Material de apoyo Teórica V

Temario

Seguimos trabajando con variables enteras y bivalentes (binarias)

- **Aprendemos cómo trabajar con costos y/o beneficios "variables"**

Empezamos a trabajar con problemas combinatorios:

- **Problemas de cobertura de conjuntos**

La semana pasada planteamos un problema al cual le seguimos agregando más elementos para trabajar con variables enteras.

```
MAX 100 YAH - 200 Y1 - 150 Y2 - 120 Y3 - 140 Y4 - 90 Y5 - 115 Y6 + 15 X1 + 18 X2 + 4
X3 + 20 X4 + 3 X5 + 8 X6
ST
Y1 +Y2 +Y3 + Y4 + Y5 + Y6 >= 3
2 YAH - Y3 - Y4 <= 0
Y3 + Y4 - YAH <= 1
Y5 - Y1 <= 0
Y6 - Y1 <= 0
MP) 2 X1 + 3 X2 + 5 X3 + X4 + 2 X5 + 3 X6 <= 50
MO) 5 X1 + X2 + X3 + 4 X4 + 2 X5 + X6 <= 40
HM) 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 <= 150
.01 Y1 - X1 <= 0
X1 - 150 Y1 <= 0
.01 Y2 - X2 <= 0
X2 - 150 Y2 <= 0
.01 Y3 - X3 <= 0
X3 - 150 Y3 <= 0
.01 Y4 - X4 <= 0
X4 - 150 Y4 <= 0
.01 Y5 - X5 <= 0
X5 - 150 Y5 <= 0
.01 Y6 - X6 <= 0
X6 - 150 Y6 <= 0
END
INT 7
```

Ahora le vamos a agregar dos modificaciones al problema que tienen que ver con costos y precios que no son siempre constantes.

El costo de mantenimiento

- *Se agrega un costo de mantenimiento de la máquina que se viene utilizando en la producción.*

[2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6 ≤ 150 (h/sem)]

- Si la máquina funciona entre 1 y 30 horas, se pagará un costo de mantenimiento de $1 por hora.
- Si funciona más de 30 horas pero menos de 60, se pagará un costo de mantenimiento de $0,70 la hora.
- Si funciona 60 horas o más, el costo de mantenimiento será de $0,50 la hora.

Este caso se conoce con el nombre de *Costo diferencial por intervalo*.

En este problema el inconveniente es que hay tres precios posibles, con lo cual el precio se convierte en una variable y si planteamos que el precio es = 1 YA + 0,7 YB + 0,5 YC, al multiplicar el precio por hora por la cantidad de horas –que es variable- estamos multiplicando variables.
Cuando parece que la única manera de resolver un problema es multiplicar una variable no binaria por una suma de varias binarias, la solución es dividir la variable principal (en nuestro caso, la cantidad de horas) en tantas variables como casos tengamos (en nuestro caso, tres casos posibles) y asociar cada variable con una bivalente, pero asociarlas sin multiplicar variables, sino con el método que vimos la semana pasada (m Yi ≤ Xi ≤ M Yi). Este método se conoce como RANGOS de una variable.

Apliquemos a nuestro problema:

HORAS = 2 X1 + 3 X2 + 2 X3 + X4 + 3 X5 + 4 X6

Ahora dividimos la variable HORAS en tres rangos (los tres valores posibles):

HORAS = H1 + H2 + H3

De las tres variables (H1, H2 y H3) una sola será distinta de cero. Si la variable HORAS toma un valor entre 1 y 30, la que toma valor distinto de cero es H1, si la variable HORAS toma un valor mayor que 30 pero menor que 60, la que toma valor distinto de cero es H2 y si la variable HORAS toma un valor mayor que 60, la que será distinta de cero es la variable H3. ¿Cómo conseguimos que funcione así? Con las siguientes restricciones de RANGOS:

$1\ YH1 \leq H1 \leq 30\ YH1$

$30{,}01\ YH2 \leq H2 \leq 59{,}99\ YH2$ (recordemos que NO se pueden poner restricciones de mayor o menor estricto)

$60\ YH3 \leq H3 \leq M\ YH3$

$YH1 + YH2 + YH3 = 1$

Y el costo de mantenimiento será:

COSTO = 1 H1 + 0,7 H2 + 0,5 H3

Prueben con valores para HORAS y vean cuál es la restricción que se puede cumplir (cuál de las variables YHi puede valer 1 sin que el problema dé incompatible) para determinar cómo funciona.

