2. Propagación de Errores de Entrada

En esta oportunidad nos centraremos en cómo los errores en los números pueden propagarse a través de nuestros cálculos. Por ejemplo, si multiplicamos dos números que tienen errores, nos interesaría estimar el error de este producto.

Apliquemos este tema a la resolución de algunos ejercicios prácticos de propagación.

2.1. Aplicación práctica de la Teoría de Propagación de Errores de Entrada

Ejercicio 1

Calcular las siguientes expresiones incluyendo sus cotas de error absoluto donde:

$\hat{x}_1 = 2{,}00 \;\; \hat{x}_2 = 3{,}00 \;\; \hat{x}_3 = 4{,}00$ (estos valores ya están correctamente redondeados)

a) $3x_1 + x_2 - x_3$
b) $x_1.x_2/x_3$
c) $x_1 sen(\frac{x_2}{40})$

Resolución

a) Asumimos las máximas cotas de error absoluto que se podrían tener para que resulten 3 dígitos significativos:

$$\Delta x_1 = 0{,}005 \;\; \Delta x_2 = 0{,}005 \;\; \Delta x_3 = 0{,}005$$

Nuestra función resulta:

$y = 3x_1 + x_2 - x_3$

Reemplazando nos queda

$\hat{y} = 3\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}_3$

$= 3\,.\,2{,}00 + 3{,}00 - 4{,}00 \quad => \quad \boldsymbol{\hat{y} = 5{,}00}$

Aplicando la fórmula de propagación de propagación de errores que conocemos resulta:

$\Delta y = \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P . \Delta x_i$ con $P = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$

$= |3|\,.\,\Delta x_1 + |1|\,.\,\Delta x_2 + |-1|\,.\,\Delta x_3 \quad => \quad \boldsymbol{\Delta y} = 0{,}025 \cong \mathbf{0{,}03}$

Expresando correctamente el resultado obtenemos:

$\boxed{\mathbf{y = 5{,}00 \pm 0{,}03}}$ **Redondeo Truncado≡ Simétrico**

> ***Obs.*** Para las cotas tener en cuenta:
> 1-Redondear siempre para arriba (↑)
> 2-Deben contener solo 1 digito ≠0

b) Asumimos las mismas cotas de error absoluto:

$$\Delta x_1 = 0{,}005 \;\; \Delta x_2 = 0{,}005 \;\; \Delta x_3 = 0{,}005$$

En este caso, nuestra función resulta

$y = x_1.x_2/x_3$

Reemplazando nos queda

$\hat{y} = \hat{x}_1 \,.\, \hat{x}_2 \,/\, \hat{x}_3$

$= 2{,}00 \,.\, 3{,}00 \,/\, 4{,}00$ => $\boldsymbol{\hat{y} = 1,50}$

Calculemos la propagación del error:

$\Delta y = \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P . \Delta x_i$ con $P = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$

$= \left|\frac{x_2}{x_3}\right|_P . \Delta x_1 + \left|\frac{x_1}{x_3}\right|_P . \Delta x_2 + \left|\frac{-x_1 . x_2}{{x_3}^2}\right|_P . \Delta x_3$ => $\boldsymbol{\Delta y} = 0{,}008125 \cong 0.009 \cong \boldsymbol{0,01}$

Expresando correctamente el resultado obtenemos:

$\boxed{\mathbf{y = 1,50 \pm 0,01}}$ **Redondeo Truncado≡ Simétrico**

Obs. Tener en cuenta:
1-Redondear las cotas siempre para arriba (↑)
2-Los resultados no pueden contener dígitos No Significativos. Por ello se llevó la cota al valor de **0,01** ya que el error se encuentra en el segundo decimal.

c) Asumimos las mismas cotas de error absoluto:

$\Delta x_1 = 0{,}005 \quad \Delta x_2 = 0{,}005$

En este caso, nuestra función resulta

$y = x_1 sen(\frac{x_2}{40})$

Reemplazando nos queda

$\hat{y} = \hat{x}_1 \; sen(\frac{\hat{x}_2}{40})$

$= 2{,}00 \,.\, sen(\frac{3{,}00}{40})$ => $\boldsymbol{\hat{y} = 0,149859414}$

Calculemos la propagación del error:

$\Delta y = \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P . \Delta x_i$ con $P = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$

