Material de apoyo Teórica IX

Temario

Resolución de modelos matemáticos de programación lineal continua
Algunos conceptos:

- Valor marginal
- Costo de oportunidad

Análisis de sensibilidad
Modificaciones a la solución óptima

- Cambios en los Cj
  - Rango de variación de un Cj
- Curva de oferta

Seguimos usando el problema de "FA CALDO" (aunque un poco modificado, por simplicidad de cálculos cambiamos la disponibilidad de almidón):

$2\ X1 + 2\ X2 \leq 600$ [KG AZUCAR/MES]
$4\ X2 \leq 600$ [KG CREMA/MES]
$2\ X1 + 4\ X2 \leq 800$[KG ALMID./MES]

Z(MAX) = 8 X1 + 10 X2

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Solución con LINDO:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

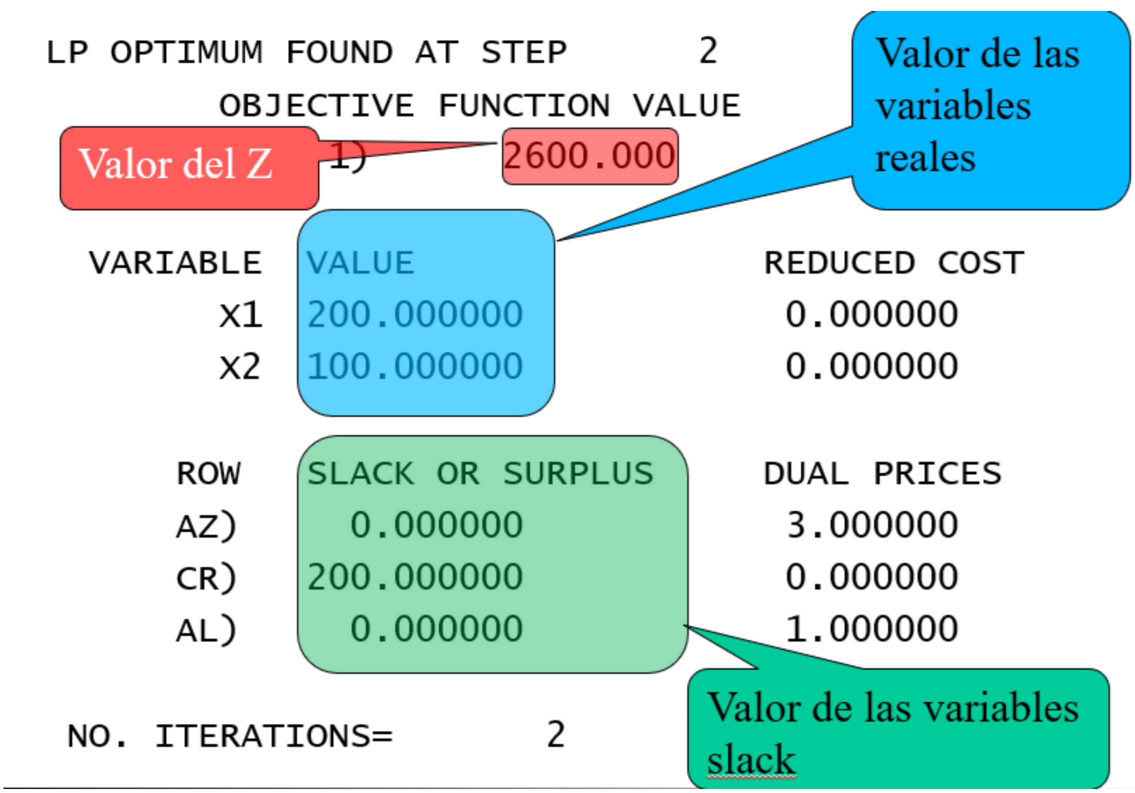
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

