Problemas de valor inicial (PVI)

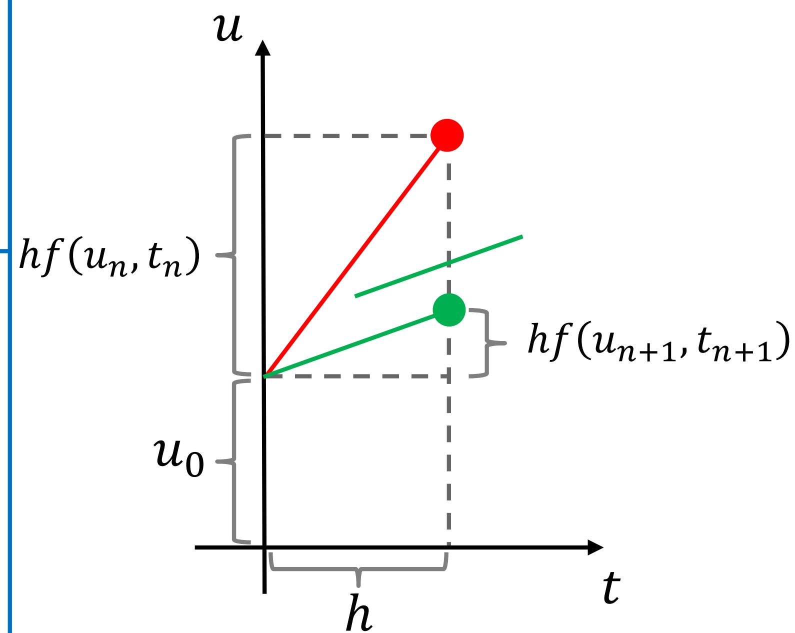
- **Ejercicio 5**
- **Ejemplo de aplicación**
- **Orden > 1**
- **RK2**
- **RK4**

Guia PVI – Ec. Diferencial del ejercicio 5

Ecuación diferencial de orden 1: $u' = -u^2$ $\qquad u(0) = u_0 = 1$

Euler ●	Euler Implícito ●
$u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n)$	$u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1}, t_{n+1})$
$u_{n+1} = u_n + h(-u_n^2)$	$u_{n+1} = u_n + h\left(-u_{n+1}^2\right)$
$u_{n+1} = u_n - hu_n^2$	$u_{n+1} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4hu_n}}{2h}$ La mayoría de las veces u_{n+1} no se puede despejar → ENL

Primer avance:



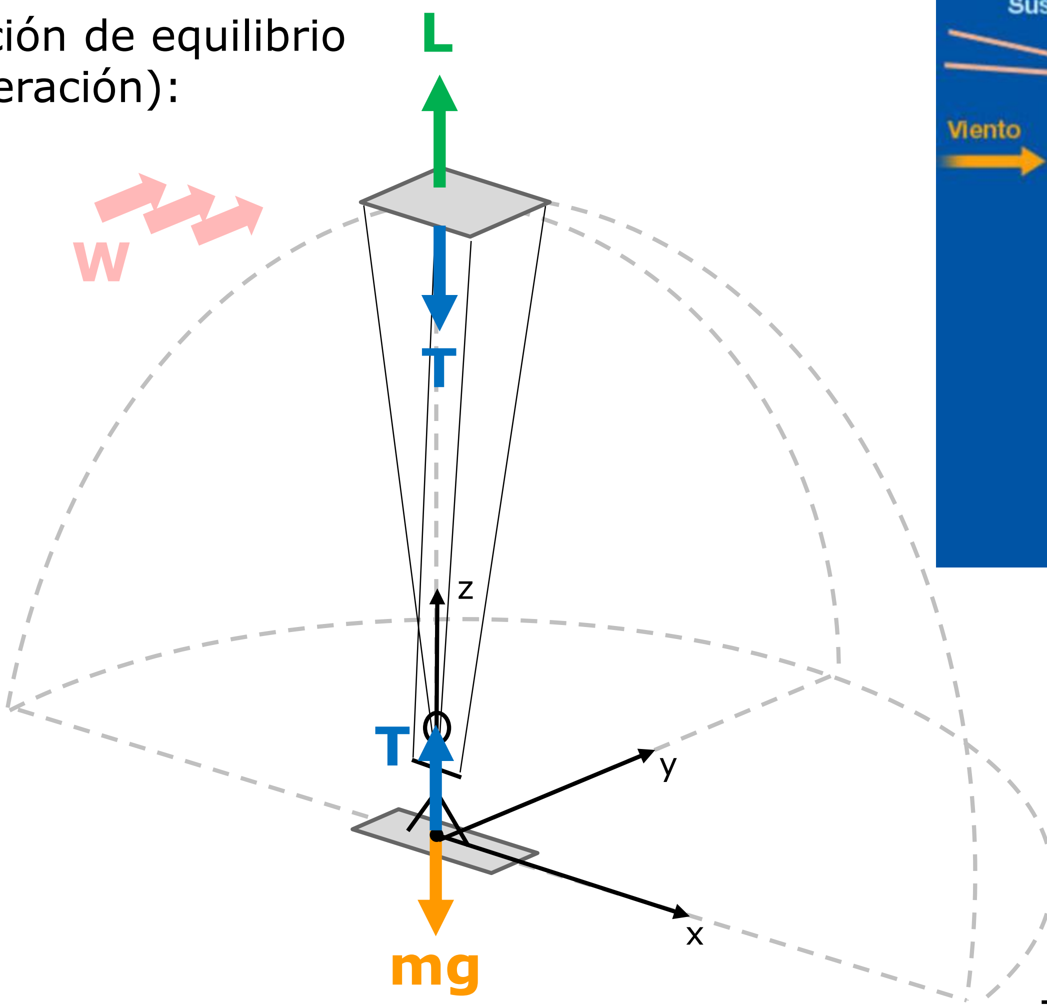
Aplicación PVI

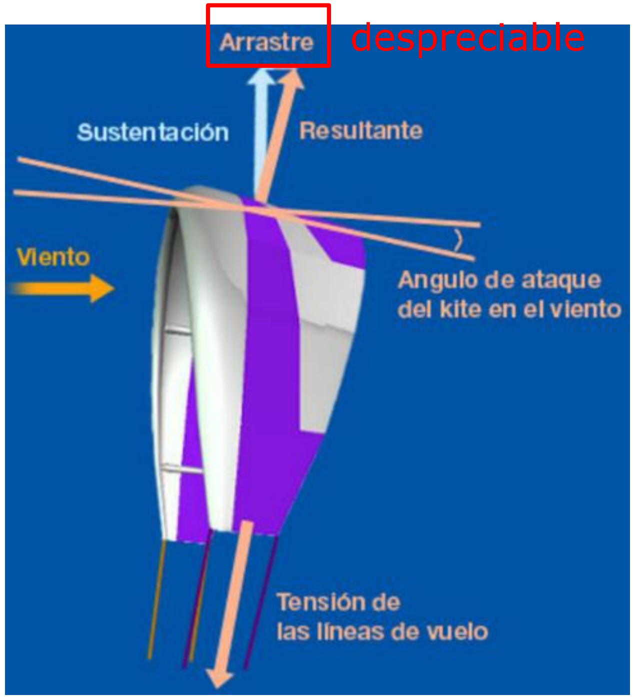
Aplicación PVI - kitesurf

En situación de equilibrio
(sin aceleración):

$$L = T$$

$$T = mg$$



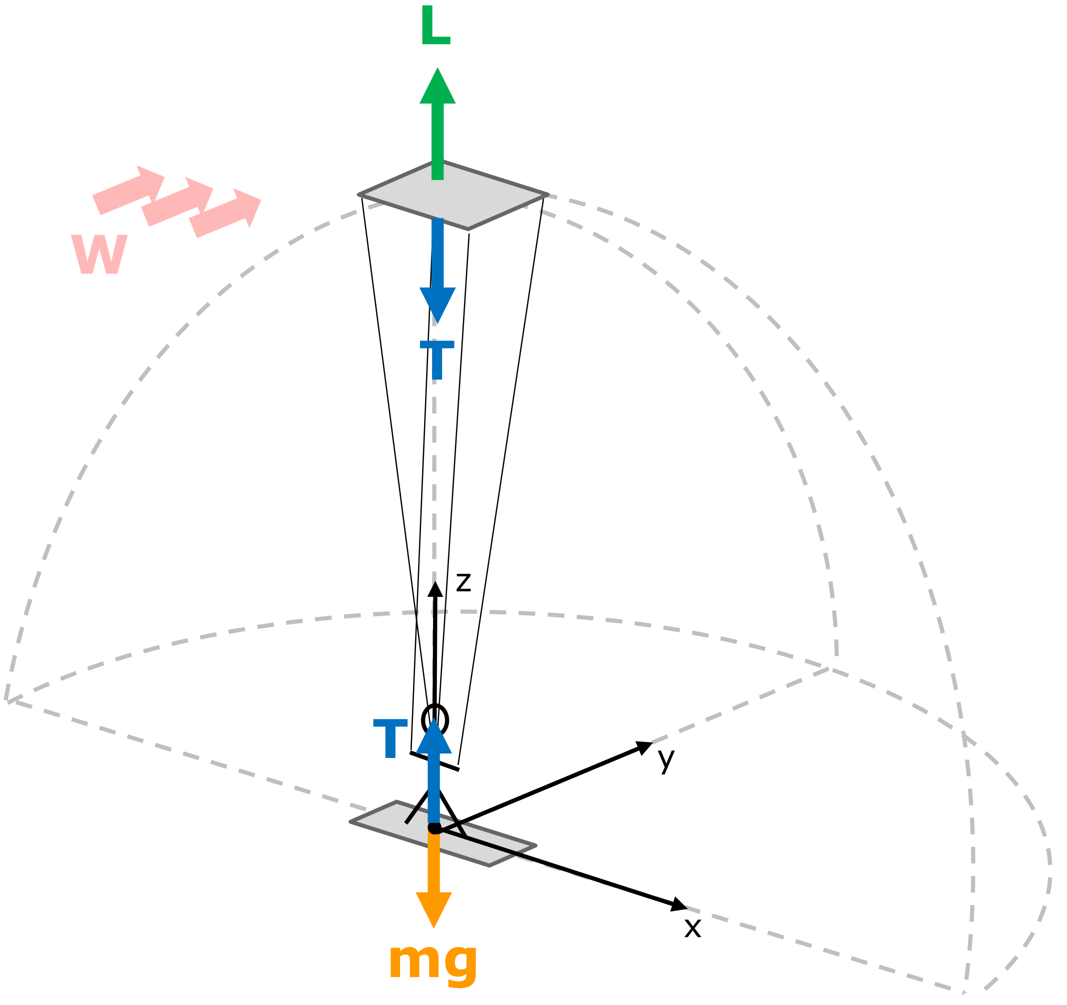


Se quiere analizar el movimiento del sistema **tabla+surfer** cuando el barrilete se aparta de la posición de equilibrio
→ La fuerza de sustentación pasa a tener proyecciones sobre el plano **xy**.

*Para este modelo consideramos el agua calma (sin velocidad)

L : Fuerza de sustentación (Lift)
W: Velocidad del viento (dirección **y**)
T: Resultante de tensión en las 4 líneas