$= \left|sen(\frac{x_2}{40})\right|_P . \Delta x_1 + \left|\frac{x_1}{40} \; cos(\frac{x_2}{40})\right|_P . \Delta x_2$ => $\boldsymbol{\Delta y} = 0{,}00062 \cong 0.0007 \cong \boldsymbol{0,001}$

Expresando correctamente el resultado obtenemos:

$\boxed{\mathbf{y = 0,150 \pm 0,001}}$ **Redondeo Simétrico**

$\boxed{\mathbf{y = 0,149 \pm 0,001}}$ **Redondeo Truncado**

Obs. Tener en cuenta:
1-Redondear las cotas siempre para arriba (↑).
2-Los resultados no pueden contener dígitos No Significativos. Por ello se llevó la cota al valor de **0,001** ya que el error se encuentra en el tercer decimal.

Ejercicio 2

Calcular la siguiente expresión, incluyendo su cota de error absoluto:

$$y = x_1 . {x_2}^2 / x_3$$

donde $x_1 = 2{,}0 \pm 0{,}1$ $x_2 = 3{,}0 \pm 0{,}2$ $x_3 = 1{,}0 \pm 0{,}1$. Indicar qué variable tiene mayor incidencia en el error en **y**.

Resolución

Para este caso tenemos:

$$y = x_1 . \frac{{x_2}^2}{x_3}$$

Reemplazando nos queda

$$\hat{y} = \hat{x}_1 . \frac{{\hat{x}_2}^2}{\hat{x}_3}$$

$$= 2{,}0 . \frac{3{,}0^2}{1{,}0} \qquad => \qquad \boldsymbol{\hat{y} = 18{,}0}$$

Calculemos la propagación del error:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_P . \Delta x_i \qquad \text{con } P = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

$$= \left| \frac{{x_2}^2}{x_3} \right|_P . \Delta x_1 + \left| \frac{2\, x_1 . x_2}{x_3} \right|_P . \Delta x_2 + \left| \frac{-x_1 . {x_2}^2}{{x_3}^2} \right|_P . \Delta x_3 \quad (2) \quad => \quad \Delta \boldsymbol{y} = 5{,}1 \cong 6 \cong \mathbf{10}$$

Expresando correctamente el resultado obtenemos:

$\boxed{\mathbf{y = 20 \pm 10}}$ **Redondeo Simétrico**

$\boxed{\mathbf{y = 10 \pm 10}}$ **Redondeo Truncado**

Obs. Tener en cuenta:
1-Redondear las cotas siempre para arriba (↑).
2-Los resultados no pueden contener dígitos No Significativos. Por ello se llevó la cota al valor de **10** ya que el error se encuentra en el primer dígito entero.

Volviendo a la ecuación *(2)*, analicemos la influencia de cada variable en el error de **y**. Planteemos el error relativo (R_y) de esta última, para apreciar mejor la relación:

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| \frac{{x_2}^2}{x_3} \right| . \frac{\Delta x_1}{x_1 . \frac{{x_2}^2}{x_3}} + \left| \frac{2\, x_1 . x_2}{x_3} \right| . \frac{\Delta x_2}{x_1 . \frac{{x_2}^2}{x_3}} + \left| \frac{-x_1 . {x_2}^2}{{x_3}^2} \right| . \frac{\Delta x_3}{x_1 . \frac{{x_2}^2}{x_3}}$$

Cancelando y reagrupando obtenemos:

$$R_y = \frac{\Delta x_1}{x_1} + 2 \frac{\Delta x_2}{x_2 .} + \frac{\Delta x_3}{x_3} \qquad => \qquad \boldsymbol{R_y = R_x + 2\, R_{x2} + R_{x3}}$$

$$R_y = R_x + 2\, R_{x2} + R_{x3}$$

$$R_y = \frac{0{,}1}{2{,}0} + 2 \frac{0{,}2}{3{,}0} + \frac{0{,}1}{1{,}0}$$

$$R_y = 5\% + 14\% + 10\% \qquad => \qquad \boldsymbol{R_y = 29\%}$$

Obs.
Si bien el error relativo R_{x3} es el mayor de los 3, la incidencia depende de la operación. En este caso observamos que la operación cuadrática duplica el error relativo.

