Aproximación de funciones - Interpolación

1. Introducción

Interpolación es un método de aproximación de funciones que consiste en determinar el único polinomio de grado a lo sumo n, que pasa por los $n+1$ puntos o nodos dato. El polinomio resultante nos proporciona una fórmula para aproximar los valores intermedios de la función *f(x)*, dentro de nuestro intervalo.

Aunque hay uno y solo un polinomio de a lo sumo n-*ésimo* grado que interpola los $n+1$ puntos, tenemos diferentes métodos para arribar a su expresión. A continuación, expondremos algunos de ellos a través de casos aplicados a la práctica.

2. Métodos de Interpolación

2.1 Interpolación de Newton o de las Diferencias Divididas

La expresión general de los polinomios de interpolación de Newton para $n+1$ puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ es la siguiente:

$$P_n(x) = b_0 + b_1.(x - x_0) + b_2.(x - x_0).(x - x_1) + \cdots + b_n.(x - x_0).(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \qquad (2.1.1)$$

Siendo

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

…

$$b_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Es decir:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	x0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x2]	f[x0, x1, x2, x3]
1	x1	f(x1)	f[x1, x2]	f[x1, x2, x3]	
2	x2	f(x2)	f[x2, x3]		
3	x3	f(x3)			

Analicemos algunas particularidades de la expresión (2.1.1) previo a llevarlo a un caso práctico. Vemos que cada término está acompañado de un coeficiente b_i que se calcula de la forma antes expuesta. Dichas expresiones son las ecuaciones en *diferencias divididas finitas* y constituyen aproximaciones de las derivadas de la función f(x) correspondientes a cada orden. Es decir, que cada término que expandimos la expresión, aumentamos un grado el polinomio, acompañando el comportamiento de un orden superior de la función, particularidad que también se asocia con la expansión de la serie de Taylor.

Observemos a su vez, que cada término que se agrega, usa información de los términos que lo anteceden, no siendo necesario recalcularlos.
Descubramos algunas otras particularidades aplicando algunos casos prácticos.

Eje 2.1.1) Aproximar el valor de la función ln(2)=0.6931472 mediante interpolación utilizando:

a)

i	0	1
x_i	1	6
$f(x_i)$	0	1,791759

b)

i	0	1
x_i	1	4
$f(x_i)$	0	1,386294

c)

i	0	1	2
x_i	1	4	6
$f(x_i)$	0	1,386294	1,791759

Estime una cota del error usando el dato adicional f(5)=1.609438

Resolución

Planteamos el polinomio de interpolación de Newton de la ecuación (2.1.1) para:

a) $P_n(x)$ de *grado n=1* ya que contamos con *n+1=2* puntos:

i	0	1
x_i	1	6
$f(x_i)$	0	1,791759

$$P_1(x) = b_0 + b_1 (x-1)$$

Con:

$$b_0 = f(1) = 0$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = 0.3583518$$

Nuestra expresión del polinomio nos queda como:

$$\boxed{P_1(x) = 0 + 0.3583518\,(x-1)}$$

Y calculando para $x = 2$

$$P_1(2) = \mathbf{0.3583518}$$

$$\varepsilon = \frac{0.3583518-0.6931472}{0.6931472} = -48.3\%$$

b) $P_n(x)$ de *grado n=1* ya que contamos con *n+1=2* puntos:

i	0	1
x_i	1	4
$f(x_i)$	0	1,386294

$$P_1(x) = b_0 + b_1\,(x-1)$$

Con:

$$b_0 = f(1) = 0$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = 0.4620981$$

Nuestra expresión del polinomio nos queda como:

$$\boxed{P_1(x) = 0 + 0.4620981\,(x-1)}$$

Y calculando para $x = 2$

$$P_1(2) = \mathbf{0.4620981}$$

$$\varepsilon = \frac{0.4620981-0.6931472}{0.6931472} = -33.3\%$$

c) $P_n(x)$ de *grado n=2* ya que contamos con *n+1=3* puntos:

i	0	1	2
x_i	1	4	6
$f(x_i)$	0	1,386294	1,791759

$$P_2(x) = b_0 + b_1\,(x-1) + b_2\,(x-1)\,(x-4)$$

Con:

$$b_0 = f(1) = 0$$

$$b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = 0.4620981$$

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{\frac{1.791759-1.386294}{6-4} - \frac{1.386294-0}{4-1}}{6-1} = -0.0518731$$