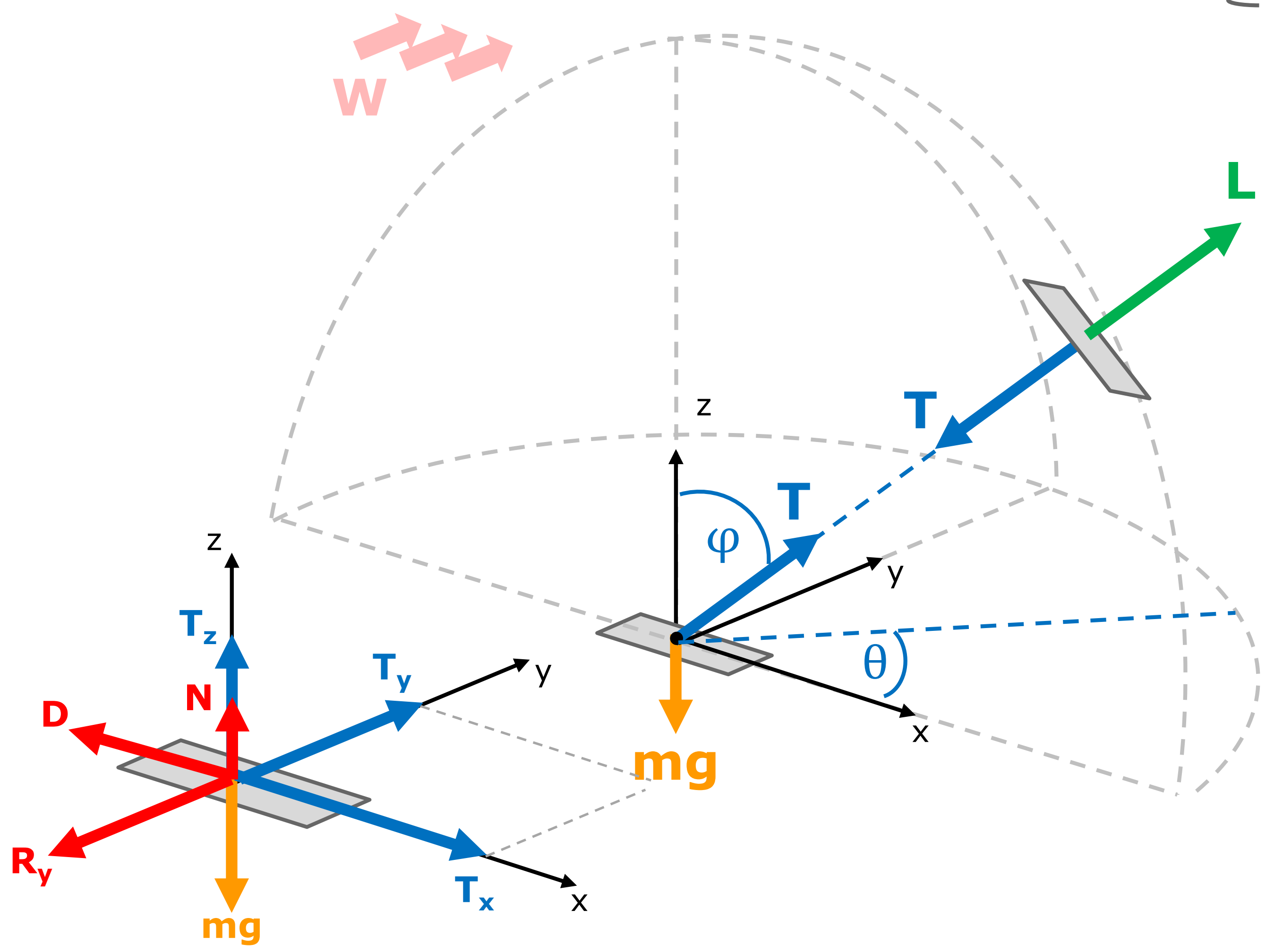
Aplicación PVI - kitesurf



Aplicación PVI - kitesurf

Se considera que el desplazamiento de la tabla es únicamente en la dirección **x** (transversal al viento)

$$\begin{cases} \boxed{T_x - D = ma_x} \\ T_y - R_y = 0 \\ T_z + N - mg = 0 \end{cases}$$



En el barrilete: **T**=**L** (masa despreciable)

D : Fuerza de arrastre debida al rozamiento con el agua (Drag)

Ry : Reacción de vinculo que compensa exactamente **Ty** y mantiene la trayectoria sobre el eje x

Aplicación PVI - kitesurf

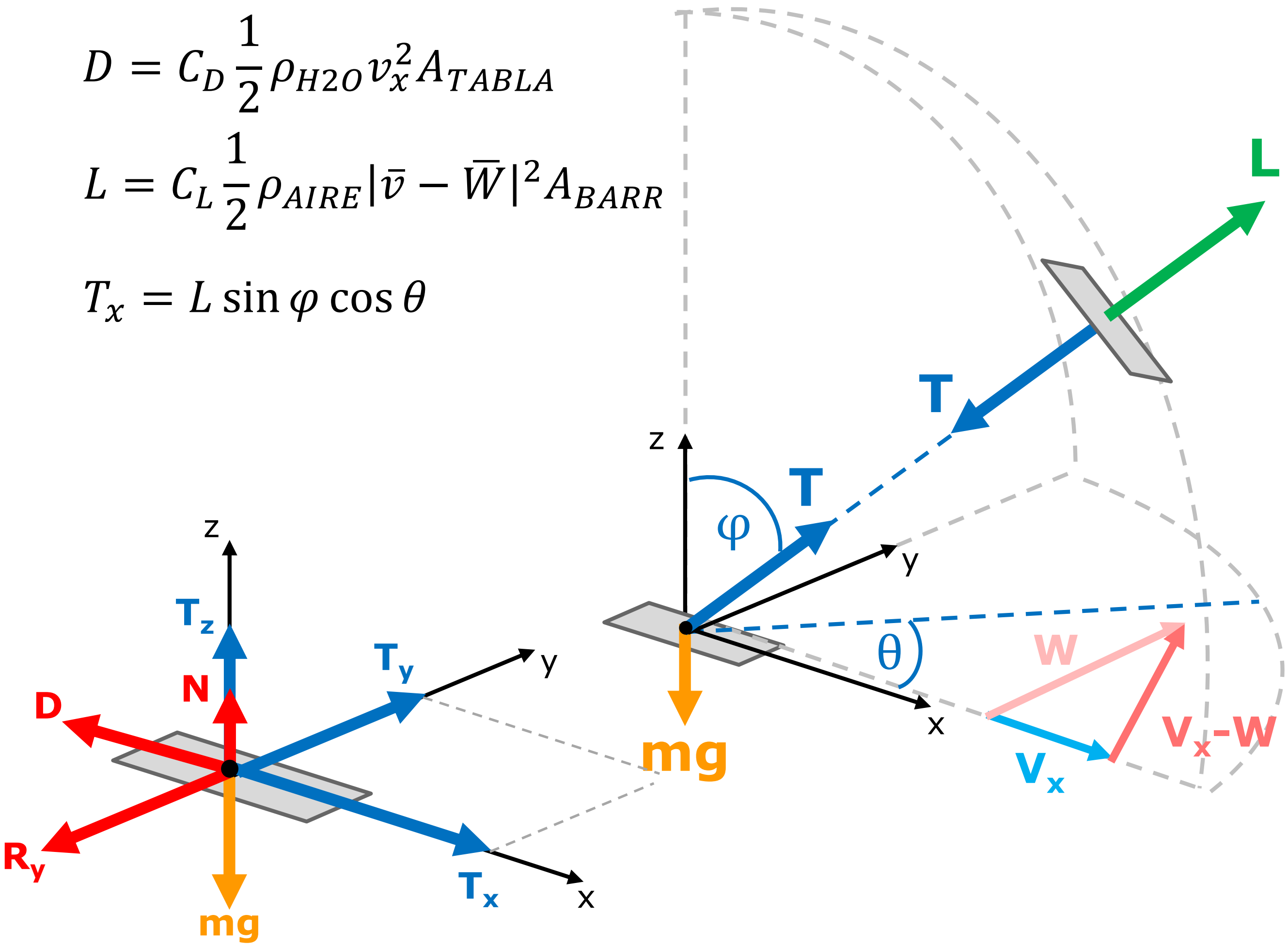
Se considera que el desplazamiento de la tabla es únicamente en la dirección **x** (transversal al viento)