2.1.1 Efecto cancelación de términos

Esta situación se presenta por el redondeo inducido cuando se restan dos números de punto flotante, muy parecidos cancelando dígitos significativos y generando una pérdida de precisión importante cuando dicho error es propagado a lo largo de los cálculos. Veamos dicho efecto en dos ejemplos:

Ejemplo 1

Calcular el error relativo que se deriva de la siguiente función

$$y = x_1 - x_2$$

Dónde:

$x_1 = \pi$ $\quad \hat{x}_1 = 3{,}1416$ $\quad \partial x_1 = -7{,}35\,.\,10^{-6}$ $\quad \boldsymbol{r_1 = -2,34\,.\,10^{-6} = -2,34\,.\,10^{-4}\%}$

$x_2 = \frac{22}{7}$ $\quad \hat{x}_2 = 3{,}1429$ $\quad \partial x_2 = -4{,}29\,.\,10^{-5}$ $\quad \boldsymbol{r_2 = -1,36\,.\,10^{-5} = -1,36\,.\,10^{-3}\%}$

Calculamos el error relativo:

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{[x_1 - x_2\,] - [\hat{x}_1 - \hat{x}_2]}{x_1 - x_2}$$

$$r_y = \frac{\left[\pi - \frac{22}{7}\right] - [3{,}1416 - 3{,}1429]}{\left[\pi - \frac{22}{7}\right]} \quad => \quad \boldsymbol{r_y = -0,028 = -2,8\%}$$

> ***Obs.***
> Si comparamos los errores relativos remarcados, se puede ver que hay una pérdida de precisión que se origina en la cancelación de dígitos significativos durante la resta de dos números muy parecidos.

Ejemplo 2

Calcular el valor de las raíces de la siguiente ecuación cuadrática usando cinco dígitos significativos, y compare el valor calculado con las raíces verdaderas.

$$y = x^2 - 26\,x + 1$$

Resolución:

Planteamos la fórmula cuadrática para resolver el problema:

$x_1 = \frac{26+\sqrt{26^2-4}}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \frac{26-\sqrt{26^2-4}}{2}$

$x_1 = 13 + \sqrt{168}$ Resultado exacto $\qquad$ $x_2 = 13 - \sqrt{168}$ Resultado exacto

$\hat{x}_1 = 13 + 12{,}961$ Usando 5 dig. Sig. (1) $\qquad$ $\hat{x}_2 = 13 - 12{,}961$ (2)

$\hat{x}_1 = 25{,}961$ $\qquad$ $\hat{x}_2 = 0.039$

Los errores relativos resultan:

$$\boldsymbol{r_{x1}} = \frac{13+\sqrt{168}-25.961}{13+\sqrt{168}} = \boldsymbol{1,85\,.\,10^{-5}} \qquad \boldsymbol{r_{x2}} = \frac{13-\sqrt{168}-0.039}{13-\sqrt{168}} = \boldsymbol{1,25\,.\,10^{-2}}$$

Se puede observar, la perdida de precisión que ocurre en el cálculo de $\boldsymbol{\hat{x}_2}$ si comparamos los errores relativos $\boldsymbol{r_{x1}}$ y $\boldsymbol{r_{x2}}$, hecho puntualmente asociado a la resta dos números muy similares. De hecho la precisión de $\boldsymbol{r_{x2}}$ es mucho menor que la precisión de los datos introducidos para su cálculo. Renombremos y veamos:

$x_2 = n - m$ donde $n = 13\,;\; m = \sqrt{168}$ (hasta aquí nada distinto que lo que ya teníamos)

Ahora; $\hat{n} = n = 13$ porque no tuvimos que redondear ningún decimal.

$\widehat{m} = 12{,}961$ usando 5 dígitos significativos.

Entonces: $\boldsymbol{r_n} = \frac{13-13}{13} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{r_m} = \frac{12{,}961-\sqrt{168}}{\sqrt{168}} = \mathbf{3{,}714\,.\,10^{-5}}$

Por lo que resulta que la precisión obtenida de x_2 es mucho menor que la precisión de los datos introducidos para su cálculo. Dígitos significativos se han perdido durante la sustracción de dichos números, al ser tan similares. Vemos que, sumando los mismos datos obtenemos 5 dígitos significativos, mientras que si los restamos obtenemos solo 2.

Una manera de evitar este problema consiste en usar doble precisión, y la otra es reacomodar la fórmula cuadrática en la forma $x_2 = \frac{13-\sqrt{168}}{1} \cdot \frac{13+\sqrt{168}}{13+\sqrt{168}} = \frac{1}{13+\sqrt{168}}$

En este caso, el error relativo se reduce a $\boldsymbol{r_{x2}} = \mathbf{-1{,}03\,.\,10^{-5}}$ haciendo más preciso el resultado.