Material de apoyo Teórica XI

Temario

Análisis de sensibilidad
Problema Dual
Modificaciones a la solución óptima

- Modificaciones a los bi
  - Rango de variación de un bi
  - Gráfica de valor marginal
- Introducción de un nuevo producto
- Agregado de inecuaciones

Seguimos usando el problema de “FA CALDO”:

$$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600 \text{ [KG AZUCAR/MES]}$$
$$4\ X2 \leq 600 \text{ [KG CREMA/MES]}$$
$$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800 \text{[KG ALMID./MES]}$$

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

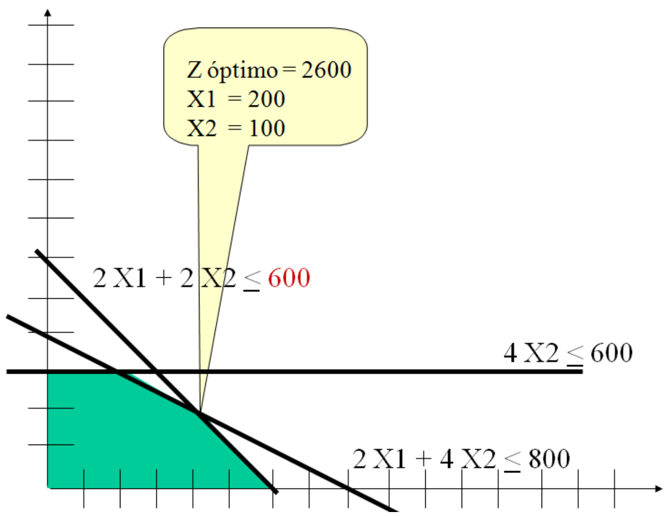
NO. ITERATIONS= 2

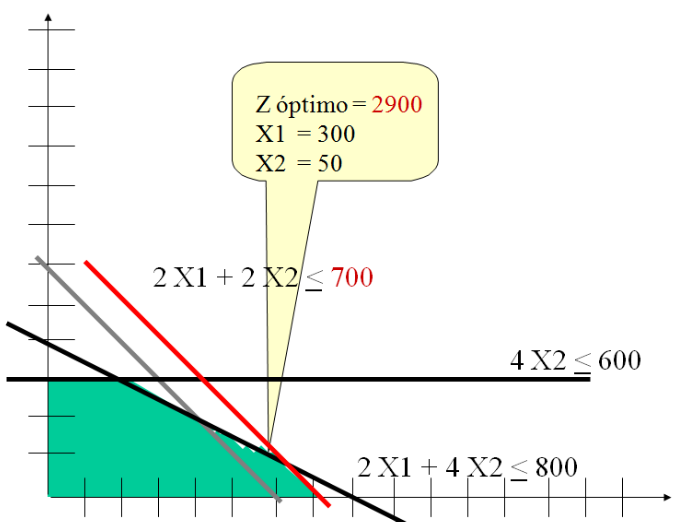
Solución del problema de los helados con GLPK

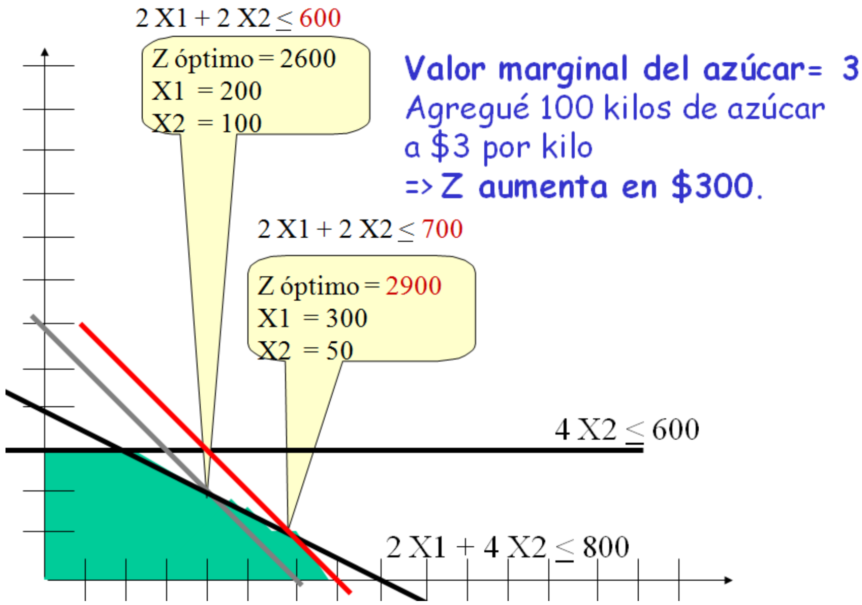
```
Problem:    FaCaldo
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 2600 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 Z            B           2600
     2 AZUCAR       NU           600                         600             3
     3 CREMA        B            400                         600
     4 ALMIDON      NU           800                         800             1

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 X1           B            200             0
     2 X2           B            100             0
```