Nuestra expresión del polinomio nos queda como:

$$\boxed{P_2(x) = 0 + 0.4620981\,(x-1) - 0.0518731\,(x-1)\,(x-4)}$$

Y calculando para $x = 2$

$$P_2(2) = \mathbf{0.5658444}$$

$$\varepsilon = \frac{0.5658444-0.6931472}{0.6931472} = -18.4\%$$

La expresión del error responde a la forma:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \qquad (2.1.2)$$

Esta ecuación contiene $f(x)$ y usualmente, resulta desconocida. Si no conocemos la función f(x), podemos utilizar en el caso que se disponga, un dato adicional $f(x_{n+1})$, para estimar el error a partir de la expresión (2.1.2). Para un polinomio de n-ésimo grado, la ecuación de estimación del error resulta:

$$R_n \cong f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Para nuestro ejercicio, tenemos:

$$R_n \cong f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 0.007865529(x-1).(x-4).(x-6)$$

Evaluando dicha expresión para x=2, obtenemos la siguiente estimación del error

$$R_n \cong 0.007865529(x-1).(x-4).(x-6) = 0.0629242$$

Observar que el error verdadero es $f(2) - P_2(2) = 0.6931472 - 0.5658444 = 0.1273028$.

Comentarios

A partir de lo antes calculado y observando el gráfico 2.1, podemos ver que los polinomios de grado superior mejoran la aproximación (nuestra interpolación del inciso c) reporta menor error, siendo la que más cerca esta del valor real de la función) y, de hecho, si la f(x) fuese un polinomio de grado *n*, una interpolación de *n-ésimo* grado basado en *n+1* datos, daría una aproximación exacta de la función. Haremos un comentario especial en la sección 3, para aquellos casos donde se presenten casos con n>10.

Comparando las interpolaciones de igual grado (*n=1*) de los incisos a) y b), vemos que ésta última realiza una mejor aproximación. Sucede por lo general, que cuánto más cerca y centrado el punto desconocido x este respecto de nuestros datos, mejor será la aproximación. Por ejemplo, si comparamos la interpolación lineal hecha en b) donde usamos $x_0 = 1 \;\; y \;\; x_1 = 4$, con una nueva interpolación que llamaremos d), del mismo orden, pero para $x_0 = 1.5 \;\; y \;\; x_1 = 2.5$, y calculamos los polinomios en $P_1(2)$ veremos que esta última se aproxima considerablemente mejor, ya que los puntos dato están centrados y más próximos al punto desconocido x como se observa en el Grafico 2.2. Esto se deduce directamente de la expresión del error $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$ que si suponemos que $f^{(n+1)}(\xi)$ no varía mucho a través de los datos, el error es proporcional al producto $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.
Como último comentario, no es necesario que los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ estén en orden ascendente para poder interpolar, ni que sean equiespaciados.

