Material de apoyo Teórica II - parte 1

En la primera clase trabajamos con modelos de programación lineal continua de dos variables que se pueden resolver de manera gráfica.

A partir de ahora vamos a trabajar con modelos de programación lineal continua de más de dos variables, que vamos a tener que resolver de manera analítica. Estos modelos son los que vamos a trabajar en la Guía capítulo 2

Comencemos por recordar los elementos de un modelo.

Elementos de un modelo

Hipótesis y supuestos:

Para simplificar el modelo se delimita el sistema en estudio a través de las hipótesis y supuestos simplificativos.
Así se comienza a transformar el sistema físico en un modelo simbólico.
Las hipótesis deben ser probadas científicamente.
Los supuestos son hipótesis que no pueden probarse.

Objetivo:

Mide la eficiencia de nuestro sistema.
Surge como respuesta a tres preguntas:

¿Qué hacer?
¿Cuándo? (período de tiempo)
¿Para qué?

Actividad

Llamamos actividad a los procesos unitarios que se realizan en el sistema físico caracterizados por consumir recursos y/o generar un resultado económico y/o indicar un estado.

Variables

Son las que miden o indican el estado de una actividad.

- Las que miden pueden ser continuas o enteras.
- Las que indican son, generalmente, variables (0,1) o bivalentes

En los modelos que estamos trabajando todas las variables son continuas, por eso estamos trabajando con programación lineal continua.

Pero, ¿qué condiciones tiene que tener un problema para que podamos modelizarlo con un modelo de programación lineal continua?

Supuestos básicos de la Programación Lineal Continua

Certeza

Todos los parámetros del modelo son constantes conocidas.

Para poder plantear el modelo dentro de la optimización determinística, como son todos los modelos que trabajamos en nuestra materia, es necesario que se cumpla ese principio.

Proporcionalidad

Tanto el beneficio como el uso de recursos son directamente proporcionales al nivel de actividad

Esto pasaba en el problema de la primera clase, cuanto más DC y LV fabricamos, más botellas, sustancia base, aromatizante, etc., se utilizarán

Aditividad

No existen interacciones entre las actividades que cambien la medida total de la efectividad o el uso total de algún recurso

En el caso de problemas de química, la mayoría no es lineal, porque si ponemos un 10% de la sustancia A y un 90% de la sustancia B, la mezcla puede dar un resultado explosivo y si ponemos 50% de A y 50% de B, la mezcla puede quedar de color verde, por ejemplo. En los problemas que vamos a trabajar en Modelos y Optimización I vamos a tomar la hipótesis de que se cumple el supuesto de aditividad

Divisibilidad

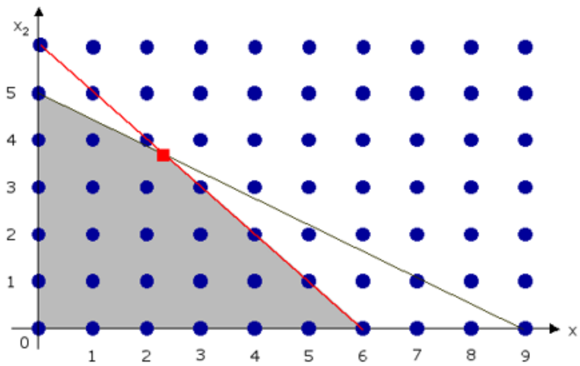
Las unidades de actividad pueden dividirse en niveles fraccionarios cualesquiera, de modo que pueden permitirse valores no enteros para las variables

Este supuesto, si no se cumple, implica que tenemos que trabajar con variables enteras. A veces, aunque no se cumpla, como pasaba en el modelo de la primera clase con las botellas y las etiquetas, podríamos redondear el valor de las variables al entero más cercano (nosotros no tuvimos necesidad porque tanto DC como LV tomaban valor entero en el vértice óptimo, pero esto es una casualidad). Pero si las variables miden actividades que toman un valor muy pequeño (por ejemplo, cantidad de días por semana que se dedican a una determinada actividad, cantidad de cabinas de peaje por tramo de autopista, etc.) el redondear no es una opción válida porque los valores continuos no nos permiten encontrar fácilmente la solución ni nos sirven como solución en sí misma.