❸ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso. Supongamos que conseguimos 100 kilos más de azúcar. ¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)

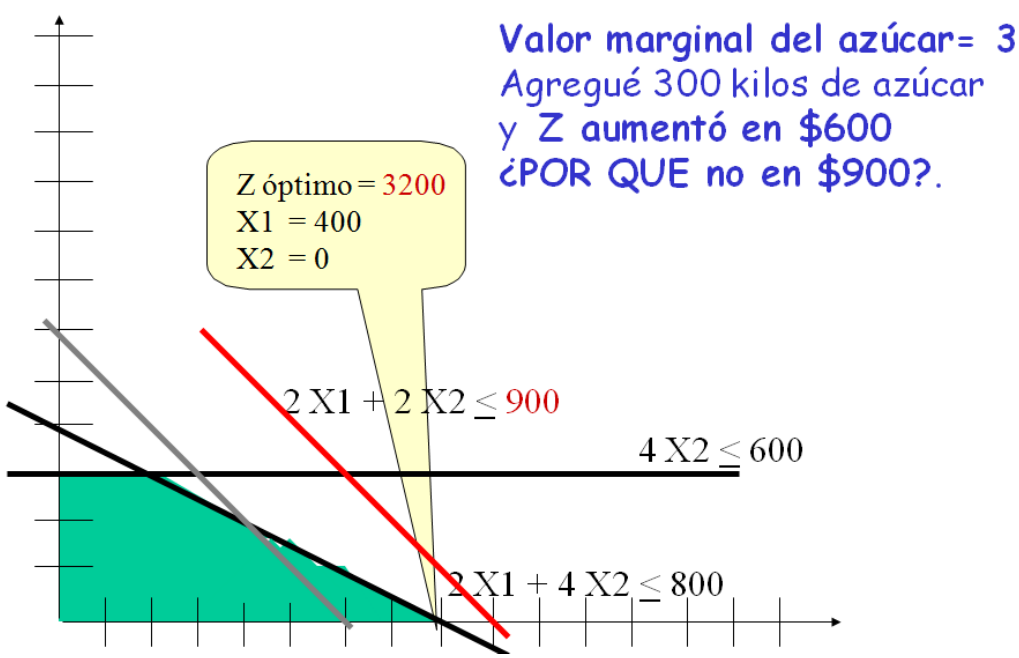






Como nos funcionó bien conseguir 100 kilos de azúcar (cada kilo nos aumentó el funcional en $3 que es el valor marginal del azúcar), vamos a intentar aumentar más la disponibilidad del azúcar.

Vamos a conseguir 300 kilos adicionales a los que teníamos en un principio (que eran 600). Lo que esperamos es que cada kilo aumente el funcional en $3, es decir que el Z pasará de valer 2600 a valer 3500



Lo que pasó fue que cuando conseguimos 200 kilos de azúcar llegamos al punto (400, 0) y al dejar de producir X2, no tenemos a quien quitarle almidón para agregarlo al azúcar que nos regalaron y no podemos hacer más producto X1
Por lo tanto, los 100 kilos restantes nos sobran (observen que la recta queda afuera del poliedro) y tienen valor marginal cero