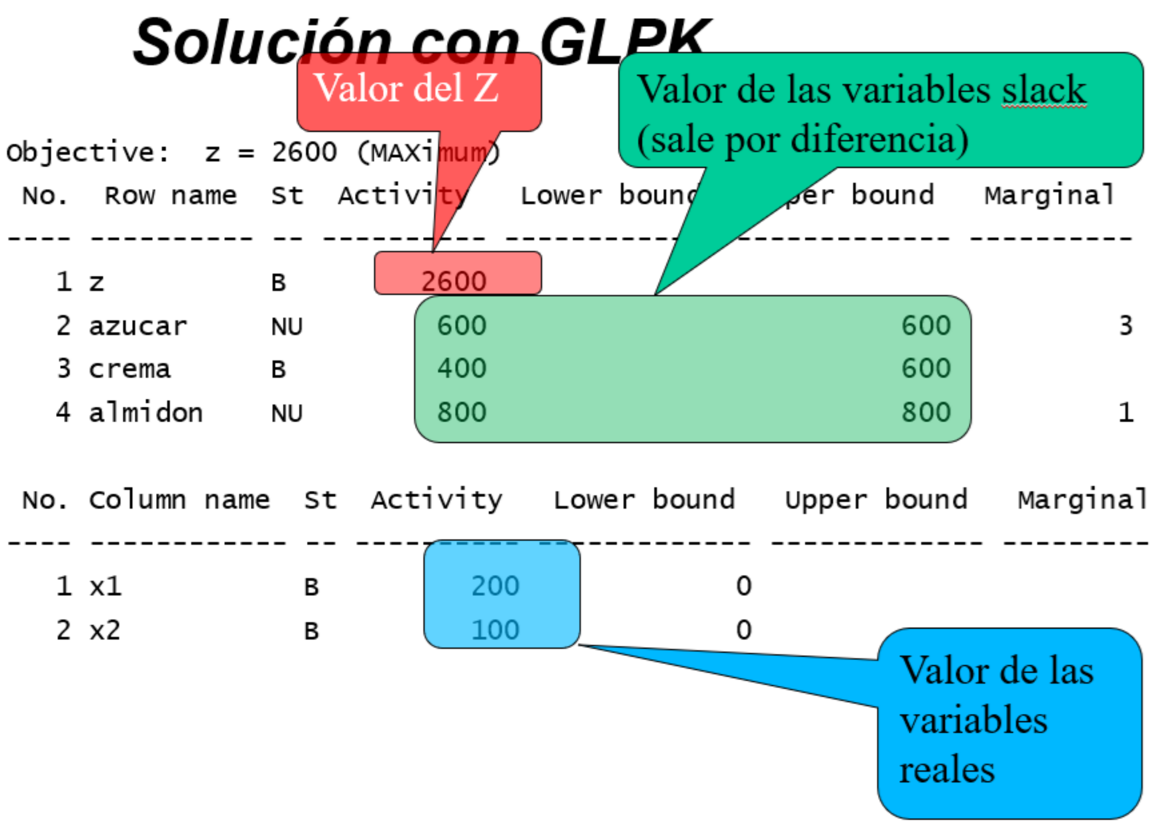
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2



Solución del problema de los helados con GLPK

```
Problem:    FaCaldo
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  Z = 2600 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 Z            B           2600
     2 AZUCAR       NU           600                         600             3
     3 CREMA        B            400                         600
     4 ALMIDON      NU           800                         800             1

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 X1           B            200             0
     2 X2           B            100             0
```



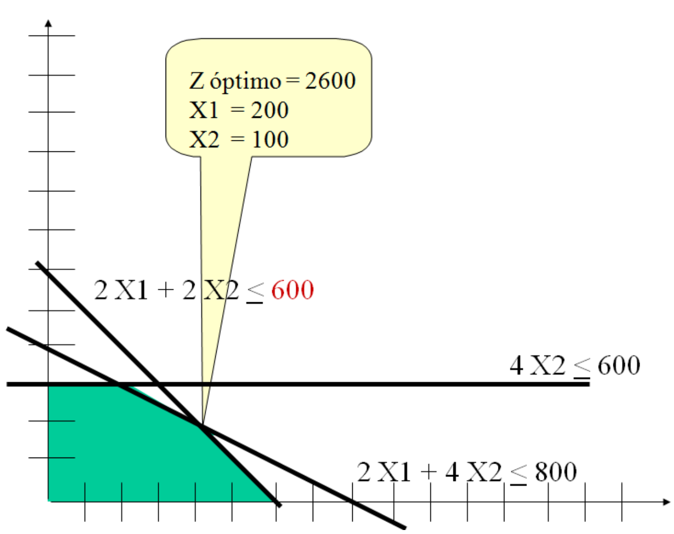
Recursos saturados y Recursos con sobrante

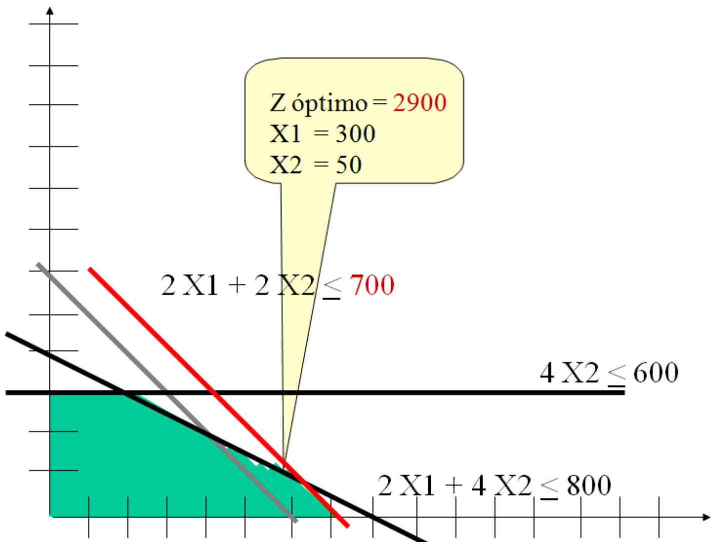
- Cuando un recurso tiene sobrante cero (la variable que indica su sobrante no está en la base o está en la base valiendo cero) se dice que el recurso está saturado.
- ¿Qué recursos están saturados en nuestro problema de los helados?
- Si consigo uno solo de los recursos saturados ¿podré ganar más dinero?

