# Teoría de la aproximación: Cuadrados mínimos

Análisis numérico (75.12/95.04/95.12)

Facultad de ingeniería – Universidad de Buenos Aires

# Objetivos

- Aproximar un conjunto de datos o función mediante una función sencilla.
- Poder medir el error que se comete al aproximar .
- La función de ajuste debe minimizar el error de aproximación.

# Resultados de la teórica

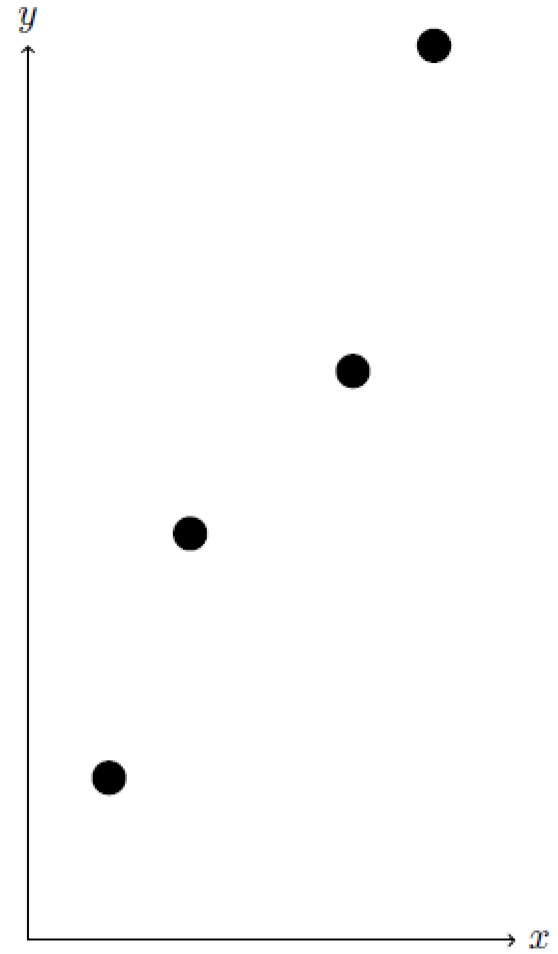
$$\sum_{j=0}^{m} C_j \phi_j(x_i)$$

$$S_r = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left( y_i - \sum_{j=0}^{m} C_j \phi_j(x_i) \right)^2 \quad \begin{cases} y_i : \text{Medición i-ésima} \\ C_j : \text{Coeficiente j-ésimo} \\ \phi_j : \text{Función elemental j-ésima} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} <\phi_0;\phi_0> & \dots & <\phi_0;\phi_m> \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ <\phi_0;\phi_m> & \dots & <\phi_m;\phi_m> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <Y;\phi_0> \\ \vdots \\ <Y;\phi_m> \end{pmatrix} \begin{cases} <;>: \text{Operador producto interno canónico} \\ \quad Y : \text{Vector que contiene a todas las observaciones} \end{cases}$$