Sería bueno que pudiéramos saber hasta cuánto conseguir para que se mantenga el valor marginal de $3 para el recurso
Para saber eso tenemos que parametrizar el coeficiente de disponibilidad de azúcar (b_1) que actualmente vale 600
Si lo pudiéramos parametrizar podríamos hacer un trabajo parecido al que hicimos la clase anterior con los c_j

El problema es que en la tabla óptima que nosotros tenemos no figura la disponibilidad de azúcar (figuraba en la primera tabla en la columna B, pero ya cambiamos la base varias veces)
Entonces tenemos que pasar de la expresión común del problema (que se llama expresión primal o directa) a otra expresión del problema, en la cual podamos parametrizar los términos independientes, que se llama PROBLEMA DUAL

El problema Dual

Dado un primal de la forma:

$$A\,X \leq B$$
$$X \geq 0$$
$$\max\ C\,X$$

donde:

A(mxn) B(mx1) 0(nx1)
X(nx1) C(1xn)

Se define como su problema Dual:

$$Y\,A \geq C$$
$$Y \geq 0$$
$$\min\ Y\,B$$

donde:

Y(1xm) 0(1xm)

Relación entre Primal y Dual:

- El dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal.
- El dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.
- El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.
- Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del primal, son los términos independientes de las rest. del dual.
- Los términos independientes de las rest. del primal son los coeficientes del funcional del dual.
- Toda columna de coeficientes en el primal se transforma en una fila de coeficientes en el dual.
- El sentido de las desigualdades del primal es el inverso del dual.

Hagamos el planteo inicial del dual de nuestro problema de los helados:

Directo inicial:
$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$
$0\ X1 + 4\ X2 \leq 600$
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$
$\text{MAX } Z = 8\ X1 + 10\ X2$

Dual inicial:
$2\ Y1 + 0\ Y2 + 2\ Y3 \geq 8$
$2\ Y1 + 4\ Y2 + 4\ Y3 \geq 10$
$\text{MIN } Z = 600\ Y1 + 600\ Y2 + 800\ Y3$

Relación entre las variables del Directo y las del Dual:
Sobrante de azúcar X3 - Y1 Valor marginal del azúcar
Sobrante de crema X4 - Y2 Valor marginal de la crema
Sobrante de almidón X5 - Y3 Valor marginal del almidón

Latas de hel. de agua X1 - Y4 Costo de oportunidad h. de agua
Latas de hel. de crema X2 - Y5 Costo de oportunidad h. de crema

Observemos que las slack del directo se relacionan con las reales del dual y las reales del directo se relacionan con las slack del dual

Teorema fundamental de la dualidad:

Si el problema primal (o el dual) tiene una solución óptima finita, entonces el otro problema tiene una solución óptima finita y los valores de los dos funcionales son iguales.

Si cualquiera de los dos problemas tiene una solución óptima no acotada, entonces el otro problema no tiene soluciones posibles.

Teorema de la holgura complementaria.

Dados el problema primal y el dual correspondiente, siempre que en la k-ésima restricción de uno de ellos la variable de holgura o slack tome valor distinto de cero, entonces la k-ésima variable del otro problema desaparece de la base y, si la k-ésima variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la k-ésima restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable slack o de holgura de esa restricción es igual a cero).

<u>Consecuencia del teorema de la holgura complementaria:</u>

Quiere decir que de cada par de variables directo-dual, una sola puede ser distinta de cero. Una sola de las dos está en la base de la tabla óptima de su problema.

0 = X3 Y1 = 3
200 = X4 Y2 = 0
0 = X5 Y3 = 1
200 = X1 Y4 = 0
100 = X2 Y5 = 0

Pero entonces, si el valor del Z del directo en el óptimo, es igual al valor del Z del dual en el óptimo y además el valor de las variables del dual es igual al valor del zj-cj de su variable relacionada en el directo, en base a la tabla óptima del directo tendríamos que poder armar la tabla óptima del dual.

Las variables que están en la base en la tabla óptima del dual son aquellas cuya variable relacionada en el directo no estaba en la base en la tabla óptima del directo. Es decir que en la base óptima del dual estarán Y1 e Y3, porque X3 y X5 no estaban en la base en la óptima del directo.

