FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico / Métodos Matemáticos y Numéricos (75.12/95.04/95.13)

Aproximación de funciones

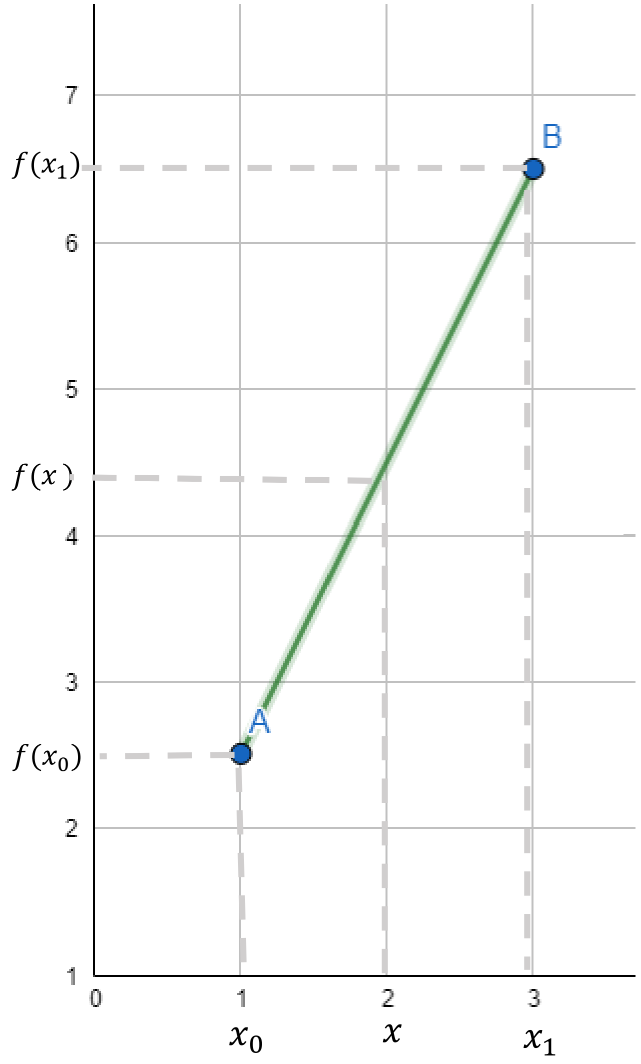
Interpolación

¿A qué llamamos Interpolación?

- Método de aproximación de funciones con igual cantidad de datos que funciones aproximantes (m=n)
- Determina un polinomio único de a lo sumo grado *n,* que pasa por *n+1* puntos dato
- $P_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0,1,\dots,n$
- Interpolación ocurre dentro (x_0, x_n) → aproximamos valores de la función entre nodos

Interpolación de Newton

Interpolación Lineal



n+1 = 2 → puntos dato
n = 1 → grados del polinomio

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f(x) = \boxed{f(x_0)} + \boxed{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}(x - x_0)$$

b_0

$b_1 \equiv \text{Dif. Divididas Finitas } f'(x) = f[x_0, x_1]$

Interpolación de Newton

Interpolación Cuadrática

n+1 = 3 → puntos dato
n = 2 → grados del polinomio

$$P_2(x) = \boxed{f(x_0)} + \boxed{f[x_0, x_1]}\ (x - x_0) + \boxed{f[x_0, x_1, x_2]}\ (x - x_0)\,(x - x_1)$$

b_0

$b_1 \equiv \text{Dif. Divididas Finitas } f'(x)$

$b_2 \equiv \text{Dif. Divididas Finitas } f''(x)$

Interpolación de Newton

Polinomio de Newton grado n:

n+1 → puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$
n → grados del polinomio