# Ejemplo I: Curva de aproximación para una muestra pequeña

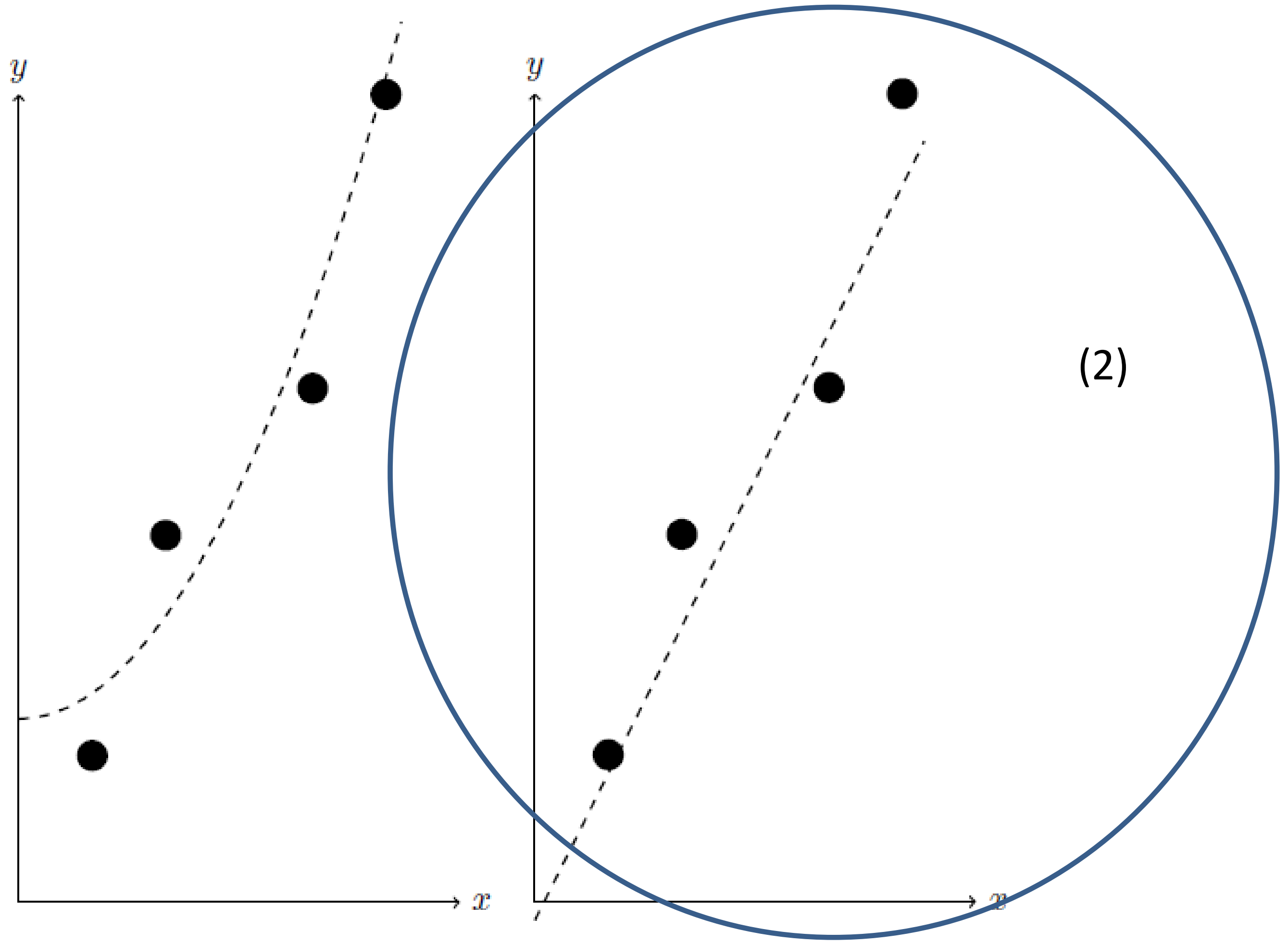
| x | y |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 4 | 7 |
| 5 | 11 |



# Ejemplo I : Elección de curva de ajuste

- Balance entre precisión y complejidad
- Elegir la base de funciones elementales será la mayor fuente de error del método

(1)




(2)

# Ejemplo I: Resolución gráfica

# Ejemplo I: Funciones elementales elegidas

$$\sum_{j=0}^{m} C_j \phi_j(x_i)$$

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x \implies y_{ajuste} = C_0 + C_1 x$$

# Ejemplo I: Vectores

| x | y |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 4 | 7 |
| 5 | 11 |

$$\begin{pmatrix} < \phi_0;\phi_0 > & < \phi_0;\phi_1 > \\ < \phi_0;\phi_1 > & < \phi_1;\phi_1 > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y;\phi_0 > \\ < Y;\phi_1 > \end{pmatrix}$$

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) \\ \phi_0(x_1) \\ \phi_0(x_2) \\ \phi_0(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) \\ \phi_1(x_1) \\ \phi_1(x_2) \\ \phi_1(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

¿Cómo cambiaría si el ajuste fuese cuadrático?