$$\begin{cases} \boxed{T_x - D = ma_x} \\ T_y - R_y = 0 \\ T_z + N - mg = 0 \end{cases}$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho_{H2O} v_x^2 A_{TABLA}$$

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho_{AIRE} |\bar{v} - \bar{W}|^2 A_{BARR}$$

$$T_x = L \sin\varphi \cos\theta$$



En el barrilete: **T=L** (masa despreciable)

D : Fuerza de arrastre debida al rozamiento con el agua (Drag)

Ry : Reacción de vinculo que compensa exactamente **Ty** y mantiene la trayectoria sobre el eje x

Aplicación PVI

C_L: coeficiente experimental de sustentación en aire
C_D: coeficiente experimental de arrastre en agua
A_{BARR}: Área del barrilete
A_{TABLA}: Área del barrilete
m: masa de Tabla+Surfer
θ,φ: ángulos de posición del barrilete sobre la semiesfera
W: velocidad del viento respecto de tierra

Ecuación de movimiento:

$$L \sin\varphi \cos\theta - D = m\, a_x$$

$$\overbrace{\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}|\bar{v}-\bar{W}|^2 A_{BARR}\right]}^{L} \sin\varphi \cos\theta - \overbrace{C_D \frac{1}{2}\rho_{H2O} v_x^2 A_{TABLA}}^{D} = m\, a_x$$

$$\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(\boldsymbol{v_x^2} + W^2\right) A_{BARR}\right] \sin\varphi \cos\theta - C_D \frac{1}{2}\rho_{H2O} \boldsymbol{v_x^2} A_{TABLA} = m \frac{\boldsymbol{dv_x}}{\boldsymbol{dt}}$$

Ecuación para el problema numérico: $v' = f(t, v)$ con $v(t=0) = 0$

El tiempo **t** no aparece explícito (en este caso particular)

$$\frac{\boldsymbol{dv_x}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(\boldsymbol{v_x^2} + W^2\right) A_{BARR}\right] \sin\varphi \cos\theta - C_D \frac{1}{2}\rho_{H2O} \boldsymbol{v_x^2} A_{TABLA}$$

Diferencias y similitudes con la ecuación del ejercicio 5?

Método de Euler (explícito)

Ecuación para el problema numérico: $v' = f(t, v)$ con $v(t=0) = 0$

$v_{n+1} = v_n + \mathbf{h}\, f(t_n, v_n)$ → Hay que definir un paso de tiempo **h**

$$\boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{v_n} + \mathbf{h}\left\{\frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(\boldsymbol{v_n^2} + W^2\right)A_{BARR}\right]\sin\varphi\cos\theta - C_D\frac{1}{2}\rho_{H2O}\boldsymbol{v_n^2}A_{TABLA}\right\}$$

Para *n=0* (primer avance discreto) → $v_0 = 0$

$$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_0} + \mathbf{h}\left\{\frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(\boldsymbol{v_0^2} + W^2\right)A_{BARR}\right]\sin\varphi\cos\theta - C_D\frac{1}{2}\rho_{H2O}\boldsymbol{v_0^2}A_{TABLA}\right\}$$

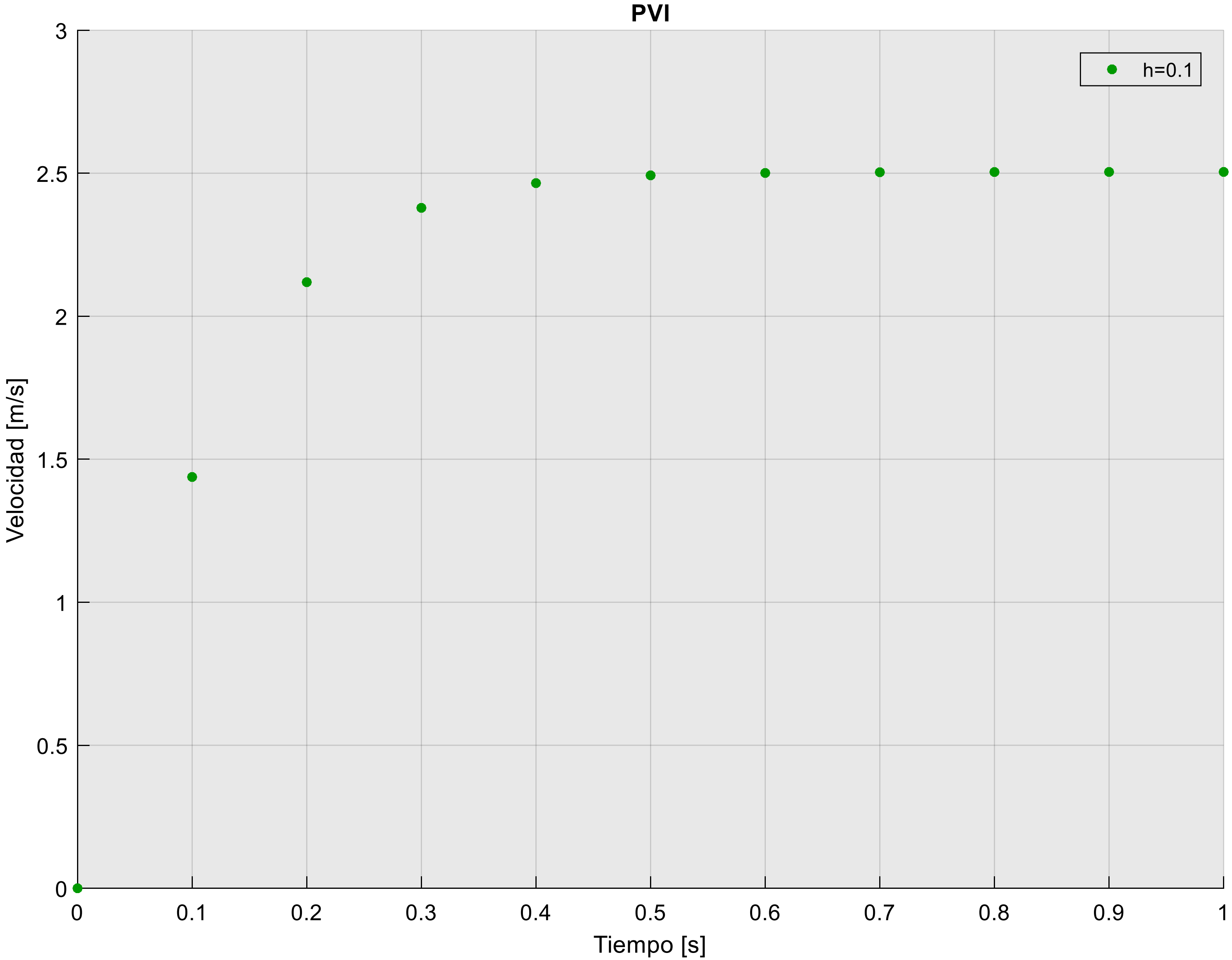
$$\boldsymbol{v_1} = \mathbf{h}\left\{\frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(W^2\right)A_{BARR}\right]\sin\varphi\cos\theta\right\}$$

