

ESTUDIO DE MECANISMOS DE AMORTIGUACIÓN DE
VIBRACIONES MECÁNICAS MEDIANTE EL USO DE
PARTÍCULAS DISIPATIVAS

TESIS PRESENTADA A LA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
CON LA MENCIÓN ENSAYOS ESTRUCTURALES
EN LA FACULTAD REGIONAL DELTA

Tesista: **MARTÍN SÁNCHEZ**
Director: **LUIS A. PUGNALONI**

SEPTIEMBRE 2012

Este trabajo de tesis es presentado para obtener el grado de Doctor en Ingeniería con la Mención Ensayos Estructurales de la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Delta. El trabajo de investigación fue realizado en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad Regional La Plata de la Universidad Tecnológica Nacional y el Instituto de Física de Líquidos y Sistemas Biológicos dependiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y de la Universidad Nacional de La Plata.

A Cecilia e Isabella

TABLA DE CONTENIDOS

Dedicatoria	5
Resumen	11
Agradecimientos	13
Símbolos y notaciones	22
1. Introducción	23
1.1. Antecedentes y fundamentación	23
1.1.1. Amortiguación de vibraciones mecánicas	23
1.1.2. Los amortiguadores de impacto	27
1.1.3. Amortiguación granular: El amortiguador de partículas	30
1.2. Alcances y objetivos	36
1.3. Estructura de la tesis	37
2. Marco teórico y de simulación	39
2.1. Presentación de los modelos estudiados	39
2.1.1. Sistema de referencia con un grado de libertad	39
2.1.2. Amortiguador de partículas	43
2.1.3. Amortiguador de impacto	45
2.2. El método de elementos discretos - DEM	47
2.2.1. Orígenes y aplicaciones	47
2.2.2. Marco teórico	48
2.2.3. Interacción macroscópica de partículas	50
2.3. Detección de colisiones	52
2.3.1. Algoritmo de cuadrícula (Lattice)	53
2.4. Implementación de rotaciones	54
2.4.1. Cuaterniones	57
2.5. Resumen de la aplicación del DEM	58

2.6.	Análisis de las energías	59
2.7.	Sumario y conclusiones	61
3.	Amortiguación granular óptima	63
3.1.	Comportamiento del amortiguador granular	64
3.1.1.	Parámetros de simulación	64
3.1.2.	Análisis del amortiguamiento	65
3.2.	Corrimiento de la frecuencia de resonancia	70
3.2.1.	Análisis de los datos	71
3.2.2.	Resultados	73
3.3.	Sumario y conclusiones	79
4.	Análisis no lineal del amortiguador de partículas	81
4.1.	Análisis no lineal	81
4.1.1.	Análisis lineal de señales	82
4.1.2.	Reconstrucción del espacio de fases	82
4.1.3.	Mapa de Poincaré y exponentes de Lyapunov	86
4.2.	Resultados numéricos	88
4.2.1.	Comportamiento periódico	89
4.2.2.	Región de transición	91
4.2.3.	Comportamiento caótico: Zona I	93
4.2.4.	Amortiguamiento óptimo	94
4.2.5.	Comportamiento caótico: Zona II	94
4.3.	Sumario y conclusiones	95
5.	Respuesta universal del amortiguador de partículas	99
5.1.	Modelo de simulación	99
5.2.	Colapso inelástico	100
5.3.	Resultados	102
5.3.1.	Efecto de la interacción entre partículas	102
5.3.2.	Origen de la respuesta universal	105
5.3.3.	Límite de la respuesta universal	106
5.4.	Sumario y conclusiones	107
6.	Conclusiones y trabajos futuros	111
6.1.	Trabajos futuros	113
6.1.1.	Excitación no armónica	113
6.1.2.	Fragmentación de partículas y granos de distintas formas	113
6.1.3.	Amortiguadores con polvos finos	113
6.1.4.	Control del caos - Ampliación de la amortiguación óptima . . .	114

6.1.5. Amortiguadores de partículas activos	114
Bibliografía	115
Apéndices	122
A. Software de simulación basado en DEM: Amortiguador de partículas	123
B. Software de simulación híbrido DEM - Dinámica de colisiones: Amortiguador de impacto	153
C. Implementación de rotaciones	161

RESUMEN

La presente tesis estudia el comportamiento de los amortiguadores de vibraciones mecánicas formados por partículas disipativas. Se estudia, a través de simulaciones mediante el método de elementos discretos, la eficiencia de un amortiguador compuesto por un receptáculo prismático que contiene partículas esféricas que interactúan mediante fuerzas disipativas (colisiones inelásticas y fricción). El amortiguador está acoplado a un sistema primario sometido a vibraciones forzadas con excitación armónica. Se estudia la respuesta del sistema en función del tamaño del recinto de contención y del número y tipo de partículas. Se analizan varias configuraciones para determinar el efecto de la geometría del receptáculo.

Los resultados obtenidos muestran que, contrariamente a lo que se ha discutido en estudios previos de otros autores, la inclusión de un amortiguador granular produce un corrimiento no monótono de la frecuencia de resonancia del sistema si se lo estudia como función de la altura del recinto. Este corrimiento es debido al efecto combinado del tiempo de vuelo y la fase entre el momento de impacto de las partículas contra la cavidad y el movimiento de excitación. Se muestra que la frecuencia de resonancia para el recinto prismático óptimo (aquel que produce la máxima atenuación de la vibración en resonancia) no está influenciada por las partículas y mantiene la frecuencia natural de sistema masa-resorte-amortiguador viscoso original. Un análisis de la dinámica no lineal de la capa de granos muestra el paso de estados con movimientos regulares a caóticos a través de una transición al caos por cuasi-periodicidad. En particular, en las cercanías de la frecuencia de resonancia, la cama granular encuentra una ventana de periodicidad que produce la mejor eficiencia de amortiguamiento.

Finalmente, a través del concepto de *colapso inelástico* de los materiales granulares densos, se explica el comportamiento universal del amortiguador óptimo. Independientemente de las características disipativas de los granos, el disipador produce la misma atenuación de la respuesta del sistema si se utilizan gran cantidad de partículas. Estos resultados brindan información crucial para el diseño de estos dispositivos, con el fin de lograr el bajo mantenimiento que hace a los amortiguadores granulares particularmente adecuados para ambientes hostiles.

AGRADECIMIENTOS

Han pasado más de 5 años desde que comencé con mi primer curso de postgrado, se está terminando este largo y sinuoso camino y es momento de agradecer a todas las personas que de distintas maneras me apoyaron, muchos siguen hasta hoy dándome fuerzas para continuar.

En primer lugar a Luis, mi director de tesis, por todo el tiempo dedicado en ayudarme, aconsejarme y guiarme. Gracias por haber estado ahí siempre, por haber bancado muchas veces mi impaciencia y apuro y enseñarme que a pesar de todo "la ciencia nunca se detiene". He aprendido y logrado mucho en estos años de trabajo conjunto pero sobre todas las cosas he obtenido un amigo.

Quisiera agradecer también a Manuel Carlevaro, por ayudarme cuando lo necesite, darme fuerza para seguir adelante y por las lindas figuras "programadas" en Python. Además a Diego Maza por su ayuda en el ámbito no lineal, muchas gracias por las charlas durante tu estadía en La Plata y los chats y emails que mantuvimos.

A Gustavo Rosenthal por las largas y tendidas discusiones sobre vibraciones mecánicas entre otros muchos temas, algunos bien mecánicos y otros no tanto, gracias por hacerme ver siempre la parte práctica de la teoría.

Agradezco al IFly y al departamento de Ingeniería Mecánica de la UTN por darme lugar donde poder realizar las investigaciones que están plasmadas en esta tesis. Por supuesto a Víctor Sacchetto, muchas gracias por su apoyo continuo dentro del departamento y por su entusiasmo e incentivo para que termine este trabajo.

A mis viejos, por enseñarme e incentivar me siempre a estudiar y progresar en la vida, gracias por todo lo que me dieron y me dan diariamente. Por último, aunque no por eso menos importante, quisiera agradecer a mis amores, Isabella y Cecilia, sin ustedes no podría haber llegado nunca hasta acá. Gracias por enseñarme día a día que la ingeniería no es lo único ni mucho menos lo mas importante.

Muchas gracias a todos por todo.

LISTA DE FIGURAS

1.1. Modelo esquemático de un amortiguador de impacto.	28
1.2. Modelo esquemático de un amortiguador de partículas.	31
2.1. Sistema de un grado de libertad sin amortiguación granular.	40
2.2. Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento granular.	44
2.3. Instantáneas de una simulación del amortiguador de partículas.	44
2.4. Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento granular simplifi- cado.	45
2.5. Modelo de contacto de dos partículas esféricas.	50
2.6. Esquema bidimensional del algoritmo de cuadrícula para detectar con- tactos.	53
3.1. Respuesta en frecuencia del sistema con amortiguación granular para diferentes tamaños de recinto.	66
3.2. Amplitud y energía disipada en resonancia del sistema en función del tamaño del recinto.	67
3.3. Variación en frecuencia de las energías de disipación para $L_z = 0.11$ m y $N = 500$	68
3.4. Movimiento del sistema con $N = 500$ y $L_z = 0.11$ m para distintas frecuencias de excitación.	69
3.5. Ajuste de la Ec. (2.1.21) por el método de mínimos cuadrados para el sistema con $N = 250$ y $L_z = 0.042$ m.	72
3.6. Respuesta en frecuencia del sistema con amortiguación granular para diferentes alturas L_z del recinto.	74
3.7. Amortiguamiento efectivo C_{ef} en relación al amortiguamiento estructu- ral viscoso C como función de L_z	75
3.8. Masa efectiva como función de L_z	76
3.9. Desplazamiento y fuerza de las partículas contra el recinto para diferen- tes valores de L_z	77

4.1.	Respuesta en frecuencia del sistema con detalles de la dinámica no lineal de la cama granular.	89
4.2.	Respuesta de la cama granular a las frecuencias de excitación $f = 5.5$ Hz y $f = 7.5$ Hz.	90
4.3.	Respuesta de la cama granular a las frecuencias de excitación $f = 8.0$ Hz y $f = 10.0$ Hz.	91
4.4.	Respuesta de la cama granular a las frecuencias de excitación $f = 10.5$ Hz, $f = 11.0$ Hz y $f = 13.0$ Hz.	92
4.5.	Respuesta de la cama granular a la frecuencia de excitación $f = 14.5$ Hz.	94
4.6.	Respuesta de la cama granular a la frecuencia de excitación $f = 21.0$ Hz.	95
4.7.	Reconstrucción del espacio de fases para distintas frecuencias de excitación.	96
5.1.	Ejemplo de colapso inelástico. Distancia a una pared de dos partículas inelásticas que se mueven sobre una línea recta.	101
5.2.	Respuesta en frecuencia de un amortiguador de partículas óptimo y $N = 250$ partículas con diferentes parámetros de la interacción.	103
5.3.	Respuesta en frecuencia para un sistema con $N = 250$ partículas y distintos materiales	104
5.4.	Amplitud Z_{res} en resonancia como función de la disipación normal y tangencial para diferente número N de granos.	107
5.5.	Energía disipada por ciclo a la frecuencia de resonancia como una función de la disipación normal y tangencial.	108
6.1.	Respuesta en frecuencia para $N = 1$ y 250 con $L_z = 0.11$ m.	112
C.1.	Rotaciones que definen a los ángulos de Euler.	163

LISTA DE TABLAS

3.1. Características materiales y parámetros de la simulación usados en la Sección 3.1.	64
3.2. Distintas configuraciones usadas en la Sección 3.1 variando el numero N de partículas y su tamaño.	65
3.3. Características materiales y parámetros de la simulación usados en la Sección 3.2.	70
5.1. Características materiales y parámetros de la simulación usados en el Capítulo 5.	100

SÍMBOLOS Y NOTACIONES

\cdot	Producto escalar entre vectores
\otimes	Producto vectorial entre vectores
DEM	Método de Elementos Discretos
FRF	Función de Respuesta en Frecuencia
MEL	Máximo Exponente de Lyapunov
\vec{r}_i	Vector posición de la partícula i [m]
$\dot{\vec{r}}_i$	Vector velocidad de la partícula i [ms ⁻¹]
$\ddot{\vec{r}}_i$	Vector aceleración de la partícula i [ms ⁻²]
$\vec{\varphi}_i$	Vector posición angular de la partícula i [rad]
$\dot{\vec{\varphi}}_i$	Vector velocidad angular de la partícula i [rads ⁻¹]
$\ddot{\vec{\varphi}}_i$	Vector aceleración angular de la partícula i [rads ⁻²]
$\Phi; \Theta; \Psi$	Angulo de Euler [rad]
\vec{q}_i	Vector orientación a través de cuaterniones i [-]
$z(t)$	Respuesta temporal del sistema primario [m]
Z	Amplitud máxima en estado estacionario [m]
Z_{res}	Amplitud del sistema primario a la frecuencia de resonancia [m]
E_{col}^t	Energía disipada total por colisiones inelásticas [J]
E_{fric}^t	Energía disipada total por fricción [J]
E_{ct}^t	Energía cinética total de traslación [J]

E_{cr}^t	Energía cinética total de rotación	[J]
E_p^t	Energía potencial total	[J]
E_e^t	Energía elástica total en el contacto	[J]
d	Dimensión del atractor	[-]
m	Dimensión de inmersión	[-]
M	Masa del sistema primario	[kg]
M_{ef}	Masa efectiva del sistema primario	[kg]
K	Constante de rigidez	[Nm ⁻¹]
C	Coeficiente de amortiguamiento viscoso	[Nsm ⁻¹]
C_c	Amortiguamiento critico	[Nsm ⁻¹]
ξ	Relación de amortiguamiento	[-]
$L_x; L_y; L_z$	Dimensiones del recinto de contención	[m]
ρ	Densidad del material	[Kgm ⁻³]
$u(t)$	Excitación de base	[m]
U	Amplitud del movimiento de base	[m]
Ω	Frecuencia de excitación	[rads ⁻¹]
Ω_0	Frecuencia natural del sistema no amortiguado	[rads ⁻¹]
N	Número de partículas en el sistema	[-]
R_i	Radio de la partícula i	[m]
R_{min}	Radio de las partícula más pequeña en la simulación	[m]
R_{max}	Radio de las partícula más grande en la simulación	[m]
R_*	Radio efectivo de contacto	[m]
m_p	Masa total de partículas en el amortiguador	[kg]
m_i	Masa de la partícula i	[kg]
\hat{I}	Tensor de inercia	[kgm ²]

I_i	Momento de inercia de partícula i [kgm ²]
\vec{L}	Momento cinético [Kgm ² s ⁻¹]
ν_i	Coeficiente de Poisson de la partícula i [-]
μ	Coeficiente de fricción de Coulomb [-]
e	Coeficiente de restitución [-]
γ_n	Amortiguamiento normal visco-elástico de contacto [kgm ^{-1/2} s ⁻¹]
γ_s	Amortiguamiento tangencial de contacto [kgm ^{-1/2} s ⁻¹]
μ_d	Coeficiente de fricción dinámica [-]
E_*	Modulo de elasticidad efectivo de contacto [Nm ⁻²]
E_i	Modulo de elasticidad de la partícula i [Nm ⁻²]
k_n	Rigidez normal de contacto [Nm ^{-3/2}]
ζ_{ij}	Penetración entre las partículas i y j [m]
\vec{n}_{ij}	Vector unitario normal. Colisión entre partícula i y j [-]
$n_{ij}^x; n_{ij}^y; n_{ij}^z$	Componentes del vector normal unitario [-]
\vec{s}_{ij}	Vector unitario tangencial. Colisión entre partícula i y j [-]
$s_{ij}^x; s_{ij}^y; s_{ij}^z$	Componentes del vector tangencial unitario [-]
\vec{v}_n	Velocidad relativa normal de impacto [ms ⁻¹]
\vec{v}_t	Velocidad relativa tangencial de impacto [ms ⁻¹]
\vec{v}_s	Velocidad de corte en el contacto [ms ⁻¹]
\vec{v}_{ij}^{rel}	Velocidad relativa de impacto [ms ⁻¹]
δt	Paso de tiempo de integración [s]
gn	Número de celdas para buscar vecinos [-]
gk	Constante de red. Celdas para detección de colisiones [m]
$K_x; K_y; K_z$	Número de celdas en las distintas direcciones [-]
$F_{granular}^z$	Fuerza granular generada sobre el sistema primario [N]

F_i	Fuerza aplicada sobre la partícula i [N]
\vec{F}_n	Fuerza normal de impacto [N]
\vec{F}_s	Fuerza tangencial de impacto [N]
M_i	Torque aplicado sobre la partícula i [Nm]
S^s	Sistema de referencia espacial [-]
S^b	Sistema de referencia fijo a la partícula [-]
S^f	Sistema de referencia inercial fijo a la partícula [-]
$[A]$	Matriz de transformación [-]

INTRODUCCIÓN

Esta sección pretende dar una breve descripción de los métodos tradicionales de amortiguación y control de vibraciones mecánicas. Información más detallada se puede encontrar en los libros de Harris [1], De Silva [2], Inman [3] y Braun [4].

Por otro lado, se presenta un resumen del estado del arte de los amortiguadores de impacto y de partículas disipativas. Finalmente, se exponen los objetivos principales del trabajo de tesis y la estructura de la misma en las dos últimas secciones del capítulo.

