Material de apoyo Teórica VI

Temario

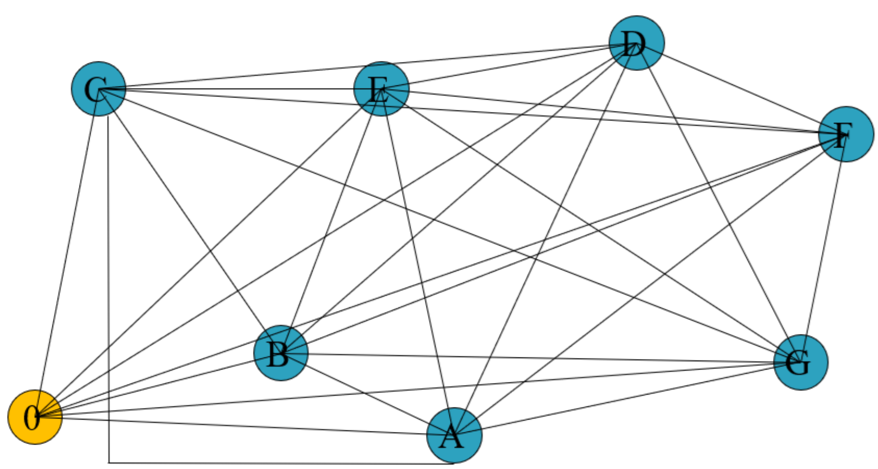
Seguimos trabajando con problemas combinatorios:

- **Problema del Viajante (TSP)**

Grafos

Antes de comenzar con el problema del viajante es importante que trabajemos con conceptos de teoría de grafos, porque los vamos a necesitar para ese problema y, posteriormente para coloreo de grafos.

Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y aristas que conectan entre sí esos vértices



Un grafo G costa de dos partes:

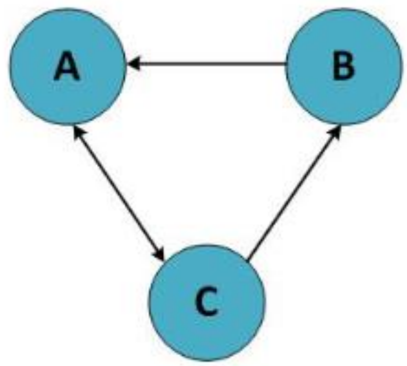
- Un conjunto V = V (G) cuyos elementos se denominan vértices, puntos o nodos de G.
- Un conjunto E = E(G) de pares de vértices distintos denominados aristas de G.

Hay dos tipos básicos de grafos: grafos no dirigidos y grafos dirigidos.

Grafos dirigidos

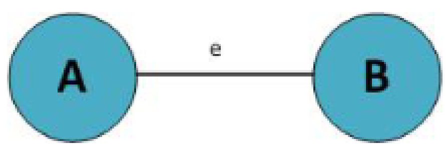
La dirección de una arista se indica al colocar una flecha dirigida sobre ella.

Para cualquier arista, por ejemplo (B, A) decimos que el vértice B es origen o fuente, mientras que el vértice A es el termino o vértice terminal



Vértices adyacentes o vecinos

- En un grafo G = (V, E) dirigido o no dirigido, los vértices u y v son adyacentes o vecinos si hay una arista $e = \{u, v\}$. En este caso, *u* y *v* se denominan extremos de *e*, y se dice que *e* conecta o une *u* y *v*, o también que la arista *e* es incidente (o que incide) en cada uno de sus extremos *u* y *v*.