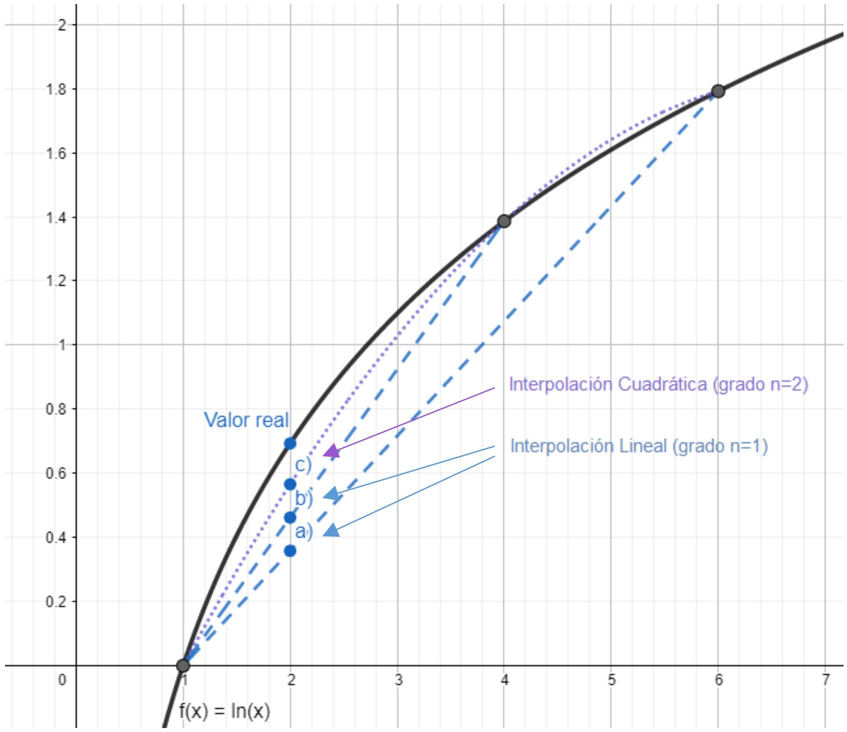

Grafico 2.1 – Representación de los polinomios calculados en a), b), c) y función f(x)=ln(x)

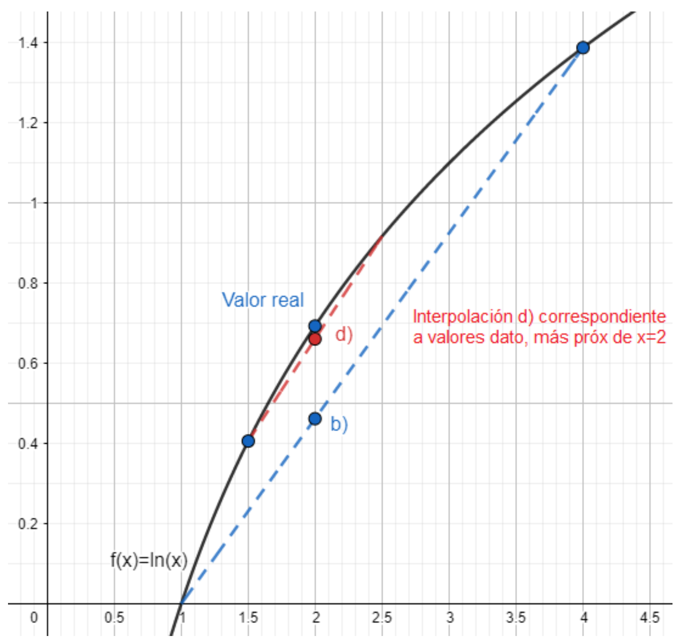

Gráfico 2.2-Interpolaciones lineal para valores de $x_0 = 1.5$ *y* $x_1 = 2.5$*, más próximos a la incógnita para x=2*

2.2 Interpolación de Lagrange

El polinomio de interpolación de Lagrange es una reformulación del polinomio de Newton, por lo que para *n+1* puntos, los polinomios interpolantes que resulten de cada método serán matemáticamente equivalentes. La expresión de polinomio de Lagrange es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\ f(x_i)$$

Donde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Eje 2.2.1) Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange.

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	1	0,50	0,333...	0,25

Interpolar para x=3.5, siendo f(x)=1/x.

Resolución

Desarrollamos el polinomio de Lagrange de grado *n*=3:

$$P_3(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2) + L_3(x)\, f(x_3) \qquad (2.2.1)$$

Con:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)\,(x-3)(x-4)}{(1-2)\,(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}\,(x-2)\,(x-3)(x-4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1)\,(x-3)(x-4)}{(2-1)\,(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}\,(x-1)\,(x-3)(x-4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)\,(x-2)(x-4)}{(3-1)\,(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{2}(x-1)\,(x-2)(x-4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)\,(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)\,(x-2)(x-3)}{(4-1)\,(4-2)(4-3)} = \frac{1}{6}(x-1)\,(x-2)(x-3)$$

Reemplazando en la ecuación (2.2.1), el polinomio de Lagrange resulta:

$$\boxed{P_3(x) = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{5}{12}x^2 - \frac{35}{24}x + \frac{25}{12}}$$