1.1. Antecedentes y fundamentación

1.1.1. Amortiguación de vibraciones mecánicas

La amortiguación es el fenómeno por el cual la energía mecánica se disipa en los sistemas dinámicos. Esta disipación es generalmente por conversión a energía térmica. El amortiguamiento de un elemento estructural en un sistema mecánico es una medida de la tasa de energía disipada por ciclo de deformación. En igualdad de condiciones técnicas, cuanto mayor es la disipación de energía menor será la probabilidad de grandes amplitudes de vibración o altas radiaciones de ruido. Esta reducción logra disminuir las fallas de los elementos sometidos a vibraciones por causa de tensiones elevadas debidas a las deformaciones cíclicas (fatiga de materiales). Al estudiar el amortiguamiento, es necesario considerar las distintas configuraciones de los elementos mecánicos o de materiales con el fin de lograr disipar una cantidad de energía suficiente para reducir las vibraciones o el ruido no deseado.

Existen varios tipos de amortiguamiento intrínsecamente presentes en los sistemas mecánicos. Si el nivel de amortiguación disponible en estos mecanismos no es adecuado para el buen funcionamiento del sistema, entonces se pueden agregar dispositivos externos de amortiguación durante el diseño original o en modificaciones posteriores al diseño. Tres mecanismos principales de amortiguamiento son importantes en el estudio

de los sistemas mecánicos [2]. Ellos son:

- Amortiguamiento interno.
- Amortiguamiento estructural (En juntas e interfaces).
- Amortiguamiento por fluidos (Interacción fluido - estructura).

El amortiguamiento interno (amortiguamiento material) es el resultado de la disipación de energía en el material del sistema debido a varios procesos microscópicos y macroscópicos. Estos mecanismos disipan la energía vibracional en forma de calor. Cada uno se asocia con la reconstrucción interna atómica o molecular de la microestructura. Sólo uno o dos mecanismos pueden ser dominantes para un material específico (metales, aleaciones, compuestos intermetálicos, etc.) bajo condiciones específicas, es decir, para determinados rangos de frecuencia y temperatura. La mayoría de los metales y aleaciones estructurales tienen pequeña amortiguación interna bajo la mayoría de las condiciones operativas.

Un mecanismo comúnmente conocido como amortiguación visco-elástica está presente en muchos elastómeros y materiales vítreos amorfos [1]. La amortiguación se debe a la relajación y la recuperación de las cadenas moleculares después de la deformación. Una de las características únicas de los materiales visco-elásticos, es que sus propiedades se ven influidas por muchos parámetros tales como frecuencia, temperatura, velocidad de deformación, pre-carga estática, fluencia y relajación, envejecimiento y otros efectos irreversibles. Los efectos más importantes, al considerar estos materiales para la amortiguación de vibraciones mecánicas, son las variaciones de las propiedades con la frecuencia y la temperatura [4]. En la práctica, un material visco-elástico típico es seleccionado en el diseño basándose en gráficos de temperatura *vs* factor de amortiguación y frecuencia *vs* factor de amortiguación. Básicamente, el factor de amortiguación es considerado como una función de la frecuencia de excitación y de la temperatura. Debido a la fuerte dependencia de las propiedades con la temperatura, estos tipos de materiales no pueden ser utilizados generalmente en aplicaciones en ambientes hostiles (altas y bajas temperaturas). Los materiales visco-elásticos con frecuencia se añaden a las estructuras metálicas (que normalmente tienen muy baja amortiguación) y dispositivos para aumentar la cantidad de amortiguamiento del sistema.

La amortiguación estructural es debida a la disipación de energía mecánica resultante de los movimientos relativos entre los componentes de una estructura que tiene puntos de contacto común, a través de la fricción o de los impactos en las juntas. Es decir, debido a la disipación en componentes tales como articulaciones o soportes. La disipación de energía depende de las características particulares del sistema mecánico, por lo tanto, es muy difícil establecer un modelo que represente perfectamente el amortiguamiento estructural. Así, como regla general, el modelo de fricción de Coulomb y el coeficiente

de restitución de dos componentes en contacto, son normalmente usados para describir la energía disipada en este tipo de amortiguamiento.

Finalmente, el amortiguamiento por fluidos se debe a la disipación de energía mecánica resultante de las fuerzas de arrastre y de las interacciones dinámicas asociadas cuando un sistema mecánico o algún componente del mismo se mueven dentro de un fluido.

Cuando el amortiguamiento intrínseco del sistema vibrante es inadecuado para la función deseada, entonces es necesaria la aplicación de un tratamiento específico de control de vibraciones que puede proveer los siguientes beneficios [1]:

- *Control de la amplitud de la vibración en resonancia.* La amortiguación se puede utilizar para el control de vibraciones excesivas de resonancia que pueden causar altas tensiones, dando lugar a fallas prematuras. Se debe utilizar en conjunción con otras medidas de control adecuadas para lograr una solución satisfactoria. Para vibraciones aleatorias, no es posible modificar el sistema y diseñar para mantener los esfuerzos aleatorios dentro de límites aceptables sin asegurarse de que la amortiguación en cada modo sea por lo menos superior a un mínimo valor especificado. En estos casos, los diseños estructurales han evolucionado hacia procedimientos semi-empíricos, pero los niveles de amortiguación son factores de control y deben ser aumentados en caso de encontrarlos demasiado bajos.
- *Control de ruido.* La amortiguación es muy útil para el control de las emisiones de ruido de las superficies vibrantes, o el control de la transmisión de ruido a través de una superficie vibrante. El ruido debido a estructuras vibrantes (baja frecuencia) no se reduce por absorción, sino por la disminución de la amplitud de la vibración.
- *Aceptación de producto.* La amortiguación puede, frecuentemente, contribuir a la aceptación del producto, no sólo por la reducción del exceso de ruido o vibración y la ausencia de una resonancia en el rango de frecuencias de operación, sino también por la sensación subjetiva de los clientes en base a la confortabilidad de utilización de un producto determinado.
- *Mantenimiento simplificado.* Una consecuencia útil de la reducción de la fatiga de los materiales inducida por resonancia con mayor amortiguación, o por otros medios, puede ser la reducción de los costos totales de mantenimiento. La reducción del tiempo y costo de mantenimiento es fundamental en equipos funcionado en condiciones operativas difíciles o donde los tiempos de parada deben ser reducidos al mínimo (por ejemplo, plantas nucleares y aplicaciones aeroespaciales).

En el aislamiento de vibraciones, la fuente de la vibración es aislada del sistema de interés, o el dispositivo está protegido de las vibraciones en su soporte de unión. A diferencia del aislador de vibraciones, un absorbedor de vibraciones consiste en un sistema

secundario (normalmente masa-resorte-amortiguador) que se añade al dispositivo primario para protegerlo de las vibraciones. Así, seleccionando adecuadamente la masa, la rigidez y/o la amortiguación, la vibración del sistema primario se puede minimizar [3].

Tres tipos generales de sistemas de control de vibraciones pueden ser agregados a los sistemas mecánicos, ya sea como aisladores o absorbedores, con el fin de lograr la energía de disipación necesaria [5]. Dependiendo de la cantidad de energía externa requerida para realizar su función, se pueden clasificar en [6]:

- Control pasivo.
- Control semi-activo.
- Control activo.

Un control pasivo está formado de un elemento elástico (rigidez) y un disipador de energía (amortiguador) ya sea para absorber la energía vibratoria o para aislar la ruta de transmisión de la vibración. En general, estos tipos de sistema de control constan de una región de frecuencias de trabajo de mayor sensibilidad. El control pasivo de vibraciones tiene limitaciones significativas en aplicaciones donde existen perturbaciones de banda ancha de naturaleza altamente aleatorias. Con el fin de compensar estas limitaciones, los sistemas activos de control de las vibraciones son de gran utilidad. Con una fuerza activa adicional como parte del absorbedor, los sistemas activos son controlados con diferentes algoritmos para lograr una mejor respuesta a las perturbaciones del sistema primario [7].

Finalmente, los sistemas semi-activos (o adaptativos) son una combinación entre el tratamiento activo y pasivo de vibraciones, los cuales intentan reducir la cantidad de energía externa necesaria en el absorbedor para alcanzar las características de funcionamiento deseadas del sistema primario. Un ejemplo de estos sistemas es la utilización de fluidos magneto-reológicos en amortiguadores de vibraciones mecánicas. La variación de las características del fluido a través de flujos magnéticos permite lograr variaciones en la respuesta del sistema primario.

En conclusión, en el diseño de un sistema de control de vibraciones a menudo ocurre que el mismo deba operar sobre un rango de carga y de frecuencia de banda ancha. Una única solución de rigidez y/o amortiguación es casi imposible de obtener para lograr la respuesta deseada. Si las características de la respuesta no se pueden obtener, un sistema de control de vibraciones activo puede proporcionar una alternativa atractiva para determinados problemas. Sin embargo, los sistemas activos requieren de algoritmos complejos de control, además de introducir inestabilidad inducida por el mismo, lo que los limita en muchas aplicaciones industriales. Además, el mantenimiento del mismo requiere de mayor esfuerzo.

La inclusión de cualquier dispositivo amortiguador genera un corrimiento en la frecuencia natural del sistema primario vibrante, debido al aumento de la cantidad de amor-

tiguamiento. Por otro lado, los sistemas pasivos son a menudo influenciados por un fenómeno conocido como "desafinación" (detuning). Cuando el sistema pasivo se deteriora, sus parámetros estructurales pueden desfasarse de los nominales de diseño, produciendo que la amortiguación de las vibraciones se convierta en ineficaz para la frecuencia que fue diseñada. Este fenómeno puede ser debido también a un cambio en la frecuencia de excitación o en la naturaleza de la perturbación con el tiempo.

Para solventar estos problemas de diseño u operación, los sistemas adaptativos logran una integración efectiva entre los sistemas de control activos con dispositivos pasivos ajustables. Para ello, los generadores de la fuerza activa se sustituyen por sistemas variables modulados tales como amortiguación o rigidez variables [8]. Estos componentes variables se denominan "parámetros ajustables" del sistema, que se retroalimentan a través de un control de ajuste. Estos sistemas son de mucho interés debido a su bajo requerimiento de energía y costo.

1.1.2. Los amortiguadores de impacto

Un amortiguador de impacto es un dispositivo de absorción de vibraciones (control pasivo) que consta de una masa auxiliar encerrada en un recinto de contención (ver Fig. 1.1). El contenedor se puede montar directamente a la estructura del sistema primario o puede ser diseñado como parte integral del mismo. La amortiguación se consigue a través de las colisiones inelásticas entre la masa auxiliar y las paredes del recipiente.

Principalmente, debido a su bajo costo, diseño sencillo y prestaciones de amortiguación eficiente en una amplia gama de frecuencia y aceleración [9, 10], los amortiguadores de impacto son preferidos, en muchas aplicaciones, sobre los tradicionales dispositivos de control pasivo. Además, los amortiguadores de impacto son robustos (mantenimiento simplificado) y pueden funcionar en entornos hostiles, dónde los métodos tradicionales de amortiguación fallan.

Una de las primeras aplicaciones de estos amortiguadores fue el control de la fatiga y las vibraciones de estructuras aeronáuticas [11]. En este modelo se asume que tienen lugar dos impactos por ciclo de excitación, y el máximo amortiguamiento se produce cuando estos impactos ocurren en contrafase con el movimiento del sistema primario.

Muchas investigaciones se han llevado a cabo desde la primera aplicación. En 1956 Grubin [12] encuentra que la mejor eficiencia de amortiguación se produce en resonancia. A su vez, Sadek *et al.* [13, 14] examinaron los efectos de la gravedad sobre amortiguadores de impacto y encontraron que el mejor desempeño se logra en condiciones de "gravedad cero", es decir, cuando el sistema se excita en una dirección perpendicular a la gravedad. Los amortiguadores son más eficientes cuando dos impactos simétricos e iguales ocurren en cada ciclo de excitación. La gravedad causa desigualdad en la magnitud de los impactos, degradando la eficiencia del sistema.

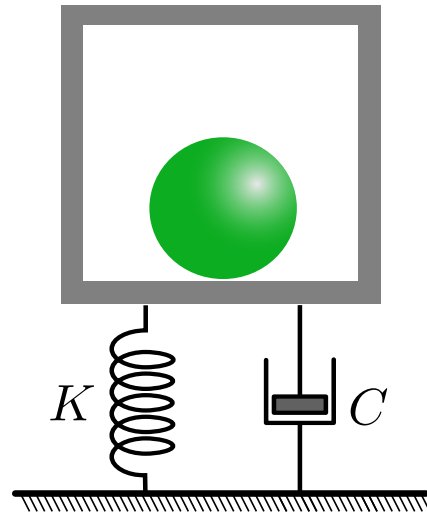


Figura 1.1: Modelo esquemático de un amortiguador de impacto.

Bapat y Sankar [10] utilizaron un amortiguador de impacto montado sobre una viga y estudiaron la respuesta libre del sistema. Los experimentos mostraron un decaimiento lineal de la amplitud de la vibración seguido por un decaimiento exponencial después de una disminución considerable de la amplitud de las vibraciones. El decaimiento lineal corresponde a la amortiguación debida al amortiguador de impacto, mientras que la caída exponencial corresponde a la amortiguación inherente de la viga. Estos resultados muestran también que el amortiguador de impacto deja de funcionar cuando las amplitudes de la vibración caen bajo cierto nivel. A su vez, ensayos con excitación armónica externa revelaron la existencia de un tamaño óptimo del espacio libre o "gap" (espacio dejado entre el techo del recinto y la masa auxiliar), como función de la amplitud y la frecuencia de excitación.

Recientemente, Duncan *et al.* [15] presentan resultados de simulaciones numéricas sobre el desempeño de la amortiguación de los amortiguadores de impacto sometidos a vibración vertical sobre una amplia gama de frecuencias y amplitudes de excitación. A su vez, ellos varían la relación de masa entre el recinto y la masa auxiliar, el gap, el coeficiente de restitución y el amortiguamiento intrínseco estructural del sistema primario. En sus investigaciones encuentran que para muy baja y muy alta amplitud de excitación, el efecto obtenido es similar al que se obtiene si la masa auxiliar se une solidariamente al recinto de contención (solo el amortiguamiento intrínseco del sistema primario es eficaz en este caso). Por otro lado, el máximo amortiguamiento de impacto se obtiene cuando, en resonancia del sistema primario, la masa auxiliar llega a golpear el techo del recinto. En este trabajo se demostró que, a frecuencias cercanas a la resonancia, la gravedad deja de tener un papel importante en la amortiguación de impacto.

A pesar de su sencillo diseño, la dinámica de los amortiguadores de impacto pue-

de ser muy compleja. Las trayectorias de la masa auxiliar y del recinto de contención son continuas, pero no suaves debido a los impactos. Las trayectorias también pueden presentar múltiples soluciones estables y de punto fijo, orbitas periódicas y bifurcaciones locales para determinadas combinaciones de los parámetros del sistema [16]. Dependiendo de las propiedades materiales y geométricas de la masa auxiliar, de los parámetros de excitación (tipo de excitación, frecuencia, amplitud, etc.) y de la forma y dimensiones del recinto de contención, el sistema puede tener un comportamiento regular o caótico. Numerosas investigaciones se ha realizado en este aspecto, en osciladores de impacto, teniendo en cuenta el coeficiente de restitución para modelar las colisiones entre la masa auxiliar y la estructura vibrante.

Shaw y Holmes [17] realizaron un análisis teórico de la dinámica interna de estos sistemas y mostraron la gran complejidad de la misma. Su modelo considera un oscilador no lineal excitado por una fuerza armónica en vibración horizontal, suponiendo impactos simétricos, dos por periodos de excitación. En particular, el análisis permitió mostrar la existencia de soluciones caóticas (soluciones con dependencia sensible a condiciones iniciales). Si bien los estudios son válidos para vibraciones horizontales, y muchos resultados fueron validados cualitativamente en otros trabajos, la suposición de tiempos iguales entre impactos (impactos simétricos) no es del todo válida cuando la fuerza de gravedad tiene influencia sobre el sistema (vibración vertical).

Tufillaro *et al.* [18] han hecho uso del modelo de la "bola que rebota" (bouncing ball model), que comprende a una pelota que rebota verticalmente sobre una mesa de masa infinita, la cual esta excitada por un desplazamiento armónico en la dirección vertical. El análisis mostró que la pelota presenta una ruta al caos por duplicación del periodo cuando la amplitud de la vibración se incrementa gradualmente. Experimentalmente se confirmaron las bifurcaciones predichas en el modelo teórico. Si bien el modelo no tiene en cuenta el techo de un recinto, como en el caso de los amortiguadores de impacto, este es un punto inicial para estudiar la dinámica compleja del amortiguador.

Después de la aparición de los primeros usos de los amortiguadores de impacto, estos dispositivos de control pasivo de vibraciones han sido ampliamente utilizados para muchas aplicaciones tecnológicas. Algunas de estas incluyen alas delta [19] y herramientas de perforación [20]. Duffy *et al.* [21] utilizaron un amortiguador de impacto para reducir las vibraciones y los problemas causados por la fatiga, tales como grietas o incluso fallas catastróficas, en alabes de rotor de turbomaquinas. A su vez, Skipor y Bain [22] usaron un amortiguador de impacto en una prensa de impresión para reducir las "rayas" que son causadas por la vibración flexional de la imagen que es trasladada por los cilindros de impresión. En general, todas las aplicaciones muestran una muy buena eficiencia de amortiguación con mínimo incremento de la masa del sistema, además de la mantención de la rigidez estructural y el mínimo tiempo de mantenimiento.

En conclusión, los amortiguadores de impacto son eficientes para la amortiguación

de vibraciones mecánicas, pero deben ser ajustados para lograr la mejor eficiencia a una frecuencia y amplitud específica de excitación. Se ha demostrado [11] la extrema sensibilidad de los mismos a cambios en las condiciones de funcionamiento o de los parámetros de diseño y por lo tanto es difícil utilizar este tipo de control pasivo para aplicaciones donde la excitación tenga un gran ancho de banda o donde las condiciones operativas varíen con el tiempo.

