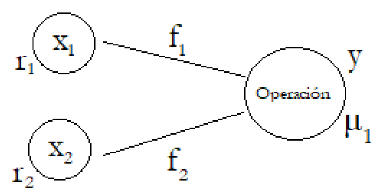
Gráfica de Procesos

1.1 Introducción

La Gráfica de Procesos consiste en una técnica gráfica o diagrama de flujo, que permite estimar la cota de error involucrada como consecuencia de una operación determinada. El análisis de la Gráfica de Procesos trabaja con *errores relativos*, y tiene en cuenta tanto la propagación de los *errores de entrada* como así también los *errores de redondeo*. El esquema gráfico que se utiliza y la fórmula general se expresan a continuación:



1.1 Esquema de representación para la Gráfica de Procesos.

$$r_y = \sum f_j . r_j + \sum g_i . \mu_i$$ (1) *Fórmula gral. de propagación*

Siendo $r_y \sim Error\ relativo\ de\ la\ operación$

$r_j \sim Error\ relativo\ de\ entrada\ de\ la\ variable\ j$

$f_j \sim Factor\ de\ amplificación\ de\ errores\ de\ entrada\ de\ la\ variable\ j$

$g_i \sim Factor\ de\ amplificación\ de\ errores\ de\ redondeo\ de\ la\ operación\ i$

$\mu_i \sim Error\ de\ redondeo\ de\ la\ operación\ i$

Veamos su aplicación práctica con un ejemplo.

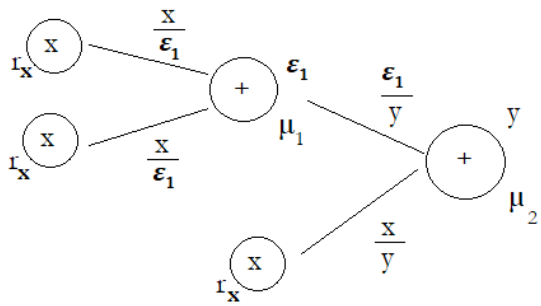
1.2 Aplicación práctica

Ej1. Resolver las siguientes operaciones y dar con la expresión de la cota del error mediante la Gráfica de Procesos. ¿Cuál operación es más conveniente?

a) $y = x + x + x$
b) $w = 3x$

a) Comencemos planteando la Gráfica 1.2 para la primera ecuación $y = x + x + x$, teniendo en cuenta los factores de amplificación de los errores de entrada que se muestran en la tabla 1.3.

Tarela – Ezcurra - Poltarak



1.2 Gráfica de Procesos para la ecuación $y = x + x + x$

f_j	.	/	+	-
x_1	1	1	$\frac{x_1}{y}$	$\frac{x_1}{y}$
x_2	1	-1	$\frac{x_2}{y}$	$-\frac{x_2}{y}$

1.3 Tabla de Factores de Amplificación f_j

Una vez planteado el esquema, aplicando la ecuación (1), resolvemos:

$$r_y = \sum f_j . r_j + \sum g_i . \mu_i$$

$$r_y = \underbrace{\left[\frac{x}{\varepsilon_1}.r_x + \frac{x}{\varepsilon_1}.r_x + \mu_1\right]}_{r_{\varepsilon_1}}.\frac{\varepsilon_1}{y} + \frac{x}{y}.r_x + \mu_2$$

g =1 ya que "y" no participa de otra operación

$$r_y = \left[2\frac{x}{\varepsilon_1}.r_x + \mu_1\right].\frac{\varepsilon_1}{y} + \frac{x}{y}.r_x + \mu_2$$

(Reagrupo)

$$|r_y| \leq \left|\left[2\frac{x}{\varepsilon_1}.r_x + \mu_1\right].\frac{\varepsilon_1}{y} + \frac{x}{y}.r_x + \mu_2\right|$$