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

…

$$b_n = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

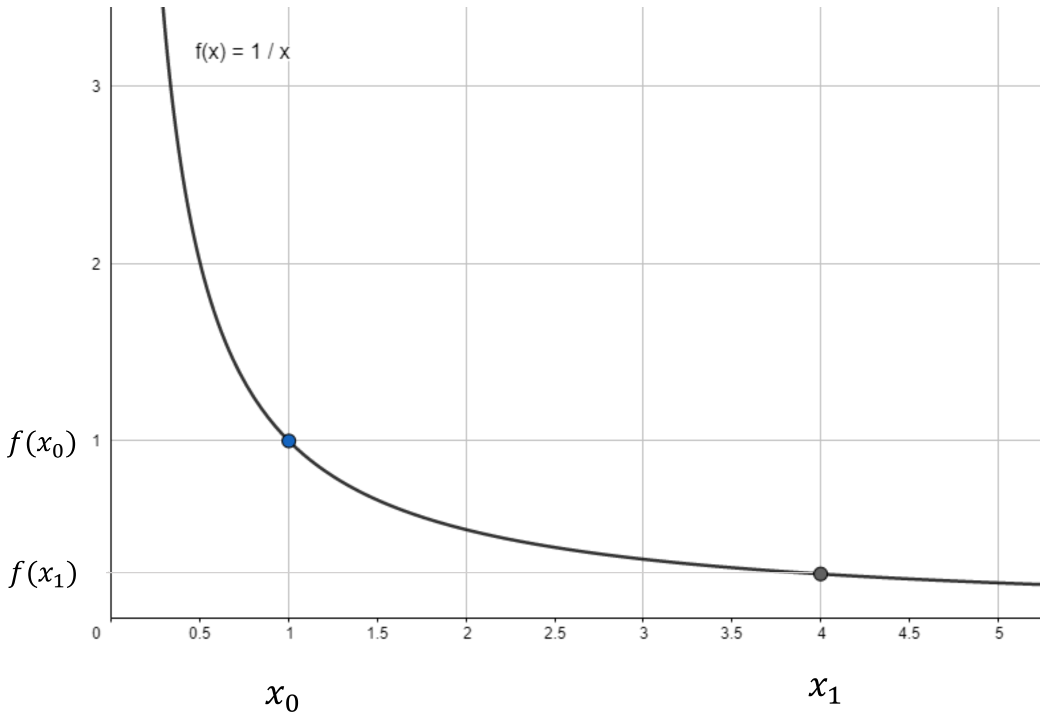
Interpolación de Newton

***Ejercicio 1.1**. Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x)= 1/x. Evaluar para f(3)*

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25

n+1=2 → Puntos

n=1 → Interpolación Lineal



$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

$$b_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}25 - 1}{4 - 1} = 3$$

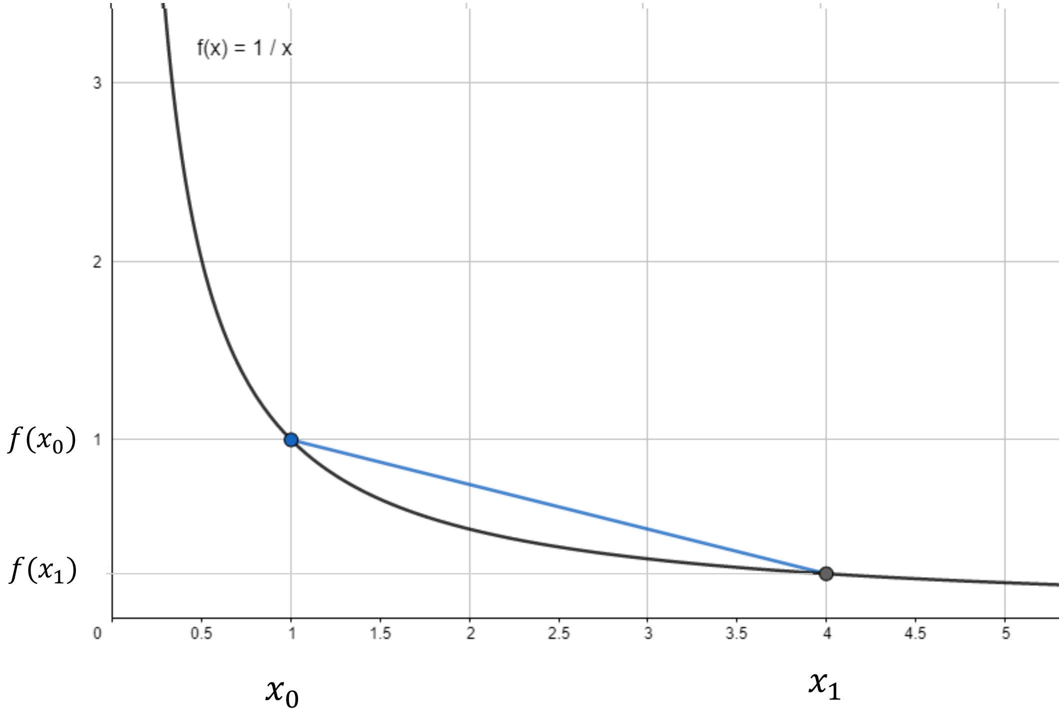
Interpolación de Newton

***Ejercicio 1.1**. Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x)= 1/x. Evaluar para f(3)*

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25

n+1=2 → Puntos

n=1 → Interpolación Lineal



$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

$$b_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}25 - 1}{4 - 1} = 3$$

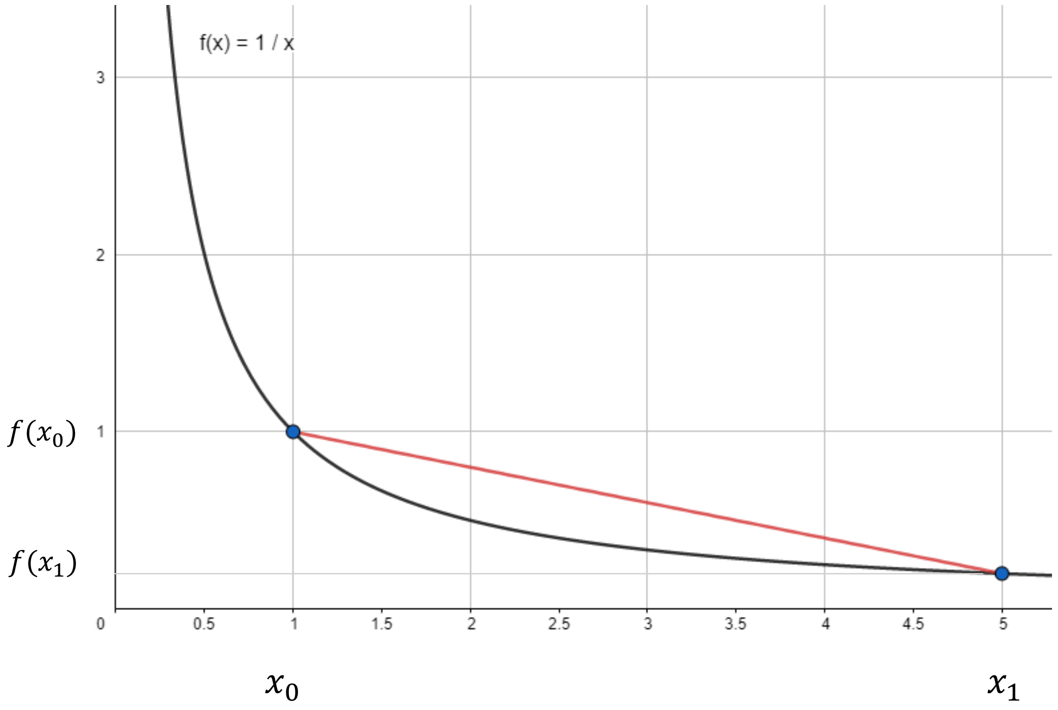
$$\boxed{P_1(x) = 1 - 0{,}25(x - x_0)}$$

