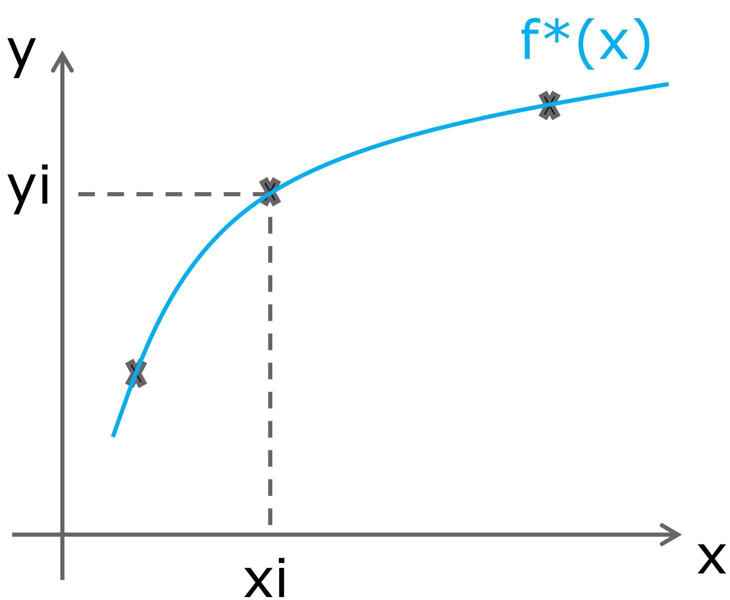
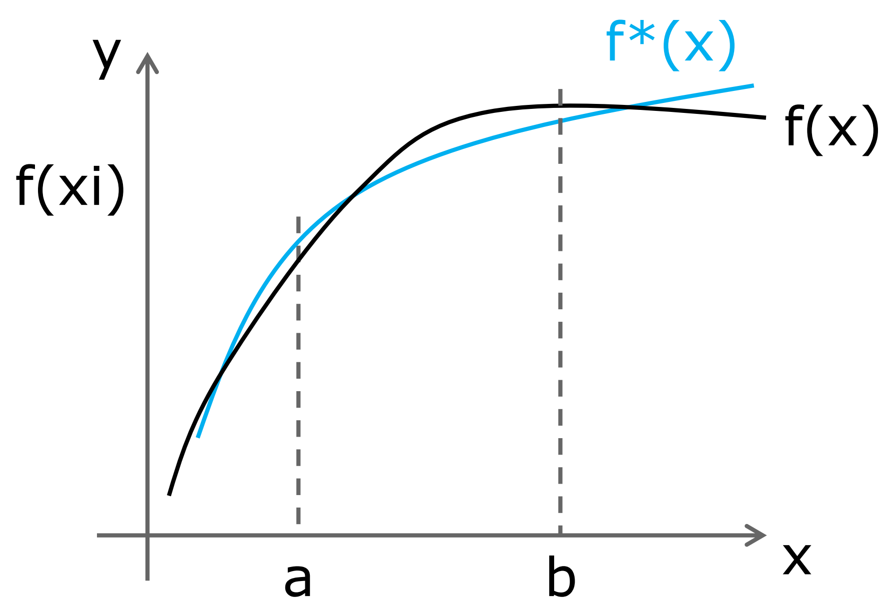
Aproximación de funciones

Objetivo

Caracterizar mediante una función sencilla:

- El comportamiento de un conjunto de puntos (xi, yi)
- Una función que en principio es mas compleja.





Datos de entrada:

Xi	x1	X2	...	Xn
yi	y1	y2	...	Yn

Datos de entrada: f(x) , [a,b]

Aproximación de funciones

La función de aproximación f*(x) suele tener la siguiente forma:

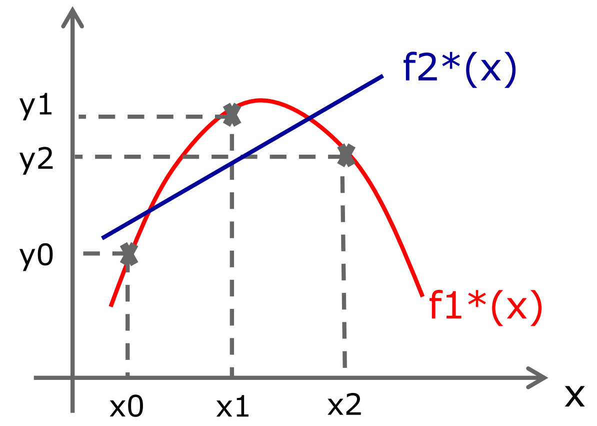
$$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

Ventajas…?