Otros problemas reportados [23, 24] incluyen altos niveles de ruido y desgaste de las superficies de contacto debido, principalmente, a las grandes fuerzas de colisión. El desgaste de las superficies de contacto puede causar cambios en los parámetros de funcionamiento que pueden reducir drásticamente la eficiencia del amortiguador de impacto.

1.1.3. Amortiguación granular: El amortiguador de partículas

Una partícula sólida se ha utilizado normalmente como elemento de impacto. Sin embargo, como se explica en la sección precedente, la gran fuerza de choque puede producir elevados niveles de ruido y degradación de las superficies en contacto. Sato *et al.* [25] han mostrado que estos problemas pueden ser reducidos por medio de la utilización de materia granular en lugar de una única partícula sólida dentro de la cavidad. Estos sistemas se denominan *amortiguadores de partículas* o *amortiguadores granulares*.

Los amortiguadores de partículas (ver Fig. 1.2) han sido objeto de varios estudios analíticos y experimentales. Araki *et al.* [26] investigaron las características de los amortiguadores de impacto con materiales granulares con un solo grado de libertad. El sistema estudiado fue sometido a una fuerza sinusoidal externa.

Papalou y Masri [27] han estudiado la amortiguación granular en un sistema horizontal vibrante bajo excitación aleatoria. Ellos investigaron la relación de masa (masa de los granos dividida por la masa del sistema primario) y tamaño de las partículas, las dimensiones de la cavidad y el rendimiento de la amortiguación del sistema. En los experimentos montaron un amortiguador de partículas en un sistema de un grado de libertad equivalente, en donde las dimensiones del amortiguador se podían variar por soportes ajustables. Los autores señalan que el efecto de las dimensiones del recinto parece ser importante cuando la relación de masas entre las partículas y el sistema primario es alta. También informan que, si la amplitud de oscilación es pequeña, una relación de masas baja puede ser beneficiosa. Los mismos autores [28] también han estudiado el comportamiento del amortiguador de partículas bajo la acción de una excitación sinusoidal. Han demostrado que los amortiguadores de partículas, incluso con una relación de masa pequeña, pueden ser muy eficaces en la atenuación de vibraciones en sistemas con pequeños amortiguamientos estructurales. En el trabajo se presenta un método aproximado para estimar la respuesta de una estructura excitada armónicamente con un amortiguador de partículas. Además, encuentran que la sensibilidad al "gap" es menor cuando se usan

partículas más pequeñas. Desafortunadamente con partículas pequeñas la eficiencia del amortiguador estudiado es menor.

Friend y Kinra [29] analizaron la vibración libre de una viga con un desplazamiento inicial dado. Para esto utilizaron datos empíricos para encontrar un "coeficiente efectivo de restitución" de la colisión del piso y techo del recinto con el conjunto de granos, con el fin de predecir el comportamiento de la viga con diferentes condiciones iniciales. Este es un buen ejemplo del modelado de la cama granular a través de un sistema de una única partícula con propiedades de impacto efectivas. El coeficiente de amortiguamiento equivalente fue calculado sumando la energía total disipada en los impactos y dividiendo por la máxima energía cinética en el sistema.

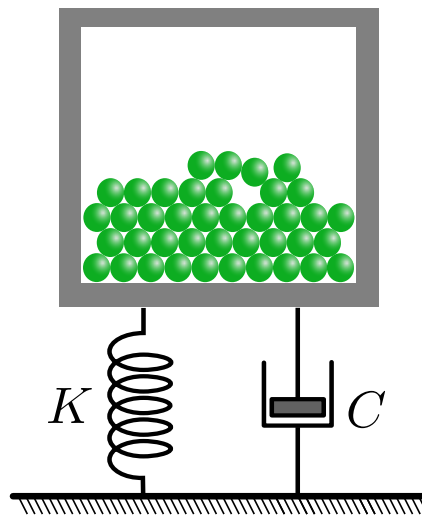


Figura 1.2: Modelo esquemático de un amortiguador de partículas.

Si bien desde mediados de la década del 80 los amortiguadores de partículas han sido propuestos y estudiados como alternativas a los tradicionales dispositivos de amortiguación en ambientes hostiles, las investigaciones necesarias no han sido suficientes, dado que la mayoría de los trabajos se han basado en el análisis de sistemas equivalentes de una sola partícula.

Cempel y Lotz [30] experimentaron con ocho tipos diferentes de amortiguadores de partículas. En sus investigaciones no sólo incluyeron partículas libres en el recinto del amortiguador, sino también partículas contenidas dentro de bolsas de plástico, cajas de metal y cajas de plástico que eran incorporadas en el interior de la cavidad del amortiguador. Ellos encontraron que el amortiguamiento es eficaz cuando las partículas se colocan en una bolsa de plástico duro que es luego insertada dentro del recinto, la cual proporciona un coeficiente de restitución efectivo cercano a cero. A su vez, este dispositivo genera poco ruido en su funcionamiento. El mayor factor de amortiguamiento fue encontrado con el uso de partículas dentro de una caja de metal insertada en el recinto

del amortiguador. Sin embargo, la alta eficiencia fue acompañada por un alto nivel de ruido y una gran sensibilidad al tamaño del gap. La respuesta de la bolsa de plástico duro fue en gran medida insensible al tamaño del gap. En este trabajo se mostró que existe una "zona muerta", dependiente de la aceleración del movimiento del sistema primario, donde el amortiguamiento granular deja de existir.

Salueña *et al.* [31] utilizaron simulaciones numéricas para investigar las propiedades disipativas de los materiales granulares sometidos a vibraciones verticales. Ellos modelaron las tres fases o regímenes de amortiguamiento que aparecen cuando un gran número de pequeñas partículas son excitadas en un recipiente. Estos autores identifican tres estados de la cama granular. El estado "sólido" se produce cuando las partículas se mueven juntas; el movimiento relativo entre las mismas es bajo. En este estado, el amortiguamiento granular llega a su máximo. El estado "fluido" se caracteriza por la formación de patrones de convección granular. Finalmente, el estado "gaseoso" se corresponde con el movimiento caótico y descorrelacionado de las partículas individualmente.

Chen *et al.* [32] usaron simulaciones a través del método de elementos discretos (DEM - por sus siglas en inglés) para encontrar la importancia relativa de la fricción. Los autores muestran que con partículas muy pequeñas la mayor energía es disipada a través de la fricción, pero a medida que aumenta el tamaño de las partículas la disipación de energía a través de impactos se hace más importante.

Saeki [33] utilizó la misma técnica de simulación para estudiar el comportamiento de un sistema de un grado de libertad sometido a vibraciones armónicas horizontales provisto de un amortiguador de partículas. A través de un sistema experimental realizó la validación de los resultados de simulación. El autor muestra que la relación de masa, el tamaño de las partículas y las dimensiones del recipiente tienen gran influencia en la eficacia de la amortiguación granular. Posteriormente [34] extendió estos estudios a sistemas con varios amortiguadores de partículas similares acoplados en paralelo sobre la estructura vibrante.

Por otro lado, resultados en sistemas de múltiples grados de libertad demuestran que el primer modo de vibración puede ser efectivamente controlado por un amortiguador de partículas bien diseñado. Sin embargo, los modos más altos son afectados por otros parámetros (por ejemplo, el lugar de excitación primaria) [35]. Los autores de este trabajo concluyen que debido al cambio en la respuesta modal de la estructura, es decir, al cambio en el movimiento en la zona donde se encuentra el amortiguador de partículas, la eficiencia de amortiguación en los distintos modos puede variar.

Inspirados en simulaciones numéricas y resultados experimentales, Fang y Tang [36] desarrollaron un modelo analítico, basado en la teoría de flujos multi-fásicos, que puede predecir la eficiencia de un amortiguador de partículas. El modelo puede evaluar cuantitativamente la disipación de energía del amortiguamiento granular.

El comportamiento de amortiguadores de partículas formados por un recinto con

geometría cilíndrica ha sido estudiado por Liu *et al.* [37]. En este trabajo se ha demostrado que la amortiguación depende en gran medida del nivel de respuesta. Un proceso de atascamiento-deslizamiento (stick-slip) se observó a partir de las funciones de respuesta en frecuencias (FRF) medidas en los experimentos a diferentes niveles de respuesta. Este proceso revela que la energía es disipada principalmente por la fricción entre las partículas y entre las partículas y las paredes del recinto. Los investigadores también presentan un modelo de amortiguamiento viscoso equivalente para caracterizar el comportamiento no lineal de los amortiguadores granulares.

Por otro lado, Wong y Rongong [38] intentaron controlar el comportamiento no lineal, con el fin de asegurar que el amortiguador opere en una zona de alta amortiguación. Los autores muestran que esto puede lograrse mediante la modificación del estado granular dentro del recinto. Una gran variedad de formas para lograr este objetivo fueron consideradas, las cuales incluyeron la aplicación de campos magnéticos, el aumento de la presión del aire contenido (bolsas de aire) o la inserción de gomas en el espacio libre.

Bai *et al.* [39] han estudiado, a través de simulaciones numéricas por el DEM, dos tipos distintos de amortiguadores de partículas. Por un lado, partículas metálicas o cerámicas, en una cavidad sujeta al sistema vibrante primario y por otro lado un amortiguador que consiste en un pistón de empuje que se mueve dentro de una cama de partículas conectado directamente a la estructura vibrante. Ellos han estudiado las distintas formas de disipación de energía y han mostrado en qué momentos y bajo qué condiciones la disipación de energía encuentra el máximo en sus sistemas.

Para el amortiguador de tipo pistón, Bai *et al.* muestran que la energía se disipa principalmente cuando el pistón baja insertándose en la cama de granos (en medio ciclo del movimiento). Además encuentran que la transferencia de energía es localizada, es decir, sólo las partículas que están directamente en contacto con el pistón están involucradas en la transferencia de energía. Por otro lado, para el tipo convencional de amortiguador (recinto con partículas granulares), la energía se transfiere cuando las partículas chocan contra el piso y/o contra el techo de la caja.

Continuando con las investigaciones sobre el nuevo diseño de pistón propuesto, los mismos autores [40] realizan un estudio experimental y de simulación numérica para analizar el comportamiento del amortiguador cuando se varían las propiedades del material, el tamaño de las partículas, la geometría del dispositivo, y el nivel de excitación. En el artículo se muestra que la eficiencia de amortiguación es altamente dependiente del coeficiente de fricción de los granos, mientras que el coeficiente de restitución no tiene una influencia importante en el comportamiento. Este es el primer trabajo publicado estudiando un modelo alternativo de amortiguación granular y las simulaciones presentadas fueron comparadas y validadas experimentalmente.

Yang [41, 42] realizó varios análisis experimentales detallados de los amortiguadores de partículas donde investigó el efecto de la amplitud, la frecuencia de excitación, el

tamaño del "gap", el tamaño de las partículas y la relación de masas sobre la eficiencia de la amortiguación granular. En este trabajo se obtuvieron curvas maestras para el diseño de amortiguadores.

Marhadi y Kinra [43] demostraron experimentalmente que el amortiguamiento granular es insensible al tipo de material cuando se utilizan granos y sensible cuando se utilizan polvos. Los resultados experimentales presentados indican que un modelo avanzado de un amortiguador de partículas debe considerar el tamaño y el número de granos como parámetros independientes y eliminar la restricción de que todas las partículas se muevan como una sola masa densa de material.

Recientemente, Bannerman *et al.* [44] han estudiado experimentalmente el comportamiento de los amortiguadores de partículas en micro gravedad. Para esto, utilizaron un avión Airbus A300 modificado para llevar a cabo vuelos parabólicos donde en cada descenso se logra una condición de gravedad cero (0.00 ± 0.05 g). Sus resultados demuestran, por comparación con simulaciones numéricas en donde el coeficiente de fricción es considerado nulo, que la disipación por fricción en micro gravedad no es tan importante como en los sistemas influenciados por el campo gravitatorio. Los experimentos se ajustan perfectamente a los datos simulados y se presenta una ecuación para optimizar el gap y lograr la mejor eficiencia de amortiguación granular.

Por otro lado, Lu *et al.* [45] realizaron un estudio paramétrico por simulación de amortiguadores de partículas con poca cantidad de granos (entre 1 y 128). Los resultados obtenidos muestran distintas características de comportamiento ante la variación de parámetros cuando el número de partículas en el recinto es bajo.

Teniendo en cuenta la gran cantidad de posibles aplicaciones en máquinas rotantes, resulta importante estudiar estos sistemas con la acción de altas cargas centrífugas. En este contexto, muy pocos trabajos fueron publicados. Por ejemplo Bhatti y Yanrong [46] presentaron un modelo simplificado y demostraron que si bien bajo cargas laterales la dependencia de la eficiencia del sistema es elevada en relación al tipo y tamaño del recinto, bajo la acción de cargas centrífugas esta dependencia es muy débil. Por otro lado, Els [47] presenta un estudio detallado, basado en DEM y experimentación, de una viga en voladizo sometida a fuerzas centrífugas provista de un amortiguador de partículas en su extremo libre. El autor concluye que existen dos zonas, una de mayor capacidad de amortiguación y una de menor capacidad de amortiguación. Estas zonas dependen de la relación entre el pico de aceleración de la vibración y la carga centrífuga aplicada. Además, el mecanismo de disipación por fricción es predominante y la relación longitud/diámetro del receptáculo y el tamaño de las partículas tienen gran influencia en el comportamiento del sistema.

El rango de aplicación de los amortiguadores de partículas es muy amplio. Panosian [48] ha realizado agujeros en la entrada de oxígeno líquido del motor principal de un transbordador espacial. En dicha zona, las altas amplitudes de vibración producían

la formación de grietas. Fueron perforados y llenados parcialmente con partículas metálicas de diferentes tamaños y materiales cuatro agujeros de 1 mm. Prácticamente no se modifica el diseño de la entrada de oxígeno y se logró un aumento del 25 % en la amortiguación. Esta aplicación demuestra la gran eficacia del amortiguador de partículas en condiciones hostiles de funcionamiento.

Li *et al.* [49] utilizan amortiguación granular para reducir las vibraciones de una turbobomba. El comportamiento de la amortiguación es analizado a través de un coeficiente de amortiguamiento estructural equivalente. Los resultados numéricos muestran que el amortiguador puede reducir la vibración de la turbobomba de manera significativa, y tiene muy pocos efectos sobre las características dinámicas de la misma. Por su parte, Ehr Gott *et al.* [50] aplican el método de elementos finitos para cuantificar el amortiguamiento por partículas disipativas en turbobombas de alta potencia para suministro de combustible a los motores de cohetes. Fue utilizado un modelo armónico de simetría axial para estimar el aumento de amortiguamiento modal que se produce mediante la adición de partículas en la cavidad de un sello.

Una aplicación particular de los amortiguadores de partículas se basa en su capacidad para reducir el ruido. Xu *et al.* [51] utilizaron esta técnica para reducir el ruido de una maquina contadora de billetes de escritorio. Con la amortiguación granular lograron una reducción de 6 dBA y la aceptación del producto para funcionar en un ambiente de oficina. Panossian [52] intercaló partículas granulares entre dos láminas de cobre utilizadas para atenuar el ruido e informó que la atenuación acústica alcanzó 5 dB en bajas frecuencias y 27 dB en altas frecuencias.

En general, los amortiguadores de impacto y de partículas se han utilizado en una amplia variedad de otras aplicaciones. Estas incluyen, antenas [53], señalizaciones [54], tecnología de vehículos [55], dispositivos en la industria del petróleo [56] y medicina [57].

Muchos trabajos se han realizado sobre el comportamiento general de los amortiguadores de partículas, un sumario de las principales conclusiones se detalla a continuación:

- Existe una aceleración del sistema primario mínima, debajo de dicha aceleración el amortiguador de partículas deja de ser eficaz.
- Los amortiguadores de partículas sometidos a excitaciones armónicas cuentan con una altura óptima del recinto para la cual se logra la mejor eficiencia de amortiguación.
- El punto de mayor amortiguación se logra cuando las partículas colisionan en contrafase con el recinto de contención y la velocidad relativa se maximiza. En este caso, se dan dos impactos por periodo de excitación.

- El recinto de contención óptimo depende del número de partículas y del tamaño de las mismas.
- El mecanismo de mayor disipación (fricción o colisiones inelásticas), dependerá del tamaño y número de partículas en el recinto de contención.
- Al insertar partículas en una estructura vibrante, la frecuencia natural del sistema se moverá desde una frecuencia máxima (sin las partículas) hasta una mínima (con las partículas) conforme se reduce el gap.
- En frecuencias de excitación cercanas a la resonancia, la aceleración de la gravedad deja de influenciar al sistema granular.
- Con un diseño adecuado del dispositivo es posible obtener una atenuación eficiente del primer modo de vibración, sin embargo es necesario considerar las condiciones externas (por ejemplo, posición de excitación externa) y no solo el diseño para amortiguar modos elevados.
- Existen 3 estados de movimiento granular. En el estado solido se produce la amortiguación más eficiente.

1.2. Alcances y objetivos

La eficiencia del amortiguador de partículas depende de muchos parámetros del sistema tales como dimensiones y forma del recinto; cantidad, forma, tamaño y material de las partículas; frecuencia y amplitud de excitación; entre otros. Además, debido a las fuerzas de interacción entre las partículas (colisiones inelásticas y fricción) el comportamiento muestra un gran nivel de no linealidad y complejidad. Aunque muchos esfuerzos teóricos y experimentales se hayan realizado en los últimos 20 años, muchos resultados de esos estudios están estrechamente vinculados a las condiciones particulares elegidas para el sistema en estudio.