→ Velocidad $\boldsymbol{v_1}$ distinta de 0

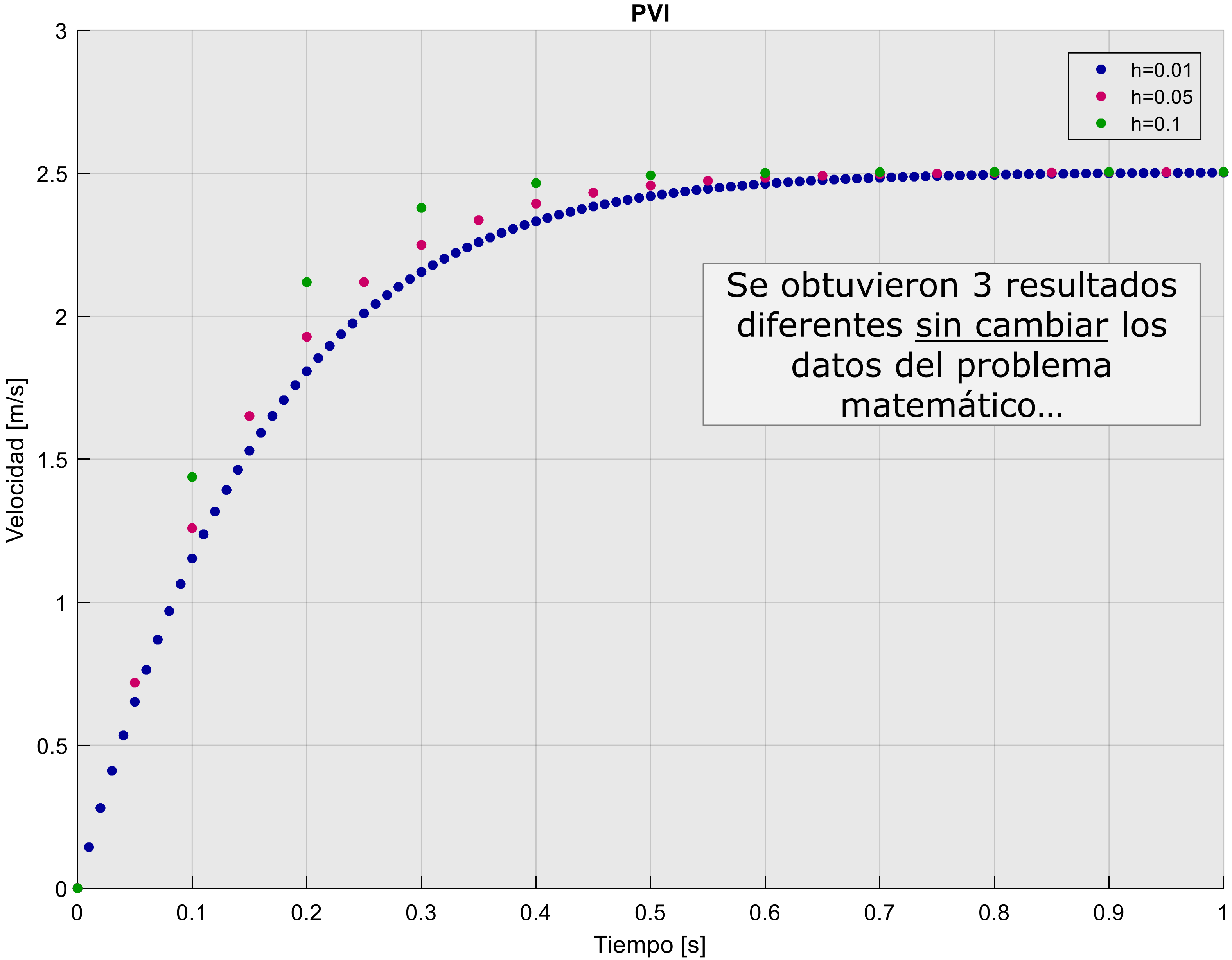
Para *n=1* (2do avance discreto)

$$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{v_1} + \mathbf{h}\left\{\frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(\boldsymbol{v_1^2} + W^2\right)A_{BARR}\right]\sin\varphi\cos\theta - C_D\frac{1}{2}\rho_{H2O}\boldsymbol{v_1^2}A_{TABLA}\right\}$$