# Ejemplo I: Productos internos

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) \\ \phi_0(x_1) \\ \phi_0(x_2) \\ \phi_0(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) \\ \phi_1(x_1) \\ \phi_1(x_2) \\ \phi_1(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

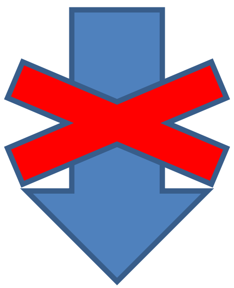
$$<\phi_0;\phi_0>= 4, \quad <\phi_0;\phi_1>= 12, \quad <\phi_1;\phi_1>= 46, \quad <Y;\phi_0>= 25, \quad <Y;\phi_1>= 95$$

- El SEL resultante siempre será simétrico

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 12 & 25 \\ 12 & 46 & 95 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} C_0 = 0{,}25 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

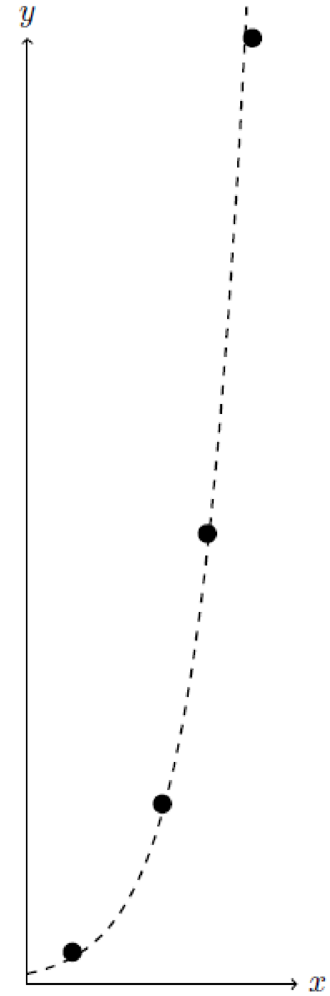
# Ejemplo II: Función de ajuste exponencial

$$y(x) = C_0 e^{C_1 x}$$



$$\sum_{j=0}^{m} C_j \phi_j(x_i)$$

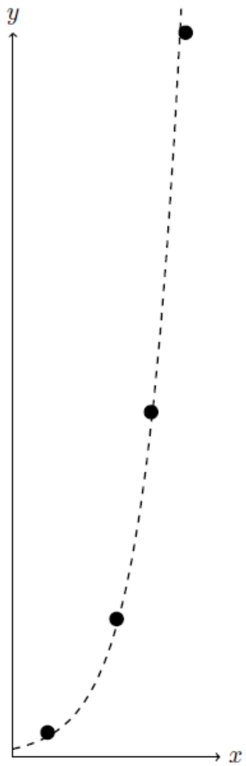
| x | y |
|---|---|
| 1 | 0.71 |
| 3 | 4 |
| 4 | 10 |
| 5 | 21 |