(Trabajo con la cota del error relativo)

$$R_y = \left|\left[2\frac{x}{\varepsilon_1}.R_x + \mu_1\right].\frac{\varepsilon_1}{y} + \frac{x}{y}.R_x + \mu_2\right|$$

$$R_y = \left|2\frac{x}{\varepsilon_1}\right| \; R_x \left|\frac{\varepsilon_1}{y}\right| + |\mu_1| \left|\frac{\varepsilon_1}{y}\right| + \left|\frac{x}{y}\right|.R_x + |\mu_2|$$

$$R_y = R_x.\left(\left|2\frac{x}{\varepsilon_1}\right|.\left|\frac{\varepsilon_1}{y}\right| + \left|\frac{x}{y}\right|\right) + \mu.\left(\left|\frac{\varepsilon_1}{y}\right| + 1\right)$$

(Saco factor común)

$$R_y = R_x.\left(\left|2\frac{x}{x+x}\right|.\left|\frac{x+x}{x+x+x}\right| + \left|\frac{x}{x+x+x}\right|\right) + \mu.\left(\left|\frac{x+x}{x+x+x}\right| + 1\right)$$

(Reemplazo $\varepsilon_1 = x + x$; $y = x + x + x$)

$$R_y = R_x.\left(1.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \mu.\left(\frac{2}{3} + 1\right)$$

$$\boxed{R_y = \underbrace{1}_{CP} R_x + \underbrace{\frac{5}{3}}_{FU} \mu}$$

A los coeficientes que acompañan al R_x y al μ se los denominan respectivamente Número de Condición del Problema y Estabilidad del Algoritmo y se definen como:

Número de Condición del problema $CP = \sum|f_j|$

Estabilidad del Algoritmo $FU = \sum|g_i|$

Número de Condición del Algoritmo $CA = \frac{FU}{CP}$

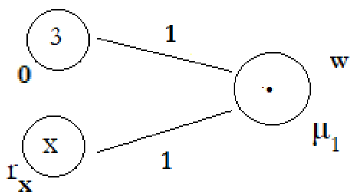
Y ocurre que:

$CP < 1 \quad Estable$ $\qquad\qquad$ $CA < 1 \quad Estable$

$CP \gg 1 \quad Inestable$ $\qquad\qquad$ $CA \gg 1 \quad Inestable$

Depende del problema $\qquad\qquad$ Depende del problema y del algoritmo

b) Resolvamos ahora para la segunda ecuación $w = 3x$



1.4 Gráfica de Procesos para la ecuación $w = 3x$

f_j	.	/	+	-
x_1	1	1	$\frac{x_1}{y}$	$\frac{x_1}{y}$
x_2	1	-1	$\frac{x_2}{y}$	$-\frac{x_2}{y}$

1.3bis Tabla de Factores de Amplificación f_j

Una vez planteado el esquema, aplicando la ecuación (1), resolvemos:

$$r_w = \sum f_j . r_j + \sum g_i . \mu_i$$

$r_w = 1.0 + 1. r_x + \mu_1$ $\qquad$ g =1 ya que "w" no participa de otra operación

$|\, r_w| \leq |r_x + \mu_1|$ $\qquad$ (Trabajo con la cota del error relativo)

$$\boxed{R_w = \underbrace{1}_{CP} R_x + \underbrace{1}_{FU} \mu}$$

Vemos que el CP de ambas ecuaciones coinciden en valor, lo que es correcto ya que el problema es el mismo, pero vemos que el FU varia, que también correcto, ya que es función de los algoritmos que se hayan empleado para la resolución de dicho problema.

Analicemos los CA de cada operación:

$$CA_y = \frac{FU_y}{CP_y} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$$

$$CA_w = \frac{FU_w}{CP_w} = \frac{1}{1} = 1$$

$CA_y > CA_w$ $\quad\rightarrow$ Entre las dos operaciones a) y b), nos conviene quedarnos con la que propague menos el error, es decir la que menor CA tenga en este caso. Por lo tanto, nos conviene elegir $w = 3x$.