

75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO IFACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**TRABAJO PRACTICO N° 1**
*1er Cuatrimestre 2020***Ecuaciones no lineales: Fondo de retiro**

INTRODUCCION

El valor acumulado de una cuenta de ahorros basada en pagos periódicos regulares puede ser determinado mediante el siguiente razonamiento: si A es el monto de la cuenta, P la cantidad depositada regularmente e i la tasa de interés o rendimiento por período, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Período de depósito}=1 & \quad A = P \\ \text{Período de depósito}=2 & \quad A = (1+i)P + P = [(1+i) + 1] P \\ \text{Período de depósito}=3 & \quad A = (1+i) [(1+i) + 1]P + P = [(1+i)^2 + (1+i) + 1] P \\ \text{Período de depósito}=n & \quad A = [\sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k]P = \frac{P}{i} [(1+i)^n - 1] \end{aligned}$$

que es la ecuación de la anualidad esperada.

Un profesional esta planificando su fondo de retiro privado y busca como objetivo tener una cuenta de ahorro de USD 200.000 luego del retiro dentro de 30 años, pero puede aportar USD P por mes para este objetivo. El problema consiste entonces en determinar cuál es la tasa mínima de interés o rendimiento de sus ahorros (i), suponiendo que el interés es compuesto mensualmente, es decir, cada mes se incorporan los intereses del saldo acumulado anterior.

Para calcularla se proponen los siguientes algoritmos iterativos:

$$\text{Algoritmo 1:} \quad x_{k+1} = x_k - \left\{ \frac{P}{x_k} [(1+x_k)^n - 1] - A \right\}$$

$$\text{Algoritmo 2:} \quad x_{k+1} = \sqrt[n]{A \frac{x_k}{P} + 1} - 1$$

$$\text{Algoritmo 3:} \quad x_{k+1} = \frac{P}{A} [(1+x_k)^n - 1]$$

$$\text{Algoritmo 4:} \quad x_{k+1} = \sqrt[n/2]{\frac{A \frac{x_k}{P} + 1}{(1+x_k)^{n/2}}} - 1$$

$$\text{Algoritmo 5:} \quad x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{P}{x_k} [(1+x_k)^n - 1] - A}{\frac{-P}{x_k^2} [(1+x_k)^n - 1] + \frac{P}{x_k} n(1+x_k)^{n-1}}$$

DESARROLLO

A) Generalidades:

A.1 Determine el valor de la cuota P mediante $P=NP/700$, donde NP = numero de padrón. En caso de trabajar en equipo usar NP de uno de los alumnos. Informar el valor usado.

A.2 Estudie la función dada para determinar el entorno donde se encuentra la raíz buscada (realice un gráfico o una pequeña tabla).

B) Propiedades de convergencia:

B.1 Compruebe que en el límite $n \rightarrow \infty$ cada algoritmo converge a la solución analítica del problema matemático. Informe su demostración.

B.2 Desarrolle un programa computacional que utilice los 5 algoritmos propuestos. Trabaje en **simple precisión** y utilice un criterio de corte para errores relativos menores a 10^{-5} .

B.3 Estudie en forma experimental las propiedades de convergencia de cada uno de los algoritmos propuestos. Para ello corra el programa para diferentes valores del punto inicial x_0 (semilla) y determine explícitamente los respectivos intervalos de convergencia. Empiece con un intervalo no menor que $[0,5X, 2X]$ siendo X un valor aproximado (a partir de **A.2**) de la raíz buscada. Complete la siguiente tabla:

Algoritmo #	Intervalo de convergencia	
	X_{minimo}	X_{maximo}
1		
2		
3		
4		
5		

B.4 De acuerdo a lo estudiado en **B.3** emplee un punto de partida permitido y común a los 5 algoritmos. Muestre una tabla con los resultados numéricos obtenidos en las sucesivas iteraciones para cada uno de ellos (aún sin convergencia):

n (iteración)	X_{n+1} (simple precisión)				
	1	2	3	4	5
1					
...
N					

C) Errores y velocidad de convergencia

C.1 Realice una figura mostrando el error relativo en función del número de iteración para cada uno de los algoritmos (**todas las curvas en la misma figura**).

C.2 Realice una figura mostrando el error relativo de cada iteración en función del error del paso anterior para cada uno de los algoritmos. Obtenga información sobre la velocidad de convergencia de cada método y explique si está de acuerdo a la teoría vista en el curso.

C.3 Corra el programa en doble precisión y con una tolerancia relativa de 10^{-10} . Construya una tabla como la de **B.4**.

C.4 Compare con los resultados en simple precisión a partir de la siguiente tabla (escribir cada raíz correctamente redondeada):

Método #	Simple precisión		Doble precisión	
	# iteraciones	raíz	# iteraciones	Raíz
1				
2				
3				
4				
5				

D) Resultado y comparativa

D.1 Calcule el valor anual (el interés obtenido será mensual, por lo que para conocer el valor anual se debe multiplicar por 12) e investigue los rendimientos históricos de algunos fondos comunes de inversión en dólares de algún banco, agente de bolsa o fintech. Indique si el rendimiento requerido es viable de acuerdo a su investigación.

D.2 Realizar un análisis de la variación que puede sufrir la cuenta al momento de retiro, siendo que los rendimientos reales y la capacidad de poder realizar los aportes pueden cambiar. Para ello, aplicar la técnica de perturbaciones experimentales para hallar una cota del delta de la cuenta (ΔA), asumiendo una variación de los rendimientos de $\pm 30\%$ (R_i) y $\pm 10\%$ para los aportes (R_P).

D.3 Determine cuál debería ser la tasa de rendimiento anual para alcanzar una cuenta con 1 millón de dólares al cabo de 30 años, si se mantienen los aportes planificados originalmente.

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones. Indique la solución obtenida en simple y doble precisión.

En particular, comente sobre:

- la relación problema matemático-problema numérico,
- problemas numéricos para resolver un mismo problema matemático,
- convergencia,
- velocidad de convergencia,
- errores de redondeo.