Problema de Valores de Contorno – PVC

Método de las Diferencias Finitas

1. Introducción

Este tipo de problemas, involucran la resolución de ecuaciones diferenciales cuyas condiciones están dadas para distintos valores de la variable independiente, a diferencia de los Problemas de Valores Iniciales (PVI) cuyas condiciones iniciales estaban siempre dadas sobre un mismo punto de “x”.
Resolveremos ecuaciones diferenciales de segundo orden a través del método de Diferencias Finitas Centradas, para lo que necesitaremos dos condiciones de borde (CB). Dependiendo de cómo estén dadas esas condiciones, resulta la clasificación:

⇒ CB tipo Dirichlet: vienen dadas con la forma $\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$

⇒ CB tipo Neuman: vienen dadas con la forma $\begin{cases} y(a) = \alpha \\ y'(b) = \beta \end{cases}$ o $\begin{cases} y'(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$

⇒ CB tipo Neuman puro: vienen dadas con la forma $\begin{cases} y'(a) = \alpha \\ y'(b) = \beta \end{cases}$ → ∞ Soluciones

2.1 Ejercicio – Problema lineal con CB tipo Dirichlet

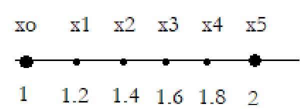
Sea el siguiente problema:

$$y''x^2 - 5xy' + 8y = 24 \quad ; \quad 1 \le x \le 2 \, ; \quad y(1) = 3 \quad ; \quad y(2) = 15 \qquad (1)$$

Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso h=0,2

La resolución de este tipo de problemas, involucra la sustitución de cada una de las derivadas en la ecuación diferencial por su aproximación en diferencias finitas centradas. En nuestro caso utilizaremos aproximaciones de $O(2)$.

→Discretizamos el dominio con un paso h=0,2:



→Discretizamos la condiciones de borde y la ecuación diferencial utilizando las aproximaciones en diferencias centradas de $O(2)$:

$$y \sim u_n$$
$$y' \sim u'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$
$$y'' \sim u''_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

$$CB \quad y(1) = 3 \sim u_0 = 3$$
$$y(2) = 15 \sim u_5 = 15$$

⇒ Reemplazamos en (1):

$$\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2} \quad x_n{}^2-5\ x_n \quad \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} \quad +\ 8\ u_n = 24$$

Re-ordenando al expresión y sacando factor común de los $u_{n+1};\ u_n;\ u_{n-1}$ nos queda:

$$u_{n+1}\left(\frac{x_n{}^2}{h^2}+\frac{5\,x_n}{2h}\right)+u_n\left(\frac{-2\ x_n{}^2}{h^2}+8\right)+u_{n-1}\left(\frac{x_n{}^2}{h^2}-\frac{5\,x_n}{2h}\right) \quad = 24 \qquad (2)$$

Para resolver el ejercicio, evaluamos la ecuación para cada valor de n:

n=0 x0=1 $u_0 \ = 3$ (→ es nuestra CB, es dato.)

n=1 x1=1.2 $u_2\left(\frac{x_1{}^2}{h^2}-\frac{5\,x_1}{2h}\right)+u_1\left(\frac{-2\ x_1{}^2}{h^2}+8\right)+u_0\left(\frac{x_1{}^2}{h^2}+\frac{5\,x_1}{2h}\right)=24$

n=2 x2=1.4 $u_3\left(\frac{x_2{}^2}{h^2}-\frac{5\,x_2}{2h}\right)+u_2\left(\frac{-2\ x_2{}^2}{h^2}+8\right)+u_1\left(\frac{x_2{}^2}{h^2}+\frac{5\,x_2}{2h}\right)=24$

n=3 x3=1.6 $u_4\left(\frac{x_3{}^2}{h^2}-\frac{5\,x_3}{2h}\right)+u_3\left(\frac{-2\ x_3{}^2}{h^2}+8\right)+u_2\left(\frac{x_3{}^2}{h^2}+\frac{5\,x_3}{2h}\right)=24$

n=4 x4=1.8 $u_5\left(\frac{x_4{}^2}{h^2}-\frac{5\,x_4}{2h}\right)+u_4\left(\frac{-2\ x_4{}^2}{h^2}+8\right)+u_3\left(\frac{x_4{}^2}{h^2}+\frac{5\,x_4}{2h}\right)=24$

n=5 x5=2 $u_5 = 15$ (→ es nuestra CB, es dato.)

