

Sistemas de ecuaciones no lineales (SENL)

Objetivo

Hallar raíces o ceros de un sistema de ecuaciones:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2, \dots, x_n?$$

En principio se pueden aplicar los mismos métodos vistos para 1 variable.

Aplicaciones conocidas?

- Extremos locales en 2 variables
- Intersección de funciones

Ejercicio

Calcular la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método de Newton-Raphson.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} = 1 - \frac{y^2}{4} \\ 2x + 5y = 10 \end{cases} \rightarrow x, y?$$

Sistema de 2 ecuaciones
con 2 incógnitas. Cuántas
soluciones tiene?

Aplicamos el mismo concepto que para 1 variable:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow \bar{G}(\bar{x}) = \bar{x} - \underbrace{\frac{\bar{F}(\bar{x})}{\bar{F}'(\bar{x})}}_{\substack{\text{matriz} \\ \text{jacobiana}}} = \bar{x} - \bar{J}(\bar{x})^{-1} \bar{F}(\bar{x})$$
$$\rightarrow \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k) \quad J_{ij} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]$$

Ejercicio

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{25} = 1 - \frac{y^2}{4} \\ 2x + 5y = 10 \end{array} \right. \rightarrow \bar{F}(\bar{x}) \text{ y } \bar{J}(\bar{x})? \rightarrow \begin{array}{l} f_1(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - 1 \\ f_2(x, y) = 2x + 5y - 10 \end{array}$$

Queremos encontrar la solución a: $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{array} \right.$

Matriz Jacobiana:

$$\bar{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{25} & \frac{y}{2} \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Semilla? Ahora es un vector $[x_0, y_0]$

Ejercicio

Supongamos $[x_0, y_0] = [2, 2]$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k) \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2x_k}{25} & \frac{y_k}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_k, y_k) \\ f_2(x_k, y_k) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2x_0}{25} & \frac{y_0}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4.16 & 0.83 \\ 1.66 & -0.13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.16 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.66 \\ 2.26 \end{bmatrix}$$

Resultados NR

Resultados luego de iterar con $[x_0, y_0] = [2, 2]$:

k	x_k	y_k	$\Delta x = x_k - x_{k-1} $	$\Delta y = y_k - y_{k-1} $	$\Delta x / x_k$	$\Delta y / y_k$	λ_1	λ_2	p_1	p_2
0	2	2								
1	-0.66667	2.26667	2.66667	0.26667	38	0.13149				
2	-0.07018	2.02807	0.59649	0.23860	623	0.11928	0.14553	3.11E+10	1.425	19.36
3	-0.00096	2.00038	0.06922	0.02769	377222	0.01384	0.19327	0.47759	1.987	1.987
4	-1.8E-07	2	0.00096	0.00038	1.36271E+11	0.00019	0.19988	0.49965	1.999	1.999
5	-7E-15	2	1.83E-07	7.34E-08	499138130.5	3.66985E-08	0.20177	0.50500	2.001	2.001
6	-3.7E-16	2	6.66E-15	2.66E-15	18.12022681	1.33227E-15			65535	65535
7	-3.7E-16	2	0	0	0	0				

¿Cuál fue el criterio de corte?

¿Qué sucede con la columna $\Delta x / x_k$?

¿Qué sucede con la columna y_k ?

Resultados NR

Resultados para la semilla $[x_0, y_0] = [1, 2]$

k	x_k	y_k	$\Delta x = x_k - x_{k-1} $	$\Delta y = y_k - y_{k-1} $	$\Delta x / x_k$	$\Delta y / y_k$	λ_1	λ_2	ρ_1	ρ_2
0	1	2								
1	-0.125	2.05	1.125	0.05	378	0.024985				
2	-0.00298	2.00119	0.122024	0.04881	68962	0.024405	0.100211	1.6E+199	1.672052	154.1305
3	-1.8E-06	2.000001	0.002974	0.00119	4.75E+09	0.000595	0.199628	0.498923	1.99968	1.99968
4	-6.3E-13	2	1.77E-06	7.08E-07	5.2E+09	3.54E-07	0.200226	0.50001	2.000194	2.000003
5	-3.4E-16	2	6.25E-13	2.5E-13	1838.327	1.25E-13			65535	65535
6	-3.4E-16	2	0	0	0	0				

