Ecuaciones no lineales (ENL)

Objetivo

Hallar raíces o ceros de una función: f(x)=0 → x?

O en **n** dimensiones: f1(x1,x2,…,xn)=0
f2(x1,x2,…,xn)=0
fn(x1,x2,…,xn)=0 → x1, x2,…xn?

Cuando no se puede despejar **x** → métodos numéricos

Métodos aplicados a 1 variable

- Método de Bisección
- Método de Regula-Falsi (Posición Falsa)

métodos de **arranque**
→ siempre convergen

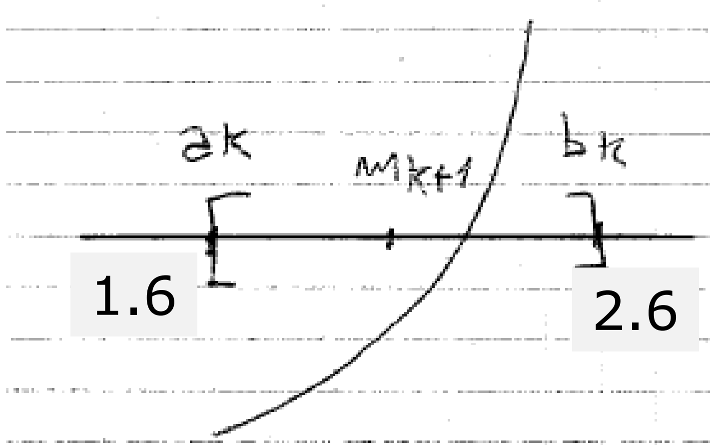
- Método de Punto Fijo
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante

métodos de **convergencia**
→ NO siempre convergen

Ejercicio 3) de la guía 3

3- Sea $F(x) = \frac{x^2}{4} - \operatorname{sen}(x)$. Se desea encontrar la primer raíz positiva de F(x).

a) Hallar un intervalo de partida para utilizar el método de bisección.



F(1.6) = -0.360

F(2.6) = 1.17

¿alcanza solo con esto para asegurar que el intervalo tiene una raíz? ➡ **NO**

$$m_{k+1} = \frac{(b_k + a_k)}{2}$$

b) Estimar el número de aproximaciones necesarias para hallar la raíz con una tolerancia para el error absoluto de 0.02. Calcular la raíz.

Error de truncamiento? $|m_{k+1} - \alpha| \leq \Delta m_{k+1} = \frac{(b_k - a_k)}{2} = \frac{(b_0 - a_0)}{2^{k+1}} = \varepsilon$

$\varepsilon < 0.02$ ➡ $k + 1 > \frac{\ln[(b_0 - a_0)/\varepsilon]}{\ln 2}$ ➡ k > 4.64~**5 iteraciones**

*En los demás métodos esto no se puede anticipar

Ejercicio 3) de la guía 3

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	**Δm/m**
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	**1.92813**	**0.01563**	0.00810

Expresión del resultado para 5 iteraciones:

Δm = 0.02 → **m = 1.93 ± 0.02**

c) Si la tolerancia de 0.02 es sobre el error relativo, cuántas aproximaciones se requieren ?