Las expresiones remarcadas en "**gris**" no son incógnitas, contienen los valores dato de u0 y u5. Reemplazando los valores conocidos del problema, nos queda:

n=0 x0=1 $u_0 \ = 3$

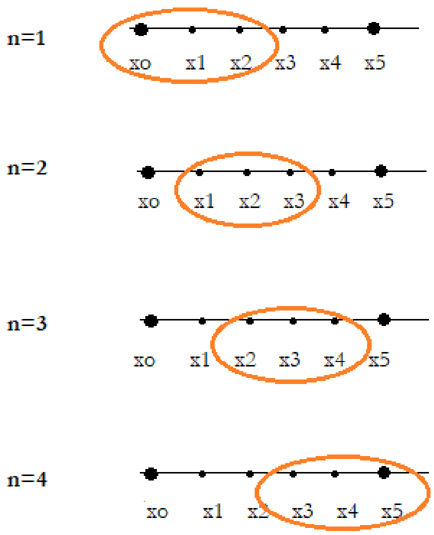
$$\left.\begin{array}{lllll}
\text{n=1} & \text{x1=1.2} & u_2\ 21 + u_1\,(-64) & & = -129 \\
\text{n=2} & \text{x2=1.4} & u_3\ 31.5 + u_2\,(-90) & + u_1\ 66.5 & = 24 \\
\text{n=3} & \text{x3=1.6} & u_4\ 44 + u_3\ (-120) & + u_2\ 84 & = 24 \\
\text{n=4} & \text{x4=1.8} & u_4(-154) & + u_3 103.5 & = -853.5
\end{array}\right\}\ \text{SEL 4X4}$$

n=5 x5=2 $u_5 = 15$

Vemos que el problema se reduce a calcular un sistema de ecuaciones lineales, en este caso con cuatro incógnitas u1, u2, u3 y u4. Notemos que cuanto menor es el paso h, mayor discretizado tenemos el dominio, y el sistema de ecuaciones a resolver aumenta de dimensión.

Si analizamos esta serie de ecuaciones, vemos que en cada línea, utilizamos la información de solo tres puntos ("n", "n+1", "n-1"), justamente debido a las aproximaciones centradas que elegimos. Podríamos referirnos a este grupo de 3 puntos como nuestra "célula de cálculo" que conforme avanzamos para cada "n", se mueve de 3 en 3. Este comportamiento deriva en una matriz tridiagonal.

Si planteamos nuestro sistema de ecuaciones de forma matricial y resolvemos, nos queda:



SEL 4X4:

$$\begin{pmatrix} -64 & 21 & 0 & 0 \\ 66{,}5 & -90 & 31 & 0 \\ 0 & 84 & -120 & 44 \\ 0 & 0 & 103{,}5 & -154 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -129 \\ 24 \\ 24 \\ -853{,}5 \end{pmatrix}$$

↓

u1=3.5890

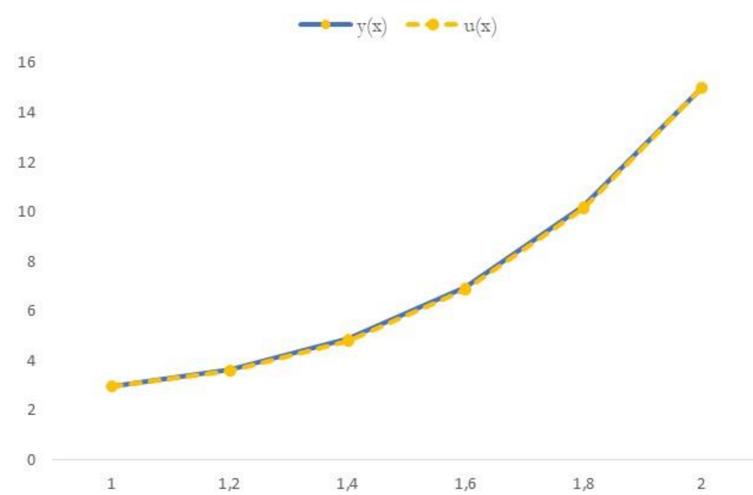
u2=4.7952

u3=6.8856

u4=10.170

Resumiendo, en una tabla y comparando con los datos reales:

xi	ui	y(x)	|e(x)|
1	3	3	
1,2	3,5890	3,6336	0,0446
1,4	4,7952	4,8816	0,0864
1,6	6,8856	6,9936	0,1080
1,8	10,170	10,258	0,0876
2	15	15	