Para contestar las dos preguntas hay que ver la solución que teníamos al principio del material. Las slacks que valen cero corresponden a los recursos saturados.

- Como X4 está en la base de la tabla óptima valiendo 200 y X4 es la slack de la restricción de crema (es el sobrante de crema), significa que el recurso crema ***tiene sobrante*** igual a 200 kilos.
- Como X3 (sobrante de azúcar) y X5 (sobrante de almidón no están en la base en la tabla óptima, significa que no tienen sobrante. Entonces el azúcar y el almidón son recursos ***saturados***.

Pareciera que si consigo uno solo de los recursos saturados no me sirve para nada pero ¿se acuerdan del ejercicio de la primera guía práctica en el cual les decían si convenía conseguir 20 horas adicionales de equipo B?. Cuando conseguimos de uno solo, hay una redistribución de recursos (deshace de un producto para prestarle a otro el recurso que NO conseguimos y que está saturado) Veamos un ejemplo en el cual conseguimos 100 kilos más de azúcar (pero también está saturado el almidón y no conseguimos almidón):




Z óptimo = 2900
X1 = 300
X2 = 50
2 X1 + 2 X2 ≤ 700
4 X2 ≤ 600
2 X1 + 4 X2 ≤ 800

Valor marginal y Costo de oportunidad

- Los zj - cj tienen significado:
  - Si el zj - cj corresponde a una variable real del problema (por lo general son productos) se llama costo de oportunidad de ese producto (CO)
  - Si el zj - cj corresponde a una variable slack del problema (por lo general son sobrantes de recursos) se llama valor marginal de ese recurso o restricción (VM)

TABLA OPTIMA

			8	10			
Ck	Xk	Bk	A1	A2	A3	A4	A5
8	X1	200	1	0	1	0	-1/2
10	X2	100	0	1	-1/2	0	1/2
0	X4	200	0	0	2	1	-2
		2600	0	0	3	0	1

Costos de oportunidad (A1, A2) — Valores marginales (A3, A4, A5)

Solución con LINDO

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      2600.000

     VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1          200.000000         0.000000
       X2          100.000000         0.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      AZ)         0.000000         3.000000
      CR)       200.000000         0.000000
      AL)         0.000000         1.000000

