

Sistemas de ecuaciones lineales: Métodos iterativos

Ing. Diego Ezcurra

1. Introducción

Los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales aparecen como alternativa a los métodos directos dado que tienen la gran ventaja de no propagar errores de redondeo. De esta manera, funcionan muy bien para resolver sistemas grandes, poco densos (con muchos ceros) y/o con mal condicionamiento.

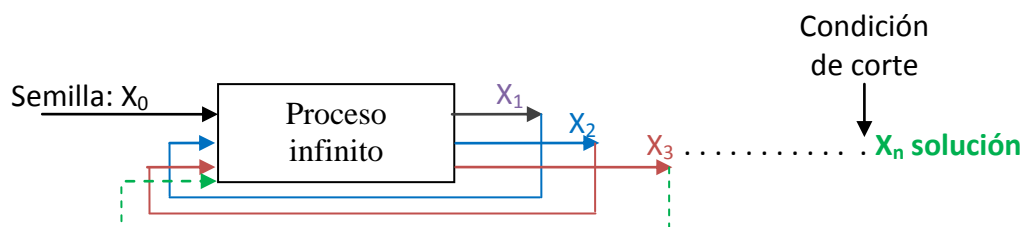
En contrapartida, introducen errores de truncamiento, requieren una semilla válida para funcionar (ver convergencia) y se debe establecer una condición de corte apropiada.

La estructura general de estos métodos responde a la siguiente expresión:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}_k + \mathbf{C}$$

Siendo \mathbf{T} y \mathbf{C} , la matriz y la constante de iteración respectivamente. Siendo así, los métodos vistos en el curso (Jacobi, Gauss-Seidel y SOR) difieren entre sí en la forma de obtener la matriz \mathbf{T} y la constante \mathbf{C} .

Los métodos iterativos funcionan repitiendo la función de iteración “n” veces hasta alcanzar la precisión buscada.



2. Ejemplo

Vamos a resolver el siguiente SEL

$$\begin{aligned}x + y - 5z &= 3 \\8x + 2,5y + 1,2z &= 67,9 \\3x - 9y + 4z &= 1\end{aligned}$$

Para ello, analizaremos la convergencia y lo resolveremos por Jacobi, Gauss Seidel y SOR.

Comencemos por el **Método de Jacobi**, en el cual, en su forma indicial, despejaremos la variable i de la i -ésima ecuación, obteniendo así nuestro esquema iterativo.

$$x_{k+1} = 3 - y_k + 5z_k$$

$$y_{k+1} = \frac{67,9 - 8x_k - 1,2z_k}{2,5}$$

$$z_{k+1} = \frac{1 - 3x_k + 9y_k}{4}$$

La matriz de iteración en este caso se puede extraer fácilmente de las ecuaciones anteriores:

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3,2 & 0 & -0,48 \\ -0,75 & 2,25 & 0 \end{pmatrix}$$

Analizando la matriz T, calculamos la norma infinito (máximo de la suma del módulo de cada componente de cada fila) y la norma uno (máximo de la suma del módulo de cada componente de cada columna)

$$\|T\|_{\infty} = 6$$

$$\|T\|_1 = 5,48$$

Vemos que ambas normas son mayores a 1. En base a esto podemos concluir que la convergencia NO está asegurada, pero no sabemos si converge o diverge.

Para poder saberlo debemos calcular el radio espectral de la matriz T [$\rho(T_J)$], es decir, el máximo de los autovalores en modulo.

$$\text{Det}(T_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 & 5 \\ -3,2 & 0 - \lambda & -0,48 \\ -0,75 & 2,25 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda (\lambda^2 + 1,08) - (-1) (3,2\lambda - 0,36) + 5 (-7,2 - 0,75\lambda)$$

Obtenemos el polinomio característico y buscamos sus raíces: $-\lambda^3 - 1,63\lambda - 36,36 = 0$

$|\lambda| \cong 3,15 \Rightarrow$ Puedo asegurar que diverge ya que $\rho(T_J) > 1$

Si permutamos la matriz A, podemos transformarla en una matriz estrictamente diagonal dominante, propiedad que asegura la convergencia para Jacobi y Gauss-Seidel.

$$8x + 2,5y + 1,2z = 67,9$$

$$3x - 9y + 4z = 1$$

$$x + y - 5z = 3$$

Armamos los esquemas iterativos con la forma indicial:

Método de Jacobi	Método de Gauss-Seidel
$x_{k+1} = \frac{67,9 - 2,5y_k - 1,2z_k}{8}$ $y_{k+1} = \frac{1 - 3x_k + 4z_k}{-9}$ $z_{k+1} = \frac{3 - x_k + y_k}{-5}$	$x_{k+1} = \frac{67,9 - 2,5y_k - 1,2z_k}{8}$ $y_{k+1} = \frac{1 - 3x_{k+1} + 4z_k}{-9}$ $z_{k+1} = \frac{3 - x_{k+1} + y_{k+1}}{-5}$

Notemos que el método de Gauss Seidel acelera la convergencia de Jacobi dado que utiliza información ya calcula para cada nuevo valor.