2.2 Ejercicio – Problema lineal con CB tipo Neuman

Resolver la misma ecuación diferencial anterior, utilizando:

$$y''x^2 - 5xy' + 8y = 24 \quad ; \; 1 \le x \le 2\,; \quad y(1) = 3 \quad ; \quad y'(2) = 28 \qquad (1)$$

Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso h=0,2

En este caso el problema varía en una de las CB, dándonos información sobre el valor de la derivada en x=2. El proceso de discretización es el mismo, pero notar que ahora una de las CB esta primada:

$$y \sim u_n$$
$$y' \sim u'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$
$$y'' \sim u''_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

$$CB \quad y(1) = 3 \sim u_0 = 3$$
$$\boldsymbol{y'(2) = 28 \sim u'_5 = 28}$$

Discretizo la ecuación diferencial y reordeno:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \; {x_n}^2 - 5 \; x_n \; \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} + 8 \; u_n = 24$$

$$u_{n+1}\left(\frac{{x_n}^2}{h^2} - \frac{5\,x_n}{2h}\right) + u_n\left(\frac{-2\;{x_n}^2}{h^2} + 8\right) + u_{n-1}\left(\frac{{x_n}^2}{h^2} + \frac{5\,x_n}{2h}\right) = 24$$

Evaluamos la ecuación para cada valor de n:

n=0 x0=1 $u_0 = 3$ (→ es nuestra CB, es dato.)

n=1 x1=1,2 $u_2\left(\frac{{x_1}^2}{h^2} - \frac{5\,x_1}{2h}\right) + u_1\left(\frac{-2\;{x_1}^2}{h^2} + 8\right) + u_0\left(\frac{{x_1}^2}{h^2} + \frac{5\,x_1}{2h}\right) = 24$

n=2 x2=1,4 $u_3\left(\frac{{x_2}^2}{h^2} - \frac{5\,x_2}{2h}\right) + u_2\left(\frac{-2\;{x_2}^2}{h^2} + 8\right) + u_1\left(\frac{{x_2}^2}{h^2} + \frac{5\,x_2}{2h}\right) = 24$

n=3 x3=1,6 $u_4\left(\frac{{x_3}^2}{h^2} - \frac{5\,x_3}{2h}\right) + u_3\left(\frac{-2\;{x_3}^2}{h^2} + 8\right) + u_2\left(\frac{{x_3}^2}{h^2} + \frac{5\,x_3}{2h}\right) = 24$

n=4 x4=1,8 $u_5\left(\frac{{x_4}^2}{h^2} - \frac{5\,x_4}{2h}\right) + u_4\left(\frac{-2\;{x_4}^2}{h^2} + 8\right) + u_3\left(\frac{{x_4}^2}{h^2} + \frac{5\,x_4}{2h}\right) = 24$

n=5 x5=2 $\boldsymbol{u_6}\left(\frac{{x_5}^2}{h^2} - \frac{5\,x_5}{2h}\right) + u_5\left(\frac{-2\;{x_5}^2}{h^2} + 8\right) + u_4\left(\frac{{x_5}^2}{h^2} + \frac{5\,x_5}{2h}\right) = 24 \qquad (2)$

Al no contar con el valor de la función en el extremo x=2, u5 es también una incógnita y el SEL aumenta de dimensión. En el desarrollo para n=5, se presenta el inconveniente de necesitar un valor u6 desconocido, el cual se encuentra fuera de nuestro intervalo de discretización y por ende fuera del dominio del problema. A este nodo se lo denomina, **NODO FANTASMA**, y el inconveniente se resuelve igualando la aproximación de la derivada a la CB dato en x=2:

$$u'_5 = \frac{u_6 - u_4}{2h} = 28 \quad \rightarrow \; u_6 = 56h + u_4$$

El valor de u6 lo reemplazamos en (2):

n=5 x5=2 $$(56h + u_4)\left(\frac{x_5{}^2}{h^2} - \frac{5\,x_5}{2h}\right) + u_5\left(\frac{-2\;x_5{}^2}{h^2} + 8\right) + u_4\left(\frac{x_5{}^2}{h^2} + \frac{5\,x_5}{2h}\right) = 24$$

