PVI: PROBLEMAS DE VALORES INICIALES.

Primera parte: métodos de paso simple

Autor: Alderete, Iván Martín – Mail: ialderete@fi.uba.ar

Muchos problemas presentes en Ingeniería pueden ser representados por ecuaciones diferenciales ordinarias como, por ejemplo:

- Un circuito de tipo LR, siendo la corriente en función del tiempo ($i(t)$) su incógnita:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V$$

- La transmisión de calor en 1D, en donde no se conoce la dependencia de la temperatura con la posición en el eje x ($T(x)$):

$$q = -kA\frac{dT}{dx}$$

- El movimiento oscilatorio de un péndulo, ejemplo típico de Física I:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} * sen(\theta)$$

Un PVI o problema de valores iniciales es una ecuación diferencial ordinaria de cuya solución particular se conoce un valor inicial. Para el primero de los ejemplos podríamos conocer cuál es el valor de la corriente a tiempo inicial, es decir $i(t_0) = i_0$. A continuación, se van a mostrar ejemplos de este tipo de problemas, resueltos a partir de métodos numéricos.

1. **PROBLEMA:**

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} y' = -y + t^2 + 2t - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución analítica es $y(t) = 2e^{-t} + t^2 - 2$. Vamos a resolver este sistema en el intervalo [0, 2] por métodos numéricos, utilizando pasos de avance de 0,4; 0,2 y 0,1.

Para su resolución vamos a seguir una serie de pasos:

- DISCRETIZAR LA VARIABLE INDEPENDIENTE: en este problema, esta variable es el tiempo. Dado el paso h podemos aproximar el tiempo a:

$$t^{(n)} \approx nh$$

- DISCRETIZAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL: definamos a la solución obtenida por métodos numéricos como u, de forma tal que $y(t^{(n)}) = y^{(n)} \approx u^{(n)}$. Luego, su derivada, y', se aproximará de alguna forma vista en las clases de Diferenciación.
- DISCRETIZAR LA CONDICIÓN INICIAL: esto es $y(t_0) = y_0 = u^{(0)}$. Para este problema en particular, $y(0) = u^{(0)} = 0$

a. **MÉTODO DE EULER EXPLÍCITO:**

Este método utiliza una aproximación de la derivada con dos puntos en atraso, dejándonos que:

$$y' = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y^{(n+1)} - y^{(n)}}{t^{(n+1)} - t^{(n)}}$$

En el numerador:

$$y^{(n+1)} - y^{(n)} \approx u^{(n+1)} - u^{(n)}$$

Y en el denominador:

$$t^{(n+1)} - t^{(n)} \approx (n+1)h - nh = h$$

Por lo cual:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{h}$$

Reemplazando esta discretización y las anteriores en la ecuación diferencial vamos a obtener:

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{h} = -u^{(n)} + (nh)^2 + 2nh - 2$$

Y si despejamos $u^{(n+1)}$:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n)} + (nh)^2 + 2nh - 2\right]$$

En general, dado $y' = f(y(t), t)$, el método de Euler simplificado nos va a devolver la siguiente sucesión de puntos:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * f(u^{(n)}, t^{(n)})$$

Notemos que si definimos el paso h (dato del ejercicio) y la discretización del valor inicial podemos conocer el valor de $u^{(1)}$, correspondiente a la aproximación de $y^{(1)} = y(t^{(1)})$. Y continuando con esta misma lógica podemos obtener $u^{(2)}$ a partir de $u^{(1)}$, $u^{(3)}$ en función de $u^{(2)}$… En este primer paso, dado $n = 0$:

$$u^{(1)} = u^{(0)} + h * \left[-u^{(0)} + (0h)^2 + 2 * 0h - 2\right]$$

Para cada uno de los pasos mencionados en el enunciado:

$$u^{(1)}(h = 0{,}4) = 2$$
$$u^{(1)}(h = 0{,}2) = 1{,}2$$
$$u^{(1)}(h = 0{,}1) = 1{,}1$$