Se llegó a la misma solución en aproximadamente la misma cantidad de iteraciones

Resultados NR

Resultados para la semilla $[x_0, y_0] = [4, 1]$

k	x_k	y_k	$\Delta x = x_k - x_{k-1} $	$\Delta y = y_k - y_{k-1} $	$\Delta x / x_k$	$\Delta y / y_k$	λ_1	λ_2	ρ_1	ρ_2
0	4	1								
1	7.416667	-0.966667	3.416667	1.966667	0.610781	8.27824				
2	5.593927	-0.23757	1.82274	0.729096	0.360439	31.97417	0.167007	0.316	1.945	1.231
3	5.057007	-0.0228	0.53692	0.214768	0.10737	844.9293	0.177467	0.384	1.844	1.844
4	5.000635	-0.00025	0.056371	0.022548	0.011274	698167	0.194342	0.481	1.990	1.990
5	5	-3.2E-08	0.000635	0.000254	0.000127	3.03E+11	0.199917	0.499	1.999	1.999
6	5	-8.4E-16	8.07E-08	3.23E-08	1.61E-08	6.46E+08	0.155175	0.305	1.965	1.940
7	5	5E-17	1.78E-15	8.88E-16	3.55E-16	17.76901			65535	65535
8	5	5E-17	0	0	0	0				

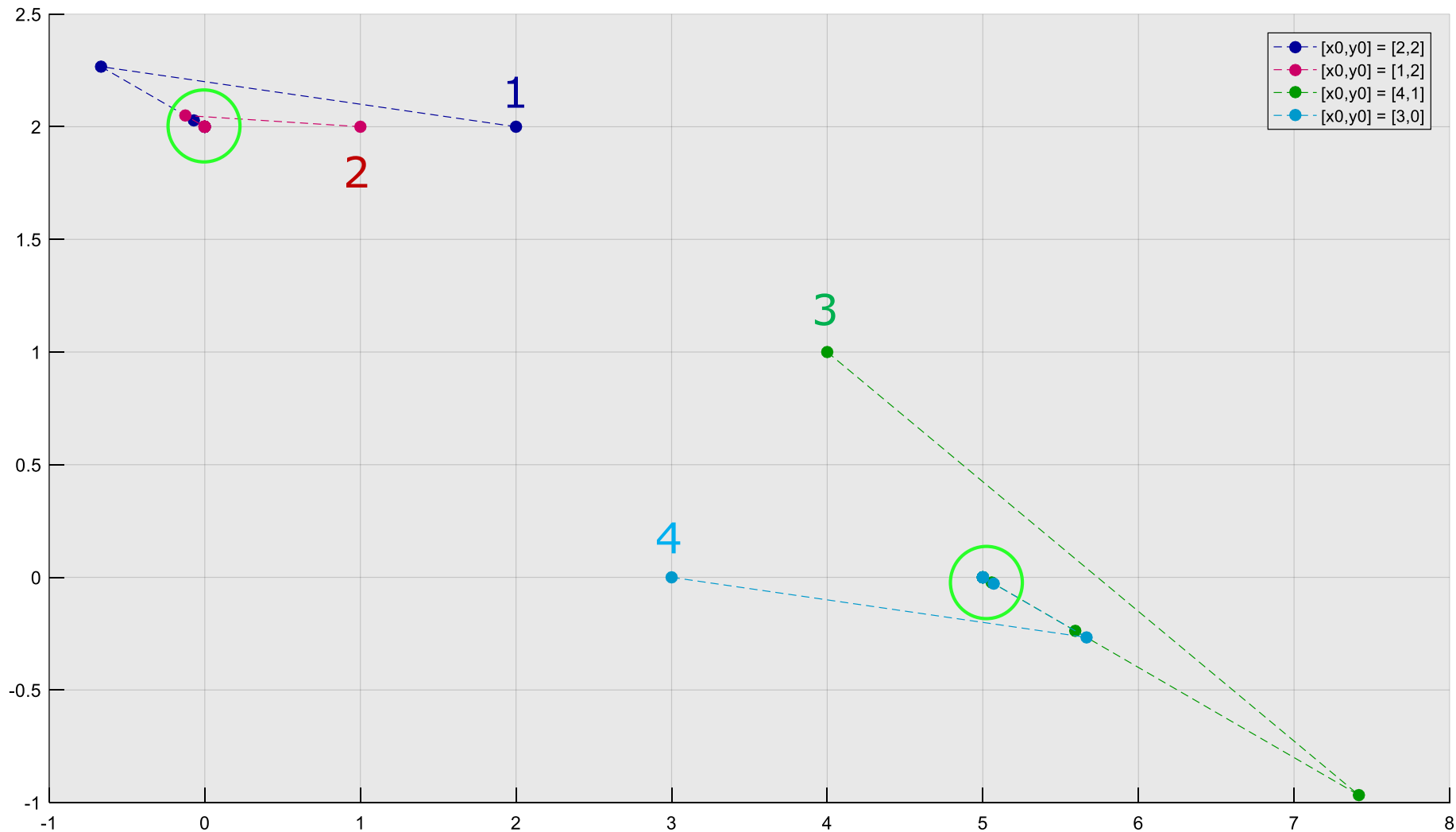
Se llegó una solución diferente del $[0, 2]$

Por qué sucede esto?

