PVI: PROBLEMAS DE VALORES INICIALES.

Tercera parte: métodos multipaso

Autor: Alderete, Iván Martín – Mail: ialderete@fi.uba.ar

Los métodos de resolución de PVI vistos hasta el momento proporcionan una solución numérica de $u^{(n+1)}$ a partir de un paso $u^{(n)}$ anterior. Para aprovechar aún más la información que nos dan los puntos anteriores (es decir, hallar $u^{(n+1)}$ a partir de $u^{(n)}$, $u^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}$,…) existen los métodos multipaso. Estos métodos requieren de métodos de arranque (los de paso simple ya vistos) que, para que su precisión sea de utilidad, deben tener un orden de precisión mayor o igual a la del método multipaso a utilizar. En el siguiente ejemplo vamos a analizar qué ocurre al arrancar un método multipaso de orden 3, con métodos de paso simple de órdenes 1, 2 y 4.

1. PROBLEMA Y RESOLUCIÓN:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria con condición inicial:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Hallar por medio de los métodos de Adams-Bashforth y de Adams- Moulton de orden 3 el valor de $y(2)$ con paso de cálculo $h = 0{,}1$, consiguiendo los primeros puntos por medio de los métodos de paso simple de Euler implícito, Punto Medio y Runge Kutta de orden 4.

El esquema de Adams-Bashforth de orden 3 es:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(n)},\, t^{(n)}\right) - 16f\left(u^{(n-1)},\, t^{(n-1)}\right) + 35f\left(u^{(n-2)},\, t^{(n-2)}\right)\right]$$

Dado este esquema, no podemos calcular $u^{(1)}$ a partir de $u^{(0)}$, ni podemos hallar $u^{(2)}$ a partir de $u^{(1)}$ y de $u^{(0)}$, vamos tener que recurrir a los métodos de paso simple que se vieron en clases anteriores. Recordemos que los órdenes de precisión del esquema de Euler implícito y de Punto Medio son, respectivamente, 1 y 2. Vamos a ver cómo esto influye en cálculos posteriores.

	Euler Implícito	Punto medio	Runge Kutta 0(4)
$u^{(0)}$	2	2	2
$u^{(1)}$	2,22222222	2,21	2,210341667
$u^{(2)}$	2,4691358	2,44205	2,442805142

TABLA 1: Valores para iniciar el método multipaso.

Ahora podemos avanzar en n con el método multipaso, dado que:

$$u^{(3)} = u^{(2)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(2)},\, t^{(2)}\right) - 16f\left(u^{(1)},\, t^{(1)}\right) + 35f\left(u^{(0)},\, t^{(0)}\right)\right]$$
$$u^{(4)} = u^{(3)} + \frac{h}{12} * \left[23f\left(u^{(3)},\, t^{(3)}\right) - 16f\left(u^{(2)},\, t^{(2)}\right) + 35f\left(u^{(1)},\, t^{(1)}\right)\right]$$

Podemos ver, entonces, que este método es de tipo explícito.

EULER IMPLÍCITO						
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$f(u^{(n)}, t^{(n)})$	$f(u^{(n-1)}, t^{(n-1)})$	$f(u^{(n-2)}, t^{(n-2)})$	$u^{(n+1)}$
0	1	2	-	-	-	2,22222222
1	1,1	2,22222222	-	-	-	2,4691358
2	1,2	2,4691358	2,4691358	2,22222222	2	2,72942387
3	1,3	2,72942387	2,72942387	2,4691358	2,22222222	3,01593793
4	1,4	3,01593793	3,01593793	2,72942387	2,4691358	3,33295017
5	1,5	3,33295017	3,33295017	3,01593793	2,72942387	3,68336656
6	1,6	3,68336656	3,68336656	3,33295017	3,01593793	4,07061588
7	1,7	4,07061588	4,07061588	3,68336656	3,33295017	4,49857464
8	1,8	4,49857464	4,49857464	4,07061588	3,68336656	4,97152626
9	1,9	4,97152626	4,97152626	4,49857464	4,07061588	**5,49420117**

TABLA 2: Método de Adams-Bashforth con primeros puntos obtenidos a partir de Euler implícito.