Guerra de precios

- *La recesión sigue haciendo estragos: tenemos que aumentar los precios para que nos siga conviniendo vender producto 2.*
- *El nuevo esquema de precios es así: a las unidades de producto 2 que vendamos hasta 10 unidades, las venderemos al precio actual de $18/un, las vendidas por encima de 10 y hasta 17 las cobraremos a $20/un y las que vendamos por encima de 17 unidades las cobraremos $24/un.*
  (Por ejemplo, si vendemos 25 unidades cobraremos 10 a $18, 7 a $20 y 8 a $24)

En este problema también hay tres precios posibles, con lo cual el precio se convierte en una variable. ¿qué diferencia tiene con el caso anterior?

Este caso se conoce con el nombre de *Función cóncava seccionalmente lineal*.

La diferencia es que en el caso anterior todas las horas tenían el mismo costo, el tema era que ese costo podía ser 1 ó 0,7 ó 0,5. En este caso, las primeras 10 unidades tienen siempre el mismo precio, aunque se vendan más de 10, las siguientes 7 tienen siempre el mismo precio y las siguientes tienen el mismo precio (es como si fueran tres productos con tres precios distintos).

Podemos hacer algo parecido a lo que hicimos antes:

X2 = X2A + X2B + X2C

Siendo que X2A representa las primeras 10 unidades vendidas, X2B las siete siguientes y X2C las siguientes. Recordemos que puede ser más de una distinta de cero, si vendemos más de 10 o más de 17.

Y la ganancia por ventas del producto será:

GANANCIAX2 = 18 X2A + 20 X2B + 24 X2C

Como el precio va aumentando, el problema, si vendemos más de 10 o más de 17, es que, salvo que pongamos restricciones, todo el valor de X2 lo tomará X2C y las demás serán cero. ¿Cómo serían esas restricciones? Tenemos que crear una estructura tipo "represa" tal que cuando se llena el primer "dique" habilita al segundo y cuando se llena el segundo, se habilita al tercero.
Las restricciones de RANGOS serán:

$$10\ Y2B \leq X2A \leq 10$$

$$7\ Y2C \leq X2B \leq 7\ Y2B$$

$$X2C \leq M\ Y2C$$

Para que X2B pueda tomar valor mayor que cero, se necesita que Y2B valga 1, pero si vale 1 en la primera restricción queda: 10 < X2A < 10, es decir, X2A es igual a 10. Por lo tanto, estas restricciones obligan a llenar el primer "dique" (el de X2A) para habilitar el segundo (el de X2B). De la misma manera podemos ver que obligan a llenar el segundo para habilitar el tercero. No hay restricciones adicionales que vinculen a Y2B con Y2C porque ambas pueden valer 1, ambas cero o solamente valer 1 Y2B, y eso está controlado por las restricciones de rango que pusimos.

Problemas de cobertura de conjuntos

- *Problemas de grupos que se deben cubrir.*
- *Problemas de grupos que se particionan.*
- *Problemas de "Packing"*