 NO. ITERATIONS=       2
```

Costos de oportunidad (REDUCED COST)

Valores marginales (DUAL PRICES)

Costo de oportunidad

- El costo de oportunidad es distinto de cero cuando la variable correspondiente al producto no está en la base (porque vale cero).
- El costo de oportunidad de un producto indica en cuánto va a desmejorar el funcional si tenemos la obligación de fabricar una unidad de ese producto.

Valor marginal

- El valor marginal es distinto de cero cuando la variable correspondiente al sobrante de recurso o slack de la restricción no está en la base (porque vale cero).
- El valor marginal indica en cuánto va a mejorar el funcional si esa restricción se afloja en una unidad.
    - Si la restricción es de menor o igual, aflojar la restricción implica aumentar el término independiente (por ejemplo: conseguir una unidad más de recurso)
    - Si la restricción es de mayor o igual, aflojar la restricción implica disminuir el término independiente (por ejemplo: disminuir la demanda mínima de un producto en una unidad,)

Por ejemplo: el VM del azúcar es 3 (z3-c3=3). Eso significa que si consigo un kilo más de azúcar el Z aumenta en $3. ¿por qué?

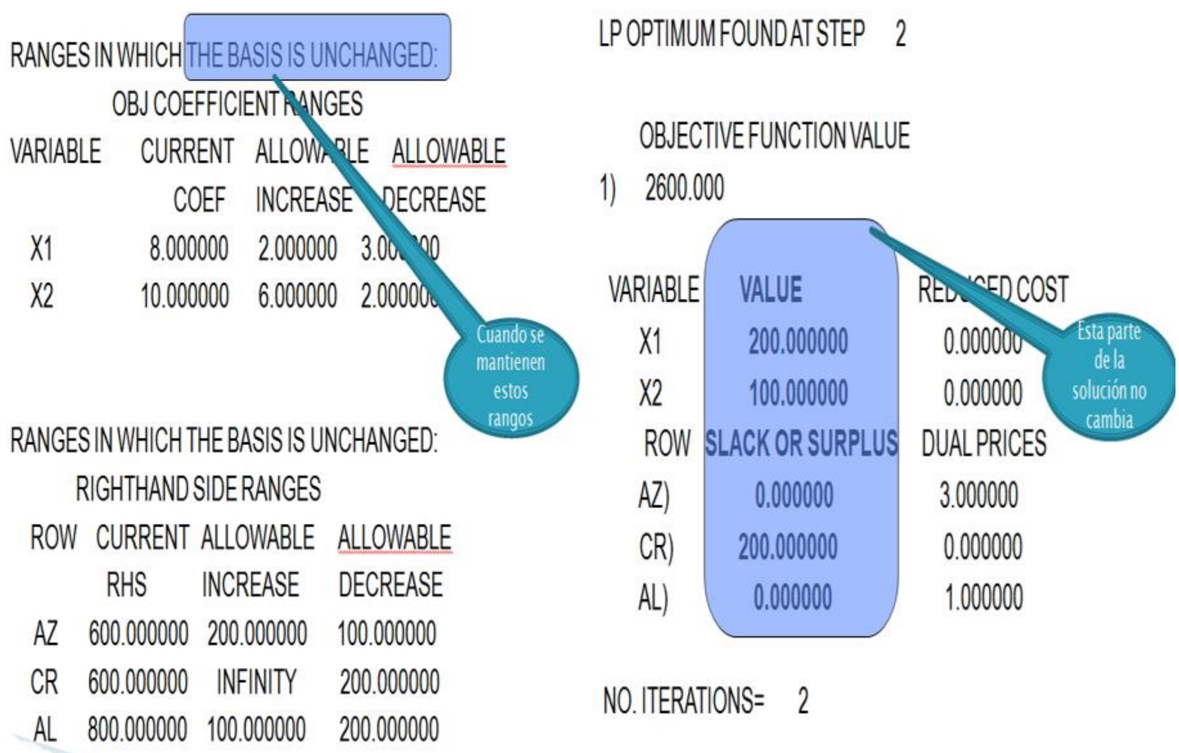
Porque si consigo un kilo más de azúcar puedo hacer una unidad más de X1 ¿de dónde saco el almidón? De X2. Como X1 consume 2 kilos de almidón por unidad y X2 consume 4 kilos de almidón por unidad, haciendo media unidad menos de X2, libera 2 kilos de almidón. Pero esa media unidad menos también libera 1 kilo de azúcar y 2 kilos de crema. Con el kilo de azúcar que conseguí más el kilo de azúcar que liberó X2 y los 2 kilos de almidón que liberó X2 hago una unidad más de X1. La crema no me sirve así que el sobrante de crema aumentará en 2 kilos.

Económicamente ¿cómo terminó esta operación de conseguir 1 kilo más de azúcar?
Hago media unidad menos de X2 así que gano $5 menos que antes (porque por una unidad gano $10)
Hago una unidad más de X1 así que gano $8 más que antes
Conclusión, gano $3 más que antes.

El VM del azúcar es 3, ya vimos por qué: eso quiere decir que con un kilo más de azúcar mi funcional aumenta en $3.

Rango de variación de los cj

- ¿en qué rango de valores puede variar el coeficiente en el funcional de los helados de agua (que actualmente vale 8) para que el punto óptimo siga siéndolo?


RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2600.000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	200.000000	0.000000
X2	100.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
AZ)	0.000000	3.000000
CR)	200.000000	0.000000
AL)	0.000000	1.000000

NO. ITERATIONS= 2

En LINDO, por ejemplo:

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	8.000000	2.000000	3.000000
X2	10.000000	6.000000	2.000000

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
AZ	600.000000	200.000000	100.000000
CR	600.000000	INFINITY	200.000000
AL	800.000000	100.000000	200.000000

IMPORTANTE: El rango de un coeficiente Cj me dice cuánto puede variar ese coeficiente sin que la solución deje de ser óptima <u>mientras todos los demás coeficientes y constantes del problema permanezcan sin cambios.</u>

Que la solución siga siendo óptima implica que no cambie el valor de las variables reales y de las slacks. El valor del funcional, por supuesto no es el mismo si cambia algún Cj, los zj-cj (que dependen de los cj) tampoco serán los mismos.

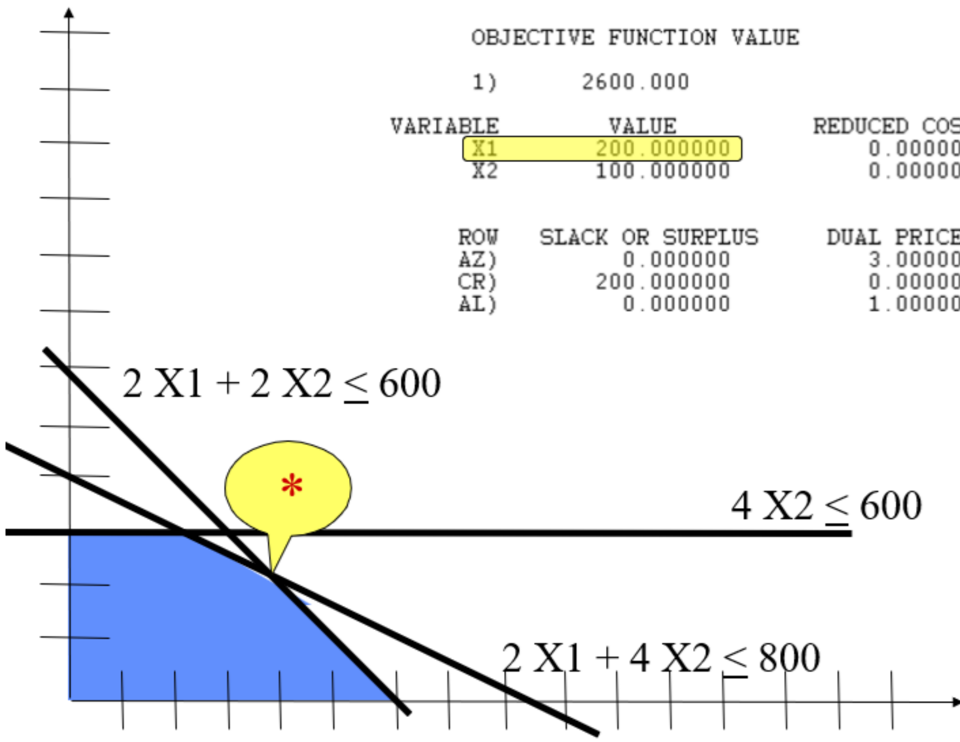
Veamos marcado en la solución de LINDO qué es lo que no cambia:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE
 1)       2600.000

  VARIABLE        VALUE            REDUCED COST
       X1          200.000000       0.000000
       X2          100.000000       0.000000
      ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      AZ)            0.000000       3.000000
      CR)          200.000000       0.000000
      AL)            0.000000       1.000000

 NO. ITERATIONS=      2
```