Tengo n+1 incógnitas (c_j)
Tengo m+1 datos

ej de aproximación polinomica para 3 datos (m=2):

n=2 → parábola
n=1 → recta



Interpolación (m=n)	Ajuste (m>n)
SOLUCION UNICA	SOBREDETERMINADO
f* pasa por todos los puntos	f* no pasa por todos los puntos (puede no pasar por ninguno)
$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$	f* puede ser cualquier función
Obtengo misma f* usando distintos métodos	Es necesario establecer criterio de ajuste → **cuadrados mínimos**

Ajuste

Ejemplos de la función de ajuste: $$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$$

$$f^*(x) = a_0 + a_1 x$$

$$\varphi_j(x) = \{1, x\}$$
$$c_j = \{a_0, a_1\}$$

$$f^*(x) = a \ln(x) + b\, sen(x) + cx^2$$

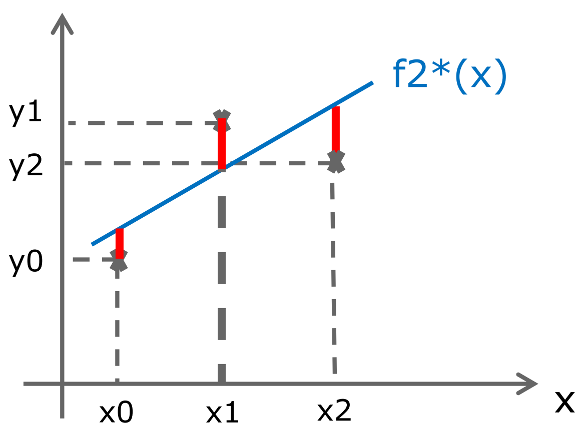
$$\varphi_j(x) = \{\ln(x)\,, sen(x), x^2\}$$
$$c_j = \{a, b, c\,\}$$

$$f^*(x) = a_0\, e^{a_1 x}$$

no sigue la estructura lineal
¿Entonces no sirve?

Si f* sigue la estructura lineal → Ecuaciones **normales → SEL** (sistema de ecuaciones LINEAL)

$$e = \sum_{j=0}^{n} (f^*(xi) - f(xi))^2$$



Ajuste – Aplicación a curva de revenido

Acero: Aleación Fe-C (~99% Fe ~0.25% C y otros aleantes)

Principales propiedades mecánicas:

- Resistencia a la **fluencia** (YS): maxima tension que puede soportar sin deformarse

- Tenacidad/plasticidad : capacidad para absorber energía y deformarse plásticamente

