,23447253	2,76	2,05552747	0,45261801	0,45319393	-0,00057592
14	1,4	0,45261801	3,25	2,30738199	0,69570201	0,69626032	-0,00055831
15	1,5	0,69570201	3,76	2,55429799	0,9632542	0,96379304	-0,00053884
16	1,6	0,9632542	4,29	2,7967458	1,25484903	1,25536705	-0,00051801
17	1,7	1,25484903	4,84	3,03515097	1,57010151	1,57059778	-0,00049627
18	1,8	1,57010151	5,41	3,26989849	1,90866327	1,90913724	-0,00047397
19	1,9	1,90866327	6	3,50133673	2,27021915	2,27067057	-0,00045142

Euler modificado para pasos 0,2 y 0,1:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{*(n+1)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-0,4	-0,316	-0,32253849	0,00653849
1	0,2	-0,316	-0,5648	-0,48792	-0,49935991	0,01143991
2	0,4	-0,48792	-0,598336	-0,5272944	-0,54237673	0,01508233
3	0,6	-0,5272944	-0,50983552	-0,44358141	-0,46134207	0,01776066
4	0,8	-0,44358141	-0,30686513	-0,24453675	-0,26424112	0,01970436
5	1	-0,24453675	0,0043706	0,06347986	0,04238842	0,02109144
6	1,2	0,06347986	0,41878389	0,47525349	0,45319393	0,02205956
7	1,4	0,47525349	0,93220279	0,98650786	0,96379304	0,02271482
8	1,6	0,98650786	1,54120629	1,59373644	1,57059778	0,02313867
9	1,8	1,59373644	2,24298916	2,29406388	2,27067057	0,02339332

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{*(n+1)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-0,2	-0,1795	-0,18032516	0,00082516
1	0,1	-0,1795	-0,34055	-0,3209975	-0,32253849	0,00154099
2	0,2	-0,3209975	-0,44489775	-0,42620274	-0,42836356	0,00216082
3	0,3	-0,42620274	-0,51458246	-0,49666348	-0,49935991	0,00269643
4	0,4	-0,49666348	-0,55099713	-0,53378045	-0,53693868	0,00315823
5	0,5	-0,53378045	-0,5554024	-0,5388213	-0,54237673	0,00355542
6	0,6	-0,5388213	-0,52893917	-0,51293328	-0,51682939	0,00389611
7	0,7	-0,51293328	-0,47263995	-0,45715462	-0,46134207	0,00418745
8	0,8	-0,45715462	-0,38743916	-0,37242493	-0,37686068	0,00443575
9	0,9	-0,37242493	-0,27418244	-0,25959456	-0,26424112	0,00464656
10	1	-0,25959456	-0,13363511	-0,11943308	-0,12425783	0,00482475
11	1,1	-0,11943308	0,03351023	0,04736306	0,04238842	0,00497464
12	1,2	0,04736306	0,22662676	0,24016357	0,23506359	0,00509999
13	1,3	0,24016357	0,44514722	0,45839803	0,45319393	0,00520411
14	1,4	0,45839803	0,68855823	0,70155022	0,69626032	0,0052899
15	1,5	0,70155022	0,9563952	0,96915295	0,96379304	0,00535991
16	1,6	0,96915295	1,24823765	1,26078342	1,25536705	0,00541637
17	1,7	1,26078342	1,56370508	1,57605899	1,57059778	0,00546122
18	1,8	1,57605899	1,90245309	1,91463339	1,90913724	0,00549615