Camino en un grafo

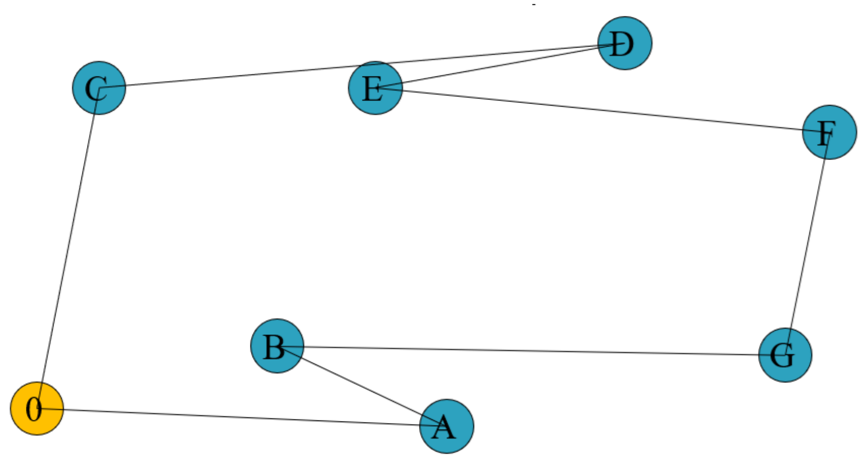
- Sean *x*, *y* vértices (no necesariamente distintos) de un grafo no dirigido $G = (V, E)$
- Un camino $x - y$ en *G* es una sucesión alternada finita de vértices y aristas de *G*, que comienza en el vértice *x* y termina en el vértice *y*; que contiene las n aristas $e_i = x_{i-1}, x_i$ donde $1 \leq i \leq n$.

$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \cdots, e_{n-1}, x_{n-1}, e_n, x_n = y$$

- La longitud n de un camino es el número de aristas que hay en el camino (Si n = 0, no existen aristas, x = y, y el camino se denomina trivial)

Circuito en un grafo

- Sean *x, y* vértices de un grafo *G = (V, E)*, donde *x = y*. Si no se repite alguna arista en el camino *x − y*, entonces existe un circuito *x − y*
- Un circuito es un recorrido donde el vértice inicial es también el final (recorrido cerrado)
- Cuando ningún vértice del camino *x − y* se presenta más de una vez tenemos un ciclo, es decir un ciclo es un camino simple cerrado

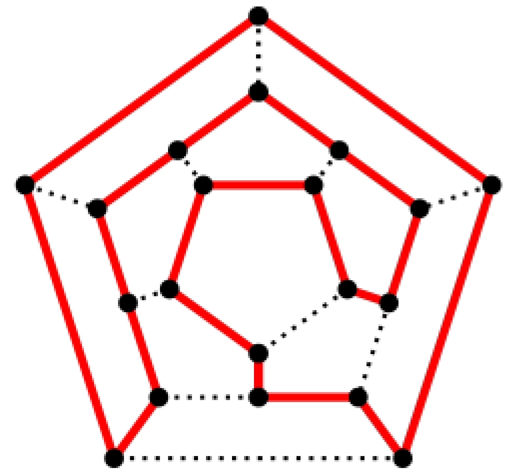


Problema del viajante - TSP

El origen de los problemas del agente viajero no está claro. El problema de determinar el mejor circuito entre varias ubicaciones fue encarado por distintas profesiones desde la Prehistoria. Una guía para agentes viajeros de 1832 menciona el problema e incluye ejemplos de viajes a través de Alemania y Suiza, pero no contiene un tratamiento matemático del mismo. Hay evidencias también de recorridos de predicadores (actual EEUU, fines del Siglo XVIII), abogados (Reino Unido, mediados del Siglo XIX) y, por supuesto, viajantes (principio de Siglo XX).

Un primer acercamiento matemático es la formulación del tradicional Problema de los 7 Puentes de Königsberg como un grafo por parte de Leonhard Euler (lo que fue el puntapié inicial de la Teoría de Grafos). Posteriormente, el mismo Euler creó un problema en que pedía hallar un recorrido de un caballo de ajedrez que visitara todos los casilleros del tablero.

Los problemas de recorrido en grafos también fueron estudiados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton.

Esta imagen representa un juego inventado por Hamilton (conocido como icosian game) que consiste en hallar un ciclo hamiltoniano, que (como sabrán quienes hayan estudiado Teoría de Grafos) es un recorrido que pasa una sola vez por cada vértice del grafo (lo que requiere, por supuesto, que el grafo sea conexo).	

- Una formulación equivalente del Problema del Viajante en términos de la teoría de grafos es la de encontrar en un grafo completamente conexo y con arcos ponderados el ciclo hamiltoniano de menor costo.
- En esta formulación cada vértice del grafo representa una ciudad, cada arco representa una ruta y el peso asociado a cada arco representa la longitud de la ruta.