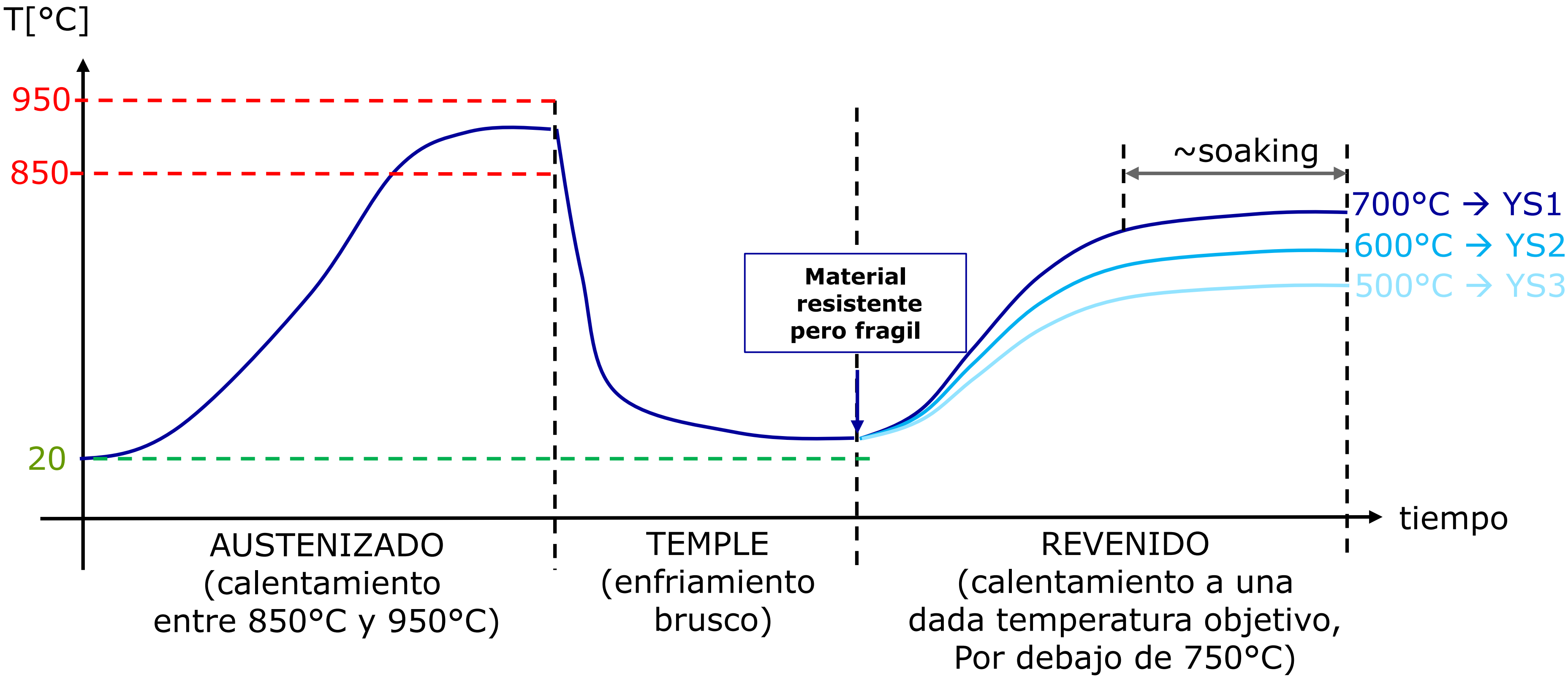
Intentar aumentar una de ellas implica el detrimento de la otra.

Para una **misma composición química**, se pueden lograr distintas combinaciones de resistencia y tenacidad.

→ Tratamiento térmico de temple y revenido.

- Se pueden lograr aceros muy resistentes pero muy frágiles → ~vidrio
- Se pueden lograr aceros muy tenaces pero muy deformables → ~plastilina