Pero ¿qué inconvenientes representa plantear y resolver un modelo matemático si las variables tienen que tomar valor entero en lugar de poder tomar valor continuo?.

Desde el punto de vista del planteo no hay inconveniente, porque basta con plantear que las variables son enteras. Desde el punto de vista de la resolución la situación es diferente.

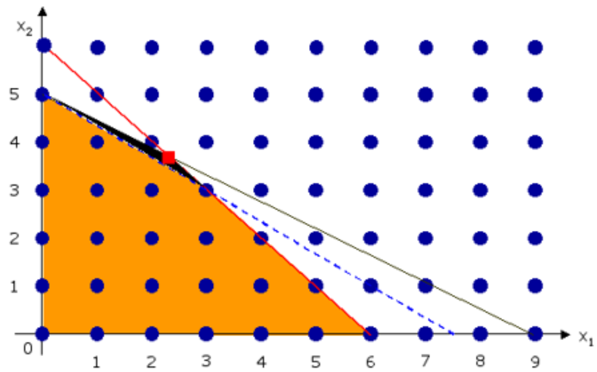
Veamos un ejemplo gráfico:



Si las variables pueden tomar valor continuo, el poliedro es el que está coloreado en gris y el óptimo es el vértice marcado con un rombo rojo. Pero si las variables tienen que tomar valor entero, las soluciones factibles del problema son los puntos azules que están dentro del poliedro gris. Los métodos analíticos que resuelven modelos matemáticos de programación lineal los resuelven como si fueran de programación lineal continua y tratan de encontrar el vértice óptimo. Sin embargo, como vemos, cuando las variables son enteras, el poliedro solución no es convexo (porque el conjunto de puntos no constituye un poliedro convexo) y la solución no está en el vértice del poliedro necesariamente. Por eso tendríamos que encontrar el poliedro convexo donde todos los vértices son puntos enteros (casco convexo entero), lo cual es fácil si podemos ver el poliedro como en este caso, pero es muy complicado en casos con más variables.

Se generaron varios procedimientos para resolver modelos de programación lineal con variables enteras. Uno de los más utilizados es el desarrollado por el matemático Ralph Gomory (http://www.ralphgomory.com/), a quien vemos en la foto de la derecha. Lo que plantea ese método, al cual volveremos más adelante en esta materia, es generar planos de corte, que son restricciones adicionales que van “rebanando” partes del poliedro convexo tratando de llegar al caso convexo entero del problema y así al vértice entero óptimo.

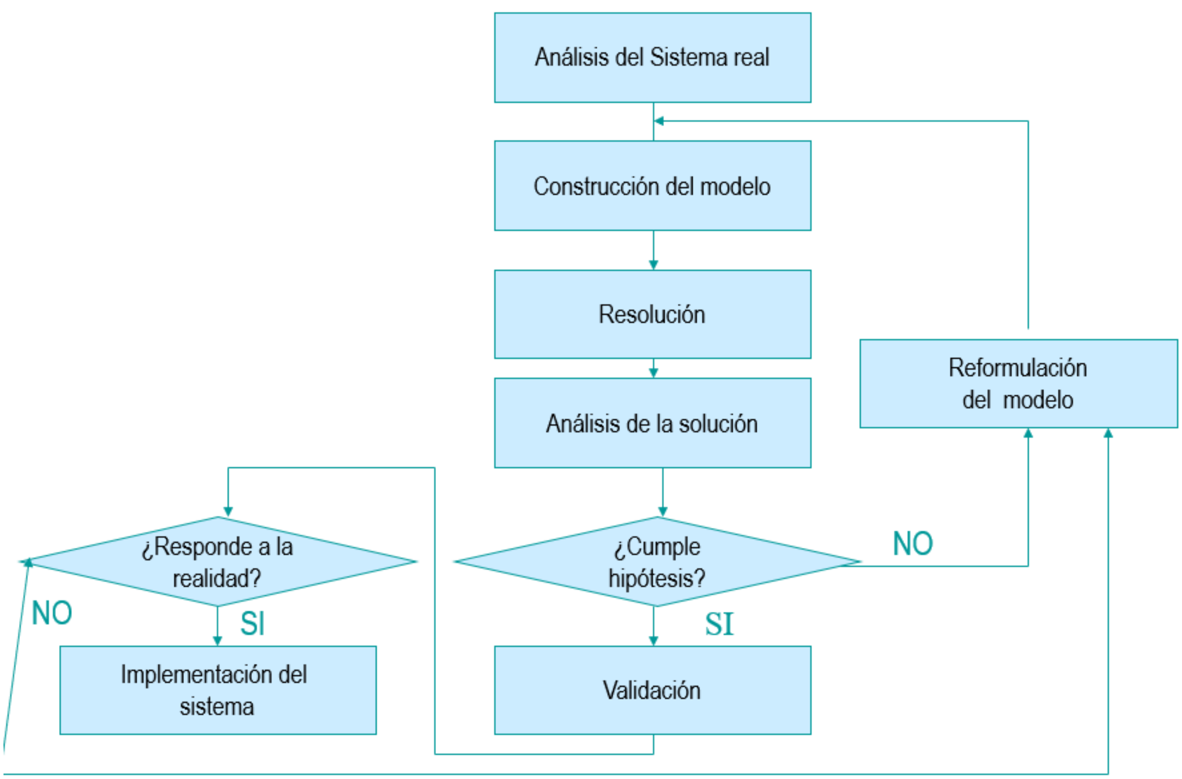
Volviendo al problema que graficamos más arriba, una aplicación de los planos de corte de Gomory produciría el siguiente gráfico:



Aquí podemos ver en naranja el poliedro con vértices enteros al cual el vértice óptimo continuo no pertenece. Resolviendo este poliedro como vimos la semana pasada encontramos el vértice óptimo que va a tener valor entero, como todos los vértices del problema.

Proceso de formulación de un modelo matemático de programación lineal

Para formular un modelo de programación lineal que resuelva un problema de la realidad, tenemos que seguir una serie de pasos que podríamos resumir en el siguiente diagrama:

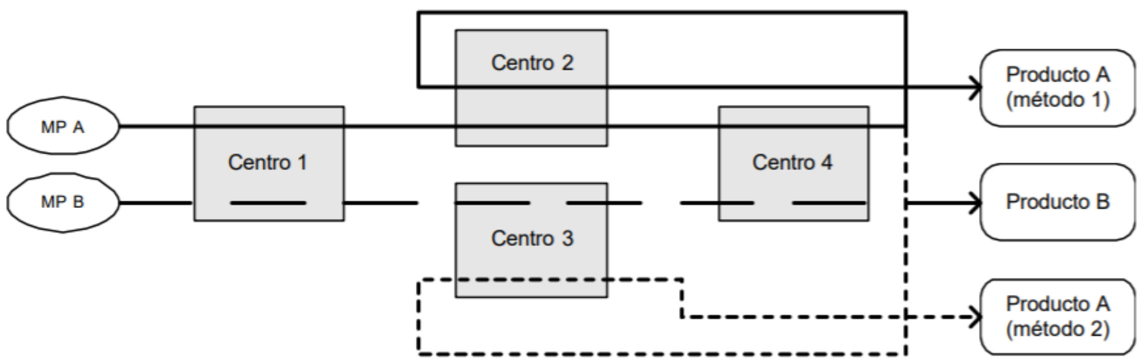


Problemas de centros de producción

En este tipo de problemas, la producción se divide en distintos lugares físicos (llamados centros) en cada uno de los cuales se realizan distintas partes del proceso. Un ejemplo de problema de centros de producción se puede ver en el problema tipo número 2 de la Guía de problemas 2 de la materia.

Problema Tipo Nº 2

Una empresa fabrica y vende dos productos, A y B cuyo diagrama de proceso es el siguiente:



Como vemos en el diagrama de ese problema tipo, depende de la "ruta" que siga la materia prima, luego de procesarse en el centro 1, el tipo de producto que se obtiene (Producto A – método 1, Producto A – método 2 o Producto B).
La forma de modelarlo es plantear variables de entrada y salida de cada centro, relacionado con los centros siguientes. Por ejemplo, la variable que mide la salida del centro 1 hacia el 4 se usa en el centro 4 como entrada.
Vamos a trabajar en esta semana de teórico-prácticas en un problema de centros, pero les aconsejamos que lean el problema tipo número 2 que está resuelto en la Guía número 2.