Resolviendo para x=3.5

$$P_3(3{,}5) = -\frac{1}{24}3{,}5^3 + \frac{5}{12}3{,}5^2 - \frac{35}{24}3{,}5 + \frac{25}{12}$$

$$P_3(3{,}5) = \mathbf{0.296875}$$

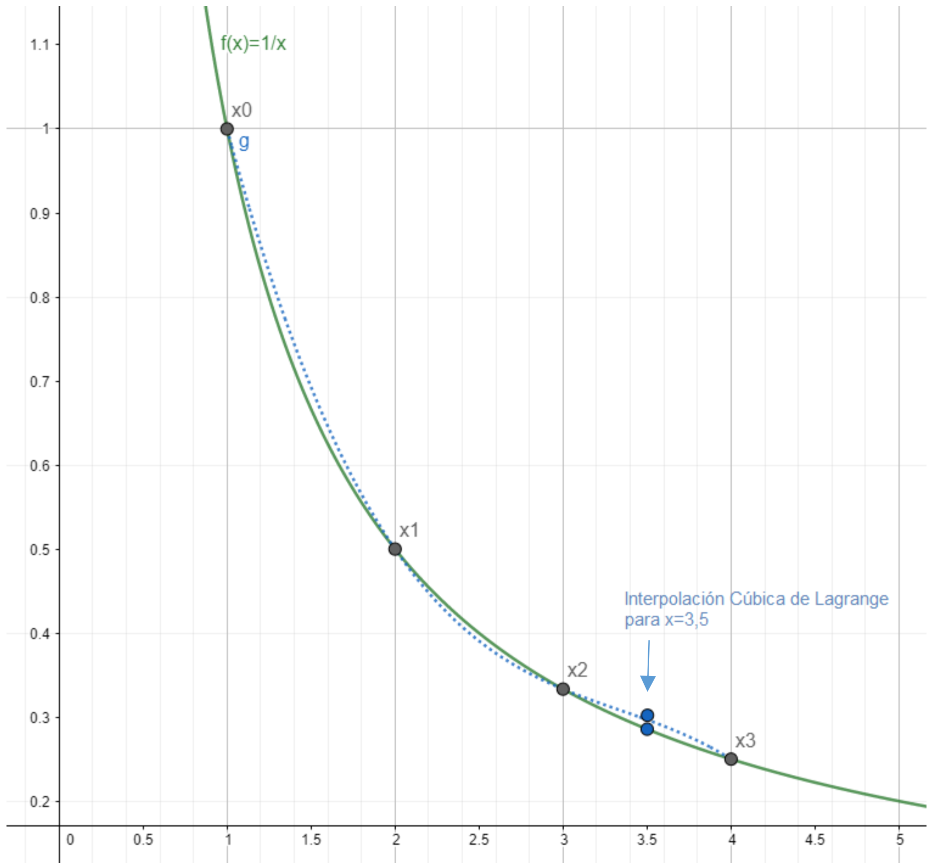

Gráfico 2.3-Interpolación de Lagrange

Eje 2.2.2) Resolver el ejercicio 2.1.1, c) con el método de Lagrange y evaluar para f(2)=ln(2). Estimar una cota del error máximo cuando el polinomio se usa para aproximar f(x) para x∈[1,6].

i	0	1	2
x_i	1	4	6
$f(x_i)$	0	1,386294	1,791759

Resolución

Planteamos el polinomio de grado n=2 para los n+1=3 puntos dados:

$$P_2(x) = L_0(x)\,.\,0 + L_1(x)\,1.386294 + L_2(x)\,1.791759 \qquad (2.2.2)$$

Con:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} = \frac{(x-4)\,(x-6)}{(1-4)\,(1-6)} = \frac{x^2-10x+24}{15} \tag{2.2.3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)\,(x-6)}{(4-1)\,(4-6)} = \frac{x^2-7x+6}{-6} \tag{2.2.4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)\,(x-4)}{(6-1)\,(6-4)} = \frac{x^2-5x+4}{10} \tag{2.2.5}$$

Reemplazando en la ecuación (2.2.2) el polinomio de Lagrange resulta:

$$\boxed{P_2(x) = -0.0518731\,x^2 + 0.7214635\,x - 0.6695904}$$

Evaluando para x=2

Lagrange $\Rightarrow$ $P_2(2) = \mathbf{0.5658444}$

Newton $\Rightarrow$ $P_2(2) = \mathbf{0.5658444}$

Vemos que los resultados coinciden como se observa en el Gráfico 2.4, ya que se trata del mismo y único polinomio de grado al menos n que interpola los n+1 puntos dados.