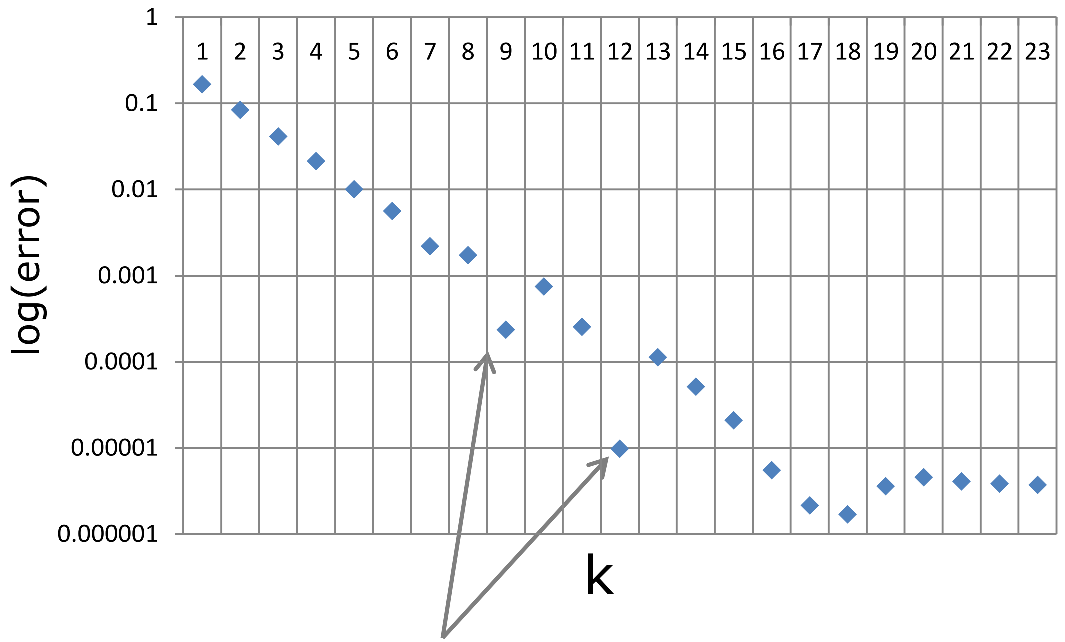
Como quedaría expresado el resultado para 4 iteraciones??

Δm/m = 0.02 → m = 1.94375 ± 0.03125 → **m = 1.94 ± 0.04**

Ejercicio 3) de la guía 3

d) Sabiendo que la raíz buscada a 5 decimales correctos es α=1.93375 obtener conclusiones sobre la performance del método.

k	m	|1.93375 - m|
0	2.1	0.16625
1	1.85	0.08375
2	1.975	0.04125
3	1.9125	0.02125
4	1.94375	0.01000
5	1.92813	0.00563
6	1.93594	0.00219
7	1.93203	0.00172
8	1.93398	0.00023
9	1.93301	0.00074
10	1.93350	0.00025
11	1.93374	0.00001
12	1.93386	0.00011
13	1.93380	0.00005
14	1.93377	0.00002
15	1.93376	0.00001
16	1.93375	0.00000
17	1.93375	0.00000
18	1.93375	0.00000
19	1.93375	0.00000
20	1.93375	0.00000
21	1.93375	0.00000
22	1.93375	0.00000



Iteraciones donde se acerca mas al valor exacto y luego se vuelve a alejar

Ejercicio 3) de la guía 3

e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

Def) si $\lim_{k\to\infty} \dfrac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)^p}} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}\right|}{\left|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\right|^p} = \lambda$, entonces llamamos

λ : constante asintótica del error

p : orden de convergencia

Como no conocemos $\underline{x}$, en lugar del error $\varepsilon^{(k+1)} = \left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}\right|$ usamos la diferencia entre las dos últimas iteraciones $\Delta x^{(k+1)} = \left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right|$, y decimos lo mismo:

$$\frac{\Delta x^{(k+1)}}{\Delta x^{(k)^p}} = \frac{\left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right|}{\left|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}\right|^p} = \lambda \text{ (en escala log es una recta)}$$

Despejando: $p = \dfrac{\ln\left(\Delta x^{(k+1)} / \Delta x^{(k)}\right)}{\ln\left(\Delta x^{(k)} / \Delta x^{(k-1)}\right)}$ (el método tiene que estar convirgiendo)

Ejercicio 3) de la guía 3

e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$	λ	p
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810		
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514		
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329	0.5	1
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268	0.5	1
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**	0.5	1
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	1.92813	**0.01563**	0.00810	0.5	1