Problemas de mezcla (blending)

Las situaciones en las cuales ciertos insumos se deben mezclar en cierta proporción para producir bienes para la venta reciben el nombre de problemas de mezcla (blending en inglés). En la siguiente lista (Winston, 2001) se encuentran algunas situaciones en las que la programación lineal se aplica para resolver los problemas de mezcla:

1) Mezcla de distintos petróleos crudos para producir distintos tipos de combustibles y aceites.
2) Combinación de varios productos químicos para obtener otros

3) Combinación de varios tipos de aleaciones metálicas con el fin de producir varios tipos de acero
4) Mezcla de varios forrajes para ganado para obtener un alimento para animales
5) Mezcla de varios minerales para obtener un material de una calidad específica
6) Mezcla de distintos tipos de papel para fabricar papel reciclado de calidad variable.

Un ejemplo de problema de mezcla lo podemos ver en el problema tipo número 1 de la guía 2 de trabajos prácticos, el cual les recomendamos que lo lean porque está resuelto, como todos los problemas tipo:

<u>Problema Tipo Nº 1</u>

Un fraccionador de whisky importa el licor en tres distintas graduaciones: A, B y C. Mediante la mezcla de éstos, de acuerdo a sus fórmulas, se obtienen los whiskies de calidades comercializables: Escocés, Kilt y Tartan.

Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre bs elementos a mezclar:

Marca	Especificación	Precio de venta ($/litro)
Escocés	No menos del 60 % de A No más del 20 % de C	680
Kilt	No menos del 15 % de A No más del 80 % de C	570
Tartan	No más del 50 % de C	450

Además, en una de las partes del ejemplo práctico de hoy trabajará con problemas de mezcla.

Problemas de armado

Las situaciones en las cuales se debe fabricar un producto utilizando determinada cantidad de otros productos (cantidades y no porcentajes) reciben el nombre de problemas de armado. A diferencia de los problemas de mezcla, los productos que intervienen en el armado no generan algo diferente, como en el problema de mezcla, sino que siguen manteniendo su esencia original.

Por ejemplo, podemos trabajar el caso de una empresa que fabrica muñecos de plástico y además fabrica las partes de los muñecos.

Cada muñeco de Dama lleva una cabeza femenina, un torso femenino, dos brazos y dos piernas.

Cada muñeco de Caballero lleva una cabeza masculina, un torso masculino, dos brazos y dos piernas.
Para fabricar las cabezas, torsos, brazos y piernas usa como recurso el plástico (tiene disponibles 300 kilos de plástico por mes). También usa una máquina que tiene 200 horas-máquina disponibles por mes.

El uso de cada recurso por cada pieza se ve en el siguiente cuadro:

	Cabeza	Torso	Brazo	Pierna
Plástico	A (kg/u)	B (kg/u)	C (kg/u)	D (kg/u)
Horas-máquina	E (hs.máq./u)	F (hs.máq./u)	G (hs.máq./u)	H (hs.máq./u)

A, B, C, D, E, F, G y H son dato (son constantes de valor conocido pero las expresamos con letras porque no tenemos el número en este momento, antes de resolver el modelo introduciremos como parámetro el valor)
Las cabezas masculinas y femeninas usan la misma cantidad de plástico y la misma cantidad de horas-máquina. Idem para torso femenino y masculino.
Cada muñeco de Dama se vende a $300 y cada muñeco de caballero se vende a $250.

El objetivo del modelo es determinar cuántos muñecos de cada tipo (Dama y Caballero) les conviene fabricar por mes para maximizar la ganancia por ventas.