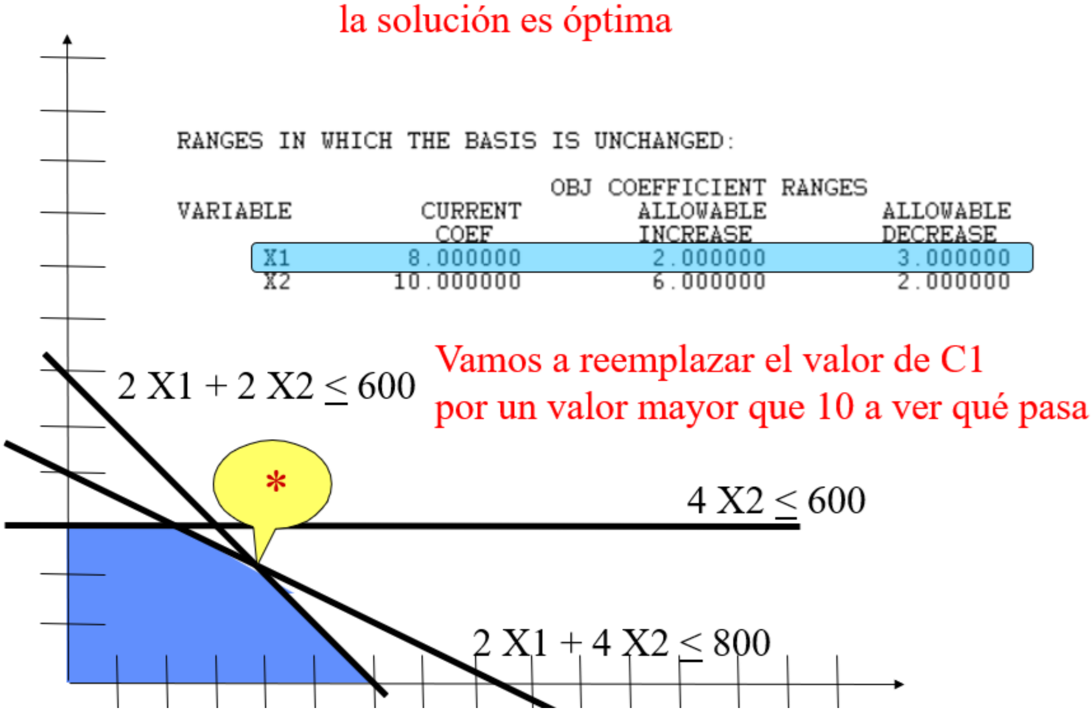
Curva de oferta del producto X1

- ¿Cómo se hace la curva de oferta de un producto?
- La curva de oferta representa, a los distintos valores que puede tomar el coeficiente Cj de ese producto en el Z, qué cantidad de producto Xj es conveniente fabricar.
- Para empezar, en la solución óptima, tenemos, por lo que vimos antes, que si C1 vale entre 5 y 10, la solución sigue siendo óptima (es decir, X1 sigue valiendo 200)