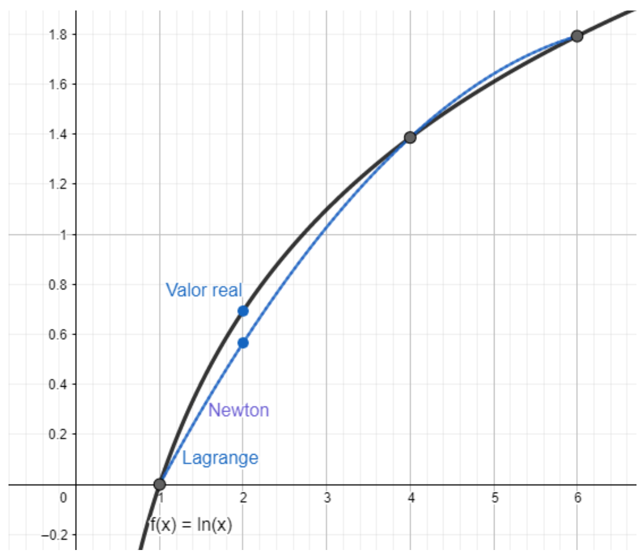

Gráfico 2.4 – Polinomios de Newton y Lagrange

Si observamos los términos de la ecuación (2.2.2), vemos que cada uno de los $L_i(x)\,f(x_i)$ consituye a su vez un polinomio que toma el valor $f(x_i)$ para x_i, y $f(x_j) = 0$ para el resto de los $x_{j\neq i} = [x_0, x_1, \dots, x_n]$. En consecuencia, la sumatoria de ellos es el único polinomio de n-ésimo grado que pasa exactamente a través de todos los n+1 puntos que se tienen como datos. En la figura 2.5 los representamos gráficamente.