Las variables son:
DAMA: cantidad de muñecos de Dama (muñeco/mes)
CABALLERO: cantidad de muñecos de Caballero (muñeco/mes)
CABEZAFEMENINA: cantidad de cabezas para muñecos de Dama (cabeza/mes)
CABEZAMASCULINA: cantidad de cabezas para muñecos de Caballero (cabeza/mes)
TORSOFEMENINO: cantidad de torsos para muñecos de Dama (torso/mes)
TORSOMASCULINO: cantidad de torsos para muñecos de Caballero (torso/mes)
BRAZO: cantidad de brazos para muñecos (brazo/mes)
PIERNA: cantidad de piernas para muñecos (pierna/mes)

Todas las variables son mayores o iguales que cero.

Restricción de uso de plástico:

A (CABEZAFEMENINA + CABEZAMASCULINA) +
+ B (TORSOFEMENINO + TORSOMASCULINO) +
+ C BRAZO + D PIERNA $\leq$ 300 (kilos/mes)

Restricción de uso de máquina:

E (CABEZAFEMENINA + CABEZAMASCULINA) +
+ F (TORSOFEMENINO + TORSOMASCULINO) +
+ G BRAZO + H PIERNA $\leq$ 200 (horas-máquina/mes)

Armado de muñecos de dama:

Cada muñeco de dama tiene una cabeza femenina:

1 (cabeza/muñeco) DAMA (muñeco/mes) = CABEZAFEMENINA (cabeza/mes) (a)

Cada muñeco de dama tiene un torso femenino:

1 (torso/muñeco) DAMA (muñeco/mes) = TORSOFEMENINO (torso/mes) (b)

Cada muñeco de caballero tiene una cabeza masculina:

1 (cabeza/muñeco) CABALLERO (muñeco/mes) = CABEZAMASCULINA (cabeza/mes)

Cada muñeco de caballero tiene un torso masculino:

1 (torso/muñeco) CABALLERO (muñeco/mes) = TORSOMASCULINO (torso/mes)

Cada muñeco lleva 2 brazos

2 (brazo/muñeco) DAMA (muñeco/mes + 2 (brazo/muñeco) CABALLERO (muñeco/mes = BRAZO (brazo/mes) (c)

Cada muñeco lleva 2 piernas

2 (pierna/muñeco) DAMA (muñeco/mes + 2 (pierna/muñeco) CABALLERO (muñeco/mes = PIERNA (pierna/mes) (d)

Obsérvese que si DAMA = 1 y CABALLERO = 1, entonces:
CABEZAFEMENINA = 1, CABEZAMASCULINA = 1, TORSOFEMENINO = 1, TORSOMASCULINO = 1, PIERNA = 4, BRAZO = 4

MAX Z = 300 DAMA + 250 CABALLERO

Prestemos atención a no cometer un error muy común, que es plantear este problema como si fuera una mezcla, pero mezclando cabezas, piernas, brazos y torsos no se obtiene un muñeco.

Si en lugar de poner las restricciones (a), (b), (c) y (d) dijéramos:

~~(CABEZAFEMENINA + TORSOFEMENINO + PIERNA + BRAZO) / 6 = DAMA~~

Está MAL porque si DAMA vale 1 el modelo podría, con esta única restricción, darle el siguiente valor a las variables:
CABEZAFEMENINA = 6, TORSOFEMENINO = 0, PIERNA = 0, BRAZO = 0 lo cual originaría un monstruo de 6 cabezas.

La única manera de avisarle al modelo que se necesita exactamente una cabeza por muñeco es plantear una restricción como la (a). La única manera de avisarle al modelo que se necesita exactamente un torso por muñeco es plantear una restricción como la (b). La única manera de avisarle al modelo que se necesita exactamente dos brazos por muñeco es plantear una restricción como la (c). La única manera de avisarle al modelo que se necesita exactamente dos piernas por muñeco es plantear una restricción como la (d). La única manera de avisarle algo al modelo es con restricciones y si se pone una restricción como la que planteamos que está MAL el mensaje que le damos al modelo es que para hacer un muñeco se necesitan 6 piezas de cualquier tipo, porque en la restricción sumamos todos los tipos de pieza y lo dividimos por 6.

Una característica de los modelos de armado es que se necesita una restricción por cada tipo de elemento que interviene en el armado de un producto.

En el ejemplo práctico de la clase de esta semana vamos a trabajar también con armado.