Runge Kutta de orden 4 para pasos 0,2 y 0,1:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	q_1	q_2	q_3	q_4	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	e
0	0	0	-0,4	-0,318	-0,3262	-0,24676	-0,32252667	-0,32253849	1,1827E-05
1	0,2	-0,32252667	-0,24749467	-0,1727452	-0,18022015	-0,10745064	-0,49933933	-0,49935991	2,0575E-05
2	0,4	-0,49933933	-0,10813213	-0,03931892	-0,04620024	0,02110791	-0,54234976	-0,54237673	2,6971E-05
3	0,6	-0,54234976	0,02046995	0,08442296	0,07802766	0,14086442	-0,46131049	-0,46134207	3,1581E-05
4	0,8	-0,46131049	0,1402621	0,20023589	0,19423851	0,2534144	-0,26420628	-0,26424112	3,4842E-05
5	1	-0,26420628	0,25284126	0,30955713	0,30388554	0,36006415	0,04242552	0,04238842	3,7091E-05
6	1,2	0,04242552	0,3595149	0,41356341	0,40815856	0,46188319	0,45323252	0,45319393	3,8589E-05
7	1,4	0,45323252	0,4613535	0,51321815	0,50803168	0,55974716	0,96383257	0,96379304	3,9533E-05
8	1,6	0,96383257	0,55923349	0,60931014	0,60430247	0,65437299	1,57063785	1,57059778	4,0076E-05
9	1,8	1,57063785	0,65387243	0,70248519	0,69762391	0,74634765	2,2707109	2,27067057	4,0331E-05

n	t	u(n)	q1	q2	q3	q4	u(n+1)	y(t(n+1))	e
0	0	0	-0,2	-0,17975	-0,1807625	-0,16092375	-0,18032479	-0,18032516	3,7226E-07
1	0,1	-0,18032479	-0,16096752	-0,14166914	-0,14263406	-0,12370411	-0,3225378	-0,32253849	6,935E-07
2	0,2	-0,3225378	-0,12374622	-0,10530891	-0,10623077	-0,08812314	-0,42836259	-0,42836356	9,7005E-07
3	0,3	-0,42836259	-0,08816374	-0,07050555	-0,07138846	-0,05402489	-0,4993587	-0,49935991	1,2075E-06
4	0,4	-0,4993587	-0,05406413	-0,03711092	-0,03795858	-0,02126827	-0,53693727	-0,53693868	1,4108E-06
5	0,5	-0,53693727	-0,02130627	-0,00499096	-0,00580673	0,0102744	-0,54237514	-0,54237673	1,5843E-06
6	0,6	-0,54237514	0,01023751	0,02597564	0,02518873	0,04071864	-0,51682766	-0,51682939	1,7319E-06
7	0,7	-0,51682766	0,04068277	0,05589863	0,05513783	0,07016898	-0,46134021	-0,46134207	1,8568E-06
8	0,8	-0,46134021	0,07013402	0,08487732	0,08414016	0,09872001	-0,37685872	-0,37686068	1,9621E-06
9	0,9	-0,37685872	0,09868587	0,11300158	0,11228579	0,12645729	-0,26423907	-0,26424112	2,0503E-06
10	1	-0,26423907	0,12642391	0,14035271	0,13965627	0,15345828	-0,12425571	-0,12425783	2,1239E-06
11	1,1	-0,12425571	0,15342557	0,16700429	0,16632536	0,17979304	0,04239061	0,04238842	2,1847E-06
12	1,2	0,04239061	0,17976094	0,19302289	0,19235979	0,20552496	0,23506582	0,23506359	2,2345E-06
13	1,3	0,23506582	0,20549342	0,21846875	0,21781998	0,23071142	0,4531962	0,45319393	2,2748E-06
14	1,4	0,4531962	0,23068038	0,24339636	0,24276056	0,25540432	0,69626263	0,69626032	2,3071E-06
15	1,5	0,69626263	0,25537374	0,26785505	0,26723098	0,27965064	0,96379537	0,96379304	2,3325E-06
16	1,6	0,96379537	0,27962046	0,29188944	0,29127599	0,30349286	1,2553694	1,25536705	2,3519E-06
17	1,7	1,2553694	0,30346306	0,31553991	0,31493606	0,32696945	1,57060014	1,57059778	2,3664E-06
18	1,8	1,57060014	0,32693999	0,33884299	0,33824784	0,3501152	1,90913962	1,90913724	2,3766E-06
19	1,9	1,90913962	0,35008604	0,36183174	0,36124445	0,37296159	2,27067295	2,27067057	2,3833E-06