Cálculo del orden de convergencia **p** y la tasa **λ** para la iteración **k=2**:

$$\Delta x^{(k+1)} = \left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| = \left|x^{(3)} - x^{(2)}\right| = |1.9125 - 1.975| = 0.0625$$

$$\Delta x^{(k)} = \left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| = \left|x^{(2)} - x^{(1)}\right| = |1.975 - 1.85| = 0.125$$

$$\Delta x^{(k-1)} = \left|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\right| = \left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = |1.85 - 2.1| = 0.25$$

$$p = \frac{\ln\left(\Delta x^{(k+1)}/\Delta x^{(k)}\right)}{\ln\left(\Delta x^{(k)}/\Delta x^{(k-1)}\right)} = \frac{\ln(0.0625/0.125)}{\ln(0.125/0.25)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.5)} = 1$$

$$\lambda = \frac{\Delta x^{(k+1)}}{\left(\Delta x^{(k)}\right)^p} = \frac{0.0625}{(0.125)^1} = 0.5$$

En el Método de Bisección el orden de convergencia **p es exactamente 1** y la tasa **λ = 0.5** en todas las iteraciones.

Ejercicio 3) de la guía 3

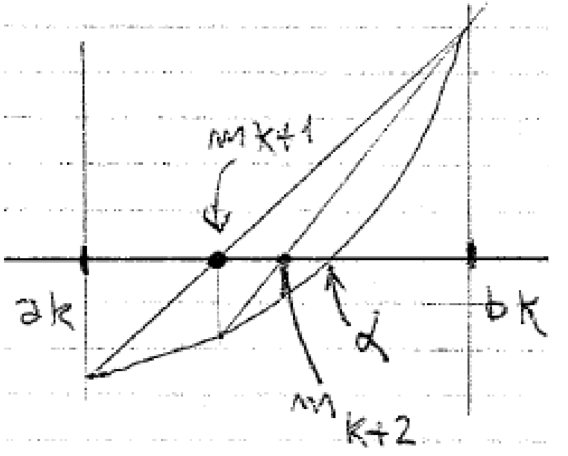
e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$	λ	p
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810		
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514		
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329	0.5	1
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268	0.5	1
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**	0.5	1
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	1.92813	**0.01563**	0.00810	0.5	1
6	1.92813	1.94375	-0.01	0.01	1.93594	0.00781	0.00404	0.5	1
7	1.92813	1.93594	-0.01	0.00	1.93203	0.00391	0.00202	0.5	1
8	1.93203	1.93594	0.00	0.00	1.93398	0.00195	0.00101	0.5	1
9	1.93203	1.93398	0.00	0.00	1.93301	0.00098	0.00051	0.5	1
10	1.93301	1.93398	0.00	0.00	1.93350	0.00049	0.00025	0.5	1
11	1.93350	1.93398	0.00	0.00	1.93374	0.00024	0.00013	0.5	1
12	1.93374	1.93398	0.00	0.00	1.93386	0.00012	0.00006	0.5	1
13	1.93374	1.93386	0.00	0.00	1.93380	0.00006	0.00003	0.5	1
14	1.93374	1.93380	0.00	0.00	1.93377	0.00003	0.00002	0.5	1
15	1.93374	1.93377	0.00	0.00	1.93376	0.00002	0.00001	0.5	1
16	1.93374	1.93376	0.00	0.00	1.93375	0.00001	0.00000	0.5	1
17	1.93375	1.93376	0.00	0.00	**1.93375**	0.00000	0.00000		

Se requieren **17 iteraciones** para lograr la precisión de 5 decimales.

Ejercicio 4) de la guía 3

4- Utilizar el método de Regula-Falsi para hallar la raíz del ejercicio 3. Realice varias aproximaciones, con el objeto de poder estimar experimentalmente el orden de convergencia del método. Compare sus resultados con los del ej. 3.



Método de Regula-Falsi:

$m_{k+1} = a_k - (b_k - a_k)*f(a_k)/(f(b_k) - f(a_k))$

luego **evaluar $f(m_{k+1})$** para elegir el próximo intervalo (ídem bisección).

