

# Proyecto Bola-balanza-Taller de control

Víctor Santiago Montaña Díaz - *vs.montano@uniandes.edu.co*

Universidad de los Andes  
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Abril de 2020

## 1. Diagrama de bloques del sistema de control

Se cuenta con tres niveles los cuales se muestran a continuación:

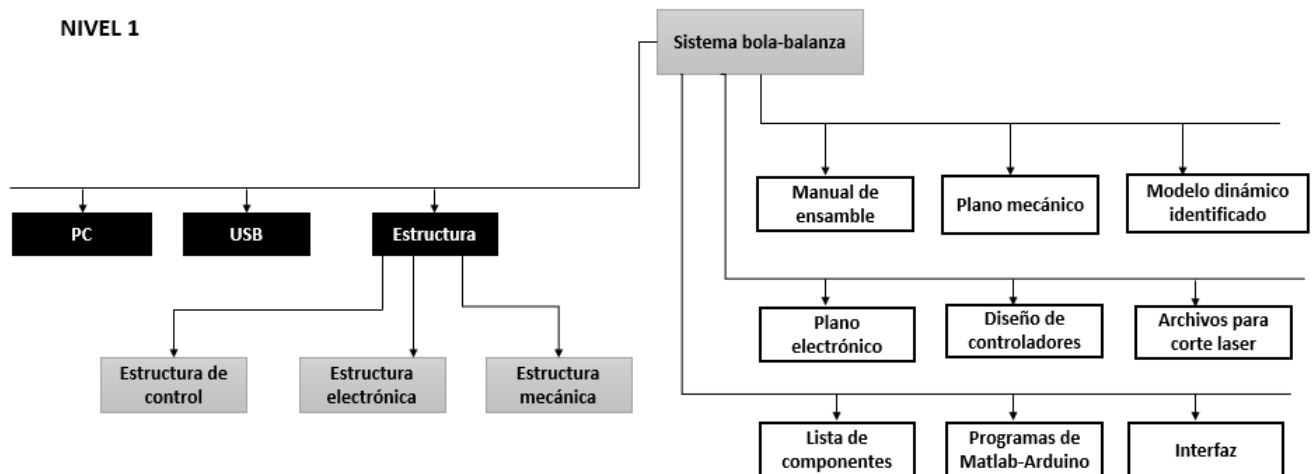


Figura 1: Nivel 1

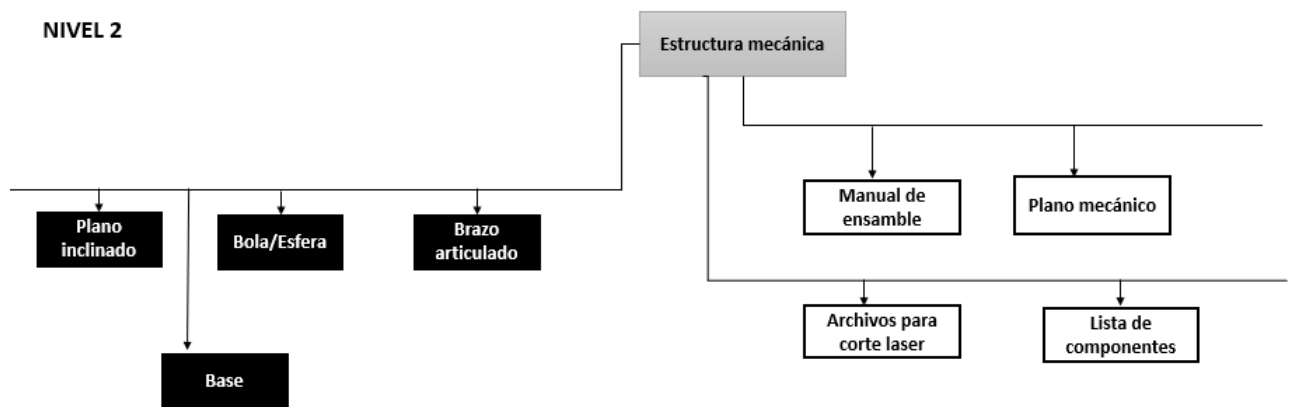


Figura 2: Nivel 2-Estructura Mecánica

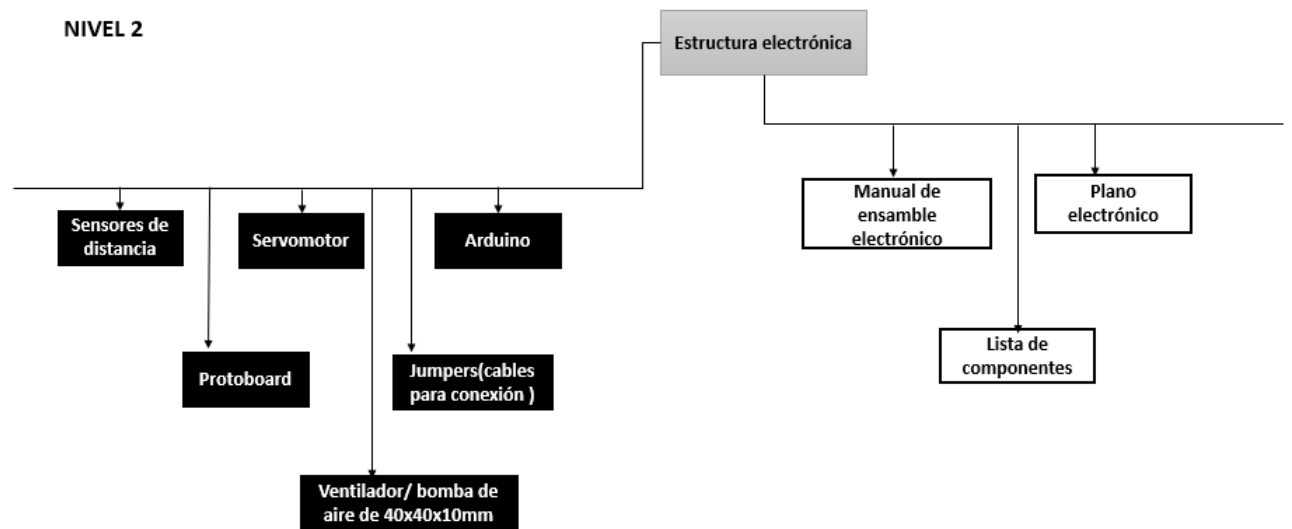


Figura 3: Nivel 2-Estructura electrónica

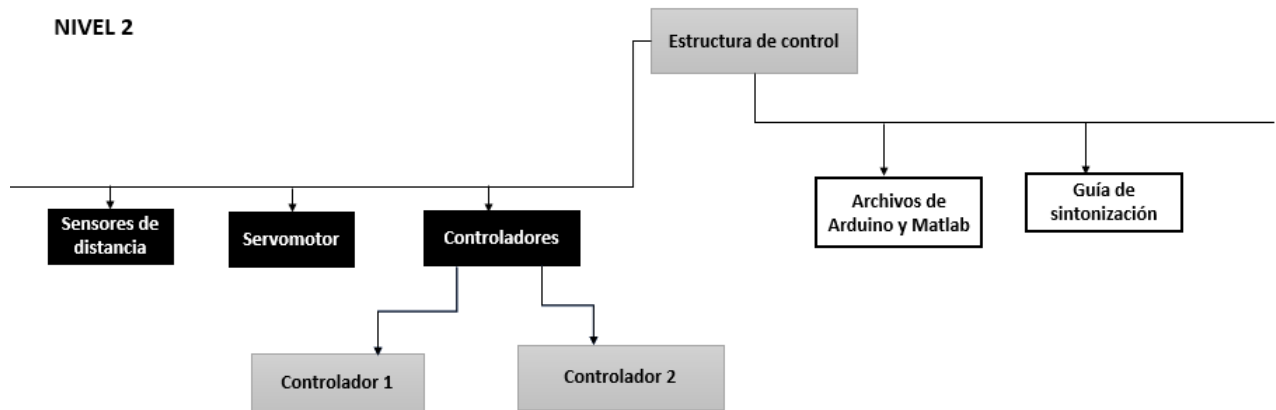


Figura 4: Nivel 2-Estructura de control

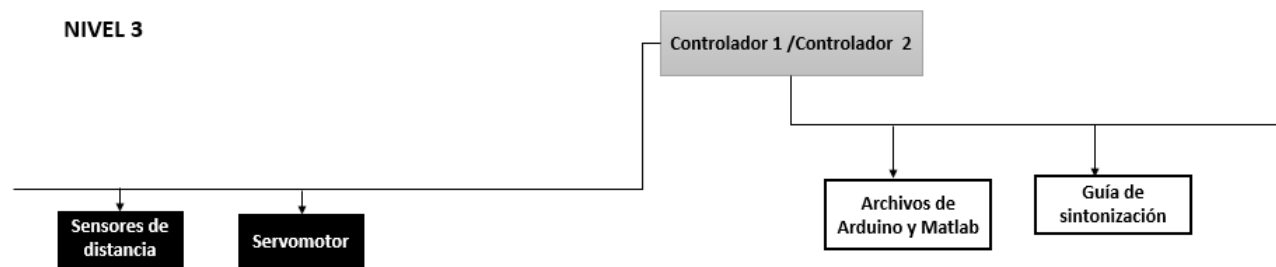


Figura 5: Nivel 3-Controladores

## 2. Modelo matemático

EL diagrama de fuerzas se observa a continuación:

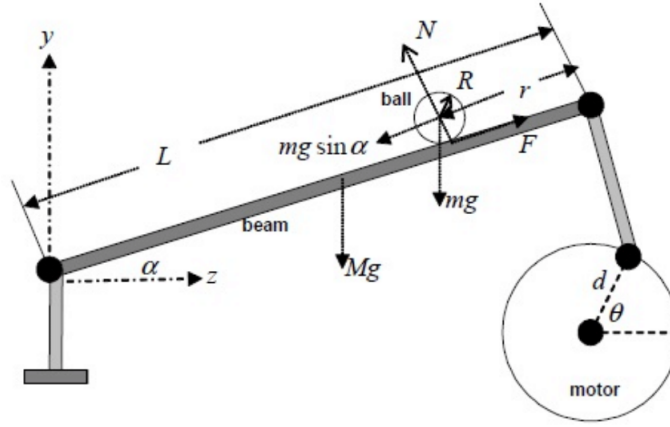


Figura 6: Diagrama de fuerzas

Teniendo en cuenta esto y la ecuación de Euler-Lagrange se procedió a encontrar el modelo dinámico del sistema. Primero se identificaron las energías cinéticas y potenciales como sigue:

- $T_1$  : Energía cinética de la bola  $\rightarrow T_1 = \frac{1}{2}m \cdot V^2 + \frac{1}{2}J_{bola}\omega_{bola}^2$

$$x = r \cdot \cos(\alpha) \rightarrow v_x = \dot{x} = \dot{r} \cos(\alpha) - r \dot{\alpha} \sin(\alpha)$$

$$y = r \cdot \sin(\alpha) \rightarrow v_y = \dot{y} = \dot{r} \sin(\alpha) + r \dot{\alpha} \cos(\alpha)$$

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\alpha})^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m \cdot ((\dot{r})^2 + r^2(\dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2}J_{bola}(\frac{\dot{r}}{R})^2$$

- $T_2$  : Energía cinética de la balanza  $\rightarrow T_2 = \frac{1}{2}J_{balanza}\omega_{balanza}^2 = \frac{1}{2}J_{balanza}(\dot{\alpha})^2$

- $U_1$  : Energía potencial de la bola  $\rightarrow U_1 = m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha)$

- $U_2$  : Energía potencial de la balanza  $\rightarrow U_2 = M \cdot g \cdot L \cdot \sin(\alpha)$

$$T = \frac{1}{2}m \cdot ((\dot{r})^2 + r^2(\dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2}J_{bola}(\frac{\dot{r}}{R})^2 + \frac{1}{2}J_{balanza}(\dot{\alpha})^2$$

$$U = m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) + M \cdot g \cdot L \cdot \sin(\alpha)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m \cdot ((\dot{r})^2 + r^2(\dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2}J_{bola}(\frac{\dot{r}}{R})^2 + \frac{1}{2}J_{balanza}(\dot{\alpha})^2 - m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) - M \cdot g \cdot L \cdot \sin(\alpha) \quad (1)$$

Por Euler-Lagrange se tiene que:

$$\frac{d}{dt}(\frac{dL}{dr}) - \frac{dL}{dr} = 0 \quad (2)$$

Aplicando esto se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dr'} &= m(r')^2 + J_{bola}\left(\frac{r'}{R^2}\right) \\
 \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{dr'}\right) &= \left(m + \frac{J_{bola}}{R^2}\right)r'' \\
 \frac{dL}{dr} &= mr(\alpha')^2 - mg\sin(\alpha) \\
 \left(m + \frac{J_{bola}}{R^2}\right)r'' - mr(\alpha')^2 + mg\sin(\alpha) &= 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que para angulos pequeños  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ ,  $L\alpha \approx d \cdot \theta$  y linealizando alrededor de  $\alpha = 0$  y transformando todo al dominio de Laplace se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left(m + \frac{J_{bola}}{R^2}\right)s^2 R(s) + mg\left(\frac{d \cdot \Theta(s)}{L}\right) &= 0 \\
 \frac{R(s)}{\Theta(s)} &= -\frac{mgd}{L\left(m + \frac{J_{bola}}{R^2}\right)s^2}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Remplazando los valores de la ecuación con los valores reales de la planta se obtuvo la siguiente función de transferencia:

$$\frac{R(s)}{\Theta(s)} = G(s) = \frac{-0.672}{s^2}$$

Se simulo la respuesta al escalon unitario a lazo abierto en simulink obteniendo los siguientes resultados:

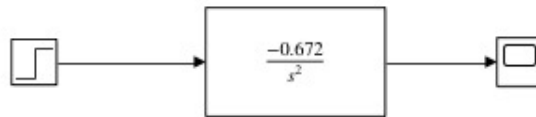


Figura 7: Diagrama de bloques- respuesta a lazo abierto

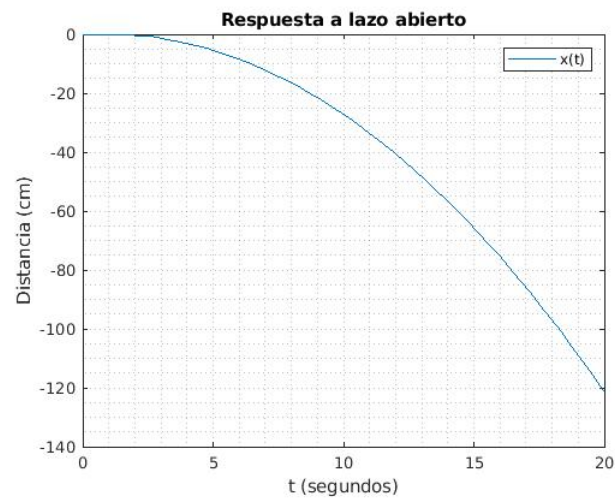


Figura 8: Respuesta a lazo abierto

Como se observa se obtuvo una respuesta inestable y negativa al escalón unitario.

### 3. P&ID

El P&ID de la planta se observa a continuación:

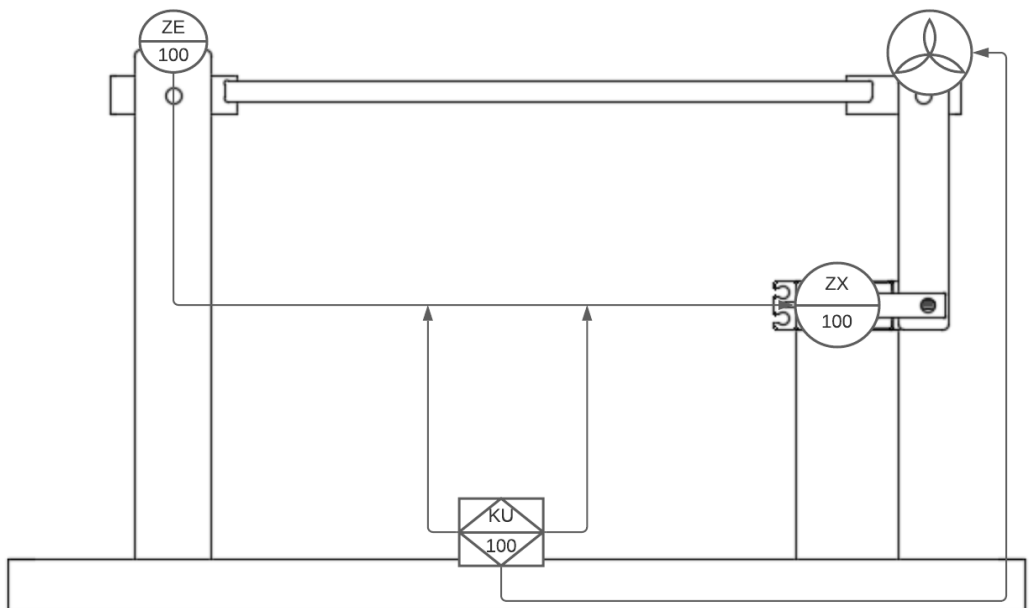


Figura 9: P&ID

Se cuenta con los siguientes elementos en la planta:

- **ZE:** Sensor de distancia
- **KU:** Microcontrolador
- **ZX:** Servomotor
- Ventilador

## 4. Plano mecánico

El plano mecánico y el modelado 3D de la planta se realizó con la ayuda del software fusión 360, el modelo 3D de la planta se observa a continuación:

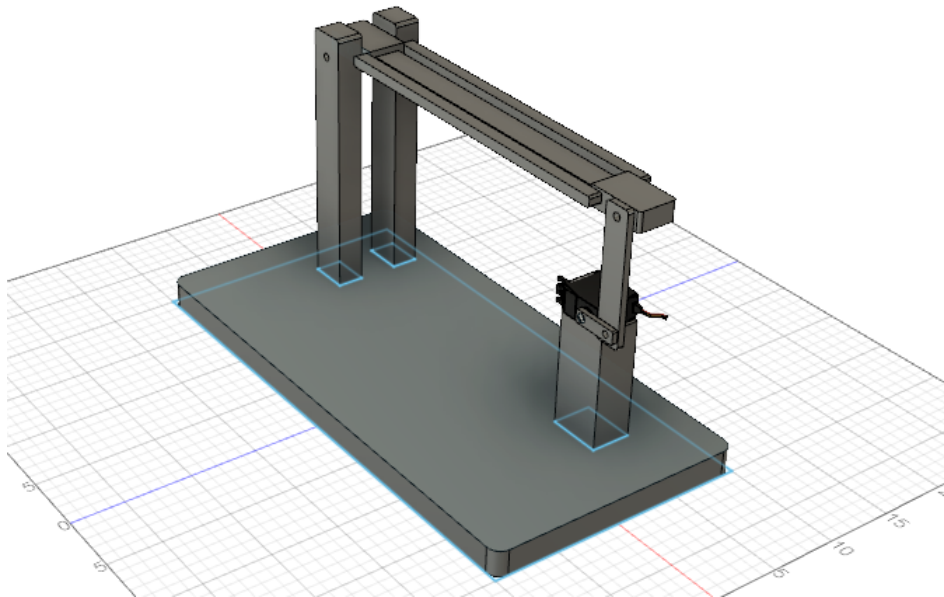


Figura 10: Modelo 3D de la planta

La planta montada se observa a continuación:



Figura 11: Planta

El plano mecánico y los archivos para corte láser se anexaron al final del documento.

## 5. Esquemático electrónico

El esquemático electrónico se observa a continuación:

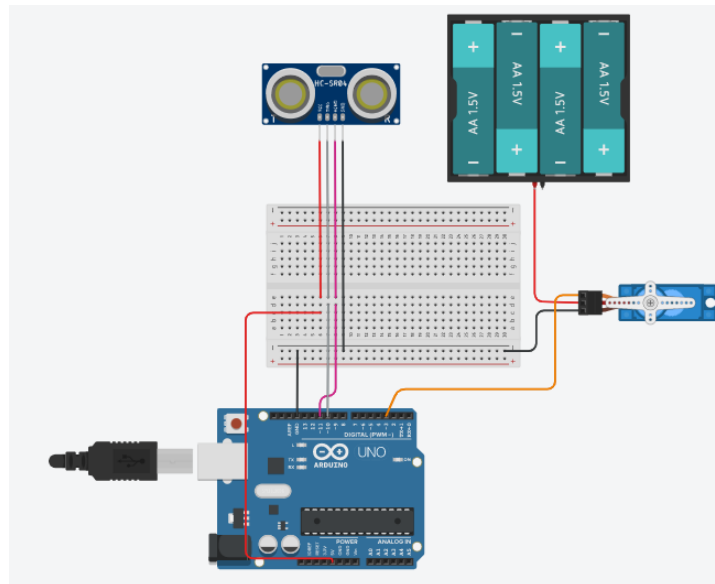


Figura 12: Esquemático electrónico



los dispositivos electrónicos utilizados se enumeran a continuación:

- Arduino Uno
- Sensor de distancia ultrasónico HC-SR04
- Servomotor MG945
- 4 baterías recargables de 1.5v
- Jumpers para conexión
- Mini-protoboard

## 6. Identificación a partir de los datos

La identificación de la planta se realizó ubicando la bola de ping pong en el setpoint (La mitad de la viga) y el servo de tal manera que la planta quede sin inclinación (servo en 125°), se realizó una pequeña variación del ángulo de servo y se tomaron datos de distancia. Para una variación de 125° a 115° (-10° de variación) se obtuvo la siguiente respuesta:

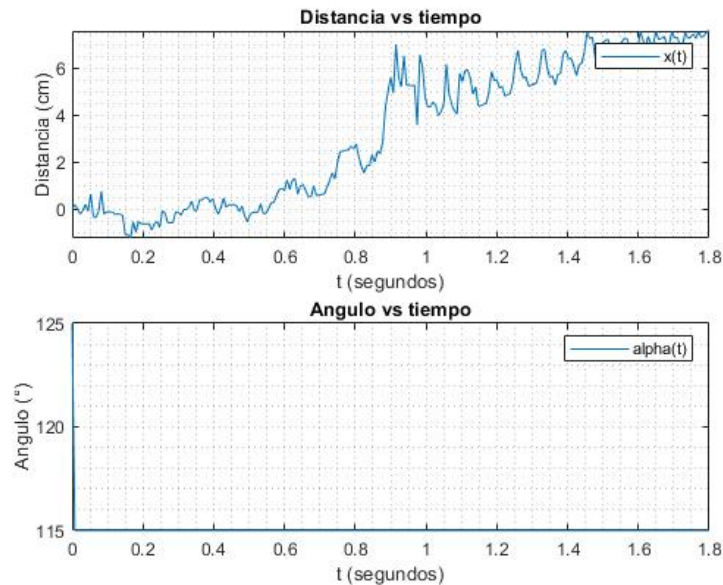


Figura 13: Respuesta real de la planta

Como se observa ante una variación negativa del ángulo del servo se obtiene una respuesta positiva, lo cual coincide con el modelo teórico.

Se realizó una regresión con el fin de estimar:

$$\hat{x}(t) = \theta \cdot t^2$$

Se estimo el parámetro  $\theta$  que mejor se ajustaba a los datos , obteniendo el siguiente resultado:

$$\hat{x}(t) = 3.045 \cdot t^2$$

la gráfica del ajuste con los datos reales se observa a continuación:

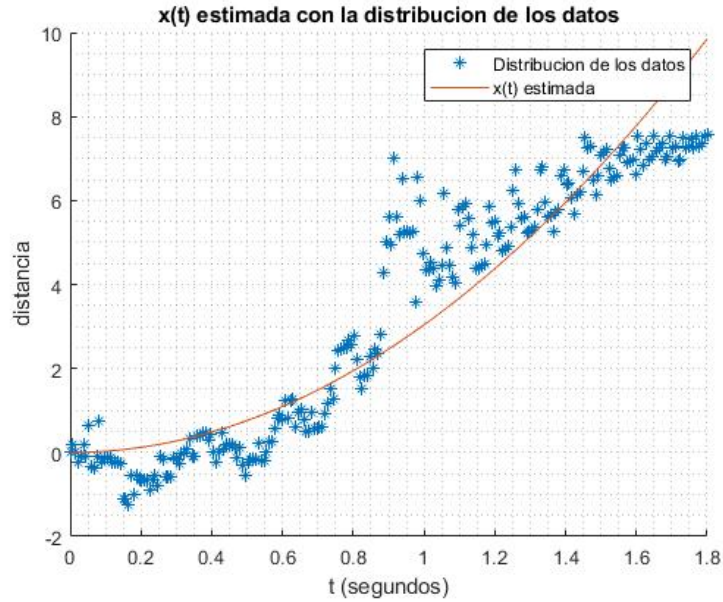


Figura 14:  $x(t)$  estimada con los datos reales

Teniendo esta estimación se procedió a calcular la función de transferencia del sistema:

ENTRADA:

$$\alpha(t) = (115 - 125)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} A(s) = \frac{-10}{s}$$

SALIDA:

$$x(t) = 3.045 \cdot t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{3.045 \cdot 2!}{s^3}$$

Finalmente con este resultado se obtiene:

$$G(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{\frac{6.09}{s^3}}{\frac{-10}{s}}$$

$$G(s) = \frac{-0.609}{s^2}$$

como se observa este resultado se asemeja bastante con el resultado obtenido teóricamente.

## 7. Diseño del controlador PID

Dado que la función de transferencia real se asemeja bastante a la obtenida teóricamente se decidió sintonizar con la función teórica. Para sintonizar se siguió el siguiente diagrama de bloques:

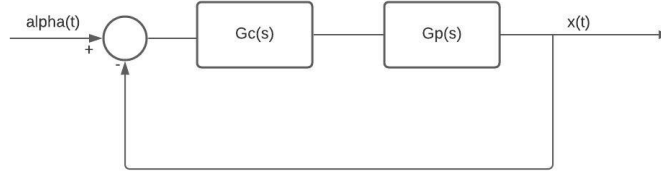


Figura 15: lazo cerrado con controlador

Se obtuvo la función de transferencia en lazo cerrado para fines de sintonización, teniendo en cuenta que para este lazo se tiene que esta es igual a:

$$T(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

reemplazando  $G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$  y  $G_p(s) = \frac{-0.672}{s^2}$  y simplificando se obtuvo el siguiente resultado:

$$T(s) = \frac{-0.672(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 - 0.672 \cdot K_d s^2 - 0.672 \cdot K_p s - 0.672 \cdot K_i}$$

En este caso se buscaron  $K_d, K_p, K_i$  de tal manera que todos los polos de la función de transferencia en lazo cerrado se situaran -1, lo cual garantiza la estabilidad. Se busco lo siguiente:

$$s^3 - 0.672 \cdot K_d s^2 - 0.672 \cdot K_p s - 0.672 \cdot K_i = (s + 1)^3$$

$$s^3 - 0.672 \cdot K_d s^2 - 0.672 \cdot K_p s - 0.672 \cdot K_i = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

finalmente por comparación se obtuvo:

$$-0.672 \cdot K_d = 3 \rightarrow K_d = -4.46$$

$$-0.672 \cdot K_p = 3 \rightarrow K_p = -4.46$$

$$-0.672 \cdot K_i = 1 \rightarrow K_i = -1.48$$

## 8. Implementación del controlador-Simulación

Se implemento el controlador en simulink con las constantes calculadas previamente, obteniendo los siguientes resultados:

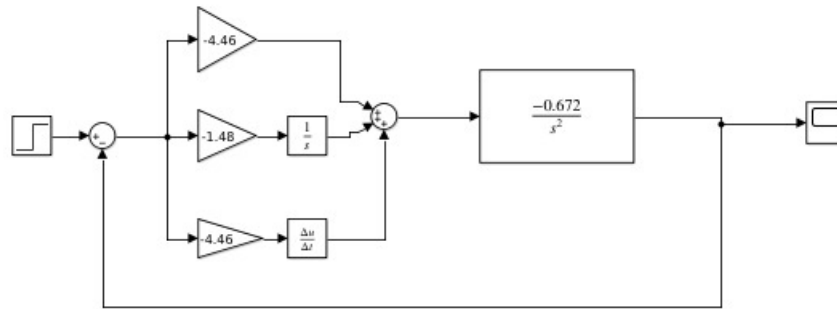


Figura 16: Controlador PID en simulación

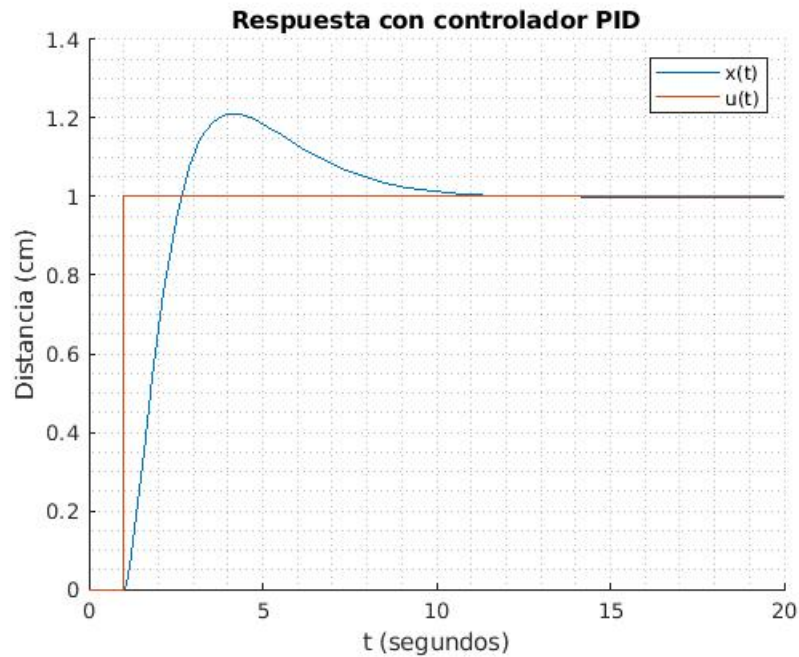


Figura 17: Respuesta del sistema con el controlador PID

Como se observa el controlador garantiza la estabilidad del sistema y el seguimiento del setpoint en estado estable.

## 9. Implementación del controlador- En planta

Los resultados obtenidos en la planta se observan a continuación:

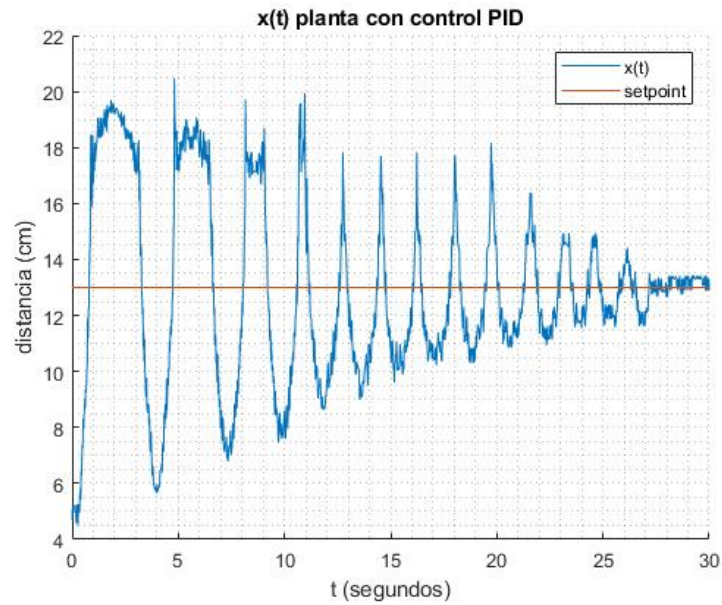


Figura 18: Respuesta de la planta con el controlador PID

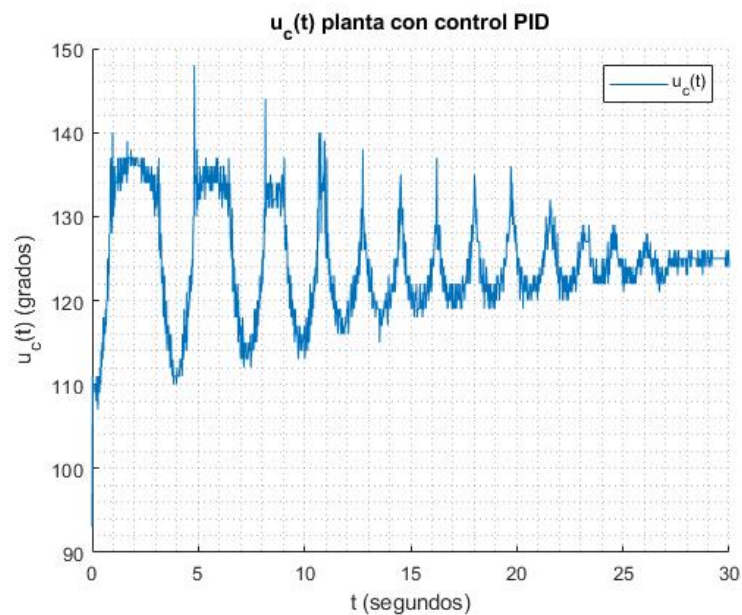


Figura 19: Señal de control

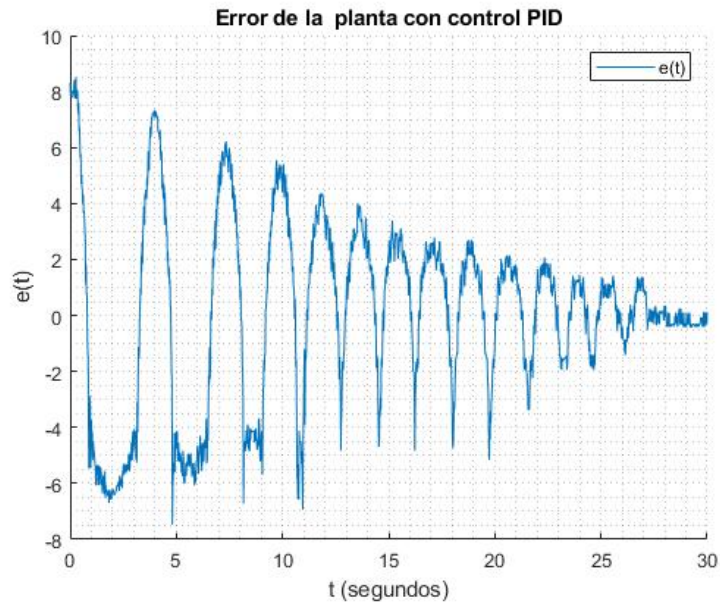


Figura 20: Error

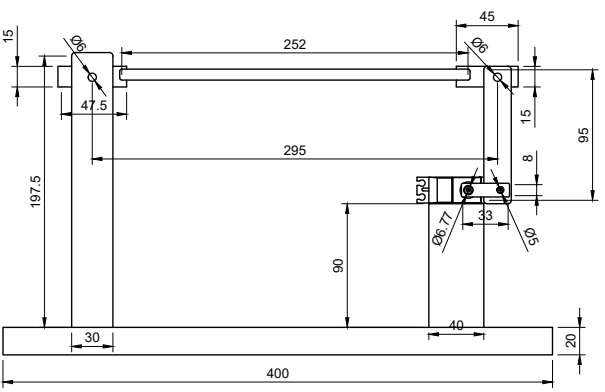
Como se observa la respuesta del controlador en planta fue algo oscilatoria, sin embargo, como se observa en la figura 18 el sistema logra estabilizarse en la mitad de la viga (aprox 13cm) y se logra un error en estado estable de aproximadamente 0 como se puede ver en la figura 20. Por otra parte, se observa que la señal de control que en este caso es el ángulo del servo se estabiliza en  $125^\circ$  aproximadamente.

## 10. Recursos

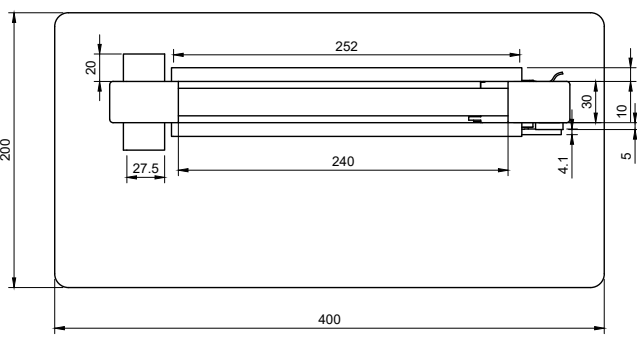
Los archivos de Arduino, Matlab y del modelo 3d se encuentran disponibles en el siguiente repositorio:

<https://github.com/santiagomd11/Proyecto-bola-balanza---Taller-de-control>

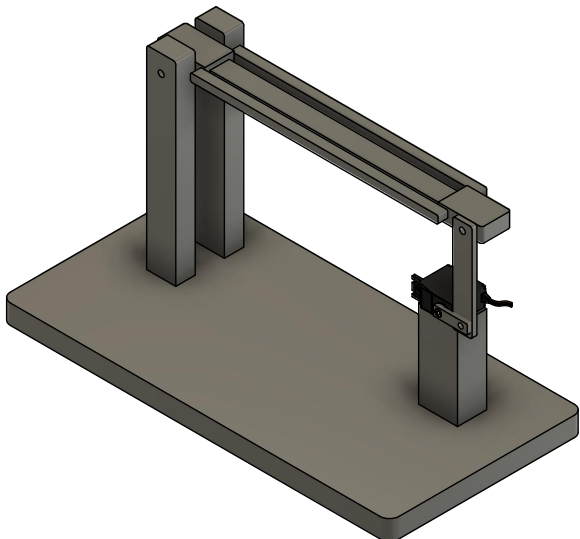
VISTA LATERAL



VISTA SUPERIOR



PLANTA



Dept.	Technical reference	Created by Santiago Montaño Diaz 1/04/2021	Approved by
		Document type	Document status
		Title planos_ball_beam	DWG No.
		Rev.	Date of issue
			Sheet 1/1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
A	<div></div>								<div></div>	<div></div>	<div></div>	<div></div>	
B													
C													
D													
E													<div></div>
F	<div></div>												
G	<div></div>												
H													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Dept.	Technical reference	Created by Santiago Montaño Diaz 1/04/2021	Approved by
		Document type	Document status
		Title planos_ball_beam	
		Rev.	Date of issue
			Sheet 1/1