Las aproximaciones obtenidas se perciben distintas, pero esto es en principio porque cada valor obtenido representa a la función en distintos valores temporales. Es decir que $u^{(1)}(h = 0{,}4)$ representaría a $y(t = 0{,}4)$, $u^{(1)}(h = 0{,}2)$ lo hace con $y(t = 0{,}2)$ y, por último, $u^{(1)}(h = 0{,}1)$ es la aproximación de y para $t = 0{,}1$. Para comparar valores puntuales debemos continuar con las operaciones. Dado que completar el intervalo nos llevaría muchas cuentas para los pasos más chicos, se mostrará una tabla completa para $h = 0{,}4$ y, para los otros pasos, los valores de u para tiempos en común en los tres pasos: $t = \{0;\ 0{,}4; 0{,}8; 1{,}2; 1{,}6;\ 2\}$. Como anexo a este apunte, agrego las tablas completas.

h	0,4				
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$	$y(t^{(n+1)})$	ε
0	0	0	-0,8	-0,49935991	-0,30064009
1	0,4	-0,8	-0,896	-0,46134207	-0,43465793
2	0,8	-0,896	-0,4416	0,04238842	-0,48398842
3	1,2	-0,4416	0,47104	0,96379304	-0,49275304
4	1,6	0,47104	1,786624	2,27067057	-0,48404657
5	2	1,786624	3,4719744	3,94143591	-0,46946151

TABLA 1: Método de Euler para paso de cálculo $h = 0{,}4$

h	0,4		h	0,2		h	0,1	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,4	-0,8	2	0,4	-0,632	4	0,4	-0,56219
2	0,8	-0,896	4	0,8	-0,65888	8	0,8	-0,55601886
3	1,2	-0,4416	6	1,2	-0,1832832	12	1,2	-0,06689797
4	1,6	0,47104	8	1,6	0,72909875	16	1,6	0,84913424
5	2	1,786624	10	2	2,0362232	20	2	2,15531097

TABLA 2: Puesta en común del método de Euler para cada paso de cálculo en valores particulares.

Analicemos esta última tabla, y hagamos una puesta en común entre esto y la solución analítica. A continuación, se muestra un gráfico con los puntos obtenidos por el método de Euler a cada paso, y la solución analítica.