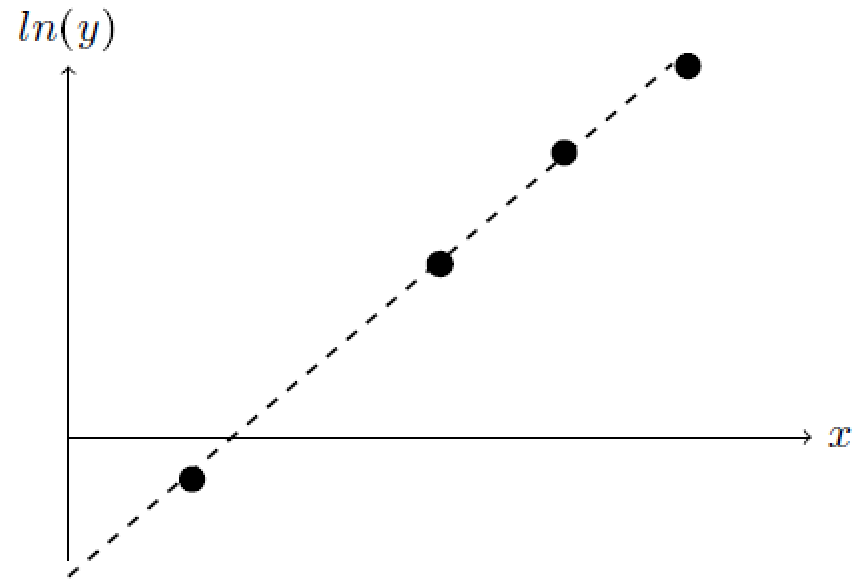


# Ejemplo II: Transformación propuesta

$$y(x) = C_0 e^{C_1 x}$$

$$ln(y(x)) = ln(C_0) + C_1 x = ln(y) \quad C_0' = ln(C_0)$$



# Ejemplo II: Transformación propuesta

| x | y |
|---|---|
| 1 | 0,71 |
| 3 | 4 |
| 4 | 10 |
| 5 | 21 |

| x | ln(y) |
|---|---|
| 1 | -0,34 |
| 3 | 1,4 |
| 4 | 2,3 |
| 5 | 3,0 |

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x \implies y_{ajuste} = C_0 + C_1 x$$

# Ejemplo II: Vectores

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) \\ \phi_0(x_1) \\ \phi_0(x_2) \\ \phi_0(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) \\ \phi_1(x_1) \\ \phi_1(x_2) \\ \phi_1(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} ln(y_0) \\ ln(y_1) \\ ln(y_2) \\ ln(y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,34 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 3,0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} <\phi_0;\phi_0> & <\phi_0;\phi_1> \\ <\phi_0;\phi_1> & <\phi_1;\phi_1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0' \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <Y;\phi_0> \\ <Y;\phi_1> \end{pmatrix}$$

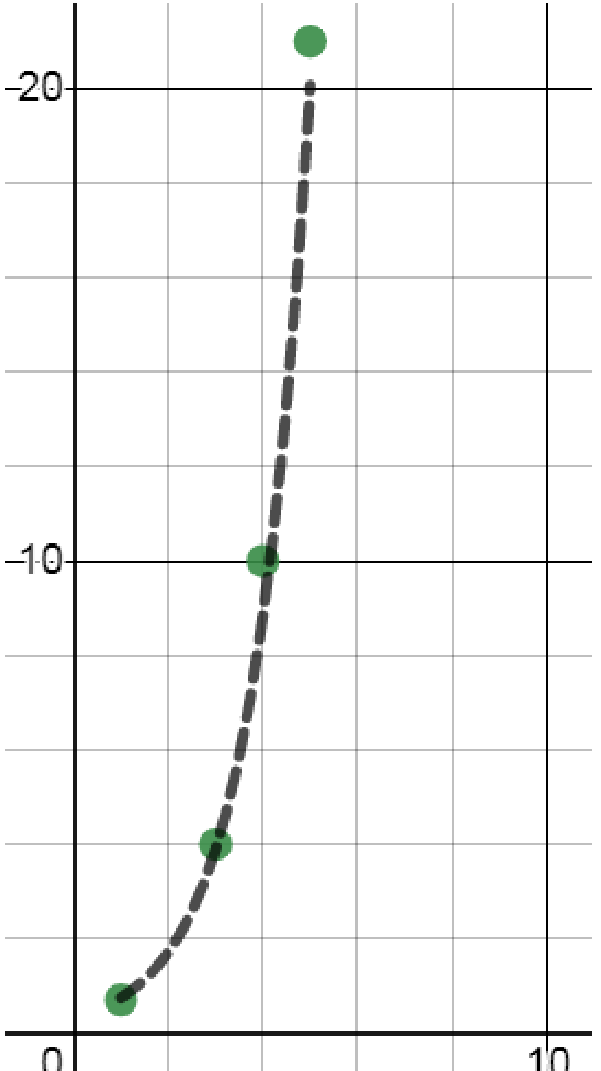
# Ejemplo II: Resolución

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 13 & 6,4 \\ 13 & 51 & 28 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} C_0' = -1,1 \\ C_1 = 0,82 \end{array}$$