El mecanismo de amortiguamiento granular involucra la cooperación del movimiento de todas las partículas dentro del recipiente de contención. No se ha investigado aún con detalle la eficiencia de dicho mecanismo en los distintos tipos de dispositivos, así como sus semejanzas, sus diferencias y las ventajas de unos con respecto a otros.

Los objetivos principales de las investigaciones de esta tesis son:

- *Analizar de manera exhaustiva el comportamiento de los amortiguadores de vibraciones mecánicas compuestos de partículas disipativas a través de un estudio sistemático, mediante técnicas computacionales, de los siguientes parámetros intervinientes: tamaño de las partículas, densidad, coeficiente de restitución, coeficiente de fricción y tamaño del recinto.*

- *Explicar, de manera detallada los distintos fenómenos que se presentan en la interacción cooperativa de las partículas granulares disipativas y que tienen influencia en el comportamiento de la amortiguación de vibraciones.*
- *A través del análisis exhaustivo de las características propias de los amortiguadores de partículas disipativas, presentar consideraciones más detalladas de los mecanismos de disipación para el diseño y análisis de estos dispositivos.*

1.3. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se presentan los distintos modelos de simulación utilizados para realizar las investigaciones. Los tres modelos usados son analizados en detalle y se describen los distintos métodos utilizados para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales que rigen su movimiento. Para los sistemas con amortiguación granular, se presenta el DEM en conjunto con los algoritmos de búsqueda de colisiones y los esquemas de fuerzas de interacción macroscópicos aplicables para cada caso. A su vez, se presenta una descripción general sobre procedimientos libres de singularidad para resolver numéricamente las rotaciones de las partículas en la última sección de este capítulo.

En el Capítulo 3 se estudian los parámetros intervinientes para lograr una eficiencia óptima de amortiguación. Se analiza la influencia de distintos factores como el número de partículas y las dimensiones de la caja y se presenta una metodología para obtener el "gap" óptimo sobre la base de la masa efectiva del sistema de partículas. A su vez, se describen corrimientos no monótonos de la frecuencia natural del sistema como función del "gap" y se analizan sus consecuencias para el diseño de estos amortiguadores.

El comportamiento no lineal interno del amortiguador óptimo se presenta en el Capítulo 4. Teniendo en cuenta el análisis lineal de señales, la reconstrucción del espacio de fase, el análisis de las secciones de Poincaré y la determinación de los máximos exponentes de Lyapunov, se caracteriza el movimiento del sistema granular en el interior del recinto para un amplio rango de frecuencias. Se encuentran movimientos regulares y caóticos de la cama granular y se analiza la influencia de los mismos en la amortiguación.

El Capítulo 5 está dedicado a estudiar los mecanismos de disipación presentes en los amortiguadores de partículas. Estudiando las interacciones macroscópicas entre los granos y entre los granos y las paredes del recinto de contención se encuentra un comportamiento universal del amortiguador frente a las propiedades materiales. Se presentan las zonas de aplicación del comportamiento universal y un modelo simple, de una única partícula con restitución cero, que permite diseñar/analizar los amortiguadores en el punto óptimo de funcionamiento.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones y las líneas futuras de investigación.

MARCO TEÓRICO Y DE SIMULACIÓN

Todas las investigaciones sobre el comportamiento cuantitativo y cualitativo de los amortiguadores de partículas disipativas en este trabajo se han realizado a través de técnicas computacionales. Se han implementado distintos modelos numéricos con el fin de caracterizar al amortiguamiento granular en función de distintos parámetros del sistema.

En las siguientes secciones se presentan los modelos implementados y los algoritmos y métodos usados para estudiar su comportamiento mecánico.

2.1. Presentación de los modelos estudiados

En esta sección se describirán los tres modelos utilizados en esta tesis para estudiar el amortiguamiento granular. En la Sección 2.1.1 se presenta un modelo de referencia que carece de amortiguador granular y consiste simplemente en un sistema masa - resorte - amortiguador viscoso. Dicho sistema servirá de base para realizar estudios comparativos y para evaluar la eficiencia cuando al modelo se le incorpora un amortiguador de partículas.

En la Sección 2.1.2 se presenta un modelo que adiciona al sistema de referencia un amortiguador de partículas. En este modelo el movimiento de los granos o partículas dentro de una cavidad se calcula usando el DEM.

Finalmente, en la Sección 2.1.3 se presenta un modelo simplificado, donde la cama granular es simulada por una única partícula. En este sistema, las colisiones se modelan a través de un coeficiente de restitución efectivo e .

2.1.1. Sistema de referencia con un grado de libertad

Antes de presentar los modelos de amortiguador granular usados en esta tesis debemos presentar el sistema básico de un grado de libertad que nos servirá de referencia. El mismo es un sistema vibrante, formado de una masa M , un resorte con rigidez K y un

amortiguador viscoso con coeficiente de amortiguación C , que se encuentra excitado por la base con un movimiento armónico (ver Fig. 2.1) . Este modelo cuenta con solución analítica [58]. Si bien la deducción se encuentra en muchos libros de texto, se presenta a continuación por completitud.

Se considera que el sistema es excitado con un movimiento armónico de tipo:

$$u(t) = U \cos(\Omega t). \quad (2.1.1)$$

donde U es la amplitud del movimiento de base y Ω la frecuencia de excitación.

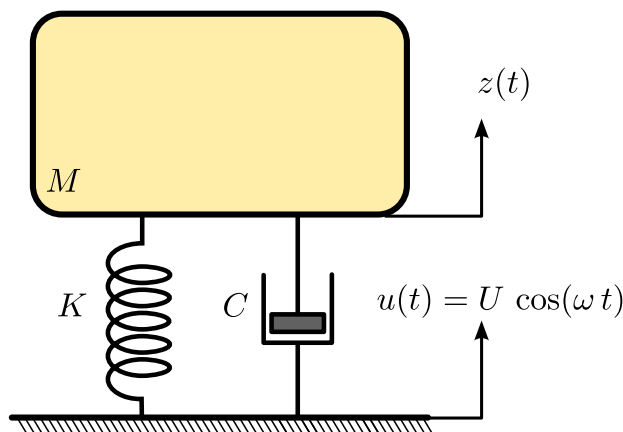


Figura 2.1: Sistema de un grado de libertad sin amortiguación granular. Aquí, $z(t)$ es la respuesta del sistema, M es la masa del mismo, K la rigidez del resorte y C el coeficiente de amortiguamiento viscoso. El sistema se encuentra excitado armónicamente por la base con un movimiento $u(t)$.

Al ser un sistema de un único grado de libertad, conocer el movimiento $z(t)$ de la masa, permite describir completamente el comportamiento del sistema. Así, planteando la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema será:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = C\dot{u}(t) + Ku(t). \quad (2.1.2)$$

El movimiento del sistema estará compuesto por una respuesta transitoria, la cual desaparecerá con el tiempo, más una solución estacionaria. Es decir, $z(t) = z^h(t) + z^p(t)$, donde $z^h(t)$ es la solución homogénea y $z^p(t)$ la solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea (2.1.2) con coeficientes constantes .

Haciendo el segundo miembro de la Ec. (2.1.2) igual a cero, la ecuación diferencial homogénea será:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = 0. \quad (2.1.3)$$

Si se asume una solución del tipo $z(t) = Ae^{st}$, donde A y s son constantes indeter-

minadas, la ecuación característica del sistema vendrá dada por:

$$Ms^2 + Cs + K = 0, \quad (2.1.4)$$

cuyas raíces serán:

$$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M} = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}. \quad (2.1.5)$$

Si se define $\xi = \frac{C}{C_c}$ como la relación de amortiguamiento, donde $C_c = 2M\sqrt{\frac{K}{M}}$ es el amortiguamiento crítico del sistema y $\Omega_0 = \sqrt{K/M}$ la frecuencia natural del sistema no amortiguado, se tiene:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \Omega_0. \quad (2.1.6)$$

Debido a que en los sistemas de interés para este trabajo $\xi \ll 1$, con lo cual $(\xi^2 - 1)$ es negativo, las raíces de la ecuación característica serán imaginarias:

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \Omega_0 = -\frac{C}{2M} \pm i\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}. \quad (2.1.7)$$

Estas raíces dan dos soluciones para la Ec. (2.1.3) homogénea del sistema:

$$z_1^h(t) = A_1 e^{s_1 t}; \quad z_2^h(t) = A_2 e^{s_2 t}. \quad (2.1.8)$$

Así, la solución general de la ecuación homogénea (2.1.3) estará dada por:

$$z^h(t) = z_1^h(t) + z_2^h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (2.1.9)$$

y la solución del sistema libre, sin excitación de base, será:

$$z^h(t) = A_1 e^{\left(-\frac{C}{2M} + i\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{C}{2M} - i\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}\right)t}, \quad (2.1.10)$$

ó

$$z^h(t) = Z_0 e^{-\frac{C}{2M}t} \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} t - \phi_0\right), \quad (2.1.11)$$

donde $(A_1; A_2)$ [o de forma equivalente $(Z_0; \phi_0)$] son constantes que deben ser obtenidas a partir de las condiciones iniciales que se imponen sobre la posición $z(t = 0)$ y la velocidad $\dot{z}(t = 0)$.

Obtenida la solución homogénea, la solución particular se desarrolla a continuación.

Introduciendo la Ec. (2.1.1) en la Ec. (2.1.2), la ecuación diferencial que rige el sistema puede ser expresada de la siguiente manera:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = -\Omega CU \sin(\Omega t) + KU \cos(\Omega t). \quad (2.1.12)$$

Con lo cual se obtienen dos términos no homogéneos. Por lo tanto, es posible encontrar dos soluciones particulares separadas para la ecuación diferencial (una por cada término) y así la solución particular total será $z^p(t) = z_1^p(t) + z_2^p(t)$. Las ecuaciones para cada término inhomogéneo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = KU \cos(\Omega t), \quad (2.1.13)$$

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = -\Omega CU \sin(\Omega t). \quad (2.1.14)$$

Considerando que la solución de la Ec. (2.1.13) es de la forma:

$$z_1^p(t) = Z_1 \cos(\Omega t - \theta_1), \quad (2.1.15)$$

donde Z_1 y θ_1 son constantes a determinar, y reemplazando la solución (2.1.15) en la Ec. (2.1.13), con el uso de identidades trigonométricas, se obtiene:

$$z_1^p(t) = \frac{KU \cos(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}}. \quad (2.1.16)$$

De la misma manera, una solución posible para la Ec. (2.1.14) es de la forma:

$$z_2^p(t) = Z_2 \sin(\Omega t - \theta_2), \quad (2.1.17)$$

donde también Z_2 y θ_2 son constantes a determinar. Reemplazando la Ec. (2.1.17) en la Ec. (2.1.14) se obtiene:

$$z_2^p(t) = -\frac{\Omega UC \sin(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}}. \quad (2.1.18)$$

La solución particular $z^p(t)$ completa del sistema estará dada por:

$$z^p(t) = \frac{KU \cos(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}} - \frac{\Omega UC \sin(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}}. \quad (2.1.19)$$

Finalmente, la solución completa del sistema, será la suma de la Ec. (2.1.11) y la Ec.

(2.1.19). Así:

$$z(t) = z^h(t) + z^p(t) = Z_0 e^{-\frac{C}{2M}t} \cos \left(\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} t - \phi_0 \right) + \frac{KU \cos(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}} - \frac{\Omega UC \sin(\Omega t)}{\sqrt{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}}. \quad (2.1.20)$$

Dado que la respuesta transitoria decae con el tiempo [ver primer término de la Ec. (2.1.20)], la amplitud máxima de oscilación en régimen estacionario será:

$$Z = U \sqrt{\frac{K^2 + (C\Omega)^2}{(K - M\Omega^2)^2 + (C\Omega)^2}}. \quad (2.1.21)$$

La Ec. (2.1.21) será utilizada como FRF de referencia con el fin de lograr comparaciones con el sistema provisto de un amortiguador de partículas y para ajustar curvas donde sea necesario obtener amortiguamientos efectivos.

2.1.2. Amortiguador de partículas

Se ha considerado un modelo de un grado de libertad, mostrado en la Fig. 2.2, sometido a un movimiento de base armónico. La Fig. 2.3 muestra varias instantáneas de una de las simulaciones realizadas usando el DEM que se describe en la Sección 2.2. El sistema primario (sin considerar las partículas en el recinto) consta de masa M , rigidez K y amortiguamiento estructural viscoso C . El campo gravitacional $g = 9.8 \text{ms}^{-2}$ es considerado en la dirección negativa sobre el eje vertical.

A dicho sistema se le ha añadido un amortiguador de partículas disipativas. Las partículas se han modelado esféricas y cuentan con una masa total m_p . N partículas de radio R_i son colocadas en el interior de un recinto de contención, donde las dimensiones están dadas por $(L_x \times L_y \times L_z)$. Al igual que en el modelo de la sección precedente, la excitación de base es $u(t) = U \cos(\Omega t)$. Distintas características materiales de las partículas y parámetros de la simulación se usarán a lo largo de este trabajo. En cada sección se especificarán los valores correspondientes. Antes de iniciar el movimiento de la base, las partículas se depositan en el fondo del recipiente. La colocación de las mismas, en el fondo del recinto, se realiza dejando caer a las partículas desde posiciones iniciales en un arreglo regular del tipo cúbico centrado en las caras (FCC por sus sigas en inglés) [59].

La ecuación diferencial para el sistema total (sistema primario más amortiguador granular) es:

$$M\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = C\dot{u}(t) + Ku(t) + F_{granular}^z, \quad (2.1.22)$$

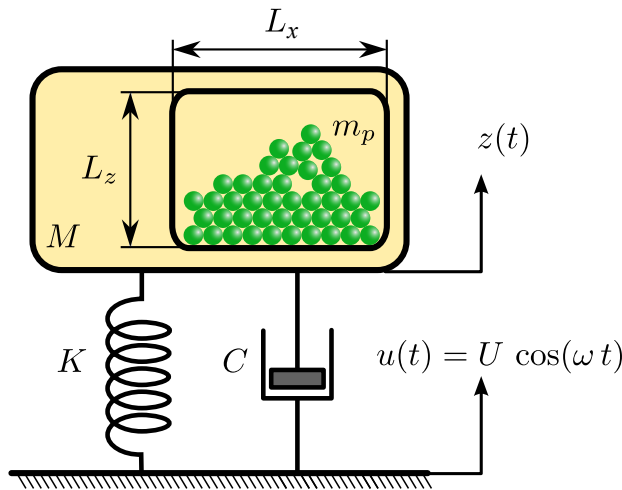


Figura 2.2: Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento granular. Los símbolos son equivalentes a los de la Fig. 2.1. m_p es la masa total de las partículas en la cavidad. L_z es la altura del recinto de contención y L_x el ancho del mismo.

donde $z(t)$ es medido desde la posición de equilibrio estático y $F_{granular}^z$ es la fuerza total ejercida por las partículas sobre las paredes del recinto en la dirección vertical z . En cada paso de tiempo δt de la simulación, $F_{granular}^z$ es calculada a partir de las interacciones macroscópicas de contacto entre el recipiente y las partículas en su interior. Si bien las partículas ejercen fuerzas en todas las direcciones al contactar las paredes del recinto (los granos se mueven libremente en el espacio tridimensional del recinto de contención), sólo la contribución en la dirección vertical es insertada en el sistema de un grado de libertad considerado por la Ec. (2.1.22).

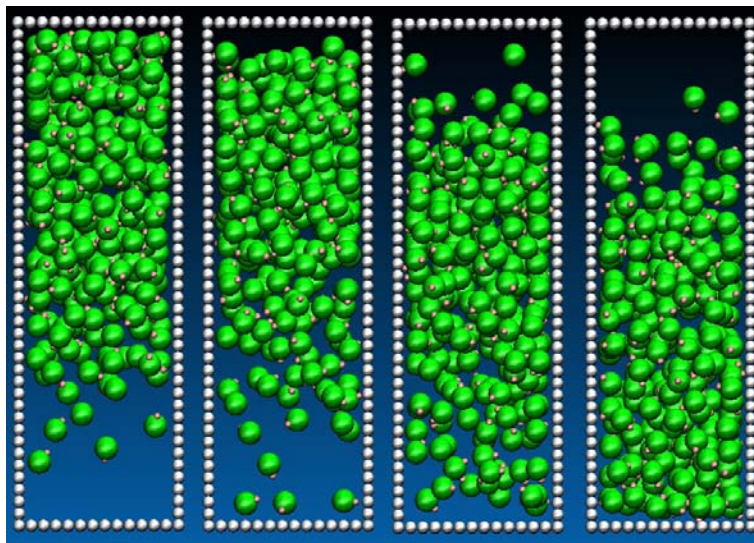


Figura 2.3: Instantáneas de una simulación del amortiguador de partículas.

Detalles de la implementación del método numérico usado, como así también del cálculo de las fuerzas de interacción, de las energías de disipación y de la resolución final de la Ec. (2.1.22) se presenta en la Sección 2.2. Las secciones principales del código de cálculo desarrollado en lenguaje C se presenta, en forma detallada, en el Apéndice A.

2.1.3. Amortiguador de impacto

Finalmente, se ha implementado un tercer modelo con el fin de simplificar el cálculo de los amortiguadores de partículas en posibles aplicaciones. En este sistema se considera que una partícula única puede simular, bajo ciertas condiciones y en forma efectiva, el comportamiento de toda la cama granular. El modelo planteado se representa esquemáticamente en la Fig. 2.4.