Ajuste – Temple y revenido



Se cumple que YS1<YS2<YS3 para un mismo soaking →

A mayor temperatura final de revenido → menor resistencia
mayor tenacidad

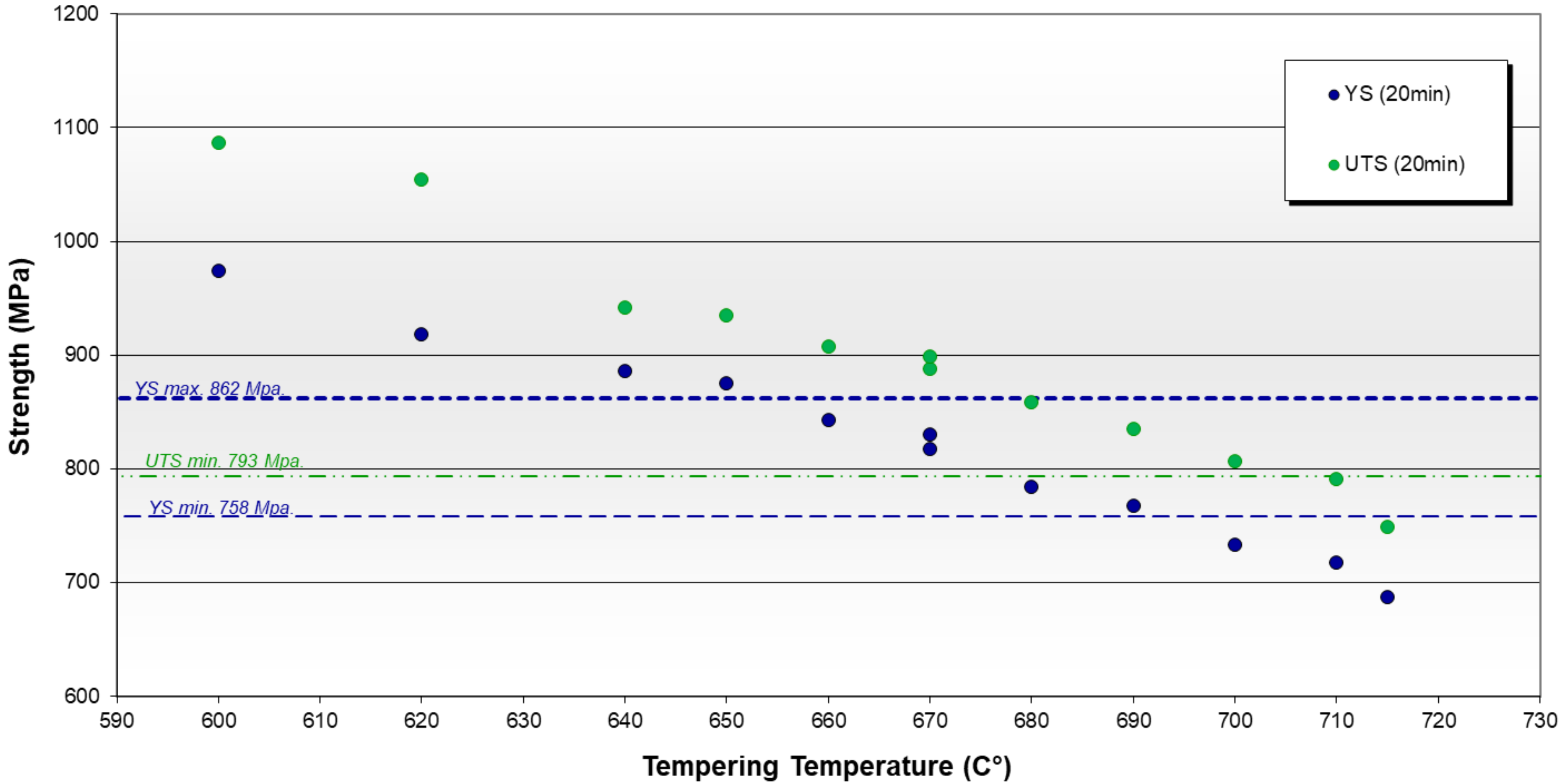
Dependiendo de la aplicación/diseño del material se establecerá una temperatura objetivo

→ Dado un acero con una composición química conocida. Se quiere lograr una "YS_objetivo" –> ¿Cual deberá ser la temperatura final de revenido?

Ajuste – Aplicación a curva de revenido

Product 1 - Heat 201 - Steel DS856
(Soaking time 20 & 10 minutes)

¿Que punto de operación elegimos para la producción?



¿Observaciones al grafico?

Ajuste – Ejercicio de aplicación

Propongo parábola para ajustar YS = f(T):

$$f^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$\varphi_j(x) = \{1, x, x^2\}$$

$$c_j = \{a_0, a_1, a_2\}$$

Se evalúan las "φ" y la f(x) en la grilla de datos:

```
x = [600 620 640 650 660 670 670 680 690 700 710 715];
y = [974 918 886 875 843 817 830 784 767 734 718 687];
```

$\varphi_0(x) = 1 \rightarrow$ `F0 = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ];`

$\varphi_1(x) = x \rightarrow$ `F1 = [600 620 640 650 660 670 670 680 690 700 710 715];`

$\varphi_2(x) = x^2 \rightarrow$
```
F2 = [360000 384400 409600 422500 435600 448900
      448900 462400 476100 490000 504100 511225]
```

$f(x) = dato \rightarrow$ `f = [974 918 886 875 843 817 830 784 767 734 718 687];`

Armamos SEL (sistema de ecuaciones lineales)

```
M = [ F0 * F0'   F1 * F0'   F2 * F0';      a = [ a0;      b = [ f * F0';
      F1 * F0'   F1 * F1'   F1 * F2';            a1;            f * F1';
      F2 * F0'   F2 * F1'   F2 * F2'];           a2];           f * F2'];
```

$$M * a = b$$

Particularidades de la matriz M?