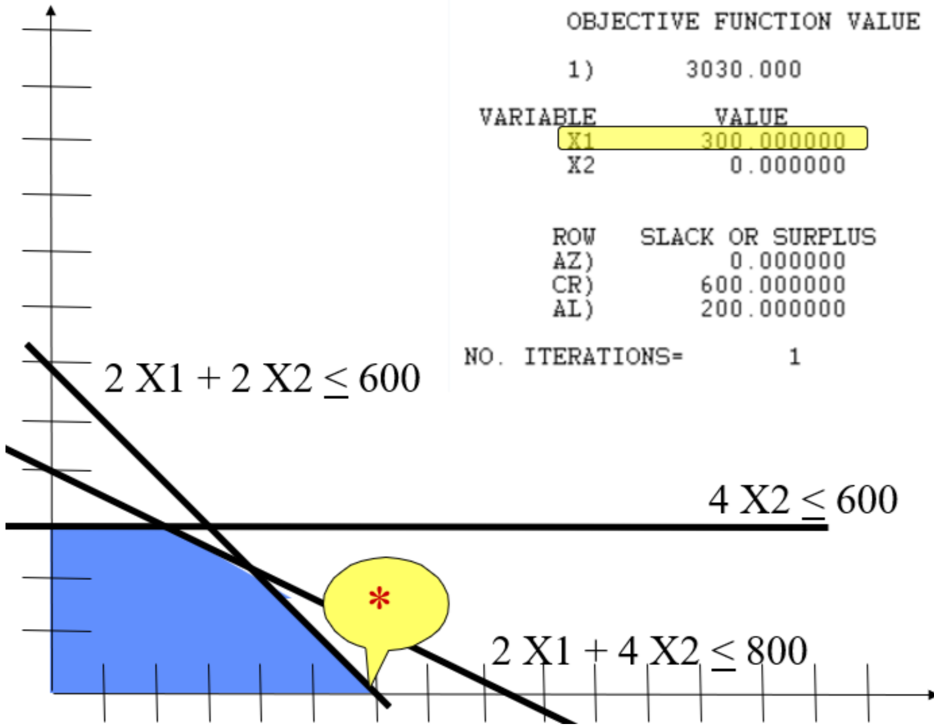
La solución actual es:



Para 5 <= C1 <= 10
la solución es óptima

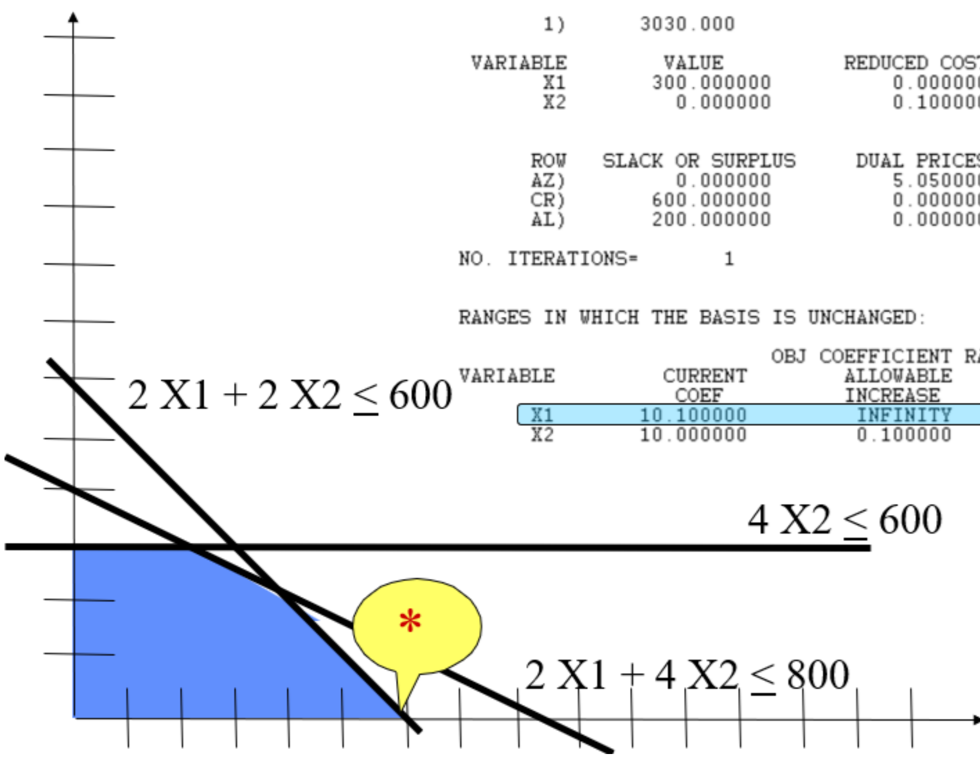


```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      3030.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1       300.000000          0.000000
      X2         0.000000          0.100000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     AZ)         0.000000          5.050000
     CR)       600.000000          0.000000
     AL)       200.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       1
```