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$	λ	orden
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	1.83439				
1	1.83439	2.6	-0.12	1.17	1.90762	0.07322	0.038385		
2	1.90762	2.6	-0.03	1.17	1.92713	**0.01951**	**0.010126**	0.29	1.03546
3	1.92713	2.6	-0.01	1.17	1.93209	0.00496	0.002568	0.26	1.00898
4	1.93209	2.6	0.00	1.17	1.93334	0.00125	0.000645	0.25	1.00225
5	1.93334	2.6	0.00	1.17	1.93365	0.00031	0.000161	0.25	1.00056
6	1.93365	2.6	0.00	1.17	1.93373	0.00008	4.04E-05	0.25	1.00014
7	1.93373	2.6	0.00	1.17	1.93375	0.00002	1.01E-05	0.25	1.00004
8	1.93375	2.6	0.00	1.17	**1.93375**	0.00000	2.53E-06		

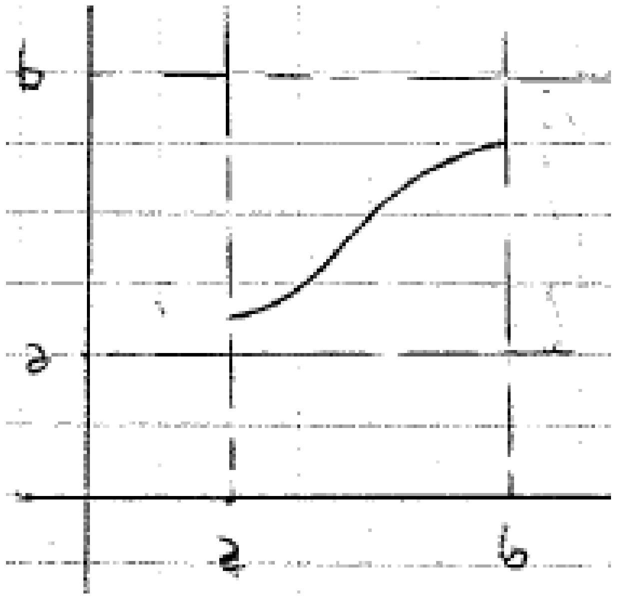
Se necesitaron **8 iteraciones** para llegar al valor exacto con 5 decimales, mientras que en el método de bisección se necesitaron 17. Si bien el orden de convergencia es prácticamente el mismo, la tasa **λ** es aproximadamente la mitad respecto de bisección.

Método de Punto Fijo

x_p es punto fijo de una función g(x) si g(**x_p**)=**x_p**

Si g(x) = x – f(x) entonces **x_p** es punto fijo de g y **raíz de f**

Condiciones



Si g(x) ε [a,b] para todo x ε [a,b] → entonces g tiene un punto fijo en [a,b]

Si |g'(x)|<1 para todo x ε [a,b] → entonces el punto fijo es único.

Para nuestro ejercicio:

$$g(x) = x - (x^2/4 - \mathrm{sen}(x)) \rightarrow \quad X_{k+1} = x_k - (x_k^2/4 - \mathrm{sen}(x_k))$$

otra G posible:

$$g(x) = 2\, \mathrm{sen}(x)^{1/2}$$

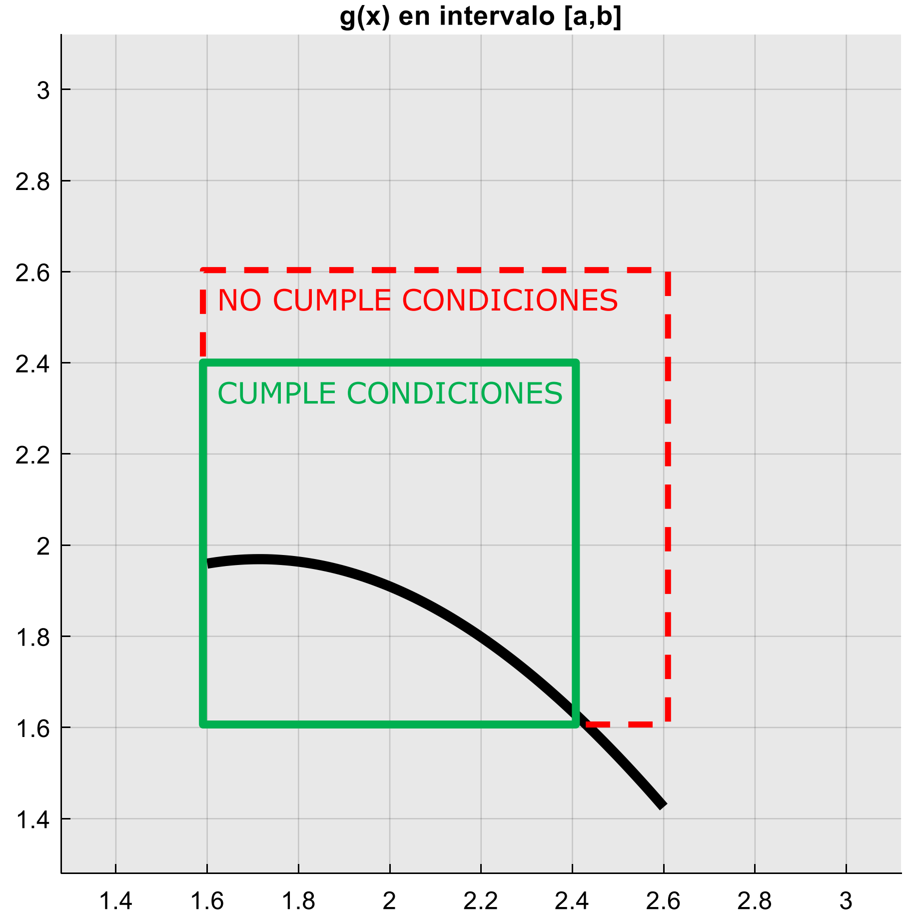
Para comenzar se elige una semilla **x_k** perteneciente al intervalo [a,b] encontrado que satisfaga los supuestos.

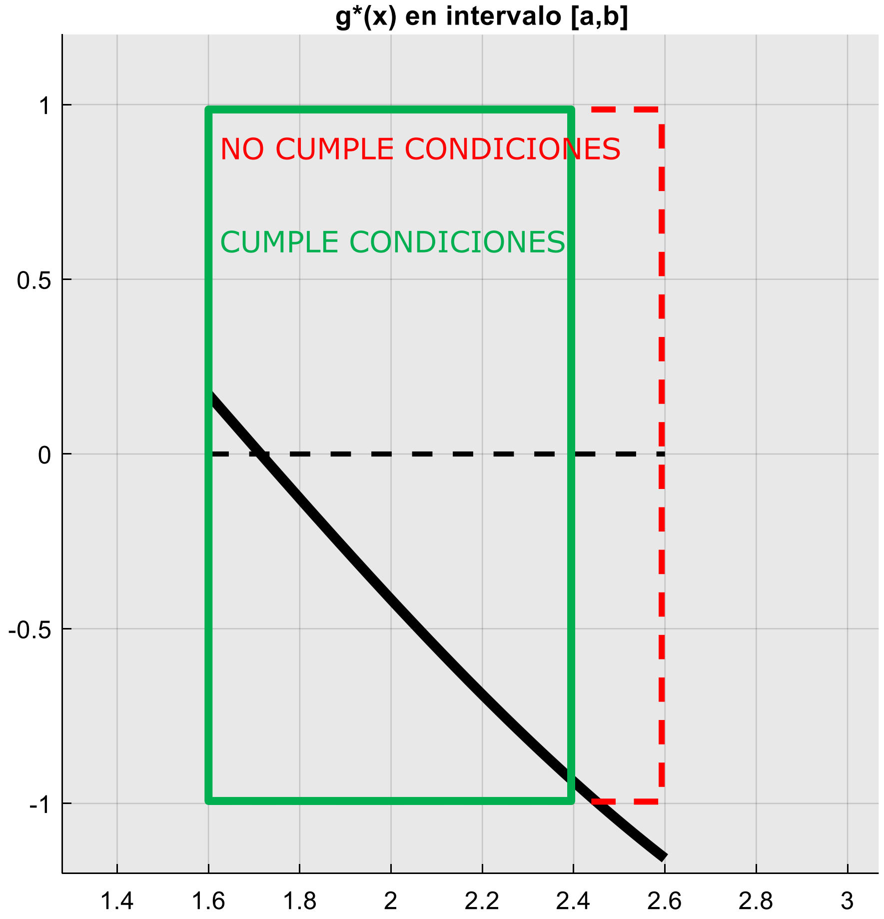
Método de Punto Fijo

Selección del intervalo [a.b] y elección de la semilla **xk**. Veníamos trabajando con el intervalo [a,b] = [1.6,2.6]:

$g(x) = x - (x^2/4 - sen(x))$

$g'(x) = 1 - (x/2 - cos(x))$





Método de Punto Fijo

$g(x) = x - (x^2/4 - \text{sen}(x))$

$X_{k+1} = x_k - (x_k^2/4 - \text{sen}(x_k))$

Ejemplo para k=0:

$X_1 = x_0 - (x_0^2/4 - \text{sen}(x_0))$

$X_1 = 1.6 - (1.6^2/4 - \text{sen}(1.6)) =$ **1.95957**

k	X_k	$\Delta X = \|x_k - x_{k-1}\|$	$\Delta X / X_k$	λ	p
0	1.6				
1	$\boxed{1.95957}$	0.35957	0.18679		
2	1.92496	0.03461	**0.01787**	0.056	0.468
3	1.93653	**0.01156**	0.00598	0.390	1.046
4	1.93286	0.00367	0.00190	0.297	0.985
5	1.93404	0.00119	0.00061	0.332	1.005
6	1.93366	0.00038	0.00020	0.318	0.998
7	1.93378	0.00012	0.00006	0.323	1.001
8	1.93374	0.00004	0.00002	0.321	1.000
9	1.93376	0.00001	0.00001	0.322	1.000
10	1.93375	0.00000	0.00000	0.322	1.000

Método de Newton-Raphson

Se lo puede considerar como un caso particular del Método de Punto Fijo:

$$X_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

Para nuestro caso:

$$X_{k+1} = x_k - (\ x_k^2/4 - \mathrm{sen}(x_k)\ )\ /\ (\ x_k/2 - \cos(x_k))$$

Siendo un Método de Punto Fijo se necesita una semilla que esté lo suficientemente cerca de la raíz (debiendo cumplir las condiciones sobre g y g'):

k	X_k	$\Delta X = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	$\Delta X/X_k$	λ	p
0	1.6				
1	2.03364	0.43364	0.22369		
2	1.93856	0.09508	**0.04917**	0.493	1.969
3	1.93377	**0.00479**	0.00248	0.520	1.992
4	1.93375	0.00001	0.00001	0.542	2.000
5	**1.93375**	0.00000	0.00000		

Observar orden de convergencia ~ 2

Desventajas del método?
Requiere evaluar la derivada primera
en cada iteración → que se puede hacer?

Método de la Secante (ejercicio 25)

Se aproxima la derivada primera en el método de Newton-Raphson por una recta secante entre 2 puntos.