Ajuste – Ejercicio de aplicación

$$\begin{pmatrix} 12 & 8005 & 5353725 \\ 8005 & 5353725 & 3589496875 \\ 5353725 & 3589496875 & 2412464330625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9833 \\ 6526355 \\ 4343167075 \end{pmatrix}$$

Resolviendo SEL: $\begin{pmatrix} a0 \\ a1 \\ a2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -56.7 \\ 5.13 \\ -0.00571 \end{pmatrix}$

$$f^*(x) = -56.7 + 5.13x - 0.00571x^2$$

$$e = \sum_{j=0}^{n} (f^*(xi) - f(xi))^2 = \sum_{j=0}^{11} (-56.7 + 5.13xi - 0.00571xi^2 - f(xi))^2 = 636$$

En Matlab:

```
a = polyfit(x,y,2);
```

En Excel:

“add trendline”

Si hubiera querido hacer un ajuste lineal, ¿que cambiaría del desarrollo anterior y que no?

Ajuste – Ejercicio de aplicación

Propongo función lineal: $f^*(x) = a_0 + a_1 x$ $\qquad \varphi_j(x) = \{1, x\}$

$c_j = \{a_0, a_1\}$

Se evalúan las "φ" y la f(x) en la grilla de datos:

```
x = [600 620 640 650 660 670 670 680 690 700 710 715];
y = [974 918 886 875 843 817 830 784 767 734 718 687];
```

$\varphi_0(x) = 1 \rightarrow$ `F0 = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ];`

$\varphi_1(x) = x \rightarrow$ `F1 = [600 620 640 650 660 670 670 680 690 700 710 715];`

$f(x) = dato \rightarrow$ `f = [974 918 886 875 843 817 830 784 767 734 718 687];`

Armamos SEL (sistema de ecuaciones lineales)

```
M = [ F0 * F0'   F1 * F0';
      F1 * F0'   F1 * F1'];
```

```
a = [ a0;
      a1];
```