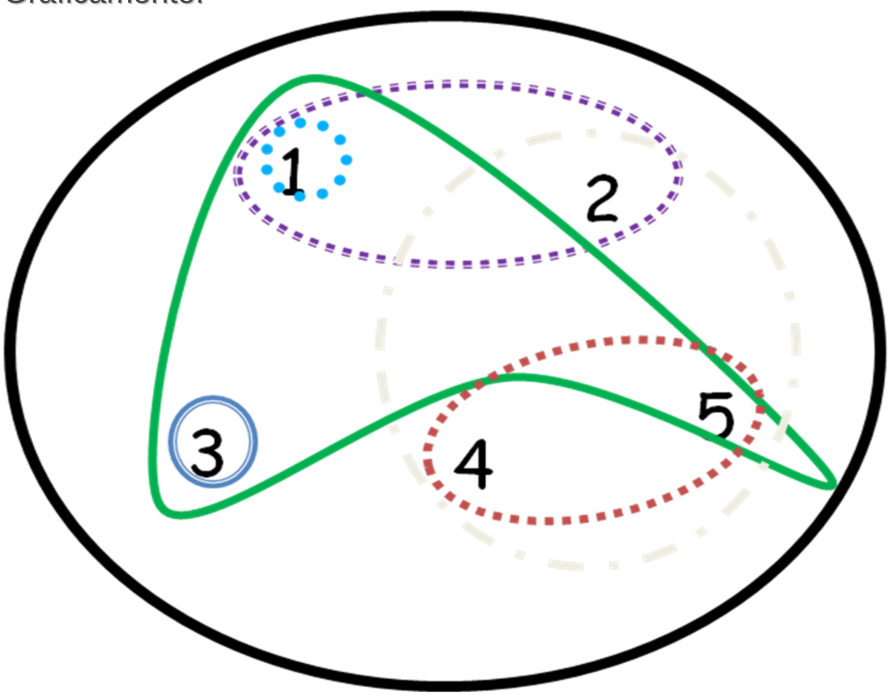
Genéricamente

- *S = {1,2,3….n} conjunto de elementos a cubrir.*
- *L = {(1,2);(2);….} conjunto formado por sub conjuntos de S*
- *Elegir elementos de L tales que:*
    - *Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento.*
    - *Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento.*
    - *Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento*

Un ejemplo:

- *Una compañía aérea debe cubrir el vuelo a 5 ciudades (1,2,3,4,5) desde la ciudad cero*
- *Se han definido 6 posibles circuitos y para cada uno se indica qué ciudades toca: A - (1,2); B - (1,3,5); C - (2,4,5); D - (3); E - (1); F - (4,5)*
- *Cada tripulación está asignada a un circuito.*
- *Se busca minimizar la cantidad de tripulaciones.*

Gráficamente:



En el conjunto S (ciudades) hemos marcado los subconjuntos (circuitos) que forman L

Esquema general

- *Entre los subconjuntos que conforman L (los circuitos) tenemos que elegir algunos de manera de cubrir S, de acuerdo con los criterios del problema que estemos tratando (cobertura, particionamiento o packing)*
- *Para eso definimos una variable bivalente por cada circuito*
- *Yi: vale 1 si se realiza el circuito i,*

  vale cero sino

Problemas de grupos que se deben cubrir

✓ *Se debe determinar cuáles circuitos se realizarán, de modo tal que cada una de las cinco ciudades sea cubierta por al menos un circuito (puede haber una o más ciudades que sean cubiertas por más de un circuito, a esto se le llama solapamiento)*

MIN YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!Deben estar cubiertas todas las ciudades al menos una vez, por lo tanto se debe
!elegir al menos un circuito de los que pasan por cada ciudad
CIUDAD1) YA + YB + YE >= 1
CIUDAD2) YA + YC >= 1
CIUDAD3) YB + YD >= 1
CIUDAD4) YC + YF >= 1
CIUDAD5) YB + YC + YF >= 1

- *En este caso, como son pocas ciudades el problema se puede resolver a mano. Vemos que con solamente dos circuitos se cubren todas las ciudades (con el B y el C)*
- *Hay un solapamiento en la ciudad 5 (los dos circuitos la cubren) pero el planteo del problema lo permite*
- *Desde el punto de vista de conjuntos, sería elegir elementos de L tal que la unión de los subconjuntos de L elegidos me dé el conjunto S original*

Problemas de grupos que se particionan

✓ *Siguiendo el ejemplo anterior, se trata ahora de cubrir todas las ciudades utilizando los mismos 6 circuitos pero sin "solapamiento".*