- El valor que toman las variables en la óptima del dual es igual al zj-cj de su variable relacionada del directo. Es decir que Y1 vale 3, Y3 vale 1 y las demás valen cero.
- Tenemos que verificar que el Z nos dé 2600
- Y podemos armar los vectores canónicos, que van a ser los vectores de Y1 e Y3, que son las variables que están en la base.

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1		0		
800	Y3	1	0		1		
		2600	0		0		

- El resto de los valores los vamos a sacar de los vectores no canónicos de la tabla óptima del directo, trasponiendo las columnas y cambiando el signo de los valores antes de pasarlos a la tabla del dual (les cambiamos el signo porque el dual opera con la identidad cambiada de signo, por ser un problema con restricciones de mayor o igual)
- Para saber dónde ubicar cada valor, colocamos en la tabla óptima del directo los nombres de las variables del dual relacionadas, debajo de cada columna y a la derecha de cada fila
- Hemos puesto un simbolito distinto en cada número para que se vea a dónde va a parar cada número de la tabla óptima del directo en la tabla óptima del dual.

TABLA OPTIMA DEL DIRECTO

			8	10				
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5	
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2	Y4
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2	Y5
0	X4	200	0	0	2	1	-2	Y2
		2600	0	0	3	0	1	
			Y4	Y5	Y1	Y2	Y3	

TABLA OPTIMA DEL DUAL

			600	600	800		
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
600	Y1	3	1	-2	0	-1	1/2
800	Y3	1	0	2	1	1/2	-1/2
		2600	0	-200	0	-200	-100

Aplicaciones lineales de los planteos duales.

- Análisis de sensibilidad de la solución óptima.
- Problema de transporte.
- Problema de asignación.
- Flujo en redes.
- Teoría de los juegos.
- Algoritmos de descomposición de problemas lineales de gran tamaño.

Modificaciones al problema original

❸ Modificaciones a los b_i

Ahora vamos a ver qué pasa cuando cambia la disponibilidad de un recurso.
Es muy probable que no vayamos a fabricar la misma cantidad que antes.
¿Seguirá siendo igual el valor marginal del recurso? Si conseguimos más cantidad convendría que sí, sino lo que pensamos que valía mucho, pasa a valer poco (o nada)
Para analizar esto, necesitamos el DUAL

Rango de variación de un b_i

Ahora queremos saber, para un determinado bi, dentro de qué rango puede variar su valor sin que la tabla óptima del dual deje de serlo.
Los software de resolución también nos permiten responder esto.

Por ejemplo, en LINDO:

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH $\boxed{\text{THE BASIS IS UNCHANGED:}}$

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

Por supuesto el rango es válido **si lo único que cambiamos es ese bi.**

¿Y cuál es la base que no cambia?. A continuación vemos cuáles son los valores que no cambian:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

Cuando se mantienen estos rangos

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

Esta parte de la solución no cambia

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

Cambios en los b_i

Se presenta la posibilidad de conseguir 100 kilos adicionales de almidón que son regalados por el dueño del restaurante “Fideo Fino”, cliente de la heladería.

¿Vale la pena considerar esta posibilidad?

En principio, el almidón está saturado (no tiene sobrante) por lo que convendría conseguir más. El valor marginal es 1, así que cada uno de los kilos que nos regalan nos da un peso de ganancia adicional, siempre que se mantenga el precio dual.
¿Cómo sabemos si se mantiene el precio dual?

Mirando el incremento permitido en la disponibilidad del recurso (allowable increase)

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

Como los 100 kilos están dentro del rango de aumento (justo son 100 como máximo), cada uno nos rinde 1 peso (nos aumenta el funcional en 1 peso).