Interpolación de Newton

Ejercicio 1.2. *Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x)= 1/x. Evaluar para f(3)*

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	5	0,2

n+1=2 → Puntos
n=1 → Interpolación Lineal



$$P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

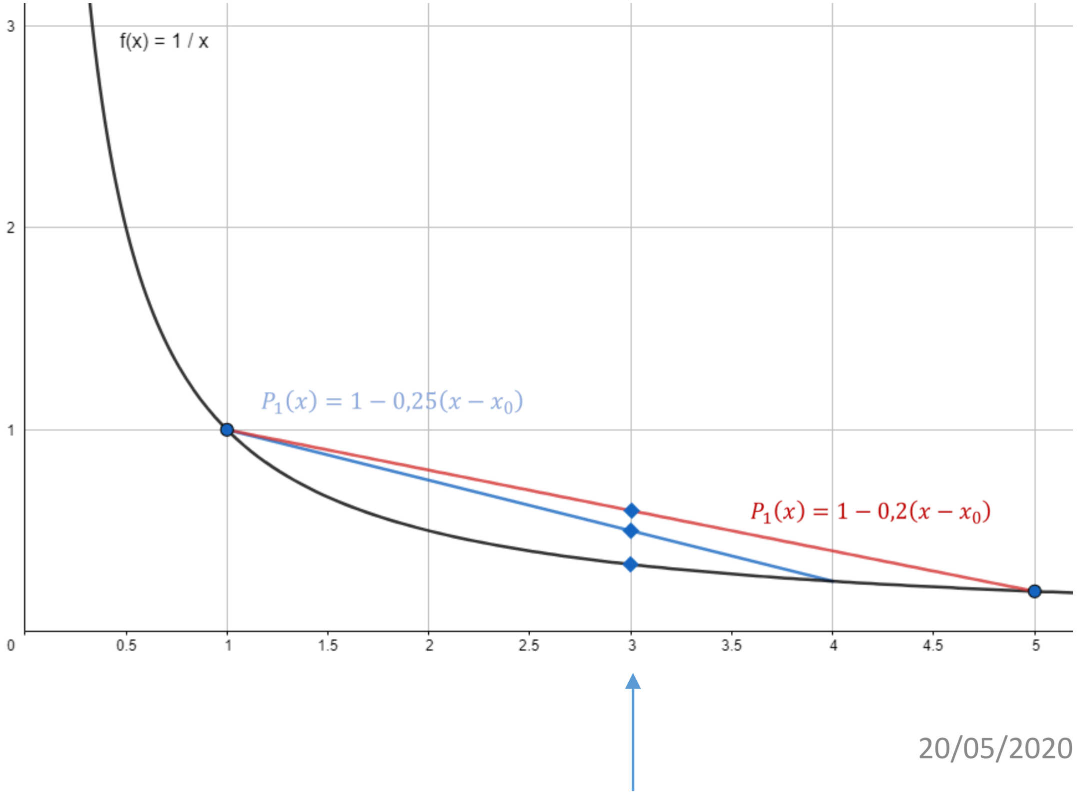
$$b_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}2 - 1}{5 - 1} = -0{,}2$$

$$\boxed{P_1(x) = 1 - 0{,}2(x - x_0)}$$

Interpolación de Newton

***Ejercicio 1.2**. Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x)= 1/x. Evaluar para f(3)*



$P_1(3)$=0,5 $\Rightarrow$ Mejor aproximación del valor real

$f(3)=\frac{1}{3}$ =0,333…

$P_1(3)$=0,6

¿Por qué?

Interpolación de Newton

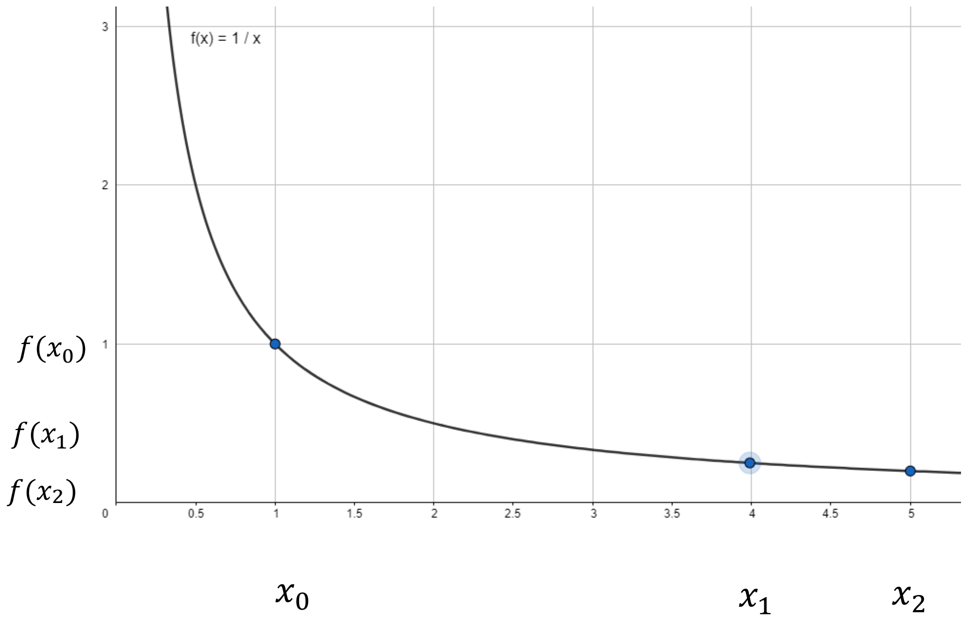
Ejercicio 1.3. *Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x) 1/x.*