El problema se podría formular así:

- *Un viajante tiene que partir de su casa y visitar una serie de clientes antes de retornar finalmente a su casa*
- *No puede dejar de visitar ningún cliente*
- *Se conocen las distancias entre cada par de clientes y entre cada cliente y la casa del viajante (llamamos cij a la constante que indica la distancia entre un lugar i y un lugar j)*

Tipos de problema

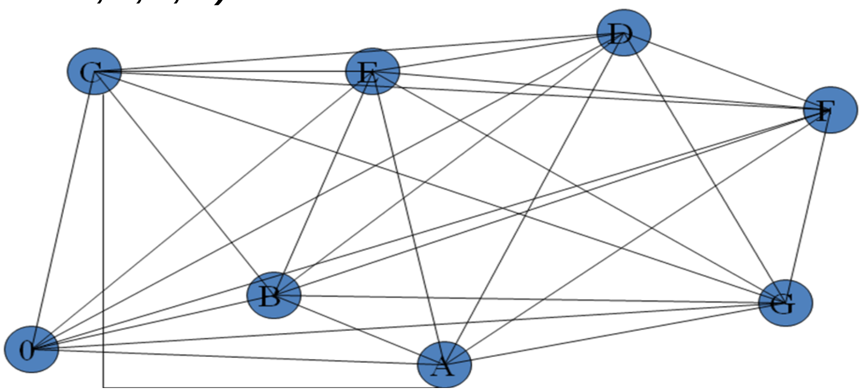
- *Dependiendo de si la dirección en la cual se atraviesa un eje importa o no:*
- *Viajante simétrico: No importa la dirección* ($c_{ij} = c_{ji}$)
- *Viajante asimétrico: Importa la dirección*

Formulación

- *Variables: Yij : { vale 1 si el tour va directamente de la ciudad i a la ciudad j o vale cero en el caso que no va de i a j}*
- *Exactamente una ciudad debe ser visitada después de la ciudad i*
- *Exactamente una ciudad debe ser visitada antes de la ciudad j*

Un ejemplo de viajante

- ***Supongamos que el viajante tiene que recorrer siete ciudades (A, B, C, D, E, F, G)***



Una formulación equivalente en términos de la teoría de grafos es la de encontrar en un grafo completamente conexo y con arcos ponderados el ciclo hamiltoniano de menor costo.

En esta formulación cada vértice del grafo representa una ciudad, cada arco representa una ruta y el peso asociado a cada arco representa la longitud de la ruta.

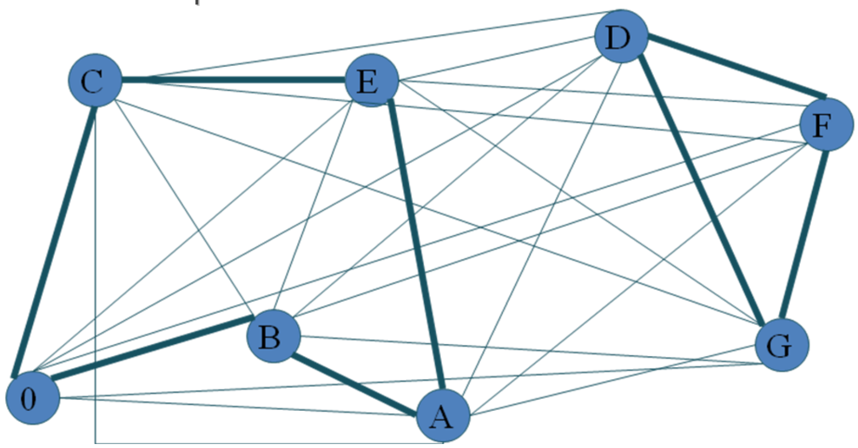
Formulación matemática

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i\neq j}}^{n} Yij = 1 \quad \forall i = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} Yij = 1 \quad \forall j = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$Z = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i\neq j}}^{n} C\,ij\,Yij \quad \text{(MINIMO)}$$