Método de Euler (explícito) - Resultados

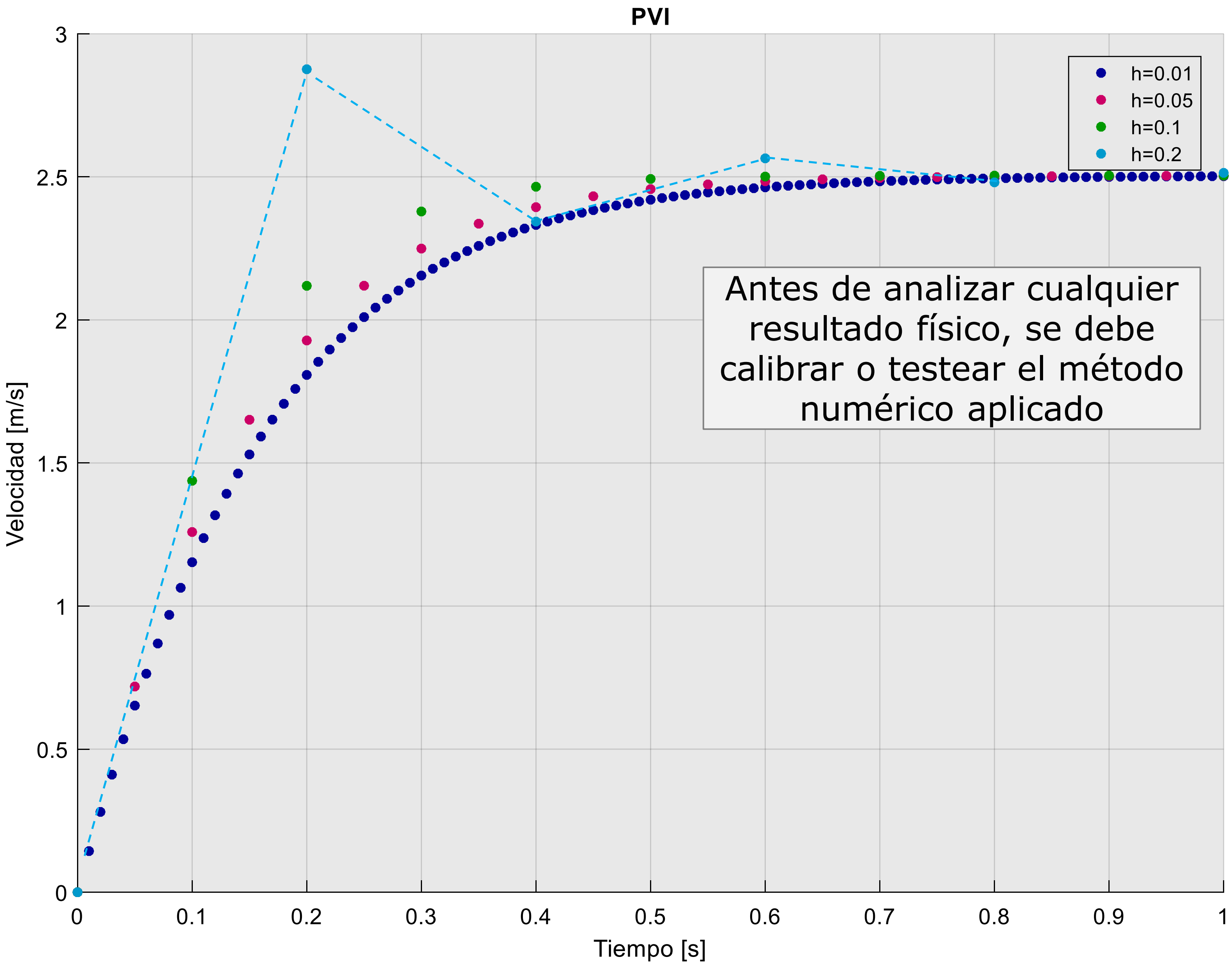


Método de Euler (explícito) - Resultados



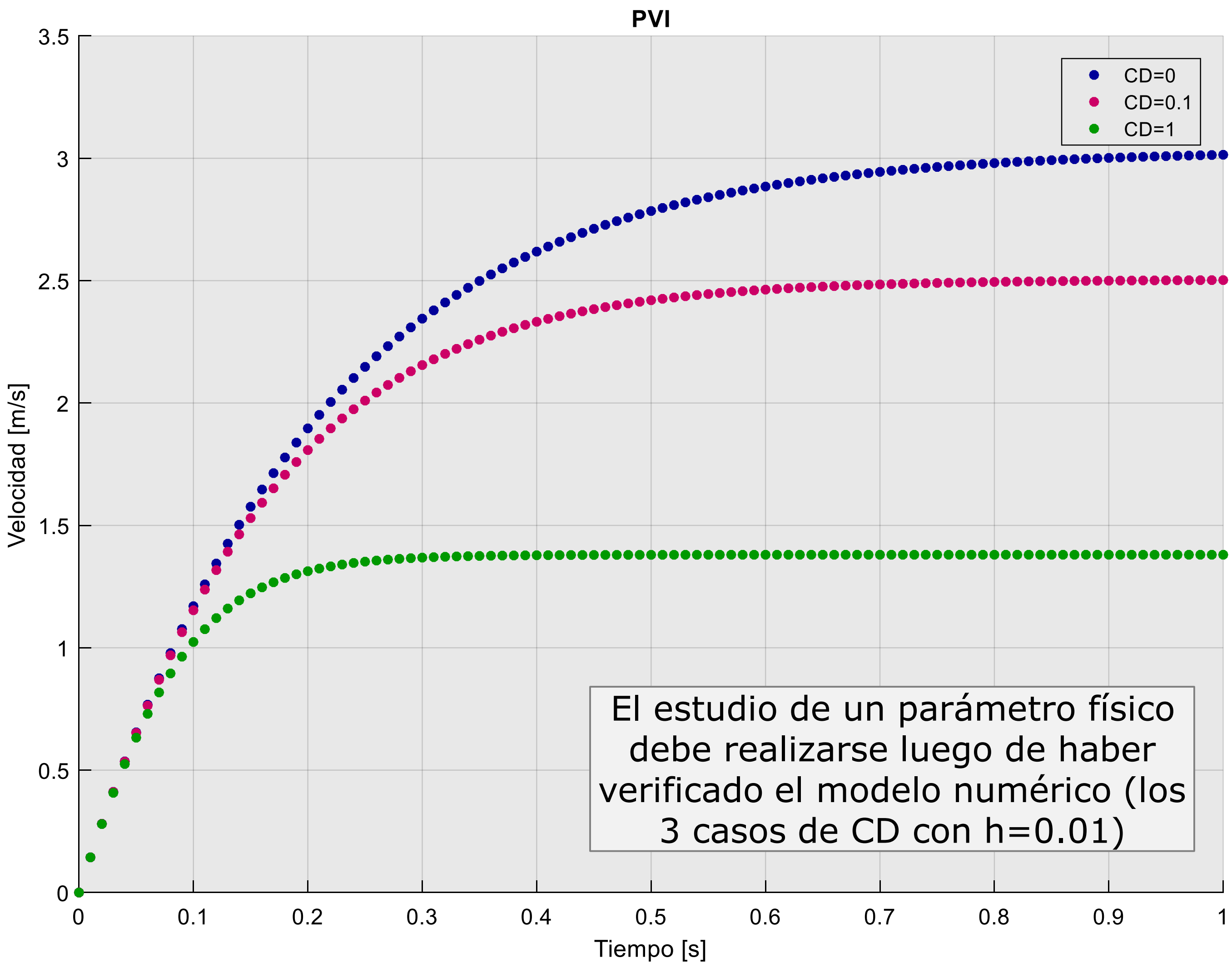
Se obtuvieron 3 resultados diferentes sin cambiar los datos del problema matemático...