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos

n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$



$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolación de Newton

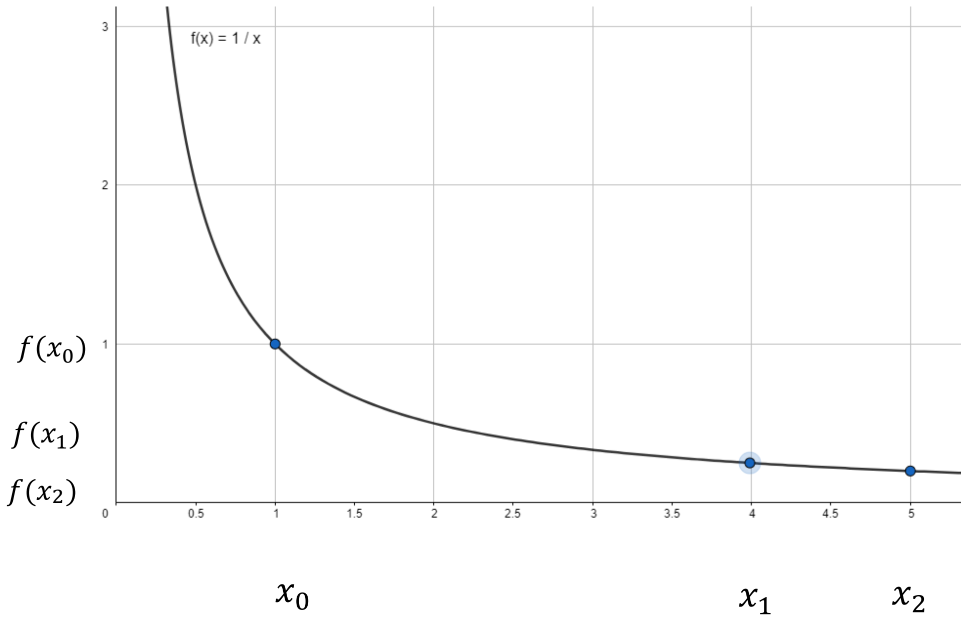
Ejercicio 1.3. Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x) 1/x.

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos

n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$



i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	x0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x2]	f[x0, x1, x2, x3]
1	x1	f(x1)	f[x1, x2]	f[x1, x2, x3]	
2	x2	f(x2)	f[x2, x3]		
3	x3	f(x3)			

Interpolación de Newton

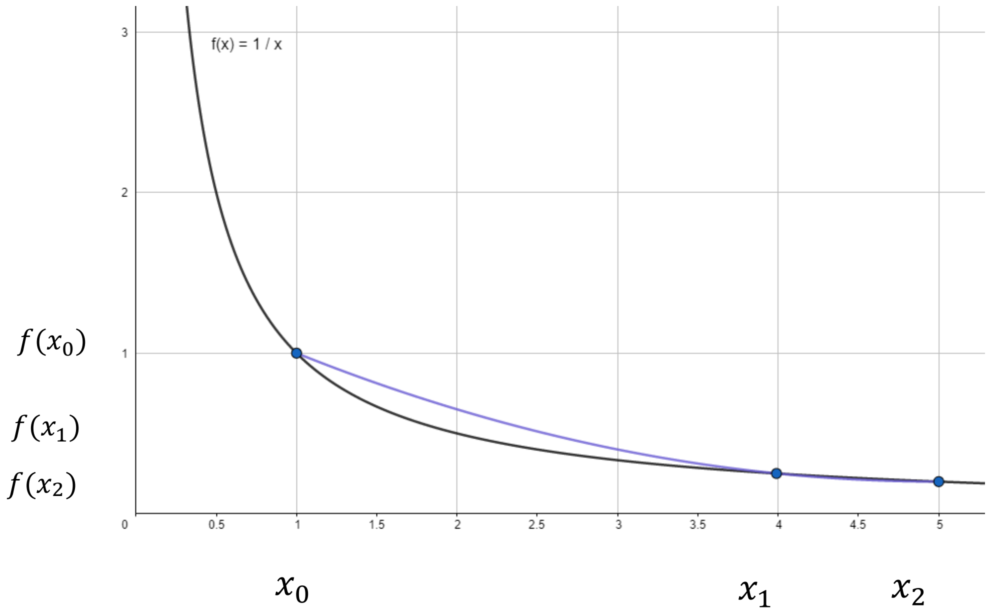
Ejercicio 1.3. *Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x) 1/x.*