Una solución podría ser



(vemos resaltadas las rutas que hará el viajante, según el resultado del modelo)

Subtours

- *Lo que sucedió es que se formaron dos tours distintos (llamados subtours) cuando debería haber un tour único.*
- *Podemos ver el siguiente ejemplo en LINDO donde muestra un viajante de 4 ciudades (más la ciudad cero) donde toman valor = 1 las siguientes variables: y01, y12, y20, y34 e y43. Es decir, el tour va de 0 a 1, de 1 a 2 y vuelve a 0. Por otra parte va de 3 a 4 y de 4 a 3.*

```
MIN 5 Y01 + 6 Y02 + 15 Y03 + 17 Y04 + 5 Y10 + 6 Y12 + 15 Y13 + 17 Y14 + 5 Y20 + 6 Y21 + 15
    Y23 + 17 Y24 + 15 Y30 + 16 Y31 + 12 Y32 + 3 Y34 + 15 Y40 + 15 Y41 + 13 Y42 + 2 Y43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR
Y10 + Y20 + Y30 + Y40 = 1
Y01 + Y21 + Y31 + Y41 = 1
Y02 + Y12 + Y32 + Y42 = 1
Y03 + Y13 + Y23 + Y43 = 1
Y04 + Y14 + Y24 + Y34 = 1
!SALGO A UN SOLO LUGAR
Y01 + Y02 + Y03 + Y04 = 1
Y10 + Y12 + Y13 + Y14 = 1
Y20 + Y21 + Y23 + Y24 = 1
Y30 + Y31 + Y32 + Y34 = 1
Y40 + Y41 + Y42 + Y43 = 1
END
INT 20
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7
OBJECTIVE VALUE = 21.0000000
NEW INTEGER SOLUTION OF 21.0000000 AT BRANCH 0 PIVOT 7
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 21.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y01	*1.000000*	***5.000000***
Y02	***0.000000***	***6.000000***
Y03	***0.000000***	***15.000000***
Y04	***0.000000***	***17.000000***
Y10	***0.000000***	***5.000000***
Y12	*1.000000*	***6.000000***
Y13	***0.000000***	***15.000000***
Y14	***0.000000***	***17.000000***
Y20	*1.000000*	***5.000000***
Y21	***0.000000***	***6.000000***
Y23	***0.000000***	***15.000000***
Y24	***0.000000***	***17.000000***
Y30	***0.000000***	***15.000000***
Y31	***0.000000***	***16.000000***
Y32	***0.000000***	***12.000000***
Y34	*1.000000*	***3.000000***
Y40	***0.000000***	***15.000000***
Y41	***0.000000***	***15.000000***
Y42	***0.000000***	***13.000000***
Y43	*1.000000*	***2.000000***

Debemos evitar la posibilidad de "Subtours"
Para ello agregaremos las siguientes variables y vínculos (idea de Miller, Kuhn y Tucker):

Ui: Número de secuencia en la cual la ciudad i es visitada, $\forall$ i = 1,2,.......,n

$$U_i - U_j + n\,Y_{ij} \leq n-1$$

$$\forall\ i = 1,2,\ldots\ldots,n$$

$$\forall\ j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

$$\forall\ i \neq j$$

MUY IMPORTANTE: **Observen que las Ui no se definen para la ciudad 0 (de origen y de partida) porque la idea de estas variables es que no se pueda ir de una ciudad que tiene un determinado número de orden (o de secuencia) a una que tenga un orden menor. A la única que se puede volver es a la ciudad cero, porque no tiene este tipo de restricciones. <u>Sin la ciudad cero</u> (es decir, sin una ciudad que no tenga variable Ui definida) <u>el modelo no funciona</u>, porque la idea de este modelo es que arme un "arco" en el cual no se puede volver para atrás, por eso necesita una ciudad cero que esté fuera del arco.**

¿Cómo funcionan las Ui?

- *Las Ui son variables que toman valor entero aunque no se las defina como enteras*

- *Secuencia:*
  *Ui - Uj + N * Yij <= N - 1*
  si Yij = 0 ⇒ Ui - Uj <= N - 1 , obliga que la diferencia de secuencia de visitas entre 2 ciudades que no son visitadas directamente sea menor igual que N -1.
  si Yij = 1 ⇒ Ui - Uj <= N - 1 - N = - 1
  Uj >= Ui + 1 , obliga que la secuencia de visita de la ciudad j que es visitada inmediatamente después que la ciudad i, debe ser por lo menos mayor o igual que 1

- *Correlación Unitaria: El significado de las variables Ui es el número de secuencia en el cual es visitada la ciudad i.*
  O sea si Yij = 1 ⇒ Uj = Ui + 1.

No puedo ir de la ciudad orden N a ninguna otra excepto la 0 ⇒ en particular Yij (para i con Orden N y j con Orden 1) es igual a 0.

O sea
*Ui - Uj + N * Yij <= N -1 .... N - 1 <= N -1*
la única forma para que dé así es que se incremente la secuencia de a 1(ya que se deben incrementar por algo >= que 1, Secuencia).

- *Evitar subtours: Por las ecuaciones que vimos antes, no se puede volver a una ciudad que tiene una Ui con valor superior al valor de la Ui de la ciudad en la cual estamos (a la única que se puede volver es a la cero porque no tiene Ui)*

A continuación, vemos el mismo problema de las cuatro ciudades que vimos antes, pero ahora arma un único tour, gracias al uso de las Ui:

```
MIN 5 Y01 + 6 Y02 + 15 Y03 + 17 Y04 + 5 Y10 + 6 Y12 + 15 Y13 + 17 Y14 + 5 Y20 + 6 Y21 + 15
     Y23 + 17 Y24 + 15 Y30 + 16 Y31 + 12 Y32 + 3 Y34 + 15 Y40 + 15 Y41 + 13 Y42 + 2 Y43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR
Y10 + Y20 + Y30 + Y40 = 1
Y01 + Y21 + Y31 + Y41 = 1
Y02 + Y12 + Y32 + Y42 = 1
Y03 + Y13 + Y23 + Y43 = 1
Y04 + Y14 + Y24 + Y34 = 1
!SALGO A UN SOLO LUGAR
Y01 + Y02 + Y03 + Y04 = 1
Y10 + Y12 + Y13 + Y14 = 1
Y20 + Y21 + Y23 + Y24 = 1
Y30 + Y31 + Y32 + Y34 = 1
Y40 + Y41 + Y42 + Y43 = 1
!Ui - Uj
U1 - U2 + 4 Y12 <= 3
U2 - U1 + 4 Y21 <= 3
U1 - U3 + 4 Y13 <= 3
U3 - U1 + 4 Y31 < =3
U1 - U4 + 4 Y14 < =3
U4 - U1 + 4 Y41 < =3
U2 - U3 + 4 Y23 < =3
U3 - U2 + 4 Y32 < =3
U2 - U4 + 4 Y24 < =3
U4 - U2 + 4 Y42 <= 3
U3 - U4 + 4 Y34 <= 3
U4 - U3 + 4 Y43 < =3
END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 14
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1) 41.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
Y01	1.000000	5.000000
Y02	0.000000	6.000000
Y03	0.000000	15.000000
Y04	0.000000	17.000000
Y10	0.000000	5.000000
Y12	0.000000	6.000000
Y13	1.000000	15.000000
Y14	0.000000	17.000000
Y20	1.000000	5.000000
Y21	0.000000	6.000000
Y23	0.000000	15.000000
Y24	0.000000	17.000000
Y30	0.000000	15.000000
Y31	0.000000	16.000000
Y32	0.000000	12.000000
Y34	1.000000	3.000000
Y40	0.000000	15.000000
Y41	0.000000	15.000000
Y42	1.000000	13.000000
Y43	0.000000	2.000000
U1	0.000000	0.000000
U2	3.000000	0.000000
U3	1.000000	0.000000
U4	2.000000	0.000000

Viajante - Modelo Matemático

$$\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} Yij = 1 \qquad \forall i = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} Yij = 1 \qquad \forall j = 0,1,2,\ldots\ldots n$$

$$Ui - Uj + n\, Yij \leq n - 1 \qquad \forall i, \forall j,\ i\neq j \quad i, j=1\ldots n$$

$$Z= \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=0}^{n} C\, ij\, Yij \quad \text{(MINIMO)}$$