$$C_0 = e^{C'_0} \qquad C_0 = e^{-1,1} = 0,33$$

$$y(x) = C_0 e^{C_1 x} = 0,33\ e^{0,82x}$$

# Ejemplo II: Gráfico

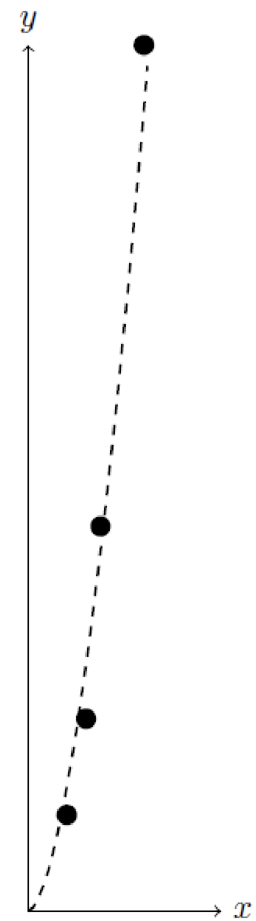


# Ejemplo III: Funciones potenciales

$$y(x) = C_0 x^{C_1}$$

$$\sum_{j=0}^{m} C_j \phi_j(x_i)$$

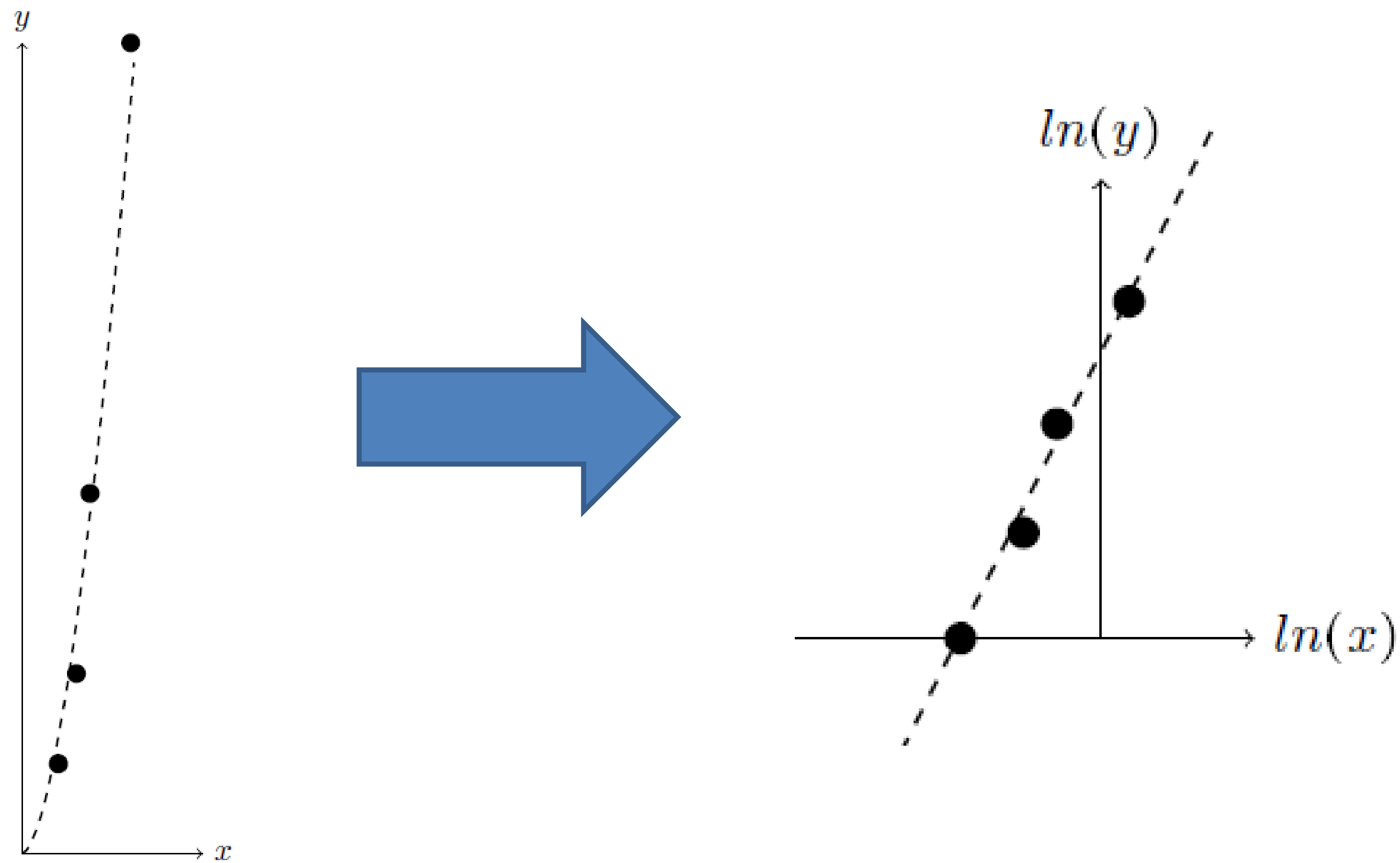
| x | y |
|---|---|
| 0,4 | 1 |
| 0,6 | 2 |
| 0,75 | 4 |
| 1,2 | 9 |