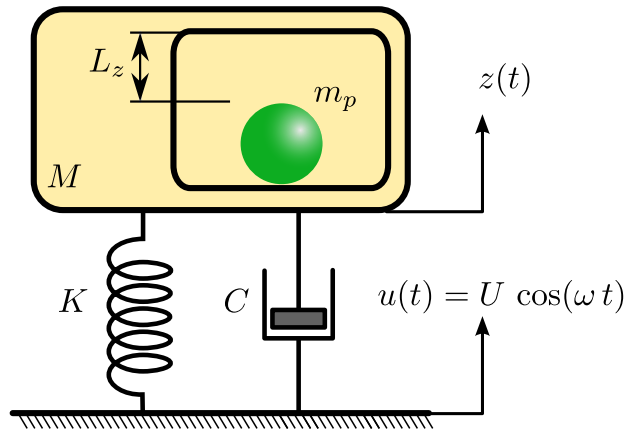


Figura 2.4: Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento granular simplificado. Los símbolos son equivalentes a los de la Fig. 2.1. m_p es la masa de la partícula en la cavidad y L_z es la altura del recinto de contención.

Al igual que en el modelo del amortiguador de partículas (ver Sección 2.1.2), el sistema se encuentra sometido a un movimiento de base $u(t) = U \cos(\Omega t)$. Dado que se pretende modelar en forma efectiva toda la cama granular, tal como lo plantean Friend y Kinra [29], se usa un coeficiente efectivo de restitución e para la partícula única. El mismo caracteriza los impactos entre el recinto de contención y la partícula. El sistema primario y el amortiguador están sometidos a la aceleración de la gravedad $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ en dirección vertical negativa.

Para calcular las posiciones, velocidades y aceleraciones de la caja y de la partícula se utilizó un algoritmo híbrido DEM - Dinámica de colisiones [60]. Como se verá en la Sección 2.2, el DEM requiere del cálculo de las fuerzas de interacción entre los cuerpos que colisionan para establecer las aceleraciones correspondientes después del impacto. En este modelo híbrido no se resuelven las fuerzas, si no que se establecen directamente

las velocidades después de la colisión teniendo en cuenta la ley de conservación de la cantidad de movimiento y la definición del coeficiente de restitución.

El coeficiente de restitución para la colisión entre la partícula y el recinto, se define como:

$$e = -\frac{(v_p^+ - v_z^+)}{(v_p^- - v_z^-)}, \quad (2.1.23)$$

donde v_p^- y v_p^+ son las velocidades de la partícula antes y después del impacto y v_z^- y v_z^+ las velocidades del recinto de contención antes y después del choque respectivamente.

Aplicando la ley de conservación del momento lineal,

$$Mv_z^+ + m_p v_p^+ = Mv_z^- + m_p v_p^-, \quad (2.1.24)$$

y la definición (2.1.23), las velocidades después del impacto resultan ser:

$$v_z^+ = \frac{(1 - e(\frac{m_p}{M}))v_z^- + \frac{m_p}{M}(1 + e)v_p^-}{(1 + \frac{m_p}{M})}, \quad (2.1.25)$$

$$v_p^+ = \frac{(1 - e)v_z^- + (\frac{m_p}{M} - e)v_p^-}{(1 + \frac{m_p}{M})}. \quad (2.1.26)$$

Durante los periodos de tiempo en los cuales la partícula se encuentra en vuelo, el movimiento del sistema primario es equivalente al movimiento del sistema de referencia (ver Sección 2.1.1). Por otro lado, cuando la partícula permanece en contacto con el piso o el techo del recinto, el movimiento del sistema primario es equivalente al del sistema de referencia pero con una masa efectiva $M_{ef} = M + m_p$.

La simulación se resuelve a trozos de la siguiente manera:

- (a) Durante los periodos de tiempo en los cuales la partícula se encuentra en vuelo o en contacto continuo con el recinto, el movimiento se resuelve mediante DEM con la siguiente ecuación:

$$M_{ef}\ddot{z}(t) + C\dot{z}(t) + Kz(t) = C\dot{u}(t) + Ku(t), \quad (2.1.27)$$

donde $M_{ef} = M$ cuando la partícula se encuentra en el aire y $M_{ef} = M + m_p$ cuando la misma está en contacto con el sistema primario. Por lo tanto, la aceleración de la partícula será igual a la aceleración de la gravedad cuando la misma se encuentre en vuelo e igual a la aceleración de la estructura primaria cuando esté en contacto con el contenedor.

- (b) Cuando \ddot{z} cae por debajo de $-g$, estando la partícula en contacto con el piso del recinto, el grano perderá contacto con el recipiente. De la misma manera, si \ddot{z} supera $-g$, estando la partícula en contacto con el techo del recinto, nuevamente el grano

perderá contacto con el sistema primario. En ambos casos, su aceleración pasará a ser igual a la de la gravedad ($a_p = -g$).

- (c) Finalmente, cuando la partícula se encuentra en vuelo y se produce una colisión con el recinto, se calculan las velocidades después del impacto según las Ecs. (2.1.25) y (2.1.26). En este punto se define si el grano se mantendrá en contacto o si saldrá despedido en función de las aceleraciones y se retoma el cálculo con la Ec. 2.1.27 con la M_{ef} correspondiente.

El código de cálculo, desarrollado en MatLab[®] se presenta, en forma detallada, en el Apéndice B.

2.2. El método de elementos discretos - DEM

2.2.1. Orígenes y aplicaciones

El DEM consiste en un esquema numérico que permite calcular rotaciones y desplazamientos finitos de cuerpos rígidos (avanzando a intervalos cortos de tiempo δt)¹, donde ocurren, a medida que progresa el ciclo de cálculo, la pérdida y formación de contactos entre los cuerpos (partículas). Así, es posible el cálculo de las posiciones, velocidades y aceleraciones, tanto de traslación como de rotación, de las partículas instante a instante. Es entonces posible con esta información calcular los intercambios de energías en juego dentro del sistema en estudio. Dicho método es particularmente adecuado para modelar materiales granulares. Esta técnica es en esencia la misma que se usa en simulaciones de sistemas moleculares y que es conocida con el nombre de Dinámica Molecular.

Cundall y Strack [62] originaron el concepto del DEM y lo aplicaron para modelar el comportamiento de suelos bajo condiciones de cargas dinámicas. Desde su inicio, esta técnica se ha adaptado para modelar una variedad de sistemas físicos.

Desde el punto de vista industrial, la simulación de partículas con el DEM ofrece la oportunidad de comprender mejor la dinámica fundamental de los flujos en los sistemas compuestos de materia granular. A través de este tipo de simulaciones se pueden realizar estudios que permitan un mejor diseño de equipos para almacenamiento y transporte de medios granulares, tales como silos, cintas transportadoras, mezcladoras, molinos, entre otras.

En las últimas décadas, el DEM ha crecido en popularidad y se ha utilizado para el estudio de numerosos problemas [63]. Así por ejemplo, Venugopal y Rajamani [64] estudiaron a través de esta metodología el proceso de carga de molinos, donde la compleja dinámica es un problema difícil de encarar teórica y experimentalmente. Por su parte,

¹ δt es típicamente $t_s/100$, donde t_s es el tiempo de duración de una colisión [61].

Cleary [65] presenta distintos estudios de procesos industriales (separación de partículas, transporte de mezclas y excavación) modelados a partir del DEM.

Finalmente, desde el punto de vista de la amortiguación granular que aquí nos interesa, existen varios trabajos utilizando este método (ver por ejemplo las Refs. [34, 39, 66]).

2.2.2. Marco teórico

El algoritmo clásico introducido por Cundall y Strack [62] consta de dos fases. En la primera fase, las fuerzas de interacción se calculan cuando dos elementos discretos (dos partículas o una pared y una partícula) se penetran ligeramente entre sí. Si bien, no parece apropiado que dos partículas se penetren, desde el punto de vista físico, esta penetración representa la deformación relativa de las capas superficiales del material de las partículas. La interacción macroscópica entre las partículas¹ "blandas", que se penetran entre si, se basa en modelos semi-empíricos que se presentan en la Sección 2.2.3.

En la segunda etapa del DEM, para obtener el movimiento debido a las fuerzas calculadas en la primera fase, se utiliza la segunda ley de Newton. Esta es integrada con respecto al tiempo para calcular las nuevas velocidades y nuevas posiciones de cada partícula. El proceso se repite, avanzando en pequeños pasos de tiempo δt , hasta construir una trayectoria de cada partícula tan larga como sea necesario para el estudio en cuestión.

La segunda ley de Newton es aplicada a las coordenadas del centro de masa y a los ángulos de Euler (que definen la orientación) de cada partícula individual i :

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} + g, \quad (2.2.1)$$

$$\ddot{\vec{\varphi}}_i = \frac{\vec{M}_i}{I_i}, \quad (2.2.2)$$

donde \vec{r}_i y $\vec{\varphi}_i$ son el vector posición y orientación de la partícula i respectivamente. La fuerza \vec{F}_i y el torque \vec{M}_i resultantes, que actúan sobre la partícula i de masa m_i y momento de inercia I_i , estarán dados por la suma de las interacciones de los pares de partículas (interacción de la partícula i con cada partícula j en contacto con ella)²:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}, \\ \vec{M}_i &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{M}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

¹En todos los casos, las simulaciones se han realizado con partículas esféricas en 3D. Además, con el fin de mejorar la eficiencia de las simulaciones, las paredes del recinto de contención se han modelado también con esferas de radio extremadamente grande; lo cual asegura que las paredes sean prácticamente planas a la escala de las partículas que están dentro del amortiguador.

²Si bien I_i es un tensor, se ha utilizado en todas las simulaciones partículas esféricas y por lo tanto en la Ec. 2.2.2 dicho momento de inercia es un escalar.

donde \vec{F}_{ij} y \vec{M}_{ij} son la fuerza y el torque entre cada par i, j , respectivamente.

Por lo tanto, si las fuerzas \vec{F}_{ij} y los torques \vec{M}_{ij} de las partículas se dan en función de las coordenadas de las mismas $(\vec{r}_i, \vec{\varphi}_i)$ y $(\vec{r}_j, \vec{\varphi}_j)$ y sus derivadas temporales, las ecuaciones de movimiento [Ec. (2.2.1) y Ec. (2.2.2)] pueden ser integradas numéricamente. Las leyes de la interacción son específicas del modelo de grano, y para el caso analizado en esta tesis se describirán en la Sección 2.2.3.

En síntesis, para realizar un paso de tiempo δt de la simulación se debe:

- Calcular las fuerzas y los torques aplicados a las partículas según las Ec. (2.2.3) y la Sección 2.2.3.
- Integrar las ecuaciones del movimiento [Ec. (2.2.1) y Ec. (2.2.2)].¹
- Extraer los datos de las nuevas posiciones (y orientaciones), velocidades y aceleraciones.

Al igual que un problema clásico de la mecánica del continuo, es necesaria la introducción de condiciones iniciales y de contorno. Se debe describir el comportamiento de las partículas en el límite de la zona de simulación y especificar las coordenadas y velocidades iniciales de cada partícula.

Para resolver la integración numérica de la Ec. (2.2.1) y de la Ec. (2.2.2) [incluyendo a la Ec. (2.1.22)] se ha implementado el algoritmo del "Verlet con Velocidades" (ver por ejemplo la Ref. [67]). Esto es, planteadas las condiciones de contorno e iniciales, y calculadas las nuevas aceleraciones de acuerdo con la interacción macroscópica de las partículas, se actualizan las posiciones² de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\vec{r}_i(t + \delta t) = \vec{r}_i(t) + \delta t \dot{\vec{r}}_i(t) + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{\vec{r}}_i(t). \quad (2.2.4)$$

Las velocidades serán actualizadas de acuerdo con:

$$\dot{\vec{r}}_i(t + \delta t) = \dot{\vec{r}}_i(t) + \frac{\delta t}{2} \left[\ddot{\vec{r}}_i(t) + \ddot{\vec{r}}_i(t + \delta t) \right]. \quad (2.2.5)$$

La Ec. (2.2.5) debe ser aplicada en dos partes. En primer lugar, cuando se conoce la aceleración $\ddot{\vec{r}}_i(t)$ y posteriormente, al obtener la nueva aceleración $\ddot{\vec{r}}_i(t + \delta t)$ en el siguiente instante de tiempo.

¹Para el modelo del amortiguador granular, la sumatoria de fuerzas ejercidas por las partículas $F_{granular}^z$, sobre las paredes del recinto de contención en la dirección vertical, es insertada en la Ec. (2.1.22). Esta ecuación también es integrada numéricamente con el fin de obtener la nueva posición del sistema primario de un grado de libertad.

²Dada la complejidad de la actualización de las orientaciones para simulaciones en 3D, se dedica un apartado completo para su descripción (ver Sección 2.4).

2.2.3. Interacción macroscópica de partículas

Dos partículas i y j esféricas se encuentran en contacto cuando:

$$\zeta_{ij} = R_i + R_j - |\vec{r}_i - \vec{r}_j| > 0, \quad (2.2.6)$$

donde R_i y R_j son los radios de las partículas i y j respectivamente. Cuando dos partículas colisionan, una pequeña penetración produce una fuerza repulsiva en la dirección normal \vec{n}_{ij} y una fuerza de fricción en la dirección tangencial \vec{s}_{ij} .

Las fuerzas de interacción, entre dos cuerpos al impactar pueden ser calculadas a partir de relaciones basadas en la mecánica de contacto [68]. La Fig. 2.5 muestra un esquema representativo de dos esferas en el momento de la colisión.

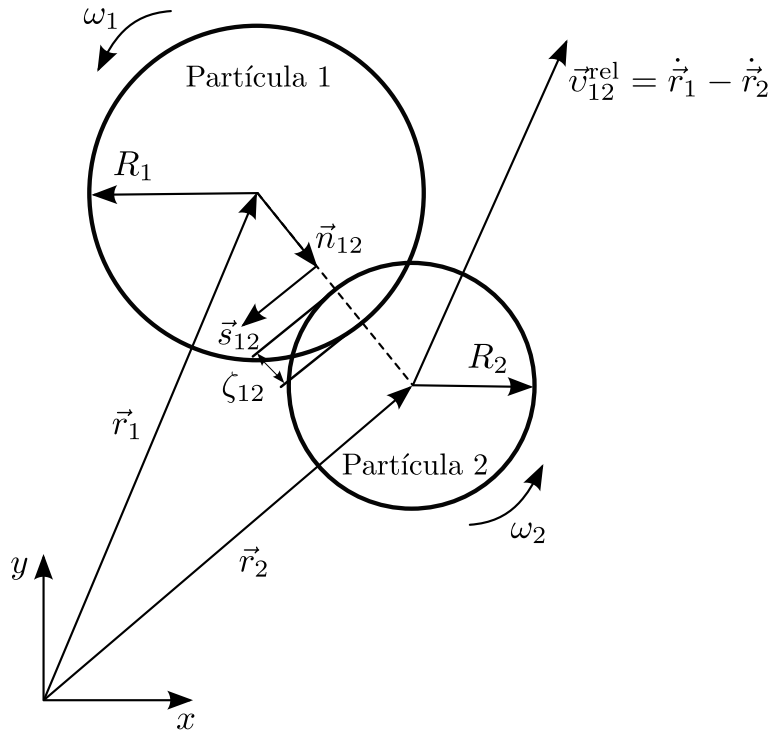


Figura 2.5: Modelo de contacto de dos partículas esféricas. \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los vectores posición, R_1 y R_2 los radios y ω_1 y ω_2 las velocidades angulares de las partículas que colisionan. Al momento del impacto la penetración es ζ_{ij} y la velocidad relativa es \vec{v}_{12}^{rel} .

Fuerza de interacción normal

La ley de fuerza normal, que se ha utilizado en este trabajo, se basa en la teoría de contacto de Hertz, la cual ha sido modificada por Kuwabara-Kono (ver Refs. [61, 69, 70]). Este esquema asegura que el coeficiente de restitución e decrezca con el aumento de la velocidad de impacto, lo cual es consistente con experimentos.

Al producirse la colisión entre dos partículas esféricas, se produce una fuerza en la dirección normal \vec{n}_{ij} de impacto:

$$\vec{n}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) / |\vec{r}_i - \vec{r}_j|. \quad (2.2.7)$$

El modulo de dicha fuerza F_n , estará dada por:

$$F_n = -k_n \zeta_{ij}^{3/2} - \gamma_n v_n \sqrt{\zeta_{ij}}, \quad (2.2.8)$$

donde ζ_{ij} , es la penetración dada por 2.2.6 y k_n es la rigidez normal, la cual se define como:

$$k_n = \frac{4}{3} E_* \sqrt{R_*}, \quad (2.2.9)$$

donde $R_*^{-1} = R_i^{-1} + R_j^{-1}$ es el radio efectivo de contacto y $E_*^{-1} = \frac{(1-\nu_i^2)}{E_i} + \frac{(1-\nu_j^2)}{E_j}$ es el modulo de elasticidad efectivo de contacto (con E_i, ν_i y E_j, ν_j los módulos de elasticidad y coeficientes de Poisson de las partículas i y j respectivamente).

Por su parte, γ_n es el coeficiente de amortiguamiento normal viscoso de contacto y v_n la componente normal de la velocidad relativa entre las dos esferas que colisionan. Si bien este modelo fue propuesto por Kuwabara-Kono, la justificación teórica del mismo se puede encontrar en la Ref. [71].

La velocidad relativa entre las partículas i y j , en el momento del impacto, esta dada por:

$$\vec{v}_{ij}^{rel} = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j. \quad (2.2.10)$$

Así, la componente normal de la velocidad relativa de impacto se puede escribir de la siguiente manera:

$$v_n = \vec{v}_{ij}^{rel} \cdot \vec{n}_{ij}. \quad (2.2.11)$$

A través de la Ec. (2.2.8), teniendo en cuenta la Ec. (2.2.11), puede ser calculada la fuerza de impacto normal F_n .