Y reemplazando con los valores del ejercicio y resolviendo el sistema de ecuaciones:

n=0 x0=1 $u_0 = 3$

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1 & x1=1,2 & u_2\;21 + u_1\,(-64) = -129 \\
n=2 & x2=1,4 & u_3\;31.5 + u_2\,(-90) + u_1\,66.5 = 24 \\
n=3 & x3=1,6 & u_4\;44 + u_3\,(-120) + u_2\;84 = 24 \\
n=4 & x4=1,8 & u_5\,58.5 + u_4(-154) + u_3 103.5 = 24 \\
n=5 & x5=2 & u_5(-192) + u_4 200 = -816
\end{array}\right\} \text{SEL 5X5}$$

$$\begin{pmatrix} -64 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 66,5 & -90 & 31 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & -120 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 103,5 & -154 & 58.5 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & -19.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -129 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ -816 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u1=3,5687 \\ u2=4,7332 \\ u3=6,7515 \\ u4=9,9224 \\ u5=14,586 \end{array}}$$

Notar que la cantidad de nodos fantasma dependen de la cantidad de puntos que utilicemos en las aproximaciones de las derivadas, y por el ende del orden de nuestra aproximación.

2.3 Ejercicio – Método Upwinding - fenómeno de Capa Límite

Sea el problema:

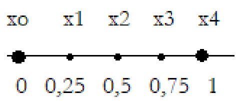
$$0{,}1y'' + y' + y = 0 \quad ; \; 0 \le x \le 1\,; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \qquad (1)$$

a) Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso h=0,25.

b) Resolver nuevamente por el método de "upwinding" con igual paso.

c) Siendo la solución analítica $y(x) = 3{,}08777\,(e^{-1{,}12702x} - e^{-8{,}87298x})$, graficar resultados y comparar.

a) Este problema plantea una ecuación diferencial lineal con condiciones de borde tipo Dirichlet. Vamos a usar las siguientes discretizaciones y resolvemos como en el ejemplo anterior el sistema de ecuaciones lineales:



$$y \sim u_n$$
$$y' \sim u'_n = \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h}$$
$$y'' \sim u''_n = \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2}$$

$$CB \quad y(0) = 0 \;\sim\; u_0 = 0$$
$$y(1) = 1 \;\sim\; u_4 = 1$$

Ecuación diferencial discretizada:

$$0{,}1\;\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{h^2} + \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2h} + u_n = 0$$

$$u_{n+1}\left(\frac{0{,}1}{h^2}+\frac{1}{2h}\right) + u_n\left(1-\frac{2\,.\,0{,}1}{h^2}\right) + u_{n-1}\left(\frac{0{,}1}{h^2}-\frac{1}{2h}\right) = 0$$

n=0 x0=0 $u_0 = 0$

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1 & x1=0{,}25 & u_2\;3.6 + u_1\,(-2{,}2) = u_0\;4{,}4 \\
n=2 & x2=0{,}5 & u_3\;3{,}6 + u_2\,(-2{,}2) + u_1\,(-0{,}4) = 0 \\
n=3 & x3=0{,}75 & u_3\,(-2{,}2) + u_2\,(-0{,}4) = -u_4\;3{,}6
\end{array}\right\}\;\text{SEL 3X3}$$

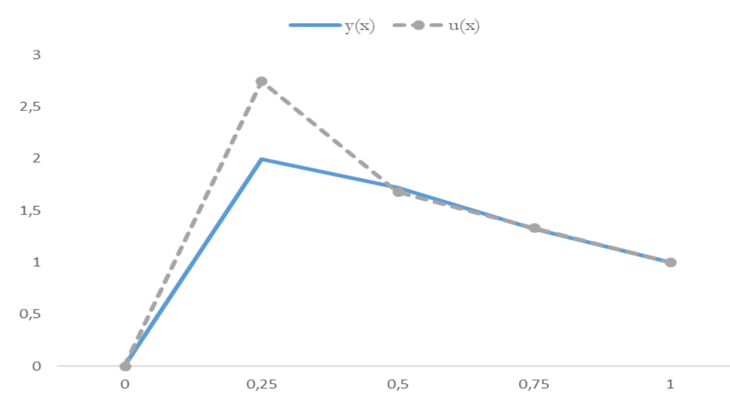
n=4 x4=1 $u_4 = 1$

Resuelvo el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} -2{,}2 & 3{,}6 & 0 \\ -0{,}4 & -2{,}2 & 3{,}6 \\ 0 & -0{,}4 & -2{,}2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} u1=2{,}7471 \\ u2=1{,}3311 \\ u3=1{,}6788 \end{array}}$$