Dimensión de la formulación

(n+1)n	Yij variables	
n	Ui variables	
n+1	Vínculos del tipo	$\sum_{j=0;\, i\neq j}^{n} Yij = 1 \quad \forall\, i = 0,1\ldots n$
n+1	Vínculos del tipo	$\sum_{i=0;\, i\neq j}^{n} Yij = 1 \quad \forall\, j = 0,1\ldots n$
n (n-1)	Vínculos del tipo	$Ui - Uj + n\, Yij \leq n-1$

Otra forma de formularlo sin las Ui con restricciones que eliminan subtours

```
MIN 5 X01 + 6 X02 + 15 X03 + 17 X04 + 5 X10 + 6 X12 + 15 X13 + 17 X14 + 5 X20 + 6 X21 + 15
    X23 + 17 X24 + 15 X30 + 16 X31 + 12 X32 + 3 X34 + 15 X40 + 15 X41 + 13 X42 + 2 X43
ST
!LLEGO DESDE UN SOLO LUGAR
X10 + X20 + X30 + X40 = 1
X01 + X21 + X31 + X41 = 1
X02 + X12 + X32 + X42 = 1
X03 + X13 + X23 + X43 = 1
X04 + X14 + X24 + X34 = 1
!SALGO A UN SOLO LUGAR
X01 + X02 + X03 + X04 = 1
X10 + X12 + X13 + X14 = 1
X20 + X21 + X23 + X24 = 1
X30 + X31 + X32 + X34 = 1
X40 + X41 + X42 + X43 = 1

!Restringiendo los subtours...

! |M|=2
X12 + X21 <= 1
X13 + X31 <= 1
X14 + X41 <= 1
X23 + X32 <= 1
X24 + X42 <= 1
X34 + X43 <= 1

! |M|=3
X12 + X21 + X13 + X31 + X23 + X32 <= 2
X12 + X21 + X14 + X41 + X24 + X42 <= 2
X13 + X31 + X14 + X41 + X34 + X43 <= 2
X23 + X32 + X24 + X42 + X34 + X43 <= 2
END
INT 20
```

Dimensión de esta nueva formulación

$(n+1)n$ variables Xij
$2n + 2^n$ restricciones

El número exponencial de restricciones hace impráctico resolverlo directamente.
Una opción es agregar únicamente las restricciones para evitar subtours en los casos en los cuales arma subtour y no en todos los casos

Características del problema

Una situación se modela como problema del viajante cuando:

- *En el problema se plantean actividades o cosas de las cuales no se conoce el orden en el cual se realizan*
- *La función objetivo (directa o indirectamente) depende del orden que indique el modelo para esas actividades (a distinto orden, distinto resultado)*

Variaciones al problema del Viajante

- *Variables para recorrido: Yij*
  - Ahora hay dos medios de transporte para ir de cada ciudad i a cada ciudad j (tren y camión). Cada medio tiene un cto. distinto para ir de i a j. Se debe usar por lo menos dos veces cada medio de transporte en el camino recorrido.

Agregamos en la función objetivo las variables YTij multiplicadas por el costo del tren y las variables YCij multiplicadas por el costo del camión

Pero hay que relacionarlas con las Yij originales:

Yij = YTij + YCij   para todo i y para todo j (i distinto de j)

Y para usar por lo menos dos veces cada medio de transporte:

Sumatoria variando i (Sumatoria variando j (YTij)) >= 2

Sumatoria variando i (Sumatoria variando j (YCij)) >= 2

- *Variables para orden: Ui*
  - No se puede visitar al cliente de la ciudad D si antes no se visitó al de la ciudad G.

$$UD \geq UG$$

  - No se puede visitar al cliente de la ciudad F si antes no se visitó al de la ciudad E o al de la ciudad B

$$UF \geq UE - M\,Y$$

$$UF \geq UB - M\,(1 - Y)$$

¿Qué nos queda de esta clase?

- El problema del viajante: problema combinatorio por excelencia.
  - Cómo detectar que un problema es viajante
  - Cómo modelizarlo