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos

n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$



i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$
0	1	1	f[x0, x1]= $\frac{0,25-1}{4-1} = -0,25$	f[x0, x1, x2]= $\frac{-0,05+0,25}{5-1} = 0,05$
1	4	0,25	f[x1, x2]= $\frac{0,2-0,25}{5-4} = -0,05$	
2	5	0,2		

$$\boxed{P_2(x) = 1 - 0,25(x - 1) + 0,05(x - 1)(x - 4)}$$

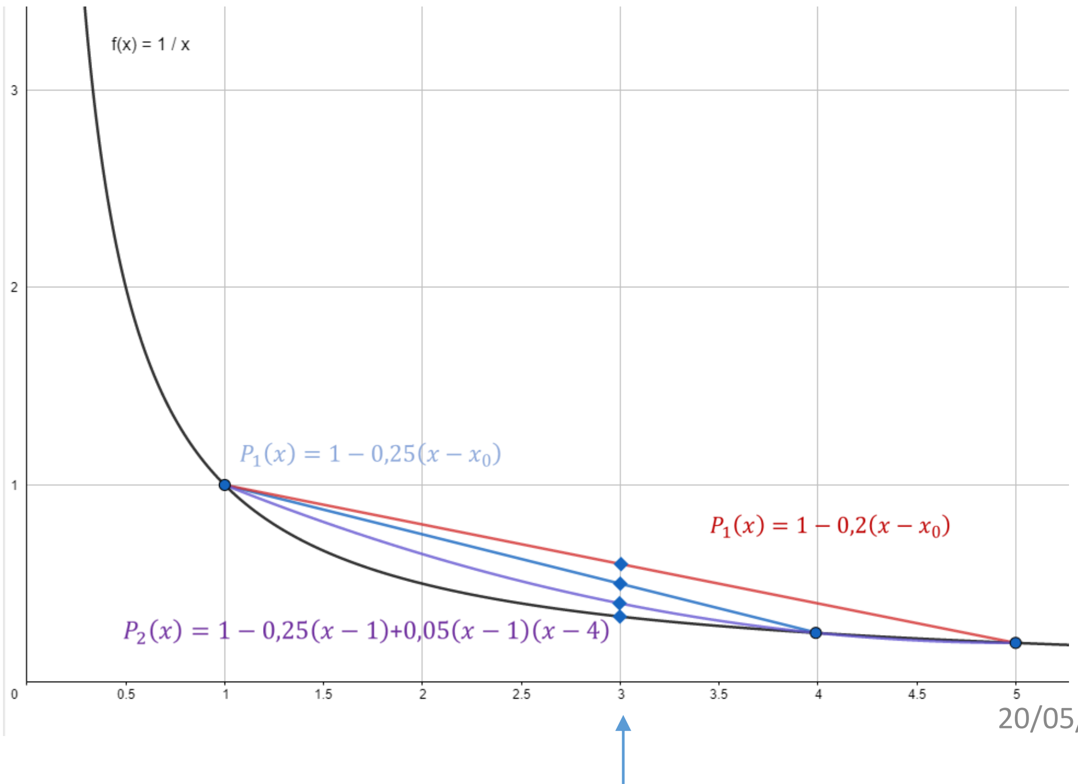
Interpolación de Newton

Ejercicio 1.3. Encontrar el polinomio de Newton que interpola los siguientes puntos dados de la función f(x) 1/x.

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos

n=2 → Interpolación Cuadrática



$P_1(3)$=0,5

$P_1(3)$=0,6

$P_2(3)$=0,4 ⇨ Mejor aproximación del valor real

$f(3)=\frac{1}{3}$ =0,333…

Interpolación de Newton

$$f(x) = P_n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}$$

$\xi(x) \in [x_0, x_n]$ desconocido

Expresión del error de truncamiento R_n

TEOREMA

$$R_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

ESTIMACIÓN

1

$$R_n \cong f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Ec. de Estimación del error de truncamiento

Dato adicional que dispongamos

Interpolación de Newton

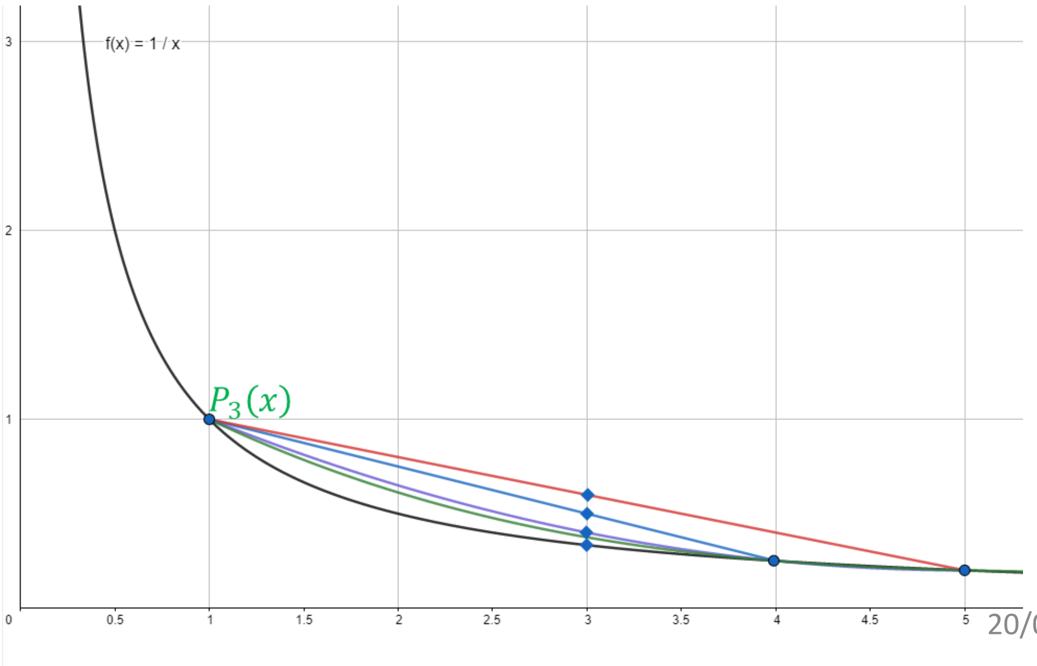
i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2
3	8	0,125