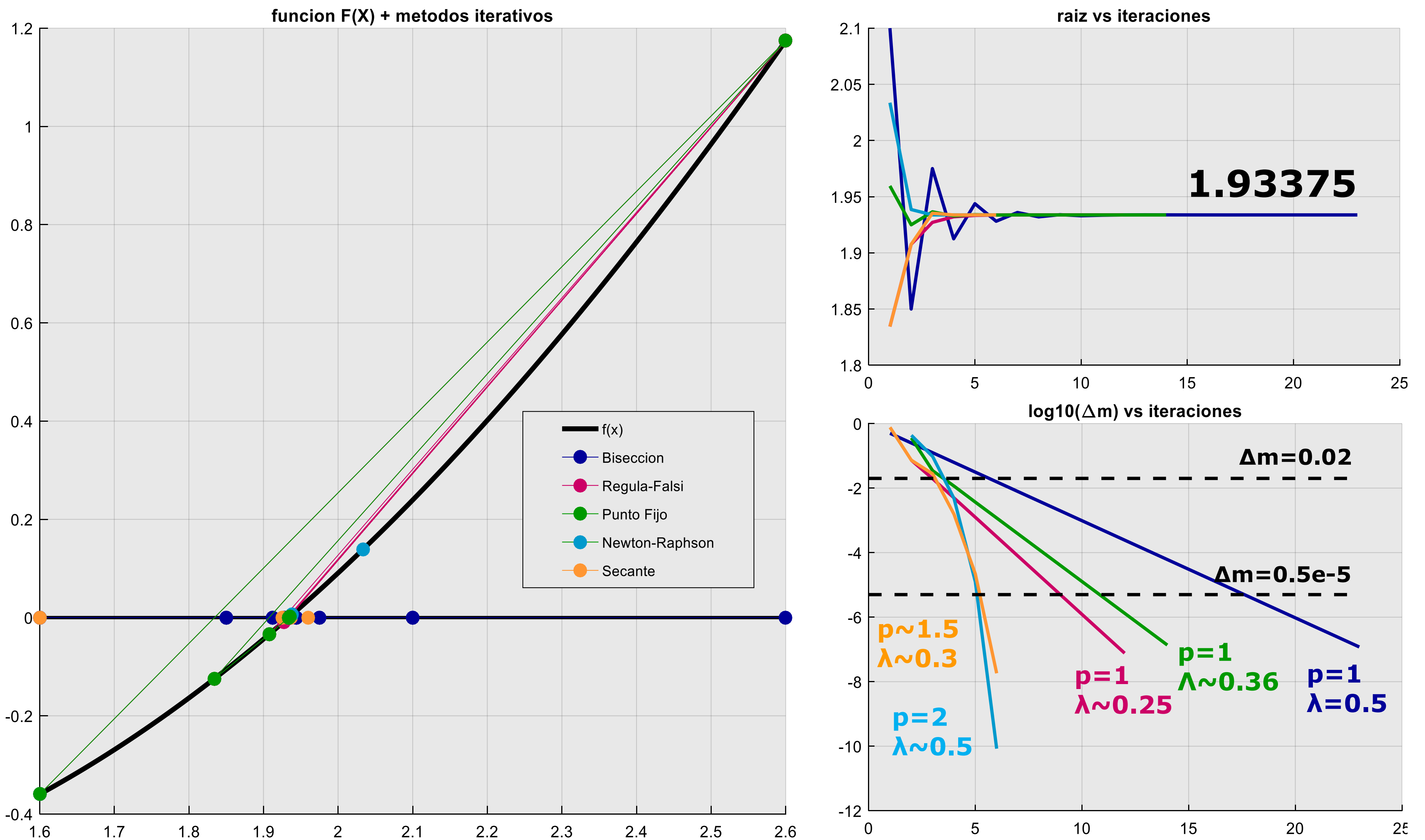
$$X_{k+1} = x_k - f(x_k) * (x_k - x_{k-1}) / (f(x_k)-f(x_{k-1}))$$

Se necesitan 2 puntos de arranque. NO es necesario que encierren a la raíz como en Bisección y Regula-Falsi.

k	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	$\Delta m=\lvert X_{k+1}-X_k \rvert$	$\Delta m/m$	λ	p
0	1.6	2.6	1.83439	0.76561	0.41736		
1	2.6	1.83439	1.90762	0.07322	0.03839	0.082	0.415
2	1.83439	1.90762	1.93528	0.02767	**0.01430**	63.619	2.961
3	1.90762	1.93528	1.93373	**0.00155**	0.00080	0.310	1.477
4	1.93528	1.93373	1.93375	0.00002	0.00001	1.064	1.667
5	1.93373	1.93375	**1.93375**	0.00000	0.00000		

Observar orden de convergencia entre 1 y 2 (método superlineal)

Resumen



funcion F(X) + metodos iterativos
f(x)
Biseccion
Regula-Falsi
Punto Fijo
Newton-Raphson
Secante
raiz vs iteraciones
1.93375
log10(Δm) vs iteraciones
Δm=0.02
Δm=0.5e-5
p~1.5
λ~0.3
p=2
λ~0.5
p=1
λ~0.25
p=1
Λ~0.36
p=1
λ=0.5