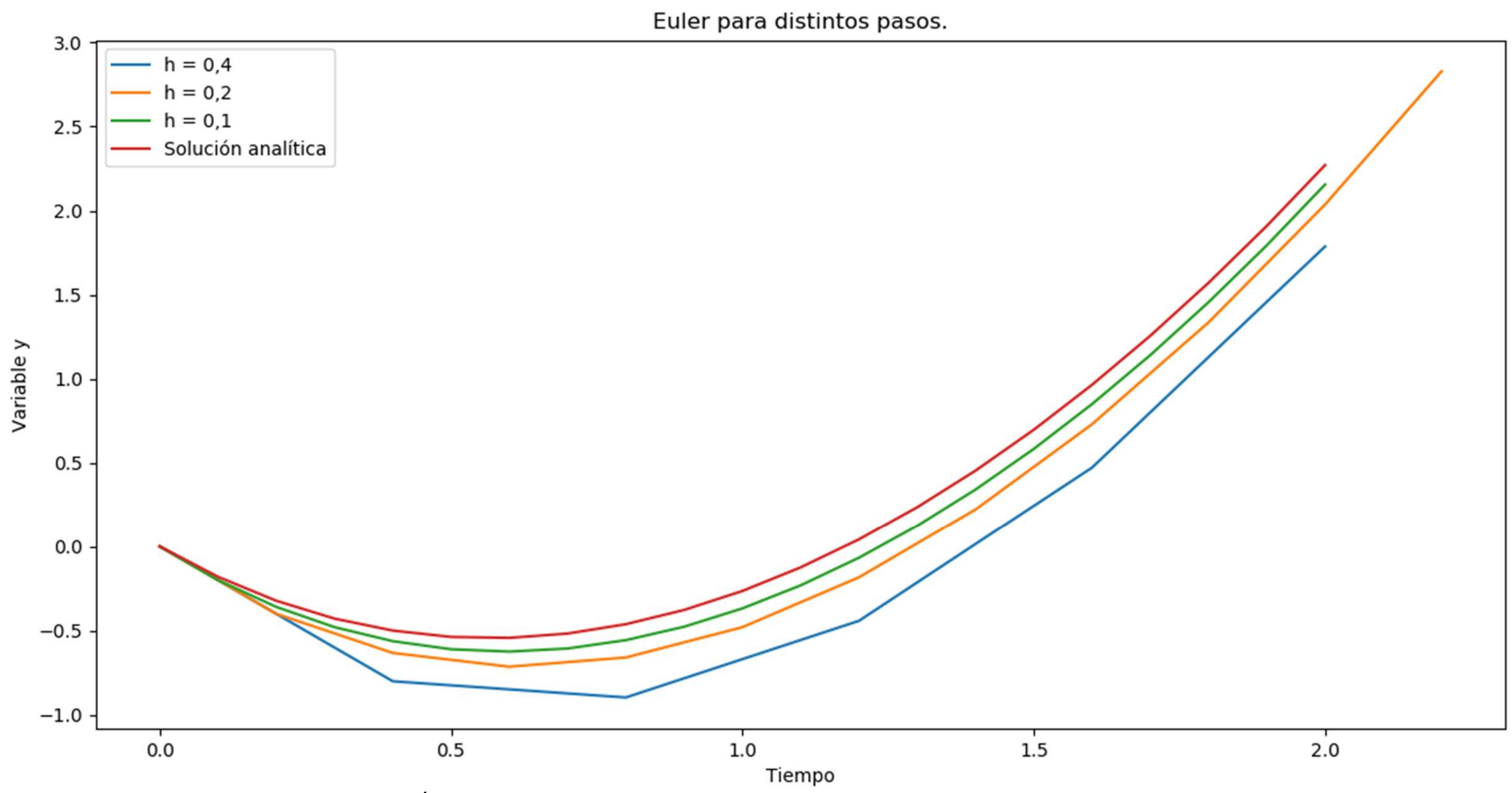

GRÁFICO 1: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Euler

Al parecer las aproximaciones se comportan de acuerdo con la función solución. ¿Qué ocurre si $n \to \infty$? ¿Para cualquier paso de cálculo las soluciones se van a comportar de esta forma? Notemos además que el error global en cada punto parece ser constante a medida que avanzamos en n, por lo cual podríamos decir que el método es estable. Para un método que es estable, los errores por las aproximaciones se van atenuando a medida que se avanza en los cálculos. Veamos entonces si esto es así, y si se cumple para cualquier paso que uno elija. Se realiza entonces un análisis de estabilidad para el método en cuestión. Vamos a aplicar perturbaciones de la siguiente forma a las discretizaciones de y:

$$u^{(n)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)}$$
$$u^{(n+1)} = u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)}$$

Tomamos estas perturbaciones y las llevamos a la ecuación en diferencias:

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[-(u^{(n)} + \delta u^{(n)}) + (nh)^2 + 2 * (nh) - 2\right]$$

Agrupando convenientemente, el término en azul es equivalente a $u^{(n+1)}$:

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n)} + (nh)^2 + 2nh - 2\right] + \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n)}$$
$$\delta u^{(n+1)} = \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n)}$$

De la expresión anterior despejamos $\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}}$, que lo definimos como factor de amplificación:

$$\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}} = 1 - h$$

Para que los errores en $n+1$ sean menores a los de n debemos pedir que esta relación sea menor a 1 en módulo:

$$\left|\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}}\right| < 1 \Rightarrow |1-h| < 1$$