Método de Euler (explícito) - Resultados



Estudio del parámetro CD

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m}\left[C_L \frac{1}{2}\rho_{AIRE}\left(v_x^2 + W^2\right)A_{BARR}\right]\sin\varphi\cos\theta - C_D\frac{1}{2}\rho_{H2O}v_x^2 A_{TABLA}$$



En la ecuación diferencial no aparece explicito el tiempo **t**. ¿Qué mejora del modelo podría incluir una dependencia temporal explícita?

Guia PVI - Ejercicio 5 – RK2

Ecuación diferencial de orden 1: $u' = -u^2$ $\quad u(0) = 1$

Euler	Euler Implícito	Runge-Kutta 2
$u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n)$	$u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1}, t_{n+1})$	$q_1 = h\,f(u_n, t_n)$ $q_2 = h\,f(u_n + q_1, t_{n+1})$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$
$u_{n+1} = u_n + h(-u_n^2)$	$u_{n+1} = u_n + h\left(-u_{n+1}^2\right)$	$q_1 = h(-u_n^2)$ $q_2 = h\left[-\left(u_n + \overbrace{h(-u_n^2)}^{q_1}\right)^2\right]$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$
$u_{n+1} = u_n - hu_n^2$	$u_{n+1} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4hu_n}}{2h}$ La mayoría de las veces u_{n+1} no se puede despejar → ENL	$u_{n+1} = u_n - hu_n^2 + h^2u_n^3 - \frac{1}{2}h^3u_n^4$

Guia PVI - Ejercicio 5 - RK2

Ecuación diferencial de orden 1: $u' = -u^2$ $\quad u(0) = 1$

Euler	Euler Implícito	Runge-Kutta 2
$u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n)$	$u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1}, t_{n+1})$	$q_1 = h\, f(u_n, t_n)$ $q_2 = h\, f(u_n + q_1, t_{n+1})$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$
paso SIMPLE Explicito Orden 1	paso SIMPLE Implícito Orden 1	paso SIMPLE Explicito Orden 2

Estabilidad?

Estabilidad - Ejercicio 5 - Euler

A que está asociada la estabilidad? Al método o a la ecuación diferencial?

En principio **AMBOS**

Se analiza la estabilidad para encontrar restricciones sobre el paso h.

Estabilidad para Euler (explicito) en la ecuación: $u' = -u^2 \qquad u(0) = 1$

$$u_{n+1} = u_n + h(-u_n^2)$$

Perturbamos a ambos lados de la ecuación con valores $\varepsilon \ll u$

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + h(-(u_n + \varepsilon_n)^2)$$

$$\underline{\underline{u_{n+1}}} + \varepsilon_{n+1} = \underline{\underline{u_n}} + \varepsilon_n \underline{\underline{-h(u_n{}^2}} + 2u_n\varepsilon_n + \cancel{\varepsilon_n{}^2})$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - 2hu_n\varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 - 2hu_n)$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 1 - 2hu_n$$

Condición de estabilidad

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right| < 1$$

Se busca que la perturbación del paso **n+1** sea ser menor que la del paso **n**

Para este caso (Euler y $u' = -u^2$)

$$|1 - 2hu_n| < 1 \quad \begin{cases} 1 - 2hu_n < 1 \\ 1 - 2hu_n > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h > 0 \\ h < \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Depende del valor de u_n (la condición cambia en cada avance temporal)

Ejemplo de discretización para orden>1

Supongamos ecuación diferencial de **orden 2**: $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$

$$\theta'' = -\omega^2 \sin\theta = f(t, \theta, \theta') \qquad \text{con} \begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

(ω es dato)

problema matemático		problema numérico		problema numérico "en 2 variables"
$\theta(t)$	$\longrightarrow$	$u_n(t_n)$		
$\theta'(t)$	$\longrightarrow$	$u'_n(t_n)$	$\longrightarrow$	$v_n(t_n)$
$\theta''(t)$	$\longrightarrow$	$u''_n(t_n)$	$\longrightarrow$	$v'_n(t_n)$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\omega^2 \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} u' = f(t, u, v) & u(0) = \theta_0 \\ v' = g(t, u, v) & v(0) = 0 \end{array}$$

Sistema de ecuaciones diferenciales de **orden 1**

Método de **Euler** (explicito) para el sistema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + hg(t_n, u_n, v_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n] \end{array}$$

Ejemplo de discretización para orden>1

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\omega^2 \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u' = f(t, u, v) & u(0) = \theta_0 \\ v' = g(t, u, v) & v(0) = 0 \end{matrix}$$

Método de **Euler <u>Implicito</u>** para el sistema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + hg(t_n, , v_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_{n+1} = u_n + hv_{n+1} \\ v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_{n+1}] \end{matrix}$$

Para n=0 y h=1:

$$\begin{matrix} u_1 = u_0 + hv_1 \\ v_1 = v_0 + h[-\omega^2 \sin u_1] \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 = \theta_0 + v_1 \\ v_1 = -\omega^2 \sin u_1 \end{matrix}\right\} \textbf{SENL}$$

Para n=1 y h=1:

$$\begin{matrix} u_2 = u_1 + hv_2 \\ v_2 = v_1 + h[-\omega^2 \sin u_2] \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_2 = u_1 + v_2 \\ v_2 = v_1 - \omega^2 \sin u_2 \end{matrix}\right\} \textbf{SENL (otro)}$$