Estimación del error de truncamiento del polinomio de segundo grado a partir de un dato adicional

$$R_2 \cong f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$R_2 \cong -6{,}25.10^{-3}(x-1)(x-4)(x-5) = \text{-0,025}$$

$x = 3$



Interpolación de Newton

$$f(x) = P_n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}$$

$\xi(x) \in [x_0, x_n]$ desconocido

Expresión del error de truncamiento R_n

$\boldsymbol{\xi(x)} \rightarrow \; máx \;\; f^{(n+1)}$

COTA

2 $$|R_n| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \right|$$

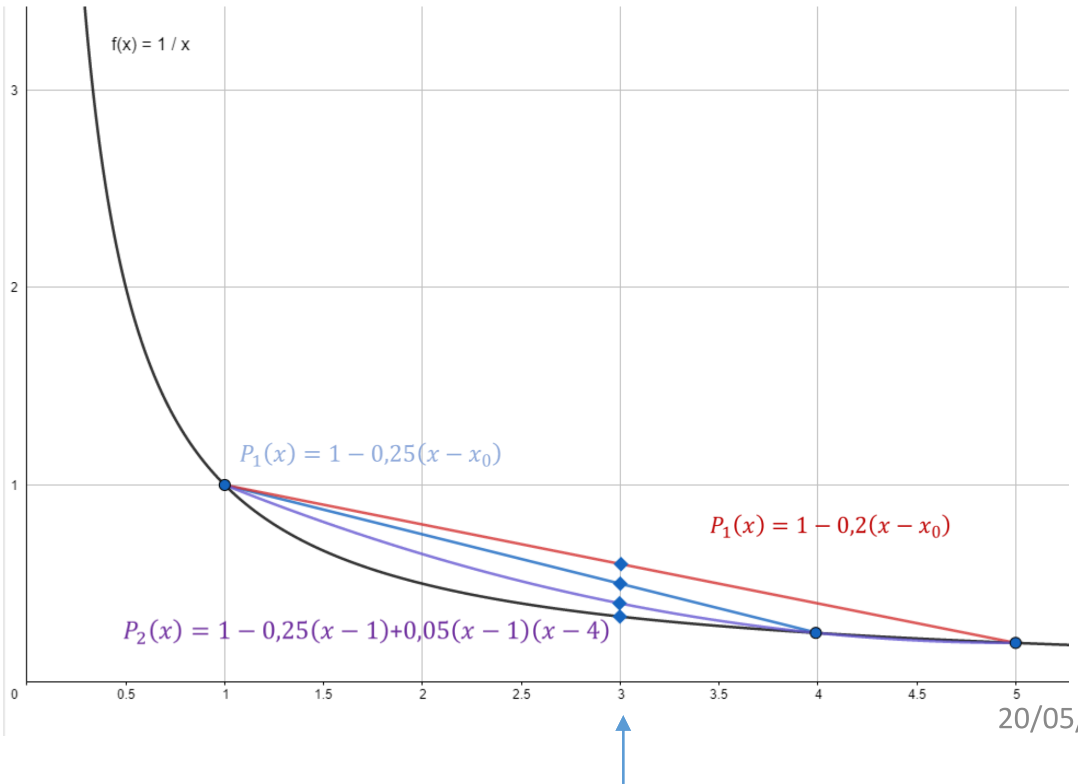
Cota del error de truncamiento

$\xi(x) \in [x_0, x_n] \rightarrow \; máx \;\; f^{(n+1)}$

Interpolación de Newton

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

$$P_2(x) = 1 - 0{,}25(x-1) + 0{,}05(x-1)(x-4)$$



$$|R_2| \leq \left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!} (x-1)(x-4)(x-5) \right| \qquad \xi(x) \in \; [1{,}5]$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \quad \rightarrow \text{máx } |f'''(1)| = |-6|$$

$$|R_2| \leq \left| \frac{-6}{3!} (x-1)(x-4)(x-5) \right| = 4$$

$x = 3$

Cota del error de truncamiento

Interpolación de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\ f(x_i)$$

Es una reformulación del polinomio de Newton, por lo que los polinomios interpolantes resultantes de ambos métodos, son equivalentes.

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolación de Lagrange

Ejercicio1.4. Encontrar el polinomio de grado 2 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0
1	4	1,386294
2	6	1,791759

n+1=3 → Puntos
n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2)$$

$$P_2(x) = L_0(x)\, .\, 0 + L_1(x)\, 1{,}386294 + L_2(x)\, 1{,}791759$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)} = \frac{(x-4)\,(x-6)}{(1-4)\,(1-6)} = \frac{x^2 - 10x + 24}{15}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)} = \frac{(x-1)\,(x-6)}{(4-1)\,(4-6)} = \frac{x^2 - 7x + 6}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)} = \frac{(x-1)\,(x-4)}{(6-1)\,(6-4)} = \frac{x^2 - 5x + 4}{10}$$

Interpolación de Lagrange

Ejercicio1.4. Encontrar el polinomio de grado 2 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0
1	4	1,386294
2	6	1,791759

n+1=3 → Puntos
n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2)$$

$$P_2(x) = L_0(x)\, .\, 0 + L_1(x)\, 1{,}386294 + L_2(x)\, 1{,}791759$$

$$\boxed{P_2(x) = -0{,}0518731\, x^2 + 0{,}7214635\, x - 0{,}6695904}$$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