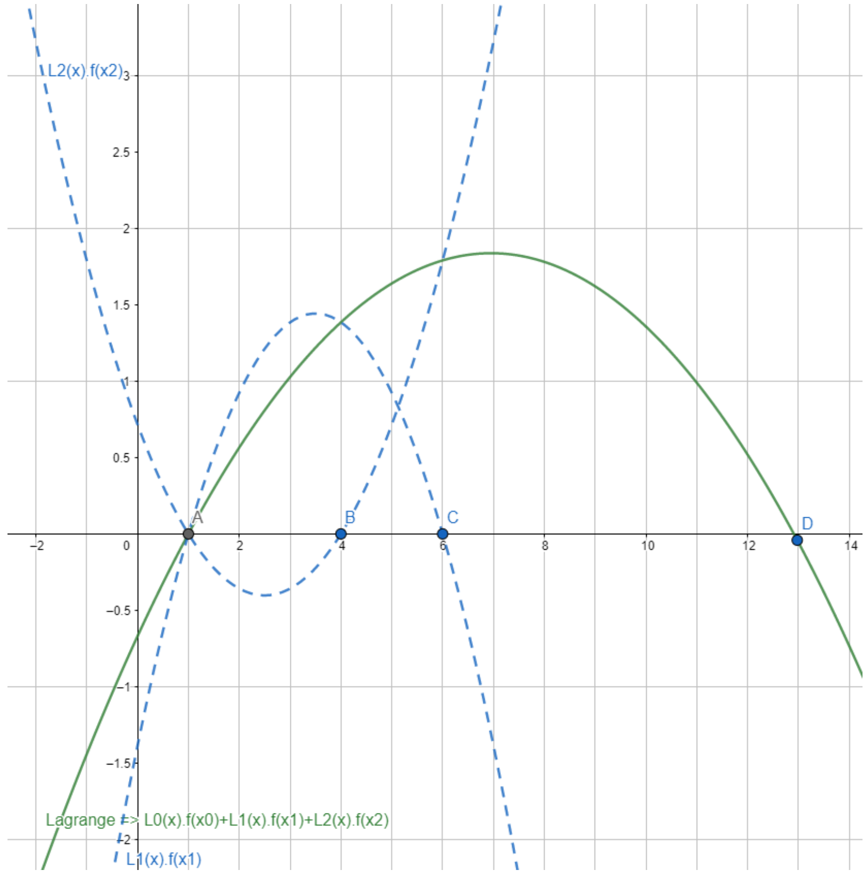

Gráfico 2.5 – composición del polinomio de Lagrange

La expresión de la cota del error para el polinomio de Lagrange de grado n=2 es

$R_2 = |f(x) - P_2(x)| \leq \left|\frac{f'''(\xi(x))}{3!}\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$ con $\xi(x)$ entre mín$\{x_0, \ldots, x_n\}$ y máx $\{x_0, \ldots, x_n\}$ (2.2.6)

Siendo $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ y reemplazando en la ecuación (2.2.6) nos queda:

$$R_2 \leq \left|\frac{2}{3!\,\xi(x)^3}(x-1)(x-4)(x-6)\right|, \qquad \text{para } \xi(x) \in (1,6)$$

El valor máximo de $|f'''(\xi(x))|$ en el intervalo ocurre para x=1 y $\xi(1)^{-3} = 1^{-3} = 1$. Para $|(x-1)(x-4)(x-6)|$ debemos buscar también su máximo valor absoluto en dicho intervalo. Y para eso llamaremos g(x) y, calculando sus puntos críticos:

$$g(x) = (x-1)(x-4)(x-6) = x^3 - 11x^2 + 34x - 24$$

$$g'(x) = 3x^2 - 22x + 34 = 0$$

$$para \;\; x_1 = 5.11963 \quad g(x_1) = -4.06067 \;;\; x_2 = 2.21370 \quad g(x_2) = 8.20882$$

Nos quedaremos con el máximo valor en módulo de g(x), es decir $|g(x_2)| = |8.20882|$.

Por lo tanto, la cota del error máximo cuando el polinomio se usa para aproximar f(x) x $\in$[1,6] es:

$$R_2 \leq \left|\frac{f^{'''}(\xi(x))}{3!}\,(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right| = \left|\frac{2}{6}.8.20882\right| \approx 2{,}73627$$

2.3 Interpolación de Hermite utilizando diferencias divididas

En este caso, además de pedirle al polinomio interpolante que $P(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0{,}1 \ldots, n$, le pediremos que también coincidan los valores de $P'(x_i) = f'(x_i)$. Al introducir esta condición, la "forma" de las curva en los puntos $(x_i, f(x_i))$, concuerdan ya que el polinomio y la función tienen las mismas rectas tangentes en dichos puntos.

La interpolación de Hermite utilizando diferencias dividas tiene sus bases en la interpolación de Newton Resolvamos un ejemplo para mayor claridad.

<u>Eje 2.3.1)</u> Utilizando el polinomio de Hermite para los datos dados, calcule una aproximación de f(0,5).

x_i	0	1
$f(x_i)$	0	3
$f'(x_i)$	1	6

<u>Resolución</u>

En este problema contamos con 4 datos (los dos datos de la función y de sus derivadas) por lo que obtendremos un polinomio de grado n=3. Planteamos la gráfica tal cual el método de Newton, pero con la particularidad que duplicamos las entradas de los x_i, ya que estamos pidiendo que se cumplan dos condiciones para cada uno de los x_i :

i	x_i	$f(x_i)$	f$[x_i, x_i]$	f$[x_i, x_i, x_i]$	f$[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	0	f(x0)	f[x0, x0]=f´(x0)	f[x0, x0, x1]	f[x0, x0, x1, x1]
0	0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x1]	
1	1	f(x1)	f[x1, x1]=f´(x1)		
1	1	f(x1)			