Ejemplo de discretización para orden>1

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\omega^2 \sin u \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} u' = f(t,u,v) & u(0) = \theta_0 \\ v' = g(t,u,v) & v(0) = 0 \end{array}$$

Método de **Runge Kutta de orden 2**:

$$q_1 = h\, f(u_n, t_n)$$

$$q_2 = h\, f(u_n + q_1, t_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

Para 2 variables:

$$q_{1u} = h\, f(u_n, v_n, t_n)$$

$$q_{2u} = h\, f(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_{1u} + q_{2u})$$

$$q_{1v} = h\, g(u_n, v_n, t_n)$$

$$q_{2v} = h\, g(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(q_{1v} + q_{2v})$$

Para el problema planteado:

$$q_{1u} = h v_n$$

$$q_{2u} = h[v_n \overbrace{- \omega^2 h \sin u_n}^{q_{1v}}]$$

$$u_{n+1} = u_n + h v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n$$

$$q_{1v} = h(-\omega^2 \sin u_n)$$

$$q_{2v} = h[-\omega^2 \sin(u_n + \overbrace{h v_n}^{q_{1u}})]$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin(u_n + h v_n)$$

Resumen para orden 2

Ecuación diferencial de orden 2: $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ con $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$

Euler	Euler Implícito	Runge-Kutta 2
$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n, v_n)$ $v_{n+1} = v_n + hg(t_n, u_n, v_n)$	$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})$ $v_{n+1} = v_n + hg(t_n, , v_n)$	$q_{1u} = h\, f(u_n, v_n, t_n)$ | $q_{2u} = h\, f(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$ $q_{1v} = h\, g(u_n, v_n, t_n)$ | $q_{2v} = h\, g(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_{1u} + q_{2u})$ $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(q_{1v} + q_{2v})$
$u_{n+1} = u_n + hv_n$ $v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n]$	$u_{n+1} = u_n + hv_{n+1}$ $v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_{n+1}]$	$u_{n+1} = u_n + hv_n - \omega^2 h^2 \sin u_n$ $v_{n+1} = v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n - \cdots$ $- \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin(u_n + hv_n)$

Estabilidad?

Estabilidad para sistemas + Euler

Estabilidad para Euler (explicito) en el sistema: $\begin{cases} u' = v & u(0) = \theta_0 \\ v' = -\omega^2 \sin u & v(0) = 0 \end{cases}$

$$u_{n+1} = u_n + h v_n$$
$$v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n]$$

$\xrightarrow{\text{perturbo}}$ $\varepsilon \ll u$, $\delta \ll v$ $\rightarrow$

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + h(v_n + \delta_n)$$
$$v_{n+1} + \delta_{n+1} = v_n + \delta_n - \omega^2 h \sin(u_n + \varepsilon_n)$$

$$u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + h(v_n + \delta_n)$$

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\delta_n}$$

$$v_{n+1} + \delta_{n+1} = v_n + \delta_n - \omega^2 h \sin(u_n) - \omega^2 h \cos(u_n)\varepsilon_n$$

$$\boxed{\delta_{n+1} = \delta_n - \omega^2 h \cos(u_n)\varepsilon_n}$$

$$v_{n+1} + \delta_{n+1} = v_n + \delta_n - \omega^2 h \underbrace{\sin(u_n + \varepsilon_n)}_{\text{linealizar antes}}$$

Calculo auxiliar para linealizar:

$$\sin(u + \varepsilon) \rightarrow \quad f(u) = \sin(u) \rightarrow \ f(u + \varepsilon)??$$

$$f(u + \varepsilon) \sim f(u) + \frac{df}{du}\varepsilon$$

$$\sin(u + \varepsilon) \sim \sin(u) + \cos(u)\ \varepsilon$$

En forma matricial: $$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\omega^2 h \cos(u_n) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Las perturbaciones están acopladas. Impongo las condiciones sobre los autovalores de la matriz de amplificación

Estabilidad para sistemas + Euler

$$\det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & h \\ -\omega^2 h \cos(u_n) & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 + \omega^2 h^2 \cos(u_n) = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = -\omega^2 h^2 \cos(u_n) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \omega h \sqrt{-\cos(u_n)}$$

La condición de estabilidad es sobre los autovalores: $\left|\lambda_{1,2}\right| < 1$

En este caso, ambos son números complejos → Se busca el modulo de todas formas:

$\left|\lambda_{1,2}\right| = 1 + \omega^2 h^2 \cos(u_n)$ **→ INCONDICIONALMENTE <u>INESTABLE</u>**

Como cambia el análisis si la ecuación hubiera sido… $\theta'' + \omega^2 \theta = 0$ con $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$

O bien… $x'' + \omega^2 x = 0$ con $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Método de Runge Kutta de orden 4

Calcula 4 incrementos diferentes y hace un promedio pesado para el avance:

Genérico:

$$q_1 = h\, f(U_n, t_n)$$

$$q_2 = h\, f\left(U_n + \frac{1}{2} q_1, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_3 = h\, f\left(U_n + \frac{1}{2} q_2, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_4 = h\, f(U_n + q_3, t_{n+1})$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Aplicado a: $U' = -U$

$$q_1 = h(-U_n)$$

$$q_2 = h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{h(-U_n)}^{q_1}\right)\right]$$

$$q_3 = h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{\left[h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}h(-U_n)\right)\right]\right]}^{q_2}\right)\right]$$

$$q_4 = h\left[-\left(U_n + \overbrace{h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\left[h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}h(-U_n)\right)\right]\right]\right)\right]}^{q_3}\right)\right]$$

$$U_{n+1} = \cdots$$

En la programación no hace falta hacer estos reemplazos!

Pseudocodigo SENL con Modelo PVI

$$T_1 = T_{01}$$
$$T_2 = T_{02}$$

Semillas

for i=1:Nmax

$$F_1(T_1, T_2) = f_1(T_1, T_2) - sk_{obj}$$
$$F_2(T_1, T_2) = f_2(T_1, T_2) \; - T_{sk-obj}$$

Modelo PVI

$$\begin{bmatrix} T_1^{(new)} \\ T_2^{(new)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} - \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(T_1, T_2) \\ F_2(T_1, T_2) \end{bmatrix}$$

Punto fijo

criterio de corte para $T_1^{(new)}$ y T_1

criterio de corte para $T_2^{(new)}$ y T_2

2 criterios?

end