Para 10 <= C1 < infinito la solución es óptima

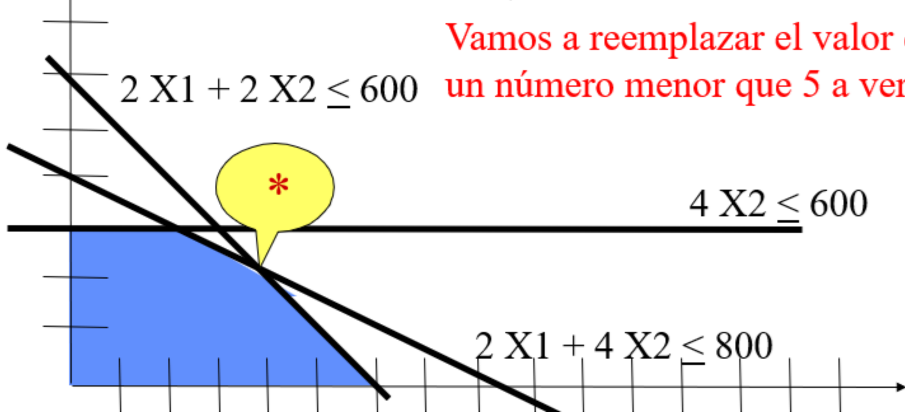
```
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      3030.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1       300.000000          0.000000
      X2         0.000000          0.100000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     AZ)         0.000000          5.050000
     CR)       600.000000          0.000000
     AL)       200.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT       ALLOWABLE       ALLOWABLE
                  COEF         INCREASE        DECREASE
      X1       10.100000       INFINITY        0.100000
      X2       10.000000       0.100000        INFINITY
```



Volvamos a la solución que es óptima para 5 <= C1 <= 10
Y vamos a ver qué pasa de 5 para abajo

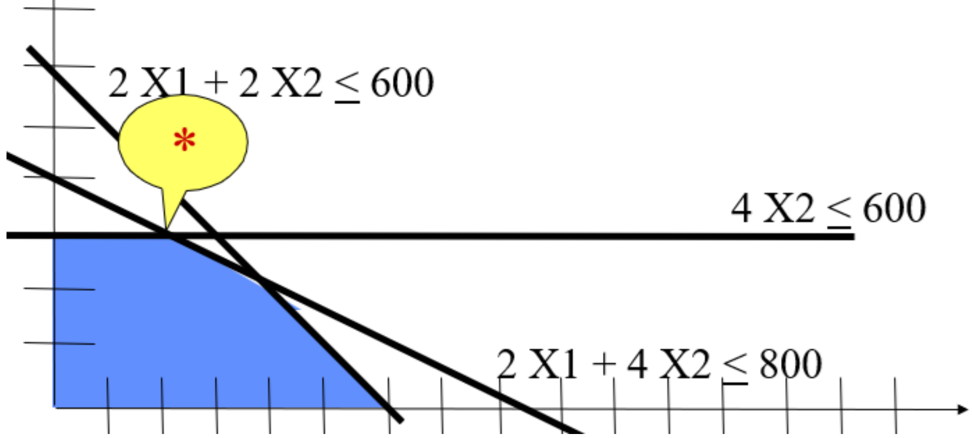
```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      2600.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      200.000000          0.000000
      X2      100.000000          0.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     AZ)        0.000000          3.000000
     CR)      200.000000          0.000000
     AL)        0.000000          1.000000
```