- En SENL puede haber única solución, mas de 1 solución, así como también que no exista solución. Explicación geométrica?

Resultados NR

Evolución de cada semilla según la iteración.



Método de Punto Fijo

Cual es el jacobiano J en el método de punto fijo?

En Newton Raphson:

$$\rightarrow \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k)$$

matriz
jacobiana

$$\bar{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

En Punto Fijo:

$$\rightarrow \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k)$$

matriz
jacobiana

$$\bar{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es la única opción?

Ventajas y desventajas?

Resultados PF – caso A

Aplicamos la forma clásica de punto fijo al sistema resuelto anteriormente:

$$\rightarrow \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k) \quad \begin{array}{l} \text{matriz} \\ \text{jacobiana} \end{array} \quad \bar{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultados luego de iterar con $[x_0, y_0] = [2, 2]$:


k	x_k	y_k	$\Delta x = x_k - x_{k-1} $	$\Delta y = y_k - y_{k-1} $	$\Delta x/x_k$	$\Delta y/y_k$	λ_1	λ_2	p_1	p_2
0	2	2								
1	1.84	-2	0.16	4	0.093865	0.27933				
2	1.704576	14.32	0.135424	16.32	0.002782	0.321962	7.64E-30	4.177529	-35.4933	0.98296
3	-48.6772	-50.6892	50.38182	65.00915	0.064197	0.209632	124.6481	2.038206	0.45308	1.239962
4	-784.804	310.1111	736.1265	360.8003	0.014882	1.063796	1.608117	166837.3	1.562989	-1.46997
5	-49462.7	339.1631	48677.9	29.052	0.000497	0.000298	0.305297	5.03E+09	1.814683	-3.22155
6	-9.8E+07	97578.76	97891125	97239.59	2.55E-07	0.000497	0.043186	4136.747	1.99589	0.937129
7	-3.8E+14	1.95E+08	3.84E+14	1.95E+08	6.52E-14	2.55E-07				

No converge

Resultados PF – Caso B

Aplicamos punto fijo con otro jacobiano:

Al azar?


 $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \bar{J}(\bar{x}_k)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k)$
matriz jacobiana
 $\bar{J}(x, y) = \begin{bmatrix} -4 & 0.8 \\ 1.6 & -0.1 \end{bmatrix}$

Resultados luego de iterar con $[x_0, y_0] = [2, 2]$:

k	x_k	y_k	$\Delta x = x_k - x_{k-1} $	$\Delta y = y_k - y_{k-1} $	$\Delta x / x_k$	$\Delta y / y_k$	λ_1	λ_2	ρ_1	ρ_2
0	2	2								
1	-0.56	2.144	2.56	0.144	6.291287	0.078039				
2	0.4069	1.845235	0.966912	0.298765	4.991733	0.143866	0.61058	0.151674	0.489038	-0.34982
3	-0.1937	2.076681	0.600615	0.231446	4.688459	0.118761	0.627692	3.838811	1.3105	2.324787
4	0.1281	1.948838	0.321808	0.127843	4.493286	0.063019	0.475169	0.408589	0.764447	0.793973

25	-2.7E-06	2.000001	7.14E-06	2.85E-06	4.444445	1.43E-06	0.600035	0.600037	1.000005	1.000005
26	1.61E-06	1.999999	4.28E-06	1.71E-06	4.444444	8.56E-07	0.599978	0.599977	0.999997	0.999997
27	-9.6E-07	2	2.57E-06	1.03E-06	4.444445	5.14E-07	0.600014	0.600015	1.000002	1.000002
28	5.78E-07	2	1.54E-06	6.17E-07	4.444444	3.08E-07	0.599992	0.599991	0.999999	0.999999
29	-3.5E-07	2	9.25E-07	3.7E-07	4.444444	1.85E-07				

Resultados PF – caso B

Evolución de cada semilla según la iteración.