# Ejemplo III: Transformación propuesta

$$y(x) = C_0 x^{C_1}$$

$$ln(y(x)) = ln(C_0 x^{C_1}) = ln(C_0) + C_1 ln(x) \quad C_0' = ln(C_0)$$



# Ejemplo III: Transformación propuesta

| x | y |
|---|---|
| 0,4 | 1 |
| 0,6 | 2 |
| 0,75 | 4 |
| 1,2 | 9 |

| ln(x) | ln(y) |
|---|---|
| -0,92 | 0 |
| -0,51 | 0,69 |
| -0,29 | 1,4 |
| 0,18 | 2,2 |

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x \implies y_{ajuste} = C_0 + C_1 x$$

# Ejemplo III: Vectores

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) \\ \phi_0(x_1) \\ \phi_0(x_2) \\ \phi_0(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1(x_0) \\ \phi_1(x_1) \\ \phi_1(x_2) \\ \phi_1(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ln(x_0) \\ ln(x_1) \\ ln(x_2) \\ ln(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.92 \\ -0.51 \\ -0.29 \\ 0.18 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} ln(y_0) \\ ln(y_1) \\ ln(y_2) \\ ln(y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.69 \\ 1.4 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} <\phi_0;\phi_0> & <\phi_0;\phi_1> \\ <\phi_0;\phi_1> & <\phi_1;\phi_1> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0' \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <Y;\phi_0> \\ <Y;\phi_1> \end{pmatrix}$$