PUNTO MEDIO						
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$f\left(u^{(n)},\, t^{(n)}\right)$	$f\left(u^{(n-1)},\, t^{(n-1)}\right)$	$f\left(u^{(n-2)},\, t^{(n-2)}\right)$	$u^{(n+1)}$
0	1	2	-	-	-	2,21
1	1,1	2,21	-	-	-	2,44205
2	1,2	2,44205	2,44205	2,21	2	2,69877625
3	1,3	2,69877625	2,69877625	2,44205	2,21	2,98251836
4	1,4	2,98251836	2,98251836	2,69877625	2,44205	3,29608297
5	1,5	3,29608297	3,29608297	2,98251836	2,69877625	3,6426121
6	1,6	3,6426121	3,6426121	3,29608297	2,98251836	4,02557329
7	1,7	4,02557329	4,02557329	3,6426121	3,29608297	4,44879668
8	1,8	4,44879668	4,44879668	4,02557329	3,6426121	4,91651511
9	1,9	4,91651511	4,91651511	4,44879668	4,02557329	**5,4334065**

TABLA 3: Método de Adams-Bashforth con primeros puntos obtenidos a partir de Punto Medio.

RUNGE KUTTA O(4)						
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$f\left(u^{(n)},\, t^{(n)}\right)$	$f\left(u^{(n-1)},\, t^{(n-1)}\right)$	$f\left(u^{(n-2)},\, t^{(n-2)}\right)$	$u^{(n+1)}$
0	1	2	-	-	-	2,21034167
1	1,1	2,210341667	-	-	-	2,44280514
2	1,2	2,442805142	2,442805142	2,21034167	2	2,69963057
3	1,3	2,699630572	2,699630572	2,44280514	2,21034167	2,98344998
4	1,4	2,983449982	2,983449982	2,69963057	2,44280514	3,2971107
5	1,5	3,2971107	3,2971107	2,98344998	2,69963057	3,64374819
6	1,6	3,643748193	3,643748193	3,2971107	2,98344998	4,02682892
7	1,7	4,02682892	4,02682892	3,64374819	3,2971107	4,45018432
8	1,8	4,450184316	4,450184316	4,02682892	3,64374819	4,91804863
9	1,9	4,918048629	4,918048629	4,45018432	4,02682892	**5,43510125**

TABLA 4: Método de Adams-Bashforth con primeros puntos obtenidos a partir de Runge Kutta de orden 4.

El esquema de Adams-Moulton de orden 3, de tipo implícito, es:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[5f\left(u^{(n+1)},\, t^{(n+1)}\right) + 8f\left(u^{(n)},\, t^{(n)}\right) - f\left(u^{(n-1)},\, t^{(n-1)}\right)\right]$$

Trabajando con una EDO lineal se puede llegar a una expresión de $u^{(n+1)}$ explícita. Para este problema en particular:

$$u^{(n+1)} = \frac{u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[8u^{(n)} - u^{(n-1)}\right]}{1 - \frac{5}{12}h}$$

A continuación, las tablas para este método con el mismo procedimiento anterior:

EULER IMPLICITO				PUNTO MEDIO			
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$	n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	1	2	2,22222222	0	1	2	2,21
1	1,1	2,22222222	2,45603865	1	1,1	2,21	2,44243478
2	1,2	2,45603865	2,71435413	2	1,2	2,44243478	2,69931871
3	1,3	2,71435413	2,9998373	3	1,3	2,69931871	2,98322053
4	1,4	2,9998373	3,31534626	4	1,4	2,98322053	3,29698182
5	1,5	3,31534626	3,664039	5	1,5	3,29698182	3,64374306
6	1,6	3,664039	4,04940561	6	1,6	3,64374306	4,02697504
7	1,7	4,04940561	4,4753033	7	1,7	4,02697504	4,45051359
8	1,8	4,4753033	4,94599493	8	1,8	4,45051359	4,91859795
9	1,9	4,94599493	**5,46619171**	9	1,9	4,91859795	**5,43591325**

TABLA 5: Método de Adams-Moulton con primeros puntos obtenidos a partir de Euler implícito y de Punto Medio.