Fuerza de interacción tangencial

En la dirección tangencial, se ha modelado la fuerza de fricción F_s , entre las dos esferas en contacto, según la ley de fricción de Coulomb [61, 72]. Se ha utilizado un modelo simplificado, en el cual la fuerza de fricción toma el valor mínimo entre la fuerza elástica de corte y la fricción dinámica.

$$F_s = -\min \left(\left| \gamma_s v_s \sqrt{\zeta_{ij}} \right|, |\mu_d F_n| \right) \text{sign}(v_s), \quad (2.2.12)$$

donde γ_s es el coeficiente de amortiguamiento tangencial, v_s la componente tangencial de la velocidad entre las dos partículas en contacto y μ_d el coeficiente de fricción diná-

mica. La función signo indica que la fuerza de fricción siempre se opone a la dirección de la velocidad relativa tangencial.

Debido a que el impacto entre dos partículas puede no ser perfectamente frontal, la velocidad relativa tangencial de colisión estará dada por:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_{ij}^{rel} - \vec{v}_n, \quad (2.2.13)$$

donde \vec{v}_n es la velocidad relativa normal de impacto.

A su vez, las esferas cuentan con una velocidad de rotación propia $\dot{\vec{\varphi}}$ entorno a su centro de gravedad, por lo tanto, la velocidad de corte entre las dos partículas se puede escribir como:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_t + \left(R_i \dot{\vec{\varphi}}_i \right) \otimes \vec{n}_{ij} + \left(R_j \dot{\vec{\varphi}}_j \right) \otimes \vec{n}_{ij}. \quad (2.2.14)$$

Finalmente, el vector unitario en la dirección tangencial (dirección de actuación de la fuerza de fricción) vendrá dado por:

$$\vec{s}_{ij} = \frac{\vec{v}_s}{|\vec{v}_s|}. \quad (2.2.15)$$

2.3. Detección de colisiones

La eficiencia de cualquier software basado en DEM está determinada, principalmente, por la eficacia de realizar los cálculos de las fuerzas que actúan sobre las partículas [60]. Así, el tiempo de corrida de cada simulación depende del número N de partículas intervinientes. Para este sistema, las operaciones de cálculo necesarias para la detección de las colisiones serán de orden $O(N^2)$, lo cual demanda gran esfuerzo computacional.

Sin embargo, para sistemas con fuerzas de corto alcance sólo las partículas vecinas a una dada partícula i pueden interactuar con la misma. De esta manera, se puede conseguir una gran reducción del esfuerzo de cálculo [67], alcanzando, con distintos algoritmos, operaciones de cálculo de orden $O(N)$. La decisión en cuanto a cuáles partículas son vecinos cercanos a una dada partícula i no es trivial, ya que todos los pares de partículas cercanos tienen que ser considerados. Aun más, si sólo un par de ellas no es debidamente considerado, pueden ocurrir graves consecuencias para la validez de los resultados de la simulación.

Existen en la literatura muchos métodos para lograr mayor eficiencia de cálculo en la detección de colisiones, tanto entre partículas esféricas como de distintas formas (ver por ejemplo las Refs. [60, 67, 73, 74, 75, 76]). En este trabajo, se ha implementado el algoritmo de cuadrícula "Lattice" de $O(N)$.

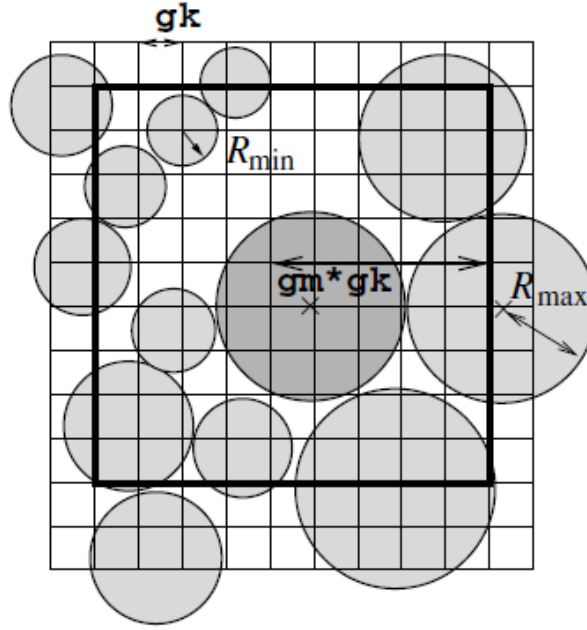


Figura 2.6: Esquema bidimensional del algoritmo de cuadrícula para detectar contactos. Los posibles contactos de la partícula más oscura se encuentran contenidos en los sitios de la red del área enmarcada. Reproducido de la Ref. [60].

2.3.1. Algoritmo de cuadrícula (Lattice)

Con el fin de implementar este algoritmo, el volumen de simulación, definido por $L_x \times L_y \times L_z$ dentro del recinto de contención, es dividido en $K_x \times K_y \times K_z$ volúmenes cúbicos idénticos (celdas). Para tal fin, se requiere que ninguna celda se encuentre ocupada por más de un centro de una partícula esférica. Consecuentemente, las aristas de cada celda no deben ser mayor a $gk = 2R_{min}/\sqrt{3}$. Este cálculo no tiene en cuenta la deformación o penetración que sufren las partículas, por lo tanto es necesario establecer una constante de red ligeramente inferior para el caso de partículas blandas. Para las simulaciones de esta tesis se estableció una constante igual a:

$$gk = 0.95 \frac{2R_{min}}{\sqrt{3}}. \quad (2.3.1)$$

La Fig. 2.6 muestra un esquema del algoritmo para un sistema simplificado en 2D. Con el fin de definir qué partícula ocupa cada posición en la cuadrícula, a cada celda se le asigna un número, el cual coincide con el índice de la partícula cuyo centro reside en su interior. En caso de no contener una partícula, a la celda se le asigna un cero.

Teniendo en cuenta que el diámetro de la partícula esférica mas grande cubre $gn = \text{int}(2R_{max}/gk)$ celdas de la red en cada dimensión, los centros de las posibles partículas a colisionar con una dada en la celda (i, j, k) estarán ubicado en las celdas $(i + l, j + m, k + n)$, con $l, m, n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm gn$. Entonces, con el fin de encontrar una posible

colisión con la partícula en la celda (i, j, k) , es necesario recorrer todas las celdas $(i \pm l, j \pm m, k \pm n)$ y comprobar si alguno de los valores contenidos en ellas es distinto de cero. Al encontrar las partículas con posible colisión para una dada, las mismas son incluidas en la lista de partículas que interactúan con la partícula en cuestión. Esta lista de interacción se construye al inicio de cada paso de tiempo δt . La complejidad del algoritmo en este proceso de construcción es $O(N)$, es decir, el número de operaciones necesario para el cálculo de las fuerzas de interacción crece linealmente con N .

2.4. Implementación de rotaciones

En esta sección se presentan los lineamientos básicos para la implementación de las rotaciones de las partículas. Detalles completos de las deducciones se pueden encontrar en el Apéndice C.

En tres dimensiones son necesarias seis coordenadas para definir la posición y orientación de las partículas. Tres coordenadas establecen la posición del centro de masa de los granos y los tres ángulos (Φ, Θ, Ψ) establecen la orientación de los mismos.

En el sistema de ejes fijo en el espacio $S^s(x, y, z)$ ¹ los momentos de inercia de las partículas son dependientes del tiempo y contienen elementos fuera de la diagonal. Al considerar el sistema principal de ejes móvil fijo con respecto al cuerpo $S^b(x', y', z')$ ², en el cual los ejes son coincidentes con los ejes principales de inercia de la partícula, el tensor de inercia \hat{I} es diagonal. Así, en este sistema se tiene:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Cualquier vector unitario e puede ser expresado en términos de los componentes tanto en S^s como en S^b . Estas componentes estarán relacionadas por la matriz de rotación A de la siguiente manera:

$$\vec{e}^b = A\vec{e}^s, \quad (2.4.2)$$

donde \vec{e}^b es el vector unitario en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo y \vec{e}^s en el sistema fijo en el espacio.

Los elementos de la matriz de rotación son los nueve cosenos directores del sistema fijo al cuerpo con respecto al sistema fijo en el espacio. Solo tres cantidades son independientes [generalmente son utilizados los tres ángulos de Euler (Φ, Θ, Ψ)] y son necesarias para definir unívocamente a la matriz A .

¹El superíndice s hace referencia al sistema fijo en el espacio a través de su terminología inglesa "space"

²El superíndice b hace referencia al sistema fijo a la partícula a través de su terminología inglesa "body"

Con la definición del "convenio x " de los ángulos de Euler, la matriz A de transformación tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Theta\sin\Psi \\ -\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\cos\Psi & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Theta\cos\Psi \\ \sin\Phi\sin\Theta & -\cos\Phi\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}. \quad (2.4.3)$$

La velocidad angular instantánea de la partícula $\vec{\omega}^s$ puede ser expresada en función de los ángulos de Euler y de sus derivadas respecto al tiempo. La rotación infinitesimal general, asociada a $\vec{\omega}^s$, puede considerarse que consiste en tres rotaciones infinitesimales sucesivas con velocidades angulares $\omega_\Phi = \dot{\Phi}$, $\omega_\Theta = \dot{\Theta}$ y $\omega_\Psi = \dot{\Psi}$ y a consecuencia de la propiedad vectorial de las rotaciones infinitesimales, el vector $\vec{\omega}^s$ puede obtenerse sumando los tres vectores velocidad angular.

De esta manera, sumando las componentes se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Psi + \dot{\Theta}\cos\Psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\Phi}\sin\Theta\cos\Psi - \dot{\Theta}\sin\Psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\Phi}\cos\Theta + \dot{\Psi}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

El sistema de ecuaciones (2.4.4) puede ser resuelto para $\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ y $\dot{\Psi}$ con el fin de obtener la evolución de los ángulos de Euler.

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= -\omega_{x'} \frac{\cos\Psi}{\sin\Theta} + \omega_{y'} \frac{\sin\Psi}{\sin\Theta}, \\ \dot{\Theta} &= \omega_{x'} \sin\Psi + \omega_{y'} \cos\Psi, \\ \dot{\Psi} &= \omega_{x'} \frac{\cos\Psi\cos\Theta}{\sin\Theta} - \omega_{y'} \frac{\sin\Psi\cos\Theta}{\sin\Theta} + \omega_{z'}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Al considerar cualquier sistema inercial, la derivada temporal del momento angular cinético es el torque exterior resultante, así, es posible escribir para el sistema S^s que:

$$\dot{\vec{L}}^s = \vec{M}^s, \quad (2.4.6)$$

donde \vec{L}^s es el momento angular cinético en el sistema de referencia fijo en el espacio y \vec{M}^s es el momento resultante de los torques exteriores. De la misma manera, es posible escribir para el sistema fijo a la partícula S^b que:

$$\dot{\vec{L}}^b + \vec{\omega}^b \otimes \vec{L}^b = \vec{M}^b. \quad (2.4.7)$$

Teniendo en cuenta que en S^b , tomando como ejes de referencia los ejes principales

de inercia de la partícula i , la relación entre \vec{L}^b y $\vec{\omega}^b$ esta dada por:

$$\dot{\vec{L}}_i^b = \hat{I}\vec{\omega}_i^b, \quad (2.4.8)$$

y que el momento de inercia es invariante en este sistema,

$$\hat{I}\dot{\vec{\omega}}_i^b + \vec{\omega}_i^b \otimes (\hat{I}\vec{\omega}_i^b) = \vec{M}^b. \quad (2.4.9)$$

Desarrollando la Ec. (2.4.9), teniendo en cuenta que para el sistema del cuerpo el tensor de inercia es diagonal, las tres ecuaciones para el movimiento de la partícula serán:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) &= M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) &= M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) &= M_3, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

donde los subíndices numéricos referencian las tres direcciones de sistema fijo en el cuerpo alineado con los ejes principales de inercia.

Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones de Euler, describen la evolución de la velocidad angular en el sistema de referencia fijo a la partícula. Las mismas pueden ser resueltas de la misma manera que las ecuaciones de Newton para el movimiento lineal. Con este fin, se calculan los torques exteriores actuantes sobre la partícula en cuestión en el sistema de referencia espacial S^s . Luego, a través de las transformaciones de vectores, se obtienen los momentos en el sistema fijo al cuerpo, con el fin de obtener la forma simple del tensor de inercia. Los torques son aplicados a las Ec. (2.4.10) con el fin de obtener las aceleraciones angulares $\dot{\omega}$ y con estas obtener las velocidades angulares correspondientes. Finalmente, las Ec. (2.4.5) son resueltas para obtener la evolución de los ángulos de Euler. Esta secuencia es resuelta, a través del método de elementos discretos, con el fin de obtener instante a instante las orientaciones de cada partícula en el sistema granular.

La implementación del algoritmo anterior presenta un serio problema. Para $\sin\Theta = 0$, las Ec. (2.4.5) presentan una singularidad. De hecho, cuando Θ se aproxima a $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$, el termino $1/\sin\Theta$ diverge y los errores numéricos crecen rápidamente. Existen diferentes algoritmos y métodos desarrollados con el fin de solventar este problema (ver por ejemplo la Ref. [67]). En este trabajo se utilizó el método de los cuaterniones discutido en las Refs. [60, 77].

2.4.1. Cuaterniones

Los cuaterniones son una herramienta importante para describir la orientación de un cuerpo rígido [78]. Fueron introducidos por Hamilton [79] como sucesores de los números complejos. Así, a los tres ángulos de Euler se les asocian cuatro coordenadas, (q_0, q_1, q_2, q_3) , llamadas cuaterniones. Los cuaterniones pueden ser vistos como cuatro coordenadas generalizadas con una restricción [67]:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (2.4.11)$$

Si bien existen distintas definiciones de los cuaterniones en la bibliografía, para el "convenio x " de los ángulos de Euler usados en esta tesis, [ver Fig. C.1 y Ec. (C.0.10) en el Apéndice C], la definición establecida para representar la rotación entre el sistema S^s y el sistema S^b es la siguiente:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Psi), \\ q_1 &= \sin \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Psi), \\ q_2 &= \sin \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Psi), \\ q_3 &= \cos \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Psi), \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

donde la matriz de transformación se convertirá en:

$$A = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (2.4.13)$$

Adicionalmente, para calcular la evolución de las componentes del cuaternión, se calculan las derivadas temporales de las Ec. (2.4.12) y las mismas se remplazan en la evolución temporal de los ángulos de Euler [Ec. (2.4.5)], de manera que:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad (2.4.14)$$

donde

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.15)$$

De la misma manera, las segundas derivadas estarán dadas por:

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\dot{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}Q \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4.16)$$

A través de las Ecs. (2.4.14), (2.4.15) y (2.4.16) en conjunto con la Ec. (2.4.11), usando la transformación (2.4.13) no se obtiene singularidad alguna. Estos sistemas de ecuaciones pueden ser resueltos a través del algoritmo de "Verlet con velocidades" presentado en la Sección 2.2.2. Por lo tanto, al igual que para las posiciones del centro de masa de cada partícula, las actualizaciones de los cuaterniones se realizan de la siguiente manera:

$$\vec{q}_i(t + \delta t) = \vec{q}_i(t) + \delta t \dot{\vec{q}}_i(t) + \frac{\delta t^2}{2} \ddot{\vec{q}}_i(t). \quad (2.4.17)$$

Las Ecs. (2.2.4) y (2.4.17) permiten actualizar las posiciones y las orientaciones de cada partícula en cada instante de tiempo δt de la simulación. Es importante tener en cuenta que los cuaterniones tienen que satisfacer la Ec. (2.4.11) en todo momento. Aunque las ecuaciones de movimiento de los cuaterniones conservan esta propiedad, el hecho de que las mismas se resuelven sólo de manera aproximada puede llevar a que los errores de aproximación se acumulen durante un período de tiempo largo. Para evitar esto, es práctica habitual renormalizar los cuaterniones (es decir, $\vec{q}_i^N = \vec{q}_i / |\vec{q}_i|$ donde \vec{q}_i^N es el cuaternión normalizado y $|\vec{q}_i|$ es el modulo del cuaternión \vec{q}_i), a fin de garantizar que la suma de cuadrados para cada partícula se mantenga en la unidad. En este trabajo, la renormalización se realiza en cada paso de tiempo δt .

2.5. Resumen de la aplicación del DEM

La aplicación del algoritmo de "Verlet con velocidades" requiere la definición de las posiciones del centro de masa \vec{r}_i iniciales y las orientaciones iniciales, a través de los cuaterniones \vec{q}_i , para cada una de las N partículas del sistema en estudio. También se necesitan las velocidades y aceleraciones de traslación y rotación iniciales. Con la definición de dichas condiciones iniciales se realizan los siguientes pasos:

1. Se actualizan las posiciones [Ec. (2.2.4)] y velocidades de traslación [Ec. (2.2.5)]¹ del centro de masa para obtener sus valores en $t + \delta t$.
2. Se calculan las derivadas de los cuaterniones según las Ecs. (2.4.14) y (2.4.16) y

¹Notar que la Ec. (2.2.5) implica el conocimiento de la aceleración en $t + \delta t$. Sin embargo, en esta fase del cálculo la misma se reemplaza por el valor de la aceleración en t a fin de obtener sólo una estimación inicial de la velocidad en $t + \delta t$.

se actualizan los cuaterniones según la Ec. (2.4.17). Los cuaterniones deben ser normalizados en este punto.