Ya sabemos que la convergencia está asegurada, pero vamos a verlo también analizando la norma de la matriz T.

Recordando que A puede reescribirse como D-L-U:

Método de Jacobi

$$T_J = (D)^{-1} \cdot (L+U)$$

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -0,3125 & -0,15 \\ 0,333 & 0 & 0,444 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|T_J\|_{\infty} = 0,78$$

$$\|T_J\|_1 = 0,59$$

Método de Gauss-Seidel

$$T_{GS} = (D-L)^{-1} \cdot U$$

$$T_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -0,3125 & -0,15 \\ 0 & -0,1042 & 0,3944 \\ 0 & -0,0833 & 0,0488 \end{pmatrix}$$

$$\|T_{GS}\|_{\infty} = 0,49$$

$$\|T_{GS}\|_1 = 0,59$$

Vemos que existe una norma menor a 1, lo cual asegura la convergencia.

Si completamos el análisis con el radio espectral:

Polinomio característico Jacobi

$$-\lambda^3 - 0,0453\lambda - 0,0377$$

$$|\lambda| \cong 0,3 \Leftrightarrow \text{converge}$$

Polinomio característico Gauss-Seidel

$$-\lambda^3 - 0,0554\lambda^2 - 0,0278\lambda$$

$$|\lambda| \cong 0,03 \Leftrightarrow \text{converge}$$

Además de ver que converge, también vemos que GS lo hace mas rápido! $\rho(T_{GS}) < \rho(T_J)$

Vamos a resolver mediante ambos métodos hasta una precisión relativa del 10%, calculada como $\|X_{k+1} - X_k\|_\infty / \|X_{k+1}\|_\infty$, siendo $X = (x; y; z)$.

Adoptamos como valor semilla el vector arbitrario (0 ; 0 ; 0) recordando que si se asegura la convergencia, esto se mantiene para cualquier semilla elegida.

JACOBI

GAUSS SEIDEL

k	xk	yk	zk	err%	xk	yk	zk	err%
0	0,000	0,000	0,000		0,000	0,000	0,000	
1	8,488	-0,111	-0,600	1,000	8,488	2,718	1,641	1,000
2	8,612	2,451	1,075	0,298	7,392	3,082	1,495	0,148
3	7,560	3,238	1,613	0,139	7,300	2,987	1,457	0,013
4	7,234	3,126	1,560	0,045	7,336	2,982	1,463	0,005

<0,1

Método SOR

Este método intenta acelerar la convergencia respecto de GS, utilizando el concepto de residuo (R).

$R_{GS} = X_{k+1} - X_k \Rightarrow X_{k+1} = X_k + R_{GS}$, siendo que el residuo es una medida de la diferencia que le falta a X_k para mejorar hasta X_{k+1} , si le agregamos un factor de ponderación a este residuo, que llamamos ω , obtenemos la expresión de SOR.

$$X_{k+1} = X_k + \omega \cdot R \Rightarrow X_{k+1} = X_k + \omega \cdot (X_{k+1} - X_k) \Rightarrow \boxed{X_{k+1} = \omega \cdot X_{k+1} + (1-\omega) \cdot X_k}$$

Aplicamos la expresión al problema anterior:

$$x_{k+1} = \frac{67,9 - 2,5y_k - 1,2z_k}{8} * \omega + (1 - \omega) * x_k$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - 3x_{k+1} + 4z_k}{-9} * \omega + (1 - \omega) * y_k$$

$$z_{k+1} = \frac{3 - x_{k+1} + y_{k+1}}{-5} * \omega + (1 - \omega) * z_k$$

X_{k+1} de GS

Resolviendo para la misma semilla:

$$\text{SOR } \omega = 1.01$$

k	xk	yk	zk	err%
0	0,000	0,000	0,000	
1	8,572	2,774	1,686	1,0000
2	7,356	3,093	1,488	0,165
3	7,297	2,981	1,455	0,015
4	7,338	2,982	1,464	0,006

<0,1