Esta condición solo se cumple si $0 < h < 2$. Veamos qué ocurre si continuamos encontrando soluciones por este método en el intervalo $[0;\ 10]$, agregando ahora como paso de cálculo $h = 2$:

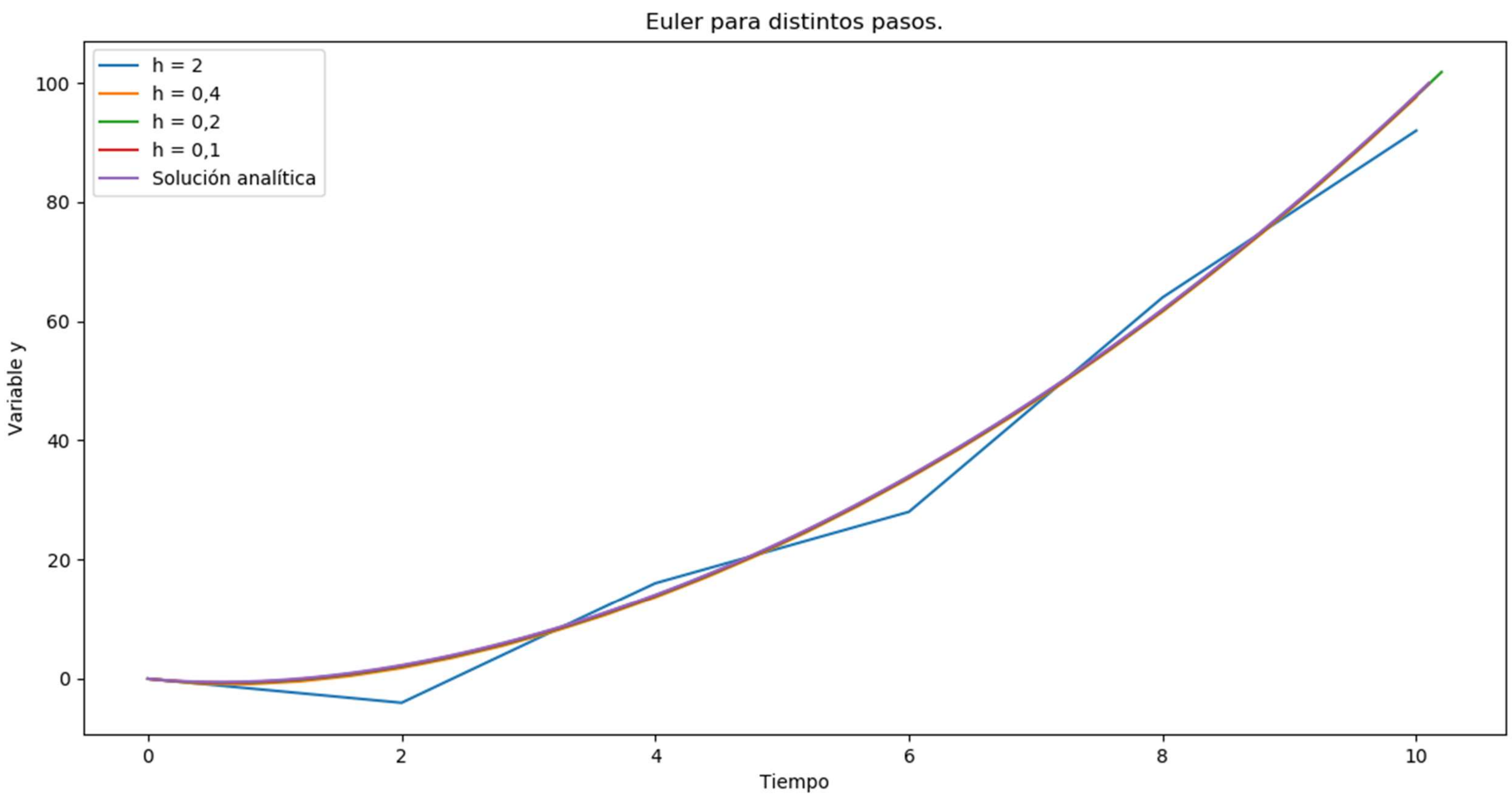

GRÁFICO 2: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Euler, aumentando el intervalo de trabajo y añadiendo $h = 2$

El comportamiento de la curva azul es típico de una inestabilidad, y si calculamos los errores globales para este paso de cálculo podemos notar que estos no se atenúan al avanzar en n.