- A nuestro polinomio interpolante le pedimos:
  - $P(\,x_i) = f(\,x_i) \quad \text{con} \quad i = 0{,}1 \ldots, n$
  - $P^k(\,x_i) = f^k(\,x_i)$
- En nuestra tabla repetiremos filas donde tenga el dato de la derivada k-ésima
- Utilizaremos el método de las Diferencias Finitas para interpolar

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Ejercicio1.5. Utilizando el polinomio de Hermite para lo siguientes datos, calcular una aproximación de f(0,5)

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	1
1	3	6

n+1=4 → Datos

n=3 → Interpolación Cúbica

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	0	f(x0)	f[x0, x0]	f[x0, x0, x1]	f[x0, x0, x1, x1]
0	0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x1]	
1	1	f(x1)	f[x1, x1]		
1	1	f(x1)			

$$f[x_0, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{x_0 - x_0} \rightarrow ind$$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Ejercicio1.5. Utilizando el polinomio de Hermite para lo siguientes datos, calcular una aproximación de f(0,5)

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	1
1	3	6

n+1=4 → Puntos

n=3 → Interpolación Cúbica

i	x_i	$f(x_i)$	f$[x_i, x_i]$	f$[x_i, x_i, x_i]$	f$[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	0	f(x0)	f[x0, x0]=f´(x0)	f[x0, x0, x1]	f[x0, x0, x1, x1]
0	0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x1]	
1	1	f(x1)	f[x1, x1]=f´(x1)		
1	1	f(x1)			

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Interpolación de Hermite (a partir de diferencias divididas)

Ejercicio1.5. Utilizando el polinomio de Hermite para lo siguientes datos, calcular una aproximación de f(0,5)

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0	1
1	3	6

n+1=4 → Puntos
n=3 → Interpolación Cúbica

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

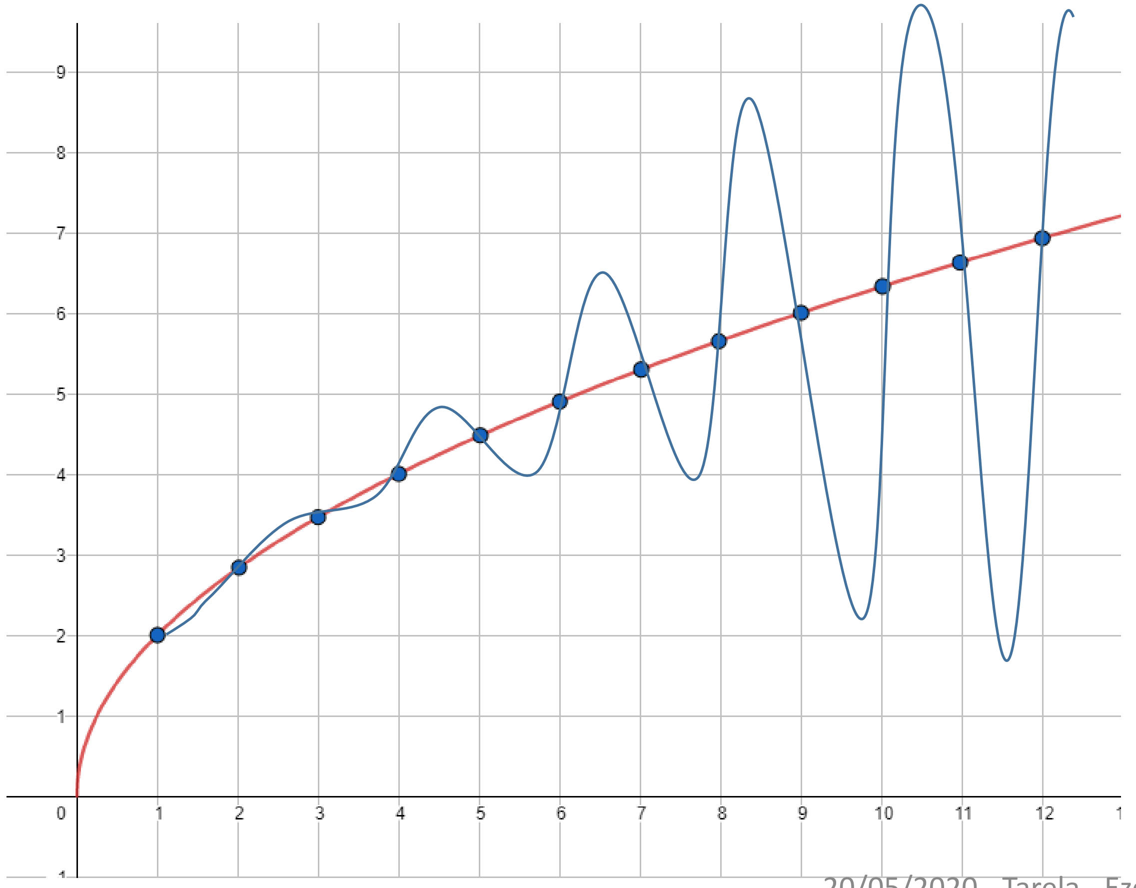
i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	0	0	f´(x0)=1	$\frac{3-1}{1-0} = 2$	$\frac{3-2}{1-0} = 1$
0	0	0	$\frac{3-0}{1-0} = 3$	$\frac{6-3}{1-0} = 3$	
1	1	3	f´(x1)=6		
1	1	3			

$$\boxed{P_3(x) = 0 + 1\,(x - 0) + 2(x - 0)^2 + 1(x - 0)^2(x - 1)}$$

Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebycheff

Fenómeno de Runge

→ n>10
→ nodos equiespaciados
→típico en funciones pares

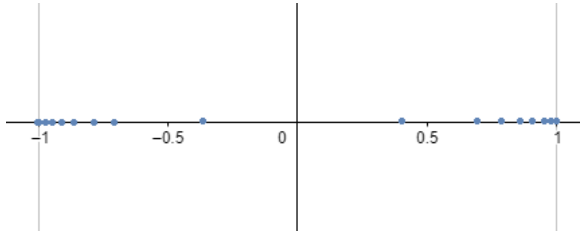


Para grados de polinomios altos(n>10) y nodos equiespaciados, aparecen oscilaciones en el polinomio interpolante entre los nodos, aumentando el error en la aproximación de la función.