RUNGE KUTTA O(4)			
n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
0	1	2	2,210341667
1	1,1	2,21034167	2,442815072
2	1,2	2,44281507	2,699739023
3	1,3	2,69973902	2,983685042
4	1,4	2,98368504	3,297495186
5	1,5	3,29749519	3,644310424
6	1,6	3,64431042	4,027602079
7	1,7	4,02760208	4,451206571
8	1,8	4,45120657	4,919363817
9	1,9	4,91936382	**5,43675967**

TABLA 6: Método de Adams-Moulton con primeros puntos obtenidos a partir de Runge Kutta.

Por último, comparemos lo obtenido en cada caso. En la siguiente tabla encontramos los $u^{(10)}$ calculados en cada par de métodos combinados. Dado que el método de Runge Kutta es de orden superior, consideremos su solución como la solución real dado que no conocemos la función solución. Notemos que al utilizar un método de arranque de orden 1 las diferencias son mayores, notando cambios ya en el segundo decimal.

$\mathrm{u}^{(10)} \sim y(2)$	Adams-Bashforth	Adams - Moulton
Euler implícito	5,49420117	5,46619171
Punto Medio	5,4334065	5,43591325
Runge Kutta O(4)	5,43510125	5,43675967

TABLA 7:Comparación de resultados.

Como conclusión a esto, entendamos que es importante elegir un método de arranque con orden de precisión mayor o igual al del método multipaso que uno utilice. Como tarea, encuentren la solución analítica y contrasten resultados.

2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD:

Partamos del esquema de Adams Bashforth de orden 3 visto anteriormente. Para el PVI en el que trabajábamos:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[23u^{(n)} - 16u^{(n-1)} + 35u^{(n-2)}\right]$$

Realicemos un cambio de variables para obtener expresiones en los pasos temporales $(n+1)$ y (n):

$$v^{(n+1)} = u^{(n)} \implies v^{(n)} = u^{(n-1)}$$
$$w^{(n+1)} = v^{(n)} = u^{(n-1)} \implies w^{(n)} = u^{(n-2)}$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{12} * \left[23u^{(n)} - 16v^{(n)} + 35w^{(n)}\right] \\ v^{(n+1)} = u^{(n)} \\ w^{(n+1)} = v^{(n)} \end{cases}$$

Y, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

Ahora, apliquemos perturbaciones:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(n)} + \delta u^{(n)} \\ v^{(n)} + \delta v^{(n)} \\ w^{(n)} + \delta w^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(n+1)} + \delta u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} + \delta v^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} + \delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ w^{(n)} \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^{(n)} \\ \delta v^{(n)} \\ \delta w^{(n)} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} u^{(n+1)} \\ v^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \delta u^{(n+1)} \\ \delta v^{(n+1)} \\ \delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

De esta manera, los primeros términos de cada lado de la igualdad (resalto en rojo) son equivalentes por la primera forma matricial planteada. De esta forma:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{23}{12}h & -\frac{16}{12}h & \frac{35}{12}h \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta u^{(n)} \\ \delta v^{(n)} \\ \delta w^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u^{(n+1)} \\ \delta v^{(n+1)} \\ \delta w^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

La matriz que depende del paso de cálculo es la matríz de amplificación del problema. Y, al igual que en EDOs de grado mayor o igual a dos, la estabilidad está asegurada cuando los autovalores de dicha matriz son, en módulo, menores a 1.