Gráfica del VM del azúcar

- ¿Cómo se hace el gráfico de valor marginal de un recurso?
- Para empezar, en la solución óptima, tenemos que obtener el rango de variación para el cual es válido ese valor marginal

- Así, se sigue hasta obtener los distintos rangos cuando la disponibilidad varía entre 0 e infinito

Empecemos por la solución óptima actual

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

Para 500 <= b1 <= 800
esta tabla es óptima

Ahora vamos a reemplazar b1 por un valor mayor que 800 para ver qué pasa de 800 para arriba

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	INFINITY	3.000000
X2	10.000000	6.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	801.000000	INFINITY	1.000000
CR	600.000000	INFINITY	600.000000
AL	800.000000	1.000000	800.000000

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3200.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	400.000000	0.000000
X2	0.000000	6.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	1.000000	0.000000
CR)	600.000000	0.000000
AL)	0.000000	4.000000

Eso quiere decir que para una disponibilidad de Azúcar mayor a 800 el valor marginal del azúcar pasa a ser cero

Ahora que ya sabemos qué pasa de 800 a infinito, volvamos a la solución óptima original

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

Para 500 <= b1 <= 800 esta tabla es óptima

Ahora vamos a reemplazar b1 por un valor menor que 500 para ver qué pasa de 500 para abajo

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	8.000000
X2	10.000000	INFINITY	2.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	499.000000	1.000000	199.000000
CR	600.000000	2.000000	600.000000
AL	800.000000	INFINITY	1.000000

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2296.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	99.500000	0.000000
X2	150.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	4.000000
CR)	0.000000	0.500000
AL)	1.000000	0.000000

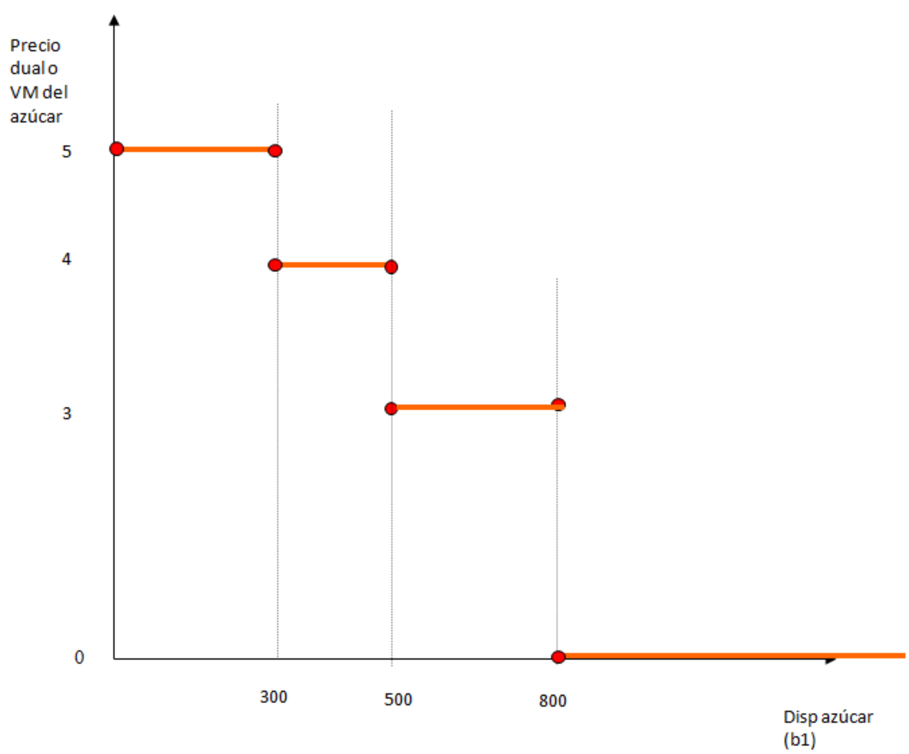
Para 300 <= b1 <= 500 esta tabla es óptima

Ahora vamos a reemplazar b1 por un valor menor que 300 para ver qué pasa de 300 para abajo

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                 COEF          INCREASE         DECREASE
      X1       8.000000        2.000000         INFINITY
      X2      10.000000        INFINITY         2.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW        CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                 RHS           INCREASE         DECREASE
      AZ     299.000000        1.000000       299.000000
      CR     600.000000        INFINITY         2.000000
      AL     800.000000        INFINITY       202.000000
```

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)       1495.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        0.000000          2.000000
        X2      149.500000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       AZ)        0.000000          5.000000
       CR)        2.000000          0.000000
       AL)      202.000000          0.000000
```

Para 0 <= b1 <= 300
esta tabla es óptima



Con esto ya podemos resolver todos los ejercicios de la práctica 5.