Vamos a reemplazar el valor de C1 por un número menor que 5 a ver qué pasa

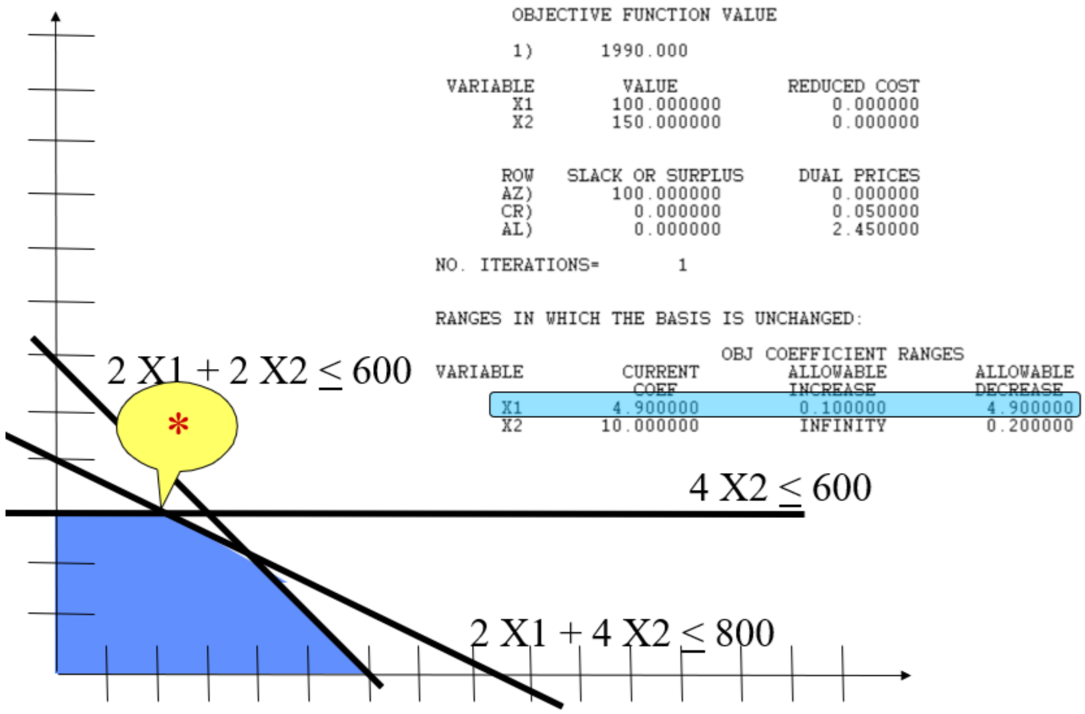


Esta es la solución óptima cuando C1 = 4.9 (menor que 5)

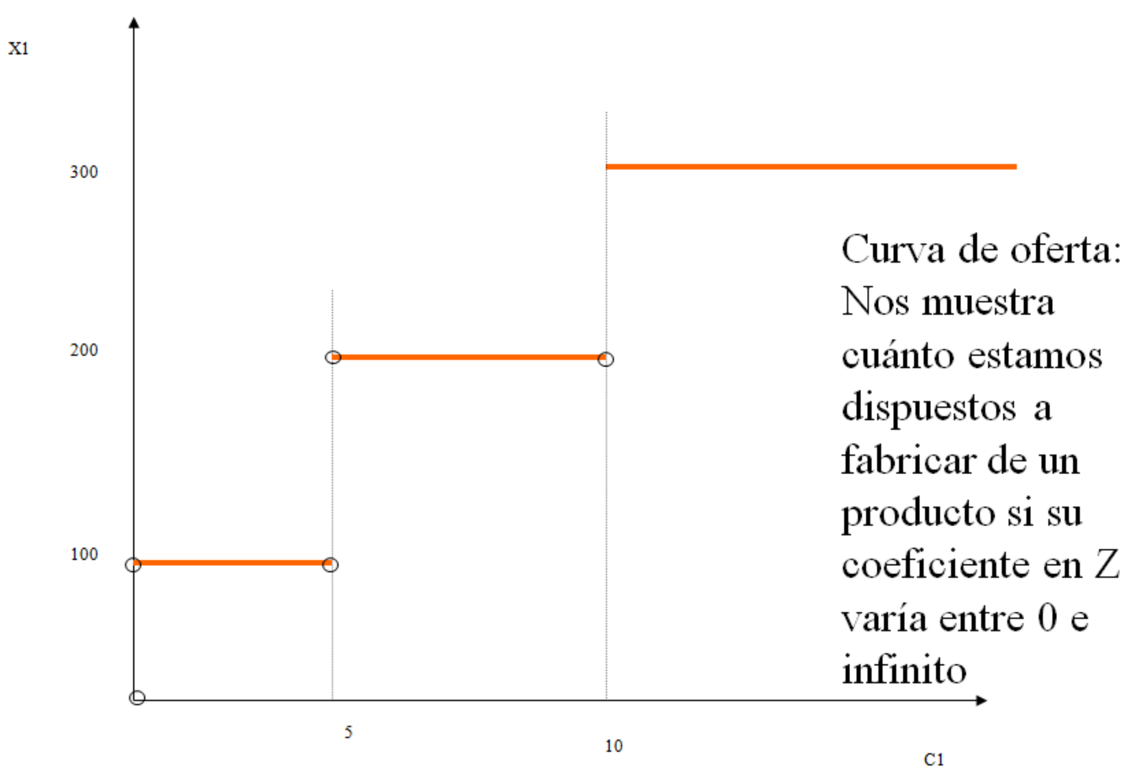
```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      1990.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      100.000000          0.000000
      X2      150.000000          0.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     AZ)      100.000000          0.000000
     CR)        0.000000          0.050000
     AL)        0.000000          2.450000
```



Para 0 <= C1 <= 5 esta solución es óptima



Curva de oferta del producto X1



¿Qué nos queda de esta clase?

- Comenzamos a ver análisis de sensibilidad (Guía 5)
    - Concepto de valor marginal y costo de oportunidad
    - Modificaciones a la solución óptima
        - Modificaciones de los Cj
        - Curva de oferta de un producto