3. EDO NO LINEAL UTILIZANDO UN MÉTODO IMPLÍCITO:

Dada la ecuación diferencial $y' = (t-2)y^2$, con condición inicial $y(1) = 1$, hallar una aproximación a $y(2)$ empleando el método de Euler implícito con paso de cálculo $h = 0{,}2$.

Solución analítica:

$$y(t) = \frac{-2}{t^2 - 4t + 1}$$

El esquema discretizado para este problema queda determinado por:

$$\begin{cases} u^{(n+1)} = u^{(n)} + h * \left[(1+(n+1)h-2)\left(u^{(n+1)}\right)^2\right] \\ u^{(0)} = 1 \end{cases}$$

Por lo cual, como primer paso nos queda una ecuación no lineal, en donde la variable $u^{(n+1)}$ no puede ser despejada, pero sabemos cómo resolver una ENL por distintos métodos: punto fijo, bisección, secante, etc. En este problema, si distribuimos bien la ecuación anterior podemos encontrar una expresión cuadrática que puede resolverse por medio de la ecuación resolvente. Para $n = 0$:

$$-0{,}16\left(u^{(1)}\right)^2 - u^{(1)} + u^{(0)} = 0$$

Pero, ¿cuál es la solución que estamos buscando? Con la función solución podríamos orientarnos. ¿Y si no la tenemos? ¿Y si no tengo una ENL de segundo grado? Una buena solución es utilizar un método de punto fijo, dado que obtuvimos inicialmente $u^{(n+1)} = f(u^{(n+1)})$, utilizando como semilla el valor en el paso anterior, $u^{(n)}$:

$$u^{(1)} = u^{(0)} + h * \left[-\left(u^{(1)}\right)^2\right]$$

k	${u^{(1)}}_k$	${u^{(1)}}_{k+1}$	ε
0	1	0,84	0,16
1	0,84	0,887104	0,047104
2	0,887104	0,874087439	0,01301656
3	**0,87408744**	**0,877755384**	**0,00366794**
4	0,87775538	0,876727278	0,00102811
5	0,87672728	0,877015885	0,00028861

TABLA 8: Cálculo iterativo de $u^{(1)}$ a partir del método de punto fijo.

Podemos utilizar el criterio de corte que quisiéramos (cantidad de iteraciones, error absoluto, error relativo, cantidad de decimales o dígitos significativos, etc.) En este caso voy a elegir trabajar con error absoluto menor a 0,01, por lo que me quedo con la fila en rojo. Este es el primer punto, hay que continuar. Para $u^{(2)}$ vamos a utilizar de semilla $u^{(1)}$ en la función de iteración:

$$u^{(2)} = u^{(1)} - 0{,}12\left(u^{(2)}\right)^2$$

k	${u^{(2)}}_k$	${u^{(2)}}_{k+1}$	ε
0	0,87775538	0,75448266	0,12327272
1	0,75448266	0,78667633	0,03219367
2	**0,78667633**	**0,77873784**	**0,00793849**
3	0,77873784	0,78072616	0,00198832
4	0,78072616	0,78023005	0,00049612
5	0,78023005	0,78035396	0,00012391

TABLA 9: Cálculo iterativo de $u^{(2)}$ a partir del método de punto fijo.

Continuando con la misma metodología, obtenemos los valores a continuación:

n	$t^{(n)}$	$u^{(n)}$	$y(t^{(n)})$	ε
0	1	1	1	0
1	1,2	0,87775538	0,84745763	0,03029776
2	1,4	0,77873784	0,75757576	0,02116208
3	1,6	0,71671438	0,70422535	0,01248902
4	1,8	0,66448146	0,67567568	-0,01119422
5	2	0,68086874	0,66666667	0,01420208

TABLA 10: Cálculo $u^{(n)}$ por el método de Euler Implícito.