En conclusión, el método de Euler es un método explícito, dado que $u^{(n+1)} = f(u^{(n)}) \neq f(u^{(n+1)})$, y todo método explícito requiere de análisis de estabilidad, para obtener los valores de h para los cuales el sistema es estable.

b. MÉTODO DE EULER IMPLÍCITO:

Este método es idéntico a Euler implícito, con diferencias en el segundo término:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * f(u^{(n+1)},\ t^{(n+1)})$$

Esto agrega una complicación a los cálculos: si $f(u^{(n+1)},\ t^{(n+1)})$ no depende linealmente de $u^{(n+1)}$, es necesario recurrir a métodos de resolución de ecuaciones no lineales para conseguir $u^{(n+1)}$. Notemos que eso en este ejemplo particular no es necesario, dado que podemos despejar a $u^{(n+1)}$:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[-u^{(n+1)} + ((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$
$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - hu^{(n+1)} + h * [((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2]$$
$$u^{(n+1)}(1+h) = u^{(n)} + h * [((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2]$$
$$u^{(n+1)} = \frac{u^{(n)} + h * [((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2]}{1+h}$$

De igual forma que antes, calculamos los valores de u en el intervalo $[0;\ 2]$

	h	0,4	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	0	0	-0,29714286
1	0,4	-0,29714286	-0,14367347
2	0,8	-0,14367347	0,42309038
3	1,2	0,42309038	1,37649313
4	1,6	1,37649313	2,69749509
5	2	2,69749509	4,37249649

TABLA 3: Método de Euler implícito para paso de cálculo $h = 0{,}4$

h	0,4		h	0,02		h	0,1	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,4	-0,29714286	2	0,4	-0,39	4	0,4	-0,44227443
2	0,8	-0,14367347	4	0,8	-0,29194444	8	0,8	-0,37363598
3	1,2	0,42309038	6	1,2	0,24281636	12	1,2	0,14539855
4	1,6	1,37649313	8	1,6	1,17862247	16	1,6	1,07349536
5	2	2,69749509	10	2	2,49071005	20	2	2,38242289

TABLA 4: Puesta en común del método de Euler implícito para cada paso de cálculo en valores particulares.

El comportamiento gráfico de las soluciones obtenidas se ven a continuación:

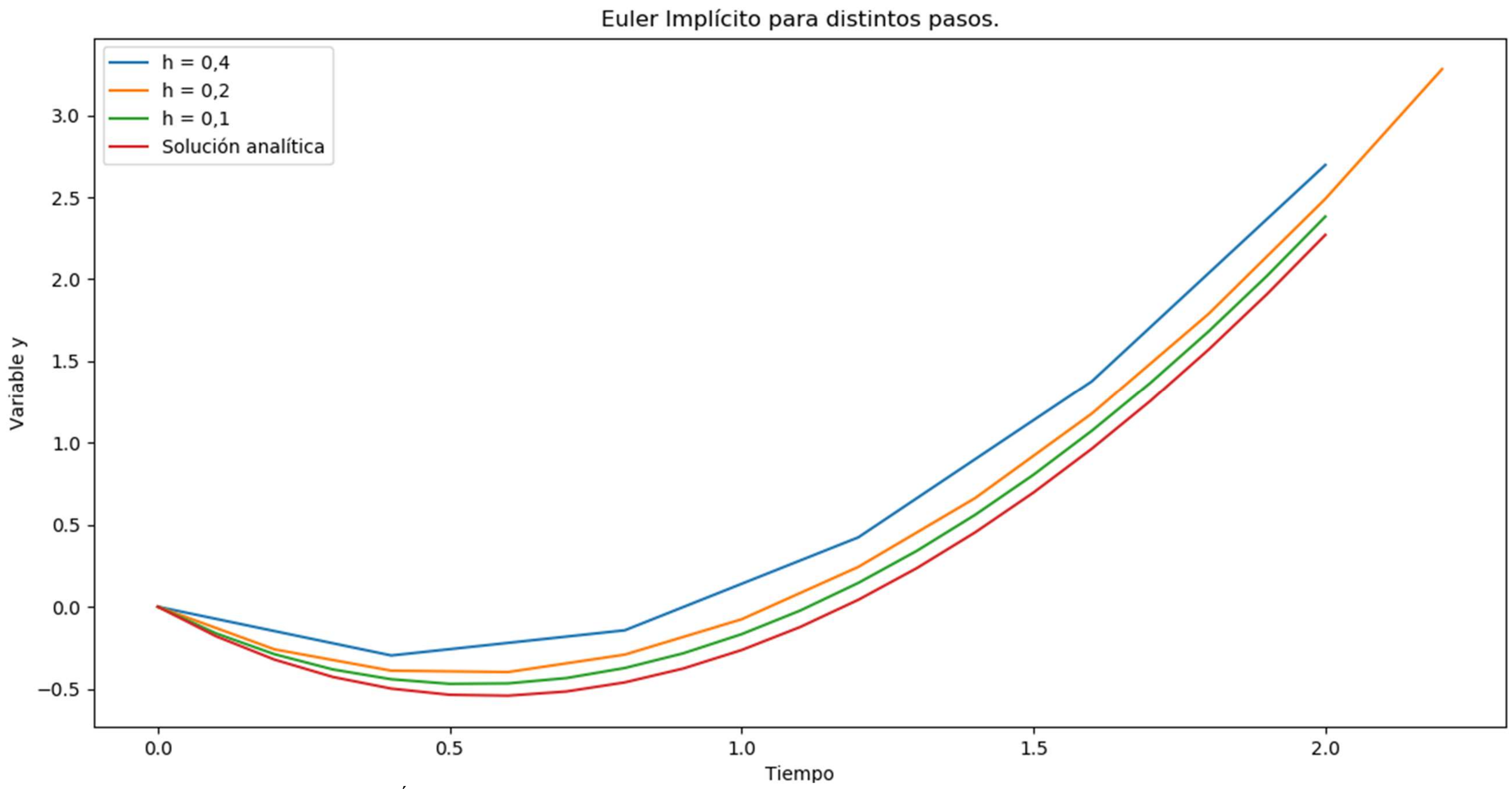

GRÁFICO 3: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Euler Implícito.

Veamos gráficamente qué es lo que pasa si agregamos pasos de cálculo $h = 2$ y $h = 1$, y extendemos el intervalo de análisis a [0; 10]:

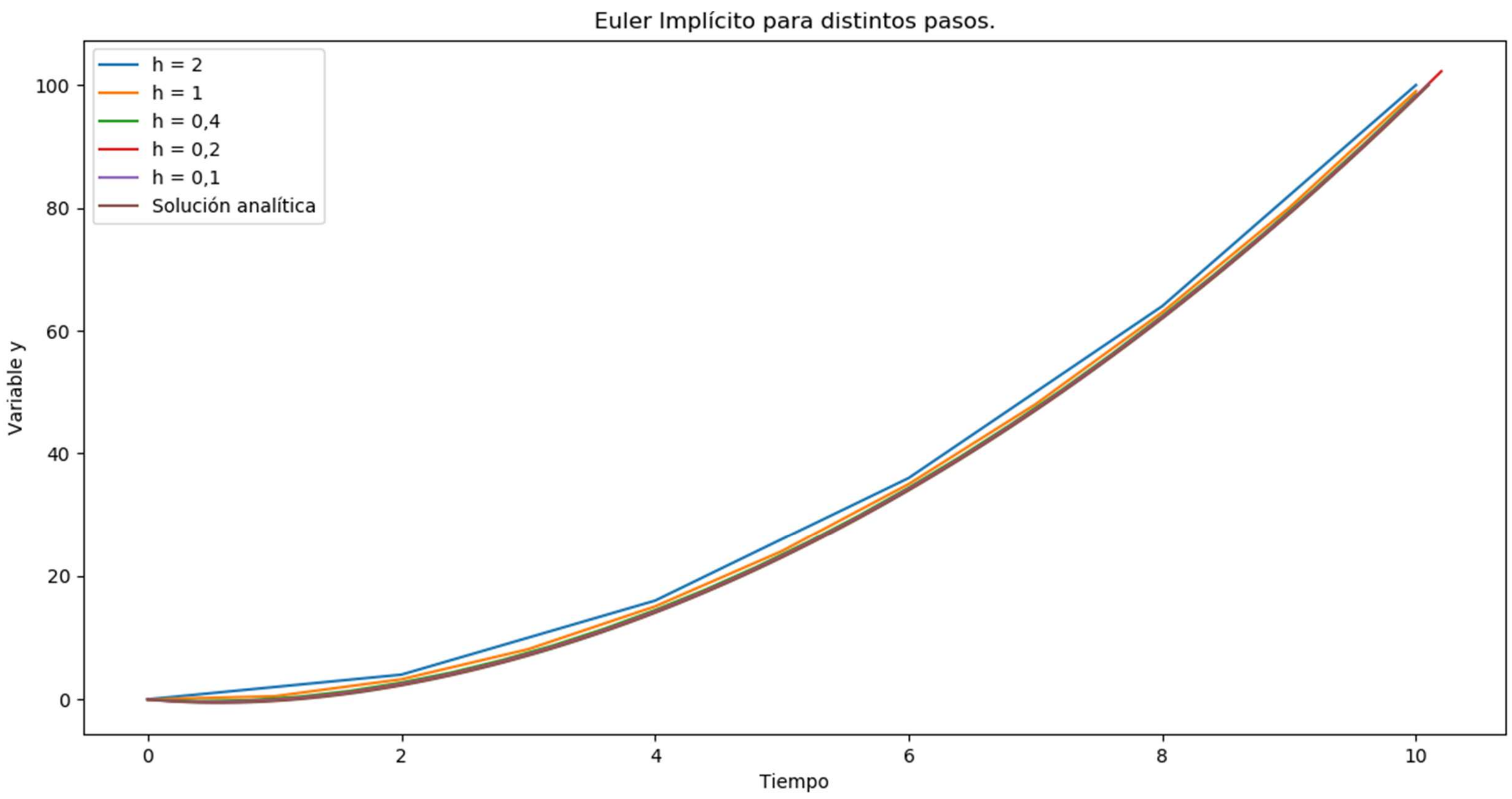

GRÁFICO 4: Comparación de los tres pasos de cálculo para el método de Euler Implícito, aumentando el intervalo de trabajo y añadiendo $h = 2$ y $h = 1$

Es notable cómo el comportamiento de inestabilidad para el paso de cálculo más alto desapareció. Analicemos la estabilidad de este método. Aplicando las mismas perturbaciones que en el primer ejemplo:

$$u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} = u^{(n)} + \delta u^{(n)} + h * \left[-(u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)}) + ((n+1)h)^2 + 2(n+1)h - 2\right]$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}} + \delta u^{(n+1)} = \boldsymbol{u^{(n)} + h * \left[-u^{(n+1)} + \left((n+1)h\right)^2 + 2(n+1)h - 2\right]} + \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n+1)}$$

$$\delta u^{(n+1)} = \delta u^{(n)} - h * \delta u^{(n+1)}$$

$$\delta u^{(n+1)}(1+h) = \delta u^{(n)}$$

$$\frac{\delta u^{(n+1)}}{\delta u^{(n)}} = \frac{1}{1+h}$$

Al igual que antes pedimos que esta relación en módulo sea menor a 1, encontrándonos que para todo h positivo esto se cumple. Es decir, que el método es incondicionalmente estable. Esta es una de las ventajas que poseen los métodos implícitos, para los cuales no es necesario realizar este análisis debido a que, en general, son estables.