Si comparamos con los valores reales de la función y graficamos, vemos que el modelo aproxima mejor la parte estacionaria de la función, pero empeora la aproximación en el transitorio.

xi	ui	y(x)	|e(x)|
0	0	0	0
0,25	2,7471	1,9936	0,7534
0,5	1,6788	1,7210	0,0423
0,75	1,3311	1,3220	0,0091
1	1,0000	1,0000	0



Este fenómeno ocurre en los casos en que el coeficiente que acompaña a la derivada segunda en nuestra ecuación diferencial, es mucho menor que el coeficiente de la derivada primera, costándole al modelo acompañar los cambios bruscos de pendiente.

Esta situación podemos mejorarla, si descentramos la derivada primera en nuestra discretización. Por ejemplo, utilizando una aproximación en adelanto:

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{h}$$

b) Resolvemos nuevamente el ejercicio, pero ahora con la primera derivada descentrada:

$$y \sim u_n$$
$$y' \sim u'_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{h}$$
$$y'' \sim u''_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

$$CB \quad y(0) = 0 \sim u_0 = 0$$
$$y(1) = 1 \sim u_4 = 1$$

Ecuación diferencial discretizada:

$$0{,}1 \; \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} + \frac{u_{n+1} - u_n}{h} + u_n = 0$$

$$u_{n+1}\left(\frac{0{,}1}{h^2} + \frac{1}{h}\right) + u_n\left(1 - \frac{2\,.\,0{,}1}{h^2} - \frac{1}{h}\right) + u_{n-1}\left(\frac{0{,}1}{h^2}\right) = 0$$

n=0 x0=0 $u_0 = 0$

n=1 x1=0,25 $u_2\; 5{,}6 + u_1\,(-6{,}2) = -u_0 1{,}6$

n=2 x2=0,50 $u_3\; 5{,}6 + u_2\,(-6{,}2) + u_1\, 1{,}6 = 0$

n=3 x3=0,75 $u_3\,(-6{,}2) + u_2\,(1{,}6) = -u_4\; 5{,}6$

n=4 x4=1 $u_4 = 1$

SEL 3X3

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales de 3X3, la solución es:

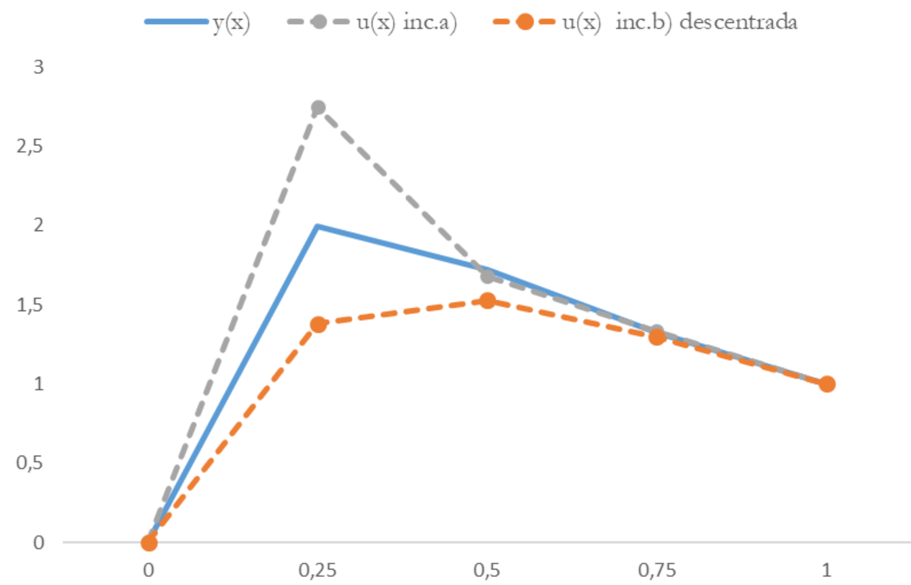
u1=1,3804

u2=1,5283

u3=1,2976

xi	ui	y(x)	|e(x)|
0	0	0	0
0,25	1,3804	1,9936	0,6133
0,5	1,5283	1,7210	0,1928
0,75	1,2976	1,3220	0,0244
1	1,0000	1,0000	0