4. **EJERCICIO DE FINAL (10/7/19):**

Considere el siguiente problema matemático:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + \beta * \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 * e^{-\frac{y}{\alpha}}$$

$$y(0) = y_0$$
$$y'(0) = 0$$

Con: $g = 9{,}8$, $y_0 = 40000$, $\alpha = 7000$, $\beta = 0{,}005$

a. Discretizar el problema matemático utilizando el método RK2.
b. Avanzar numéricamente la solución durante 3 pasos, para un paso $h = 0{,}1$.

RK2:

$$u^{(n+1)}{}_{*} = u^{(n)} + hf\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2}\left[f\left(u^{(n)}, t^{(n)}\right) + f\left(u^{(n+1)}{}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

Este ejercicio parte de un trabajo práctico tomado el cuatrimestre anterior al de esta fecha de final. Parece cuentoso (y lo es), pero es una ecuación que en su momento se manejó, y era conocida. Como es una EDO de segundo grado, necesito realizar un cambio de variables para obtener dos EDOs de grado 1.

$$\begin{cases} y' = z = f(y, z, t) \\ z' = -g + \beta * z^2 * e^{-\frac{y}{\alpha}} = F(y, z, t) \end{cases}$$

Llamo F y no g para no confundir con la gravedad. Discretizando las funciones, la variable independiente y las condiciones de contorno:

$$t^{(n)} \rightarrow t_0 + nh$$

$$y(t^{(n)}) \rightarrow u^{(n)}$$
$$z(t^{(n)}) \rightarrow v^{(n)}$$

$$u^{(0)} = 40000$$
$$v^{(0)} = 0$$

Aplicamos las discretizaciones al método a trabajar:

$$u^{(n+1)}{}_{*} = u^{(n)} + hf\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right)$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)}{}_{*} = u^{(n)} + hv^{(n)}}$$

$$v^{(n+1)}{}_{*} = v^{(n)} + hF\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right)$$

$$\boldsymbol{v^{(n+1)}{}_{*} = v^{(n)} + h\left[-g + \beta * {v^{(n)}}^2 * e^{-\frac{u^{(n)}}{\alpha}}\right]}$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2}\left[f\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right) + f\left(u^{(n+1)}{}_{*}, v^{(n+1)}{}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{u^{(n+1)} = u^{(n)} + \frac{h}{2}\left[v^{(n)} + v^{(n+1)}{}_{*}\right]}$$

$$v^{(n+1)} = v^{(n)} + \frac{h}{2}\left[F\left(u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)}\right) + F\left({u^{(n+1)}}_{*}, {v^{(n+1)}}_{*}, t^{(n+1)}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{v^{(n+1)} = v^{(n)} + \frac{h}{2}\left[\left(-g + \beta * {v^{(n)}}^{2} * e^{-\frac{u^{(n)}}{\alpha}}\right) + \left(-g + \beta * {{v^{(n+1)}}_{*}}^{2} * e^{-\frac{{u^{(n+1)}}_{*}}{\alpha}}\right)\right]}$$

La discretización está completa. Queda armar la tabla y avanzar los pasos pedidos. Notación de la tabla:

$$\bar{X} = (u^{(n)}, v^{(n)}, t^{(n)})$$

$$\bar{Y} = ({u^{(n+1)}}_{*}, {v^{(n+1)}}_{*}, t^{(n+1)})$$

n	$f(\bar{X})$	$F(\bar{X})$	${u^{(n+1)}}_{*}$	${v^{(n+1)}}_{*}$	$f(\bar{Y})$	$F(\bar{Y})$	$u^{(n+1)}$	$v^{(n+1)}$
0	0	-9,8	40000	-0,98	-0,98	-9,79998416	39999,951	-0,97999921
1	-0,97999921	-9,79998416	39999,853	-1,95999762	-1,95999762	-9,79993664	39999,804	-1,95999525
2	-1,95999525	-9,79993664	39999,608	-2,93998891	-2,93998891	-9,79985744	39999,559	-2,93998495