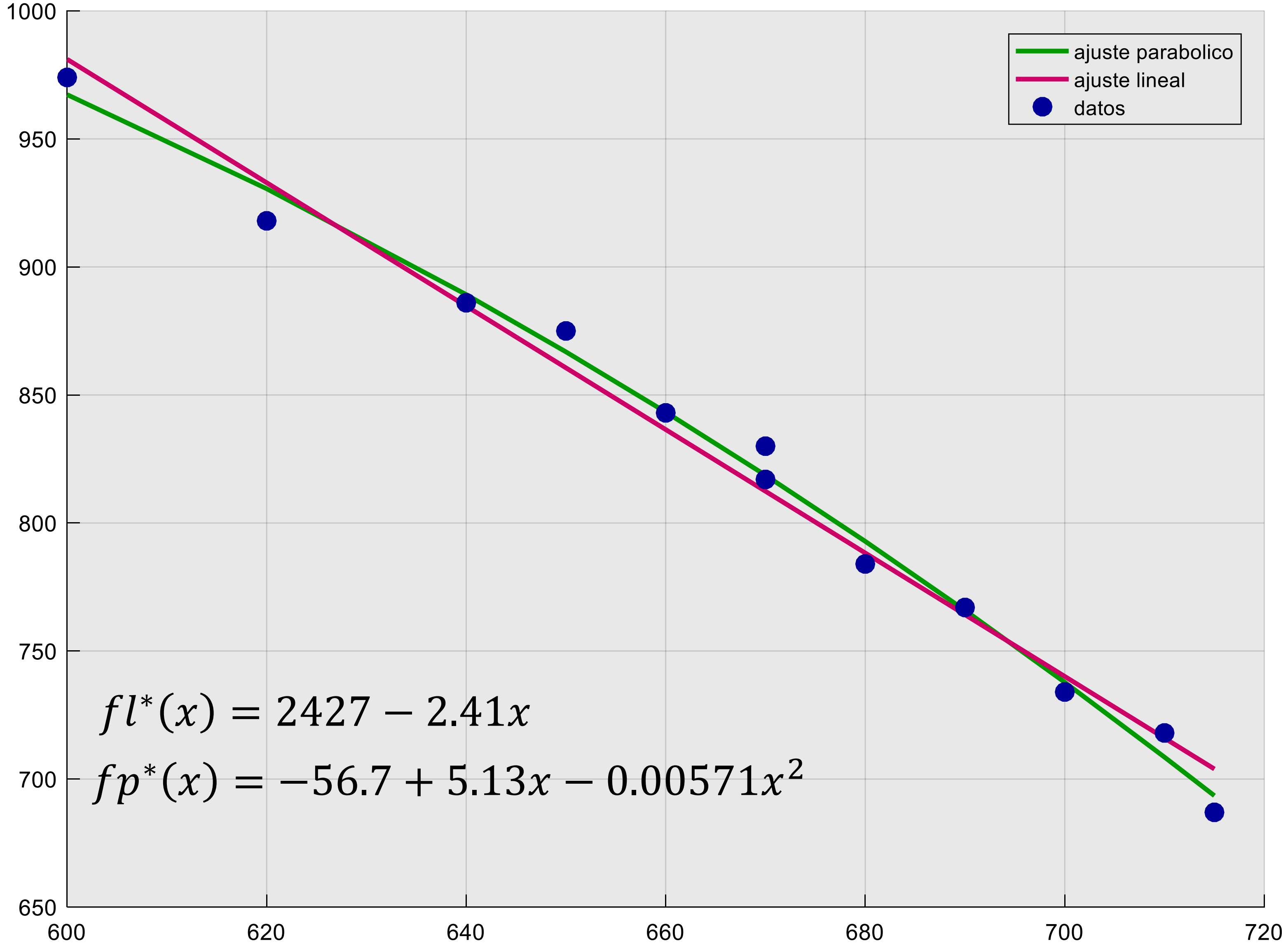
```
b = [ f * F0';
      f * F1'];
```

$$\begin{pmatrix} 12 & 8005 \\ 8005 & 5353725 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9833 \\ 6526355 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2427 \\ -2.41 \end{pmatrix}$$

Unidades de a1?

$$e = \sum_{j=0}^{11} (2427 - 2.41xi - f(xi))^2 = 1210$$

Ajuste – Ejercicio de aplicación



Ajuste – Ejercicio de aplicación

Propongo exponencial: $f^*(x) = a_0 e^{a_1 x}$

No queda expresada como combinación lineal de funciones. Si puedo, transformo. Si no, aplico cuadrados mínimos y obtengo las ecuaciones correspondientes al caso. ¿Es un SEL?

$$\ln f^*(x) = \ln(a_0 e^{a_1 x})$$

$$\ln f^*(x) = \ln(a_0) + a_1 x$$

$$g^*(x) = b_0 + b_1 x \Rightarrow$$

obtengo forma lineal: resuelvo b0 y b1 de forma análoga $\Rightarrow$ $\begin{cases} a_0 = e^{b_0} \\ a_1 = b_1 \end{cases}$

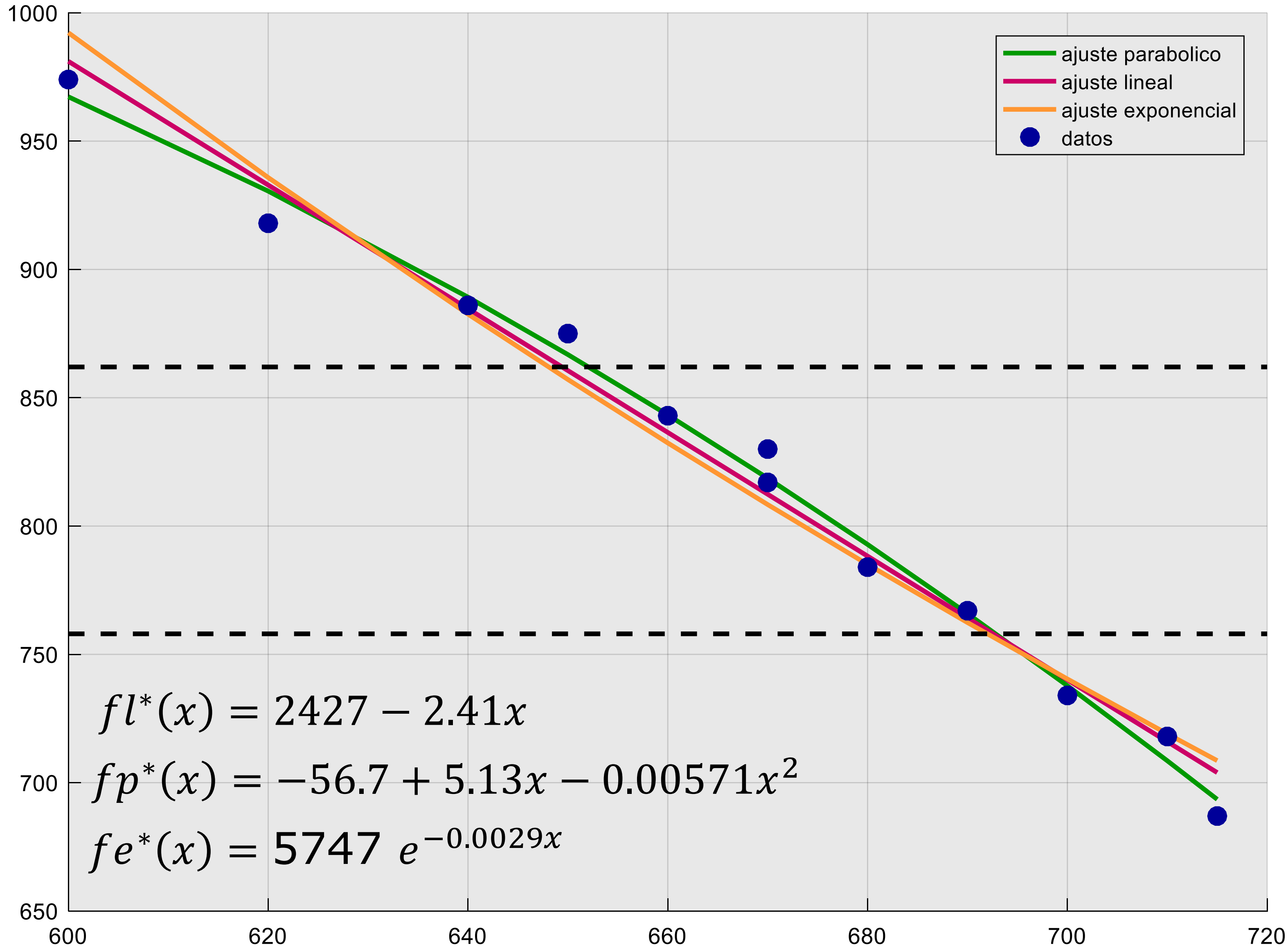
$\varphi_0(x) = 1 \rightarrow$ `F0 = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ];`