En este esquema se nos plantea la dificultad de resolver $f[x_0, x_0] = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{x_0-x_0} \rightarrow ind.$ pero si observamos bien, no es más que el cálculo del $\lim_{x\to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Resolviendo nos queda:

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	0	0	f´(x0)=1	$\frac{3-1}{1-0} = 2$	$\frac{3-2}{1-0} = 1$
0	0	0	$\frac{3-0}{1-0} = 3$	$\frac{6-3}{1-0} = 3$	
1	1	3	f´(x1)=6		
1	1	3			

Nuestra expresión del Polinomio de Hermite resulta

$$P_3(x) = f[x_0] + f'(x_0)\,(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

$$\boxed{P_3(x) = 0 + 1\,(x - 0) + 2(x - 0)^2 + 1(x - 0)^2(x - 1)}$$

Evaluándolo en x=0.5

$$P_3(0.5) = 1\,(0.5) + 2(0.5)^2 + 1(0.5)^2(0.5 - 1) = \mathbf{0.875}$$

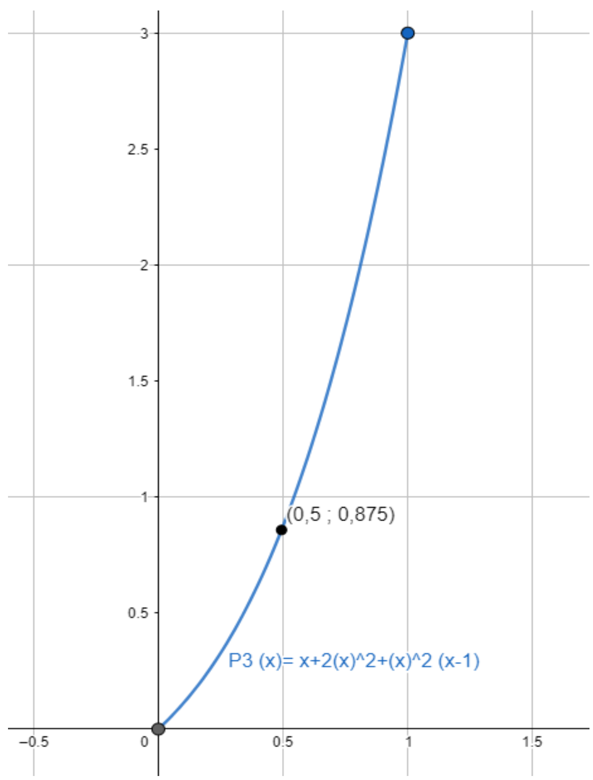

Gráfico 2.6 –polinomio de Hermite grado n=3

Si agregáramos un dato adicional para un x_2 y desarrollamos un término más al polinomio, podríamos utilizar la ecuación 2.2.1 para armarnos una estimación (y no una cota, cuidado) del error. La expresión de la estimación del error nos quedaría como:

$$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

3. Fenómeno de Runge

Es un fenómeno que se presenta en interpolaciones n>10 y nodos equiespaciados. Lo que ocurre es que la cota máxima del error aumenta conforme n toma valores más grandes, presentando oscilaciones entre los puntos datos, que aumentan en amplitud. Este fenómeno se resuelve interpolando en los nodos de Tchebycheff, que desplaza los puntos y los concentra en los extremos, mediante la expresión:

$$t_i = \cos\left(\frac{2i+1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right) \qquad con\ t_i\ entre\ [-1;1]$$

Otra posibilidad de salvar el fenómeno de Runge, es armando polinomios de grado inferior en subconjuntos de datos, denominado Interpolación mediante trazadores o Splines.

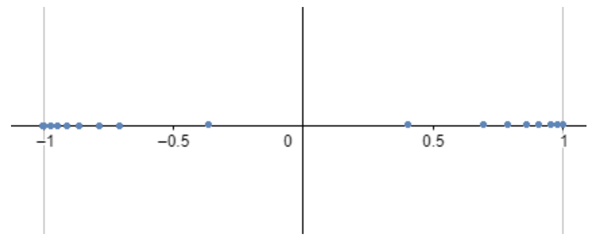

Gráfico 2.7 –ilustración nodos de Tchebycheff