⇩

Nodos de Tchebycheff

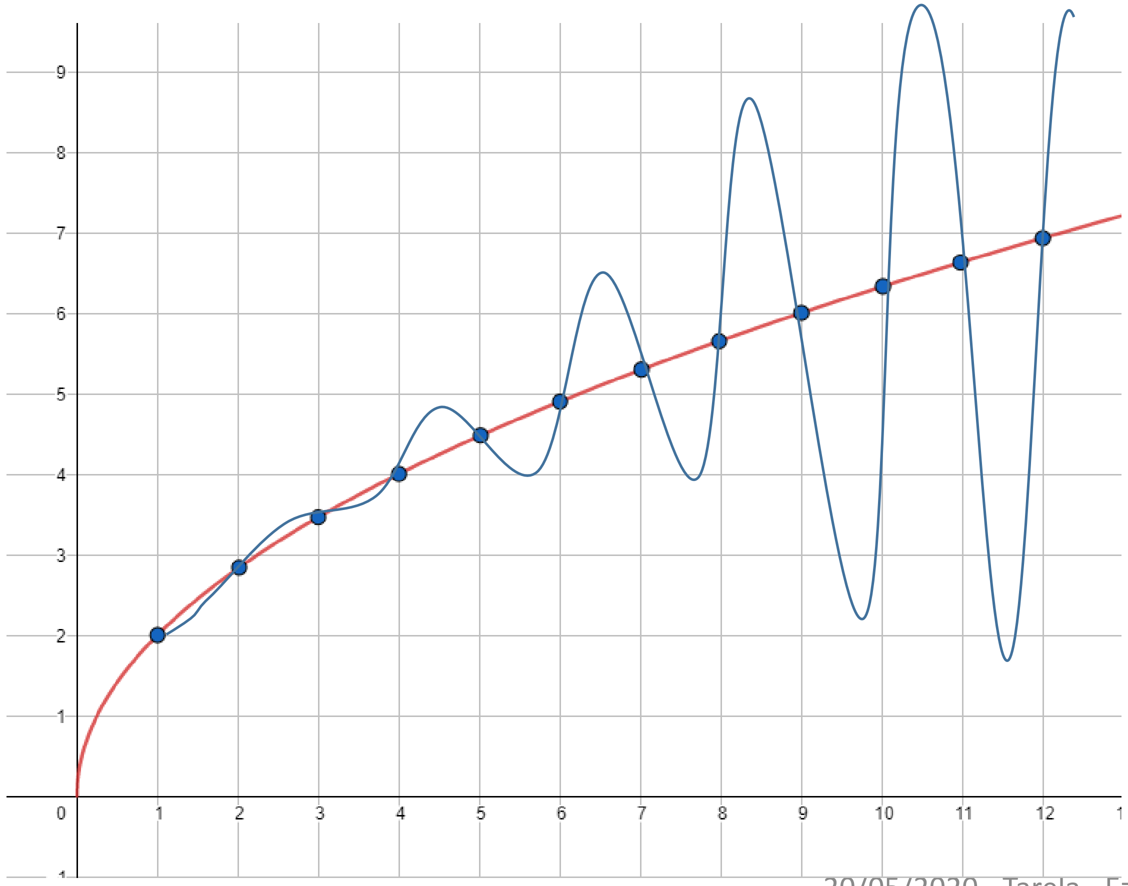
$$t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \qquad [-1,1]$$



Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebycheff

Fenómeno de Runge

→ n>10
→ nodos equiespaciados
→típico en funciones pares



Para grados de polinomios altos(n>10) y nodos equiespaciados, aparecen oscilaciones en el polinomio interpolante entre los nodos, aumentando el error de truncamiento en la aproximación de la función.

⇩

Nodos de Tchebycheff

$$t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad [-1,1]$$

$$\tilde{x}_i = a + \frac{b-a}{2}\,(t_i+1) \qquad [a,b]$$

Fenómeno de Runge – Polinomios de Tchebycheff

Ejemplo. *Polinomio de interpolación con abscisas de Tchebycheff*

1

Datos

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	0,5	1,648
2	1	2,718

Necesitamos conocer la función f(x)

2

Abscisas de Tchebycheff

$$t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{3}\frac{\pi}{2}\right) \quad [-1,1]$$

i	x_i	$f(x_i)$	t_i
0	0	1	$\cos\left(\frac{2.0+1}{3}\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}866$
1	0,5	1,648	$\cos\left(\frac{2.1+1}{3}\frac{\pi}{2}\right) = 0$
2	1	2,718	$\cos\left(\frac{2.2+1}{3}\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}866$

3

Transformo intervalo [-1,1] → [0,1]

$$\tilde{x}_i = 0 + \frac{1-0}{2}(t_i + 1) \quad [0,1]$$

i	$\widetilde{x}_i$	$f(\tilde{x}_i)$
0	0,9330	2,5421
1	0,5	1,648
2	0,0669	0,6928

4

Hallo el polinomio interpolante con alguno de los métodos conocidos.

MUCHAS GRACIAS!