c. RESUMEN:

Si bien solo trabajamos con dos métodos de resolución numérica de PVI, estos se pueden clasificar en general como métodos explícitos o métodos implícitos. Sus características aparecen detalladas en la siguiente tabla:

Métodos	Ventajas	Desventajas
Explícitos	Facilidad de cálculo.	Requieren análisis de estabilidad
Implícitos	No requieren análisis de estabilidad	Si se trabaja con una EDO no lineal, se requiere resolver a cada paso ecuaciones no lineales.

d. ANEXO: Tablas.

Método de Euler simplificado para pasos de cálculo 0,2 y 0,1:

	h	0,2	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	0	0	-0,4
1	0,2	-0,4	-0,632
2	0,4	-0,632	-0,7136
3	0,6	-0,7136	-0,65888
4	0,8	-0,65888	-0,479104
5	1	-0,479104	-0,1832832
6	1,2	-0,1832832	0,22137344
7	1,4	0,22137344	0,72909875
8	1,6	0,72909875	1,335279
9	1,8	1,335279	2,0362232
10	2	2,0362232	1,84346784

	h	0,1	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	0	0	-0,2
1	0,1	-0,2	-0,359
2	0,2	-0,359	-0,4791
3	0,3	-0,4791	-0,56219
4	0,4	-0,56219	-0,609971
5	0,5	-0,609971	-0,6239739
6	0,6	-0,6239739	-0,60557651
7	0,7	-0,60557651	-0,55601886
8	0,8	-0,55601886	-0,47641697
9	0,9	-0,47641697	-0,36777528
10	1	-0,36777528	-0,23099775
11	1,1	-0,23099775	-0,06689797
12	1,2	-0,06689797	0,12379182
13	1,3	0,12379182	0,34041264
14	1,4	0,34041264	0,58237138
15	1,5	0,58237138	0,84913424
16	1,6	0,84913424	1,14022082
17	1,7	1,14022082	1,45519873
18	1,8	1,45519873	1,79367886
19	1,9	1,79367886	2,15531097
20	2	2,15531097	2,53977988

Método de Euler implícito para pasos de cálculo 0,2 y 0,1:

	h	0,2	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	0	0	-0,26
1	0,2	-0,26	-0,39
2	0,4	-0,39	-0,39833333
3	0,6	-0,39833333	-0,29194444
4	0,8	-0,29194444	-0,07662037
5	1	-0,07662037	0,24281636
6	1,2	0,24281636	0,66234697
7	1,4	0,66234697	1,17862247
8	1,6	1,17862247	1,78885206
9	1,8	1,78885206	2,49071005
10	2	2,49071005	3,28225837

	h	0,1	
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	0	0	-0,16272727
1	0,1	-0,16272727	-0,28975207
2	0,2	-0,28975207	-0,38250188
3	0,3	-0,38250188	-0,44227443
4	0,4	-0,44227443	-0,47024949
5	0,5	-0,47024949	-0,46749953
6	0,6	-0,46749953	-0,43499958
7	0,7	-0,43499958	-0,37363598
8	0,8	-0,37363598	-0,28421453
9	0,9	-0,28421453	-0,16746775
10	1	-0,16746775	-0,02406159
11	1,1	-0,02406159	0,14539855
12	1,2	0,14539855	0,34036232
13	1,3	0,34036232	0,56032938
14	1,4	0,56032938	0,80484489
15	1,5	0,80484489	1,07349536
16	1,6	1,07349536	1,36590487
17	1,7	1,36590487	1,6817317
18	1,8	1,6817317	2,02066518
19	1,9	2,02066518	2,38242289
20	2	2,38242289	2,76674808