MIN YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!Deben estar cubiertas todas las ciudades exactamente una vez, por lo tanto se
!debe elegir exactamente <u>un</u> circuito de los que pasan por !cada ciudad
CIUDAD1) YA + YB + YE = 1
CIUDAD2) YA + YC = 1
CIUDAD3) YB + YD = 1
CIUDAD4) YC + YF = 1
CIUDAD5) YB + YC + YF = 1

- *En este caso, como son pocas ciudades el problema se puede resolver a mano. Vemos que en este caso se necesitan tres circuitos (el problema al* *tener signo de igual es más restrictivo que el de grupos a cubrir que era de mayor o igual). Una posible solución es elegir los circuitos A, D y F ¿podés encontrar otra con tres circuitos?*

- *Muchas veces este tipo de planteo no tiene solución, porque los datos no permiten cubrir sin solapamiento*
- *Desde el punto de vista de conjuntos, sería elegir elementos de L tal que la unión de los subconjuntos de L elegidos me dé el conjunto S original y que la intersección entre los subconjuntos de L elegidos sea el conjunto vacío*

Este caso es el que vimos la semana pasada cuando para resolver el problema de coloreo de grafos usábamos el método de conjuntos independientes

Problemas de "Packing"

- ✓ *Ahora se trata de "cubrir" la mayor cantidad de elementos que se pueda, sin solapamiento (no existe la obligación de cubrirlos todos).*
- ✓ *Muchas veces se plantea este problema porque el de partición no tiene solución (entonces, si no podemos cubrir todos los elementos, vamos a cubrir la máxima cantidad que podamos)*

```
!En este caso hay que tener un funcional de máximo porque nos piden elegir la
!mayor cantidad posible de elementos de L
MAX     YA + YB + YC + YD + YE + YF
ST
!No es necesario que todas las ciudades estén obligatoriamente cubiertas, pero
!ninguna debe estar sobrecubierta (no hay solapamiento)
CIUDAD1) YA + YB + YE <= 1
CIUDAD2) YA + YC <= 1
CIUDAD3) YB + YD <= 1
CIUDAD4) YC + YF <= 1
CIUDAD5) YB + YC + YF <= 1
```

- *En este caso, la solución es la misma que en el caso de conjuntos que se particionan (si el problema de conjuntos que se particionan tiene solución, la solución del problema de packing es la misma)*
- *Un ejemplo de este tipo de problema podría ser tratar de ocupar la máxima cantidad de Cocheras en una playa de estacionamiento (no se puede poner más de un auto por cochera y dependiendo de las condiciones del problema me pueden quedar algunas cocheras vacías).*

Otro planteo

- *Con el planteo del funcional que hicimos puede visitar muchos circuitos de pocas ciudades cada uno.*
- *Si queremos que visite la mayor cantidad de ciudades ahora sí tiene sentido tener una bivalente por ciudad*
- *Vi vale 1 si se visita la ciudad i y vale 0 sino*

MAX V1 + V2 + V3 + V4 + V5
ST
!No es necesario que todas las ciudades estén obligatoriamente cubiertas, pero
!ninguna debe estar sobrecubierta (no hay solapamiento)
CIUDAD1) YA + YB + YE = V1
CIUDAD2) YA + YC = V2
CIUDAD3) YB + YD = V3
CIUDAD4) YC + YF = V4
CIUDAD5) YB + YC + YF = V5

Genéricamente:

- S = {1,2,3….n} conjunto de elementos a cubrir.
- L = {(1,2);(2);….} conjunto formado por sub conjuntos de S
- Elegir elementos de L tales que:
  - Cobertura: se cubran todos los elementos de S con solapamiento.
  - Partición: se cubran todos los elementos de S sin solapamiento.
  - Packing: se cubra la máxima cantidad de elementos de S que se pueda sin solapamiento

¿Qué nos queda de esta clase?

- Cómo plantear descuentos/recargos por cantidad que no cumplen con el supuesto básico de proporcionalidad
  - Costo diferencial por intervalo
  - Función cóncava seccionalmente lineal

- ❑ Cómo modelizar problemas combinatorios de la familia de Cobertura de Conjuntos:
  - ❑ Conjuntos a cubrir
  - ❑ Partición de conjuntos
  - ❑ Packing