$\varphi_1(x) = x \rightarrow$ `F1 = [600 620 640 650 660 670 670 680 690 700 710 715];`

$g(x) = \ln f(x) \rightarrow$
```
g = [6.8814 6.8222 6.7867 6.7742 6.7370 6.7056
     6.7214 6.6644 6.6425 6.5985 6.5765 6.5323]
```

$$\begin{pmatrix} 12 & 8005 \\ 8005 & 5353725 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b0 \\ b1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80.4 \\ 53621 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b0 \\ b1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.65 \\ -0.0029 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a0 \\ a1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5747 \\ -0.0029 \end{pmatrix}$$

Ajuste – Ejercicio de aplicación



Ajuste – Ejercicio de aplicación

Conclusión: para nuestra selección de datos aproximó mejor la f* parabólica que la f* lineal y la f* exponencial

Propongo sinusoidal: $f^*(x) = a\ sen(wx)$ $\Rightarrow$ No se puede llevar a una estructura lineal → debo aplicar cuadrados mínimos con esta forma funcional

Ajuste – Ejercicio 9

9- Encontrar la aproximación polinómica de grado 1 y 2 de $f(x)$ en el intervalo indicado.

a)	$f(x)=x^2-2\cdot x+3$	$[0 \quad 1]$	d)	$f(x)=x^3-1$	$[0 \quad 2]$
b)	$f(x)=1/x$	$[1 \quad 3]$	e)	$f(x)=e^x$	$[0 \quad 1]$
c)	$f(x)=\cos(\pi\cdot x)$	$[0 \quad 1]$	f)	$f(x)=\ln(x)$	$[1 \quad 2]$

c) n=2 → $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad f(x) = \cos(\pi x)$ $\quad [a,b] = [0,1]$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, H_{j+1\ k+1} = \int_a^b f(x)\, x^j \, dx \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

$$k = 0, 1, \ldots, n$$

$$f^*(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$H_{j+1\ k+1} = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

→ **Matriz de HILBERT (exclusivamente para polinomios)**

Ajuste – Ejercicio 9

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^0\, dx \\ \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^1\, dx \\ \int_0^1 \cos(\pi x)\, x^2\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)\right]_0^1 \\ \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{x\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 \\ \left[\frac{x^2\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi^2} - \frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right)\right]_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{bmatrix}$$

Resuelvo el SEL: $\underline{\underline{H}} \cdot \underline{a} = \underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{a} = \begin{bmatrix} 1{,}216 \\ -2{,}432 \\ 0{,}000 \end{bmatrix}$

análisis del resultado?