❸ Introducción de un nuevo producto

Ahora vamos a ver qué pasa cuando analizamos la posibilidad de fabricar un nuevo producto y no queremos resolver el problema de vuelta desde el principio.

- Ante el peligroso aumento de la competencia se decide ofrecer una promoción de yogur helado a 8 $/lata. Cada lata de yogur insume 1 kg. de almidón, 3 kg. de crema y 2 kg. de azúcar

$2\ X1 + 2\ X2 + 2\ X6 \leq 600$ [KG AZ/MES]
$4\ X2 + 3\ X6 \leq 600$ [KG CR/MES]
$2\ X1 + 4\ X2 + 1\ X6 \leq 800$[KG AL/MES]

$Z(MAX) = 8\ X1 + 10\ X2 + 8\ X6$

X6: latas de yogur helado fab. por mes (latas/mes)

Estimación previa por el método del lucro cesante:

Lucro Cesante = ∑ UsoRecursoi * VMRecursoi

Lucro Cesante = 2 kgAZ/lata * 3 $/kgAZ + 3 kgCR/lata * 0 $/kgCR + 1 kgAL/lata * 1 $/kgAL

LucroCesante = 7 $/lata

> Esto es una **estimación** del valor del Zj del nuevo producto.
>
> ¿El verdadero valor del Zj será mayor o menor que el Lucro Cesante?.
>
> Será mayor o igual ¿por qué?

Porque como estamos cambiando más de un recurso a la vez, no podemos confiar en que el valor marginal se va a mantener (el rango de variación es válido cuando movemos un solo recurso). Y como estamos quitando recurso, si no se mantiene el valor marginal, aumenta.

Estimación previa por el método del lucro cesante:

- Si el lucro cesante es mayor que el beneficio del nuevo producto NO CONVIENE producir el nuevo producto
- Si el lucro cesante es menor o igual que el beneficio del nuevo producto PUEDE SER CONVENIENTE fabricar el nuevo producto
- Como en el caso de nuestro producto el lucro cesante es 7 y es menor o igual que el cj (que es 8) PUEDE SER CONVENIENTE fabricar el nuevo producto, así que vamos a tener que incorporarlo a la solución que hasta ahora es óptima, de manera de analizar su conveniencia sin hacer todo de nuevo.

❹ Agregado de inecuaciones

- Ahora vamos a ver qué pasa cuando agregamos una restricción que antes no existía.
- Lo primero que tenemos que probar es si fabricando la misma cantidad cumplimos con la restricción.
- Si es así, la restricción nueva no afecta al óptimo actual (sigue siendo el óptimo).
- Si afecta, debemos analizar en el DUAL

☯ Se piensa en otra alternativa para hacer a la heladería más competitiva. Consiste en incorporar trozos de fruta a los helados. Se necesitan 4 kg. de fruta por lata de helado de agua y 3 kilos de fruta por cada lata de helado de crema. Se dispone de 1000 kg. de fruta mensuales

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]

$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]

$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$[KG ALMID./MES]

$4\ X1 + 3\ X2 < 1000$[KG FRUTA/MES]

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2

Prueba de la restricción con la solución óptima actual:

- Antes de agregar la restricción, conviene probar con los valores actuales de X1 y X2 a ver si alcanza la disponibilidad del nuevo recurso fruta para seguir fabricando lo que hacíamos hasta ahora

$$4 \quad X1 + 3 \quad X2 \quad <= 1000$$
$$4 \quad 200 + 3 \quad 100 \quad = 1100 \text{ que no es } <= 1000$$

- Por lo tanto tenemos que agregar la nueva restricción: no podemos seguir produciendo lo mismo que hasta ahora (además sabemos que nos faltan 100 kilos)

¿Qué nos queda de esta clase?

- ❑ Seguimos viendo análisis de sensibilidad
  - ❑ Problema Dual
  - ❑ Modificaciones a la solución óptima
    - ❑ Cambios en un Bi
    - ❑ Gráfica de valor marginal
  - ❑ Introducción de un nuevo producto
  - ❑ Agregado de una nueva restricción