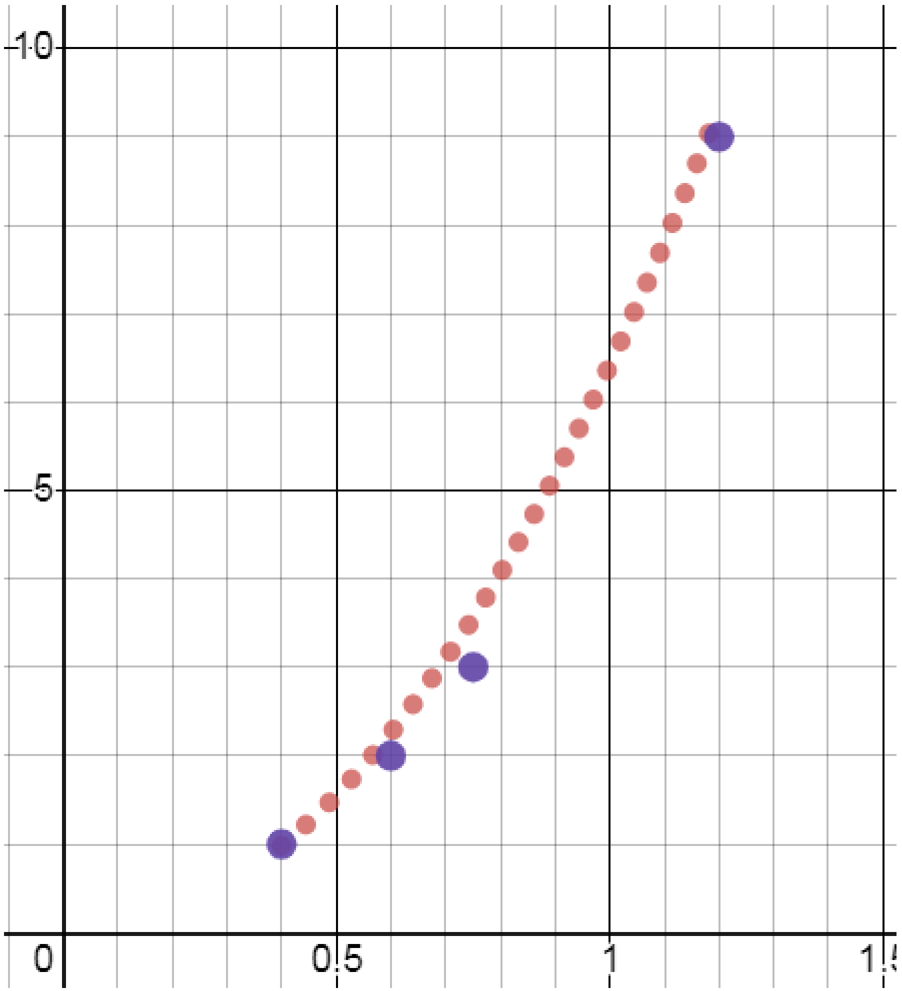
# Ejemplo III: Resolución

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1,54 & 4,29 \\ -1,54 & 1,22 & -0,362 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} C'_0 = 1,86 \\ C_1 = 2,05 \end{array}$$

$C_0 = e^{C'_0}$ $\qquad$ $C_0 = e^{1,86} = 6,42$

$$y(x) = C_0 x^{C_1} = 6,42\, x^{2,05}$$

# Ejemplo III: Gráfico



# Ejemplo IV: Ajuste continuo

$$f(x) = \frac{6e^{-x}}{cos(x)}\{0 < x < \frac{3\pi}{7}\}$$

$$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \{0 < x < \frac{3\pi}{7}\}$$

- Evaluarla implica un gran esfuerzo de cálculo
- No tiene primitiva
- La derivada no es simple

# Ejemplo IV: Producto interno canónico en el EV de funciones continuas

$$\phi_0 = 1 \quad \phi_1 = x \quad \phi_2 = x^2 \qquad\qquad < f(x); g(x) >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\begin{pmatrix} < \phi_0; \phi_0 > & \dots & < \phi_0; \phi_m > \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ < \phi_0; \phi_m > & \dots & < \phi_m; \phi_m > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < Y; \phi_0 > \\ \vdots \\ < Y; \phi_m > \end{pmatrix}$$

# Ejemplo IV: Matriz de Hilbert

$$< \phi_j ; \phi_k >= \int_a^b \phi_i \phi_j dx$$

$$H_{j+1;k+1} = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1} \Longrightarrow \begin{cases} b = \frac{3\pi}{7} \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b^1}{1} & \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} \\ \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} & \frac{b^4}{4} \\ \frac{b^3}{3} & \frac{b^4}{4} & \frac{b^5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\pi}{7} & \frac{9\pi^2}{98} & \frac{9\pi^3}{343} \\ \frac{9\pi^2}{98} & \frac{9\pi^3}{343} & \frac{81\pi^4}{9604} \\ \frac{9\pi^3}{343} & \frac{81\pi^4}{9604} & \frac{243\pi^5}{84035} \end{pmatrix}$$

# Ejemplo IV: Vector independiente

$$y_0 = \int_0^{\frac{3\pi}{7}} \frac{6e^{-x}}{cos(x)} dx$$

$$y_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{7}} \frac{6e^{-x}x}{cos(x)} dx$$

$$y_2 = \int_0^{\frac{3\pi}{7}} \frac{6e^{-x}x^2}{cos(x)} dx$$

$$y_0 \approx 6,17$$

$$y_1 \approx 4,12$$

$$y_2 \approx 3,81$$

No se pueden calcular las integrales de manera analítica → Aproximación por integración numérica

# Ejemplo IV: Resolución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3\pi}{7} & \frac{9\pi^2}{98} & \frac{9\pi^3}{343} & 6,17 \\ \frac{9\pi^2}{98} & \frac{9\pi^3}{343} & \frac{81\pi^4}{9604} & 4,12 \\ \frac{9\pi^3}{343} & \frac{81\pi^4}{9604} & \frac{243\pi^5}{84035} & 3,81 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} C_0 = 6,01 \\ C_1 = -6,36 \\ C_2 = 4,67 \end{cases}$$

$$p_2(x) = 4,67x^2 - 6,36x + 6,01$$

# Ejemplo IV: Gráfico