3. Con los cuaterniones actualizados se calcula la matriz de transformación A a través de la Ec. (2.4.13).
4. Se obtienen las velocidades de rotación en S^b y se transforman a velocidades en S^s .
5. Se aplica el algoritmo para buscar colisiones (ver Sección 2.3) con el fin de obtener la lista de partículas que interaccionan en el paso de tiempo $t + \delta t$.
6. Se calculan las fuerzas y torques [Ecs. (2.2.3), (2.2.8) y (2.2.12)] de interacción macroscópicas en el sistema de referencia espacial S^s .
7. Se obtiene el vector de aceleración de traslación $\ddot{\vec{r}}_i$ para cada partícula del sistema aplicando la Ec. (2.2.1) en conjunto con las fuerzas calculadas.
8. Se convierten los torques calculados en S^s a torques en S^b y se aplican las ecuaciones de Euler [Ec. (2.4.10)] para obtener las aceleraciones angulares en S^b en $t + \delta t$.
9. Se actualizan las velocidades de traslación y rotación con los valores de las aceleraciones en $t + \delta t$.
10. Se retoma nuevamente el algoritmo a partir del punto 1.

2.6. Análisis de las energías

Cuando se analiza la respuesta de una estructura frente a vibraciones externas, la misma puede ser sometida a oscilaciones libres y/o forzadas.

En vibración libre se aplica a la estructura un desplazamiento o velocidad inicial. La misma oscilará libremente y las partículas del amortiguador causarán la disminución de la amplitud de oscilación con el tiempo hasta la extinción total del movimiento. La energía total que deberá ser disipada puede calcularse a partir del desplazamiento o velocidad inicial.

Cuando la vibración es forzada y el sistema es excitado de modo continuado y en forma armónica, la amplitud será la misma en cada ciclo una vez que desaparezca el transitorio inicial. Sin embargo, continuamente se suministra energía al sistema. Por lo tanto, a diferencia del caso con oscilaciones libres, la energía disipada en cada ciclo de excitación debe ser la misma. La energía total disipada es debida a la amortiguación estructural de sistema primario (con coeficiente de amortiguación viscoso C) más la energía disipada por el amortiguador granular o de impacto.

Durante las oscilaciones, la energía es transferida desde la estructura vibrante a las partículas en el interior del recinto. El movimiento relativo entre los granos genera colisiones inelásticas y fricción. La fricción y las colisiones inelásticas disipan la energía de la estructura vibrante.

Las siguientes energías están involucradas en el sistema:

1. *Energía disipada por colisiones inelásticas:* En el proceso de colisión inelástica, la energía disipada será la integración de la fuerza normal disipativa [último término del segundo miembro de la Ec. (2.2.8)] a lo largo del camino recorrido, en la dirección normal: $\int_{t=0} \gamma_n \vec{v}_n \sqrt{\zeta_{ij}} \vec{v}_n \delta t$. En cada paso de tiempo, existirán muchas colisiones entre las partículas y entre las partículas y las paredes del recinto. Por lo tanto, la energía total disipada, a través de colisiones inelásticas, es la suma acumulada de todos los pares de colisiones desde el tiempo $t = 0$. La misma estará dada por:

$$E_{col}^t = \sum_{Colisiones} \int_{t=0} \gamma_n \vec{v}_n \sqrt{\zeta_{ij}} \vec{v}_n \delta t. \quad (2.6.1)$$

2. *Energía disipada por fricción:* Del mismo modo, la energía disipada por fricción es la integral de la fuerza de fricción en la Ec. (2.2.12) a lo largo del desplazamiento de corte: $\int_{t=0} \vec{F}_s \vec{v}_s \delta t$. La energía total disipada por fricción es la suma acumulada de todos los pares de colisiones a partir de $t = 0$,

$$E_{fric}^t = \sum_{Colisiones} \int_{t=0} \vec{F}_s \vec{v}_s \delta t. \quad (2.6.2)$$

3. *Energía cinética de traslación de las partículas:* La energía cinética total E_{ct}^t del sistema granular estará dada por:

$$E_{ct}^t = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2. \quad (2.6.3)$$

4. *Energía cinética rotacional de las partículas:* La energía cinética rotacional total E_{cr}^t , debida a la velocidad angular $\dot{\vec{\varphi}}$, será:

$$E_{cr}^t = \sum_i^N \frac{1}{2} I_i \dot{\varphi}_i^2. \quad (2.6.4)$$

5. *Energía potencial de las partículas:* La energía gravitacional total de las partículas estará dada por:

$$E_p^t = \sum_i^N m_i g h_i, \quad (2.6.5)$$

donde h_i es la altura de cada partícula desde la posición de referencia inicial de la base del recinto de contención.

6. *Energía elástica*: Cuando dos esferas chocan entre sí, la deformación de las partículas almacena energía elástica. La energía elástica total almacenada por la deformación estará dada por:

$$E_e^t = \sum_{i>j} \sum_j \frac{8}{15} E^* \zeta_{ij}^{5/2} (R^*)^{1/2}. \quad (2.6.6)$$

Mas detalles sobre análisis de energías en los amortiguadores de partículas se pueden obtener en las Refs. [32, 39, 66, 69].

2.7. Sumario y conclusiones

En este capítulo se presentaron los modelos utilizados para realizar un estudio completo del comportamiento de los amortiguadores de partículas, como así también las técnicas analíticas y numéricas para su resolución y análisis.

El primer modelo presentado (Sistema de un grado de libertad con excitación de base) cuenta con solución analítica. El mismo servirá de referencia para analizar la eficiencia de la amortiguación de partículas disipativas en los sistemas mecánicos. Los siguientes dos modelos cuentan con un amortiguador de partículas y son resueltos vía DEM.

El método de elementos discretos resulta ser eficiente para estudiar el comportamiento de los materiales granulares sometidos a cargas dinámicas. El algoritmo presentado de búsqueda de colisiones permite lograr mejor eficiencia de cálculo y simulaciones de gran cantidad de partículas en tiempos relativamente cortos. Además, la implementación de cuaterniones, como algoritmo libre de singularidad numérica, permite la resolución de las ecuaciones de rotación de cuerpos solidos (orientaciones de las partículas) de una manera eficiente desde el punto de vista computacional.

Finalmente, el uso de modelos macroscópicos, para resolver las interacciones de las partículas en el DEM, permite calcular las distintas energías en juego dentro del sistema y así cuantificar la amortiguación granular en un sistema vibrante dado.

AMORTIGUACIÓN GRANULAR ÓPTIMA

Se ha demostrado que el amortiguador de partículas es eficaz en un amplio rango de frecuencias [48]. Sin embargo, parámetros tales como el tamaño y la forma de las partículas, la distribución de tamaño, la densidad, el coeficiente de restitución, el coeficiente de fricción, la forma y la superficie del recinto, el tipo de excitación del sistema primario, la amplitud de la vibración, las frecuencias de excitación, entre otras tantas características, pueden tener importancia en la eficiencia del amortiguamiento. Así, el tratamiento adecuado del amortiguador de partículas en una estructura determinada requiere de un cuidadoso análisis y diseño.

En el presente capítulo se analiza el comportamiento de un amortiguador de partículas disipativas, tal como el de la Fig. 2.2, formado por un recinto prismático adjunto a un sistema primario vertical vibrante, de un grado de libertad, sometido a excitación armónica. Con dicho sistema se describe la eficiencia de la amortiguación, en función de la altura de la cavidad de contención, manteniendo constante el material de las partículas disipativas, la relación de masas entre las partículas y el sistema primario y la amplitud de la excitación armónica. Con el fin de obtener resultados generales, se varía el número de partículas en el recinto y la frecuencia de excitación.

Se demuestra que, contrariamente a lo que han discutido anteriormente otros autores, para los recipientes de contención pequeños, el sistema no se acerca de una manera monótona al límite donde la masa de partículas genera el corrimiento de la frecuencia de resonancia hacia la del sistema con masa efectiva $M + m_p$. Por el contrario, el sistema aumenta su masa efectiva por encima de $M + m_p$ antes de llegar al valor límite esperado. Por otro lado, hay un efecto similar cuando el recinto es extremadamente grande, donde el sistema alcanza masas efectivas por debajo del valor esperado M .

Finalmente, a través de un análisis detallado de las masas efectivas, se presenta un método para obtener la altura L_z óptima del recinto de contención para lograr la mejor eficiencia de amortiguación granular.

3.1. Comportamiento del amortiguador granular

3.1.1. Parámetros de simulación

El modelo de un grado de libertad mostrado en la Fig. 2.2 ha sido simulado sometido a un movimiento de base armónico. El sistema primario (sin considerar las partículas en el recinto) consta de masa $M = 25.0$ Kg, rigidez $K = 2.62 \times 10^5$ Nm⁻¹ y relación de amortiguamiento $\xi = 0.058$. Bajo estas condiciones, la frecuencia natural no amortiguada del sistema primario es $f_0 = 16.29$ Hz. La aceleración de la gravedad es $g = 9.8$ ms⁻² y la amplitud del movimiento de base es $U = 0.005$ m.

Con el fin de analizar la eficiencia del amortiguador de partículas disipativas en función de las características del recinto de contención, se han modelado varios receptáculos prismáticos ($L_x \times L_y \times L_z$) variando la altura L_z de los mismos ($L_z = 0.052$ m; 0.067 m; 0.085 m; 0.095 m; 0.11 m; 0.12 m; 0.13 m; 0.15 m; 0.167 m 0.265 m; 0.33 m; 0.55 m). Para cada uno de los recintos analizados se ha estudiado la influencia del número N de partículas del amortiguador granular. Las partículas se han modelado esféricas con una dispersión en los radios de 8 % distribuidos uniformemente. La comparación entre los diferentes números de partículas se ha realizado manteniendo constante la relación de masas (cociente entre la masa total m_p de las partículas y la masa M del sistema primario) para lo cual fue necesario variar el radio de las esferas. La Tabla 3.1 muestra las características materiales de las partículas (ver Sección 2.2.3) y los parámetros de la simulación que se han mantenido constantes en este apartado y la Tabla 3.2 muestra las características que fueron variadas al cambiar N .

Propiedad	Valor
Masa del sistema primario M	25 Kg
Amplitud de excitación U	0.005 m
Aceleración de la gravedad g	9.8 ms ⁻²
Rigidez del resorte del sistema primario K	2.62×10^5 Nm ⁻¹
Relación de amortiguamiento ξ	0.058
Modulo de Young E	2.06×10^8 Nm ⁻²
Densidad ρ	7900 Kgm ⁻³
Coefficiente de Poisson ν	0.33
Rigidez normal de contacto k_n	$\frac{4}{3}E_*\sqrt{R_*}$
Coefficiente de fricción dinámica μ_d	0.3
Amortiguamiento normal de contacto γ_n	19.99 Kgs ⁻¹ m ^{-1/2}
Amortiguamiento tangencial de contacto γ_s	59.76 Kgs ⁻¹ m ^{-1/2}
Tiempo de integración δt	1.00×10^{-6} s
Tiempo total de simulación	8.0 s
Tamaño de la base del recinto	0.02 m \times 0.02 m

Tabla 3.1: Características materiales y parámetros de la simulación.

Con el fin de encontrar la FRF del sistema en estudio, se han simulado valores de

frecuencias de excitación de base en el rango [0.5 Hz - 30 Hz]. Luego de un transitorio inicial, el movimiento de la masa primaria entra en un estado estacionario. Este estado estacionario puede mostrar comportamiento tanto periódico como caótico de la cama granular (ver Capítulo 4), dependiendo de la frecuencia de excitación, del tamaño del recinto, etc. En todos los casos se ha utilizado para el análisis el 10 % final del tiempo de las simulaciones, lo que ha resultado suficiente para garantizar, bajo las características descriptas, que los datos procesados corresponden al estado estacionario.

N = 250 partículas	
Rango de radios [m]	$6.05 \times 10^{-3} - 6.55 \times 10^{-3}$
Masa total de las partículas m_p [Kg]	2.075
Altura aprox. de la capa granular en reposo [m]	0.0512
N = 500 partículas	
Rango de radios [m]	$4.80 \times 10^{-3} - 5.20 \times 10^{-3}$
Masa total de las partículas m_p [Kg]	2.068
Altura aprox. de la capa granular en reposo [m]	0.0517
N = 1000 partículas	
Rango de radios [m]	$3.80 \times 10^{-3} - 4.12 \times 10^{-3}$
Masa total de las partículas m_p [Kg]	2.058
Altura aprox. de la capa granular en reposo [m]	0.0499

Tabla 3.2: Diferentes configuraciones estudiadas variando el número N de partículas usadas en el recinto y sus tamaños. La altura granular es aproximada debido a que depende de la organización de los granos después de que fueron depositados.

3.1.2. Análisis del amortiguamiento

En la Fig. 3.1(a) se muestra la respuesta en frecuencia del sistema con $N = 500$ para la amplitud máxima del movimiento del recinto Z en el estado estacionario. Como referencia, se han incluido las curvas de respuesta teóricas correspondientes al sistema primario (sin las partículas del recinto) y al sistema primario con una masa corregida correspondiente a adicionar la masa de las partículas como si fueran solidarias a la masa primaria en todo momento (esto es, $M + m_p$). Estas curvas han sido calculadas a partir de la Ec. (2.1.21).

Se puede observar que la respuesta del sistema es similar a la del sistema primario con masa corregida si el recinto es pequeño (aproximadamente de la altura de la capa de partículas). Esto se debe a que las partículas están la mayor parte del tiempo en contacto con las paredes del recinto y pueden considerarse casi solidarias a la estructura primaria. En la Fig. 3.1(b) se observa el movimiento de la capa de granos entre el piso y techo del recinto para la caja de $L_z = 0.052$ m y $f = 15.5$ Hz donde puede apreciarse que las partículas se despegan de la caja durante intervalos muy cortos de tiempo. Por otro lado, para recintos mucho más grandes que la capa de partículas, el sistema presenta una

respuesta similar a la del sistema primario (sin la adición de la masa m_p). Como se puede ver en la Fig. 3.1(c), esto es debido a que las partículas están despegadas del piso y techo del recinto la mayor parte del tiempo.

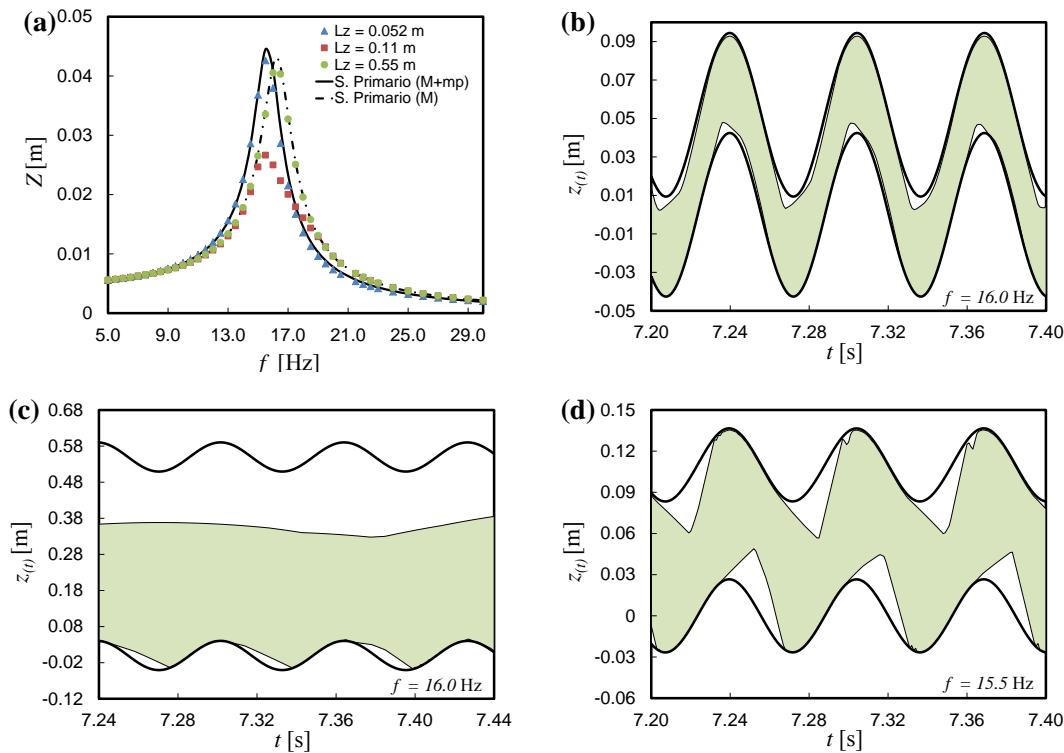


Figura 3.1: **(a)** Respuesta en frecuencia para la máxima amplitud de oscilación de la masa primaria Z del sistema en el estado estacionario para $N = 500$ y diferentes tamaños de caja $L_z = 0.052$ m (triángulos azules), 0.11 m (cuadrados rojos) y 0.55 m (círculos verdes). La línea de trazos corresponde al comportamiento del sistema de referencia (sin amortiguador granular) y la línea continua al sistema de referencia con masa corregida $(M + m_p)$. **(b)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 0.052$ m y $f = 15.5$ Hz. Las líneas continuas indican las posiciones del piso y techo del recinto y el área coloreada indica los límites de la capa de granos definidos como la posición de la partícula más baja y más alta en cada instante. **(c)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 0.55$ m y $f = 16.0$ Hz. **(d)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 0.11$ m y $f = 15.5$ Hz.