Si graficamos los inciso a) y b) vemos que descentrando la derivada mejoramos la solucion del transitorio, pero empeoramos la estacionaria:



2.4 Ejercicio – Problema no lineal con CB tipo Dirichlet

Sea el siguiente problema:

$$y'' - \frac{x^3}{4} + \frac{y'y}{8} - 4 = 0 \quad ; \; 1 \leq x \leq 3 \, ; \quad y(1) = 17 \quad ; \quad y(1{,}6) = 12{,}56 \qquad (1)$$

Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso h=0,2. La ecuación exacta es $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$

Para la resolución de problemas con ecuaciones diferenciales no lineales, el proceso de discretización es el mismo, lo que cambia es que tendremos que resolver un sistema de ecuaciones no lineales, con alguno de los métodos vistos. En este caso aplicaremos Newton Raphson.

$$y \sim u_n$$
$$y' \sim u'_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}$$
$$y'' \sim u''_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}$$

$$CB \quad y(1) = 17 \quad \sim u_0 = 17$$
$$y(1{,}6) = 12{,}56 \sim \quad u_4 = 12{,}56$$

Discretizando la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - \frac{{x_n}^3}{4} + \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \cdot \frac{u_n}{8} - 4 = 0$$

Para:

n=0 x0=1 $u_0 = 17$

$$\left.\begin{array}{lll} n=1 & x1=1.2 & \dfrac{u_2-2u_1+17}{h^2}-\dfrac{1{,}2^3}{4}+\dfrac{u_2-17}{2h}\cdot\dfrac{u_1}{8}-4=0 \\ n=2 & x2=1.4 & \dfrac{12{,}56-2u_2+u_1}{h^2}-\dfrac{1{,}4^3}{4}+\dfrac{12{,}56-u_1}{2h}\cdot\dfrac{u_2}{8}-4=0 \end{array}\right\} \text{SENL 2X2}$$

n=3 x3=1.6 $u_3 = 12{,}56$

Tenemos que resolver un SENL de 2X2, lo haremos en este caso usando N-R:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{J}}}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{K}}) * \boldsymbol{\Delta}\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{K+1}} = -\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{K}})$$

Con:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{J}}}(u_1,u_2)=\begin{bmatrix} \dfrac{-2}{h^2}+\dfrac{u_2-17}{16h} & \dfrac{1}{h^2}+\dfrac{u_1}{16h} \\ \dfrac{1}{h^2}-\dfrac{u_2}{16h} & \dfrac{-2}{h^2}+\dfrac{12{,}56-u_1}{16h} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{K}}) = \begin{bmatrix} \dfrac{u_2-2u_1+17}{h^2}-\dfrac{1{,}2^3}{4}+\dfrac{u_2-17}{2h}\cdot\dfrac{u_1}{8}-4 \\ \dfrac{12{,}56-2u_2+u_1}{h^2}-\dfrac{1{,}4^3}{4}+\dfrac{12{,}56-u_1}{2h}\cdot\dfrac{u_2}{8}-4 \end{bmatrix}$$

Como criterio de corte, usaremos que la diferencia entre dos iteraciones sucesivas sea<0,01 y como semilla tomaremos el valor $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 14{,}5 \\ 13{,}5 \end{bmatrix}$.

k	u1(k)	u2(k)	*Δ*u1=|u1(k) - u1(k-1)|	*Δ*u2=|u2(k) - u2(k-1)|	
0	14,5000	13,5000			
1	14,7713	13,3867	0,2713	0,1133	→ > 0,01
2	$\boxed{14{,}7712 \quad 13{,}3869}$		-0,0001	-0,0001	→ < 0,01, frenamos.

Si comparamos el resultado obtenido con el valor exacto:

x	u(x)	y(x)	|e(x)|
1	17,0000	17,0000	
1,2	14,7712	14,7733	0,002133
1,4	13,3869	13,3886	0,001671
1,6	12,5600	12,5600