La Fig. 3.1(a) muestra claramente que la amortiguación debida a las partículas es mínima para recintos muy grandes o muy pequeños. En el último caso, sólo se produce una corrección en la masa efectiva del sistema. Sin embargo, para recintos de tamaño intermedio, se aprecia una considerable reducción de la amplitud de oscilación, especialmente en zonas cercanas a la frecuencia de resonancia del sistema primario [ver cuadrados rojos en la Fig. 3.1(a)]. Por otro lado, la frecuencia de resonancia resulta ser intermedia entre la del sistema primario (M) y la del sistema con masa corregida ($M + m_p$). Se puede observar, de acuerdo con la Fig. 3.1(d), que para recintos intermedios y para frecuencias f en las proximidades de la resonancia, el movimiento de impacto tiende a convertirse

en periódico, existiendo dos golpes por periodo de movimiento (uno contra el techo y otro contra el piso del recinto) y produciendo de esta forma la mayor reducción de la oscilación de la masa primaria.

En la Fig. 3.2(a) se muestra la variación de la amplitud Z_{res} a la frecuencia de resonancia f_{res} como función de L_z para diferentes números de partículas N . Se puede observar que existe un valor óptimo de L_z para el cual se ha encontrado la menor amplitud de oscilación en resonancia. Más aún, el valor óptimo de la altura del recinto decrece conforme crece el número de partículas en el sistema. Asimismo, se presenta un cambio de comportamiento cerca de los valores óptimos de L_z por el cual los sistemas con mayor número de partículas (radios menores) dejan de ser los que reducen más significativamente Z_{res} y resulta más eficiente, para grandes L_z , el uso de un menor número de partículas (radios mayores) en el recinto.

La presencia de un L_z óptimo y su dependencia con N es consistente con los resultados de Saeki [33]. Este autor se ha concentrado en excitaciones horizontales de un recinto con granos. Sin embargo, como fuera discutido por Duncan *et al.* [15], el efecto de la gravedad es poco significativo a frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia. Es importante destacar que, en esta tesis se ha analizado un rango de valores de L_z más amplio que el analizado por Saeki. Los resultados presentados en la Fig. 3.2(a) permiten ver claramente que para recintos con L_z muy pequeña o muy grande el valor de Z_{res} es independiente del número de partículas usadas, siempre que la relación de volumen y de masas entre el sistema primario y las partículas granulares se mantengan relativamente constantes.

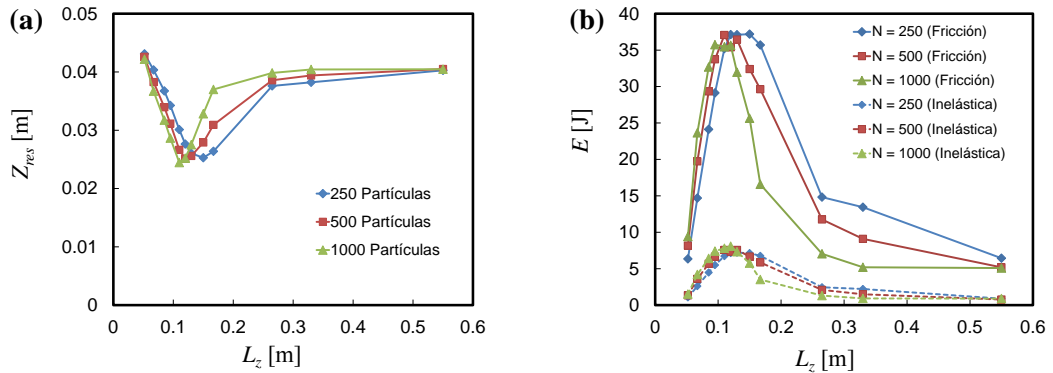


Figura 3.2: (a) Amplitud Z_{res} en el punto de resonancia del sistema como función del tamaño del recinto L_z para $N=250$ (triángulos verdes), 500 (cuadrados rojos) y 1000 (rombos azules). (b) Energía disipada en un ciclo debido a las colisiones inelásticas y a la fricción.

La energía disipada durante un ciclo de excitación a la frecuencia de resonancia se encuentra representada como función de L_z para diferentes valores de N en la Fig. 3.2(b). Se pueden observar aquí las mismas tendencias que en la Fig. 3.2(a), donde el sistema

con mayor número de partículas disipa más energía para cajas con L_z menores al óptimo, pero esta disipación es menos eficiente para cajas con L_z mayores al óptimo. También se puede observar que la mayor cantidad de energía disipada, para esta configuración, es debida a la fricción de Coulomb entre las mismas partículas y entre las partículas y las paredes del recinto, teniendo menor influencia la energía disipada por colisión inelástica. Estos resultados están en acuerdo con el trabajo de Bai *et al.* [39]¹. Al igual que para la variación de Z_{res} en la Fig. 3.2(a), para recintos muy pequeños y muy grandes, en relación a la L_z óptima, no existe diferencias apreciables de energías disipadas cuando se modifica el numero N de partículas.

La variación en frecuencia de las energías de colisión inelástica y de fricción, para la L_z óptima del sistema con $N = 500$, se ha representado en la Fig. 3.3. Tal como se ha comentado, la energía de disipación predominante es claramente la fricción de Coulomb en todo el rango de frecuencias para el sistema estudiado en este apartado.

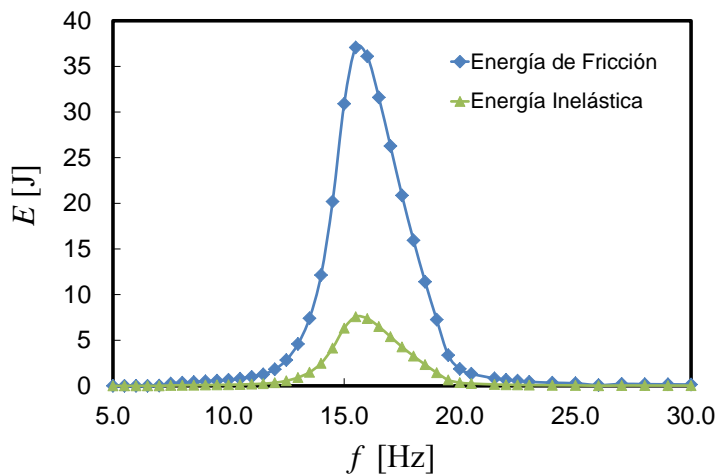


Figura 3.3: Variación en frecuencia de las energías de disipación para $L_z = 0.11$ m y $N = 500$. Los rombos azules representan la energía de fricción y los triángulos verdes la energía disipada por colisiones inelásticas.

En la Fig. 3.4 se puede observar el movimiento granular para distintas frecuencias en estado estacionario y para el mismo sistema presentado en la Fig. 3.3. En la Fig. 3.4(a), se puede ver claramente que teniendo una frecuencia de excitación baja, con amplificación baja, la capa granular no pierde en ningún momento contacto con el recinto, lo cual genera muy bajo movimiento granular y por consiguiente baja disipación a través fricción y colisiones inelásticas (ver Fig. 3.3).

Al aumentar la frecuencia de excitación, de acuerdo con la Fig. 3.4(b), la amplificación obtenida produce que las partículas superiores comiencen a colisionar con el techo

¹En el Capítulo 5 se presenta con mayor detalle el análisis de las energías de disipación para un sistema con recinto óptimo.

del recinto. Sin embargo, las zonas inferiores de la cama de granos no tienen aún la aceleración necesaria para despegar en vuelo. En este momento se puede observar que la compactación granular es baja y la energía de fricción comienza a aumentar conforme aumenta el movimiento relativo de las partículas (ver Fig. 3.3 para $f = 10.5$ Hz).

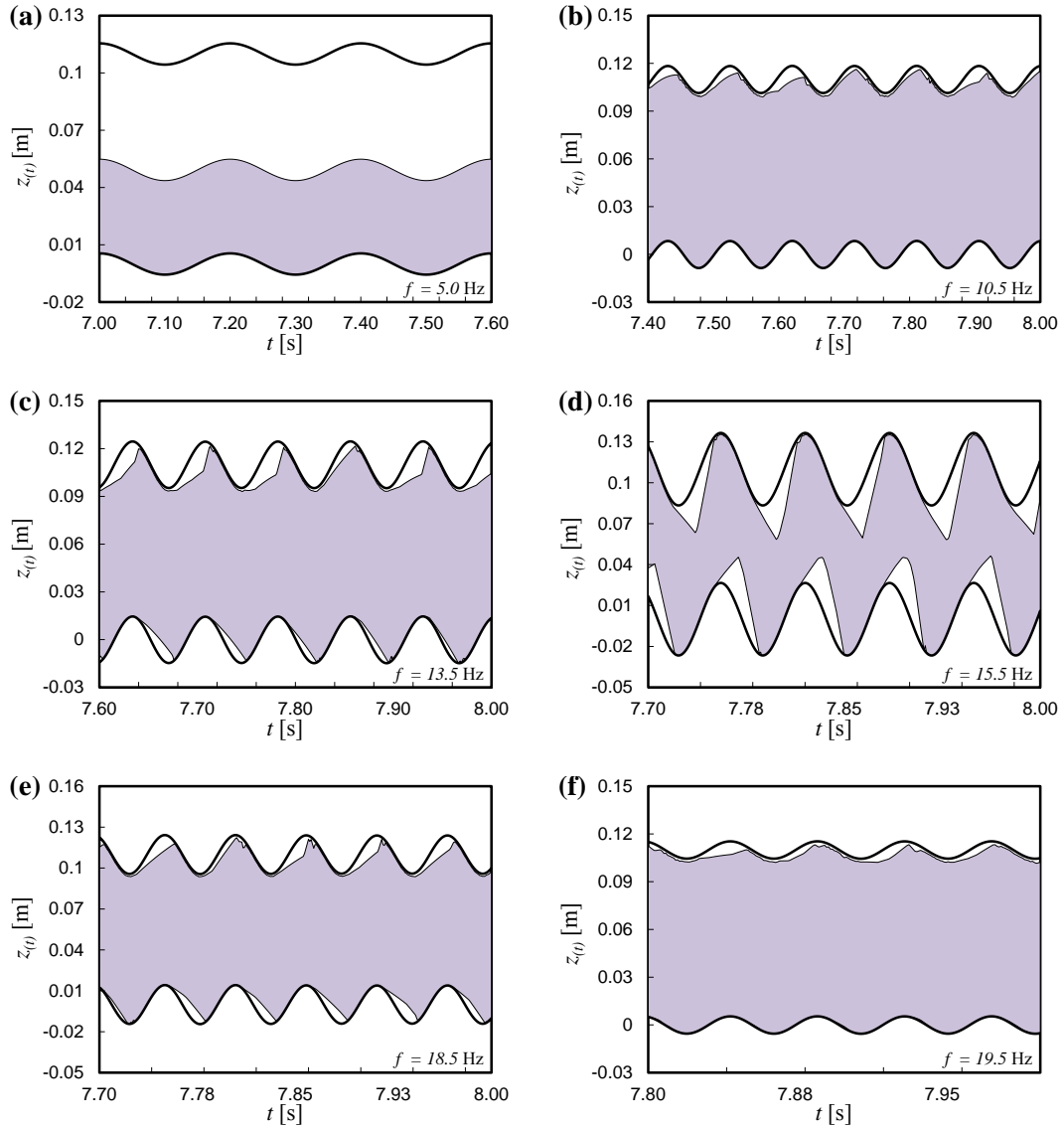


Figura 3.4: **(a)** Movimiento del sistema con $N = 500$, $L_z = 0.11$ m y $f = 5.0$ Hz. Las líneas continuas indican las posiciones del piso y techo del recinto y el área coloreada indica los límites de la capa de granos definidos como la posición de la partícula más baja y más alta en cada instante. **(b)** $f = 10.5$ Hz. **(c)** $f = 13.5$ Hz. **(d)** $f = 15.5$ Hz. **(e)** $f = 18.5$ Hz. **(f)** $f = 19.5$ Hz.

La Fig. 3.4(c) muestra el momento para el cual las partículas inferiores tienen una aceleración tal que pueden comenzar el vuelo. Se aprecia un movimiento de impacto superior e inferior de tipo caótico¹. De acuerdo con la Fig. 3.3, la disipación de energía

¹Para mas detalles en cuanto a la dinámica granular interna ver Capítulo 4.

por colisiones inelásticas comienza a ser apreciables en este momento.

A la frecuencia que produce la máxima amplitud de respuesta para el sistema analizado [Fig. 3.4(d)], se puede observar, como ya se ha mencionado, el comienzo de un movimiento de tipo periódico de impacto, con la mayor eficiencia de amortiguación. En este caso, la capa granular se comporta como una masa compacta que se mueve como un todo de extremo a extremo del recinto.

Finalmente, las Figs. 3.4(e) y 3.4(f) son estados para frecuencias de excitación mayores a la resonancia del sistema. Básicamente, se han observado comportamientos similares al de las Figs. 3.4(c) y 3.4(b) respectivamente pero con menor compactación granular lo que genera una menor eficiencia de amortiguación.

3.2. Corrimiento de la frecuencia de resonancia

Al realizar un análisis detallado de las FRF, cuando se varia la longitud L_z [ver Fig. 3.1(a)], se observa un corrimiento de la frecuencia de resonancia, la cual decrece conforme disminuye el tamaño de L_z .

Propiedad	Valor
Modulo de Young E	$2.03 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$
Densidad ρ	8030 Kgm^{-3}
Coficiente de Poisson ν	0.28
Rigidez normal de contacto k_n	$\frac{4}{3}E_*\sqrt{R/2}$
Coficiente de fricción dinámica μ_d	0.3
Amortiguamiento normal de contacto γ_n	$3.660 \times 10^3 \text{ Kgs}^{-1}\text{m}^{-1/2}$
Amortiguamiento tangencial de contacto γ_s	$1.098 \times 10^4 \text{ Kgs}^{-1}\text{m}^{-1/2}$
Amplitud de excitación U	0.0045 m
Tiempo de integración δt	$8.75 \times 10^{-8} \text{ s}$
Tiempo total de simulación	13.12 s
Radio de las partículas R_i	0.003 m
Masa total de partículas m_p	0.227 Kg

Tabla 3.3: Características materiales y parámetros de la simulación para los resultados de la Sección 3.2.

En trabajos previos (ver por ejemplo Refs. [36, 37]), se han estudiado distintos amortiguadores de partículas compuestos de recintos de contención de diferentes tamaños. En todos los casos, la frecuencia de resonancia del sistema primario cae con respecto a la del sistema no amortiguado. Esto es atribuido normalmente a la adición de la masa de los granos, m_p . Si se mantiene constante el gap, a amplitudes de excitación muy bajas, el sistema se comporta como si la masa de las partículas se encontrara totalmente adherida a la masa primaria M del contenedor, (es decir $M + m_p$). Si la amplitud se incrementa, la frecuencia de resonancia gradualmente crece y la eficiencia de amortiguación se

incrementa también. Eventualmente, la frecuencia de resonancia tiende al valor que le corresponde al sistema de referencia (sin amortiguamiento granular).

Yang [41] ha estudiado, de forma experimental, amortiguadores de partículas bajo diferentes condiciones de excitación y distintos tamaños del recinto de contención. En su trabajo ha encontrado que, bajo ciertas condiciones, el sistema puede mostrar masas efectivas por encima de $M + m_p$ o por debajo de M . Estas masas efectivas se definen como las masas que producirían una frecuencia de resonancia equivalente en el sistema de referencia (sin amortiguación granular). Sin embargo, un análisis cuidadoso de este fenómeno no se ha realizado todavía.

Con el fin de realizar un estudio detallado del corrimiento de la frecuencia de resonancia en los amortiguadores de partículas, se consideró un modelo de simulación de un grado de libertad, tal como se muestra en la Fig. 2.2. El sistema primario, para este caso, consiste en una masa $M = 2.37$ Kg, un resorte lineal de rigidez $K = 21500$ Nm⁻¹ y un amortiguador viscoso con constante de amortiguamiento C . Se han utilizado dos amortiguadores viscosos diferentes, $C = 7.6$ y 26.3 Nsm⁻¹. El sistema no amortiguado ($C = 0$ y sin amortiguamiento granular) tiene, en estas condiciones, una frecuencia natural $f_0 = 15.16$ Hz.

El amortiguador de partículas ha sido modelado con $N = 250$ granos esféricos en una caja prismática de lados $L_x = L_y = 0.03675$ m y diferentes alturas L_z . Las propiedades del material de las partículas (y paredes del recinto) como así también los parámetros de simulación se muestran en la Tabla 3.3. Se ha considerado el campo gravitatorio $g = 9.8$ ms⁻² en la dirección vertical negativa. Aunque el sistema primario sólo puede moverse en la dirección vertical, como en el modelo anterior, las partículas se mueven libremente dentro de la caja.

3.2.1. Análisis de los datos

Como se muestra en la Tabla 3.3, se ha simulado la vibración del sistema durante 13.12 s. Hemos verificado que este tiempo es suficiente para que el sistema alcance, después de un transitorio inicial, un estado estacionario. Se han estudiado las respuestas del sistema sometido a excitaciones armónicas con frecuencias de excitación en el rango (0.5 a 30.0 Hz).

Para analizar los datos de las simulaciones, se ha realizado una evaluación simple de la *masa efectiva* y la *amortiguación efectiva* del amortiguador de partículas mediante el ajuste de los datos de la FRF con la del sistema de referencia (sin partículas en el recinto)¹ [ver Ec. (2.1.21)]

El ajuste de la Ec. (2.1.21) se realizó por mínimos cuadrados a los datos de simula-

¹Otros métodos aproximados como el de *Flujos de Potencia*, utilizado por ejemplo por Yang [41], presentan inestabilidades numéricas y pueden dar masas efectivas negativas (ver, por ejemplo Ref. [38]).

ción DEM. Los valores de U y K se han fijado a los valores correspondientes usados en las simulaciones, mientras que C y M son parámetros de ajuste. Los valores de C y M obtenidos del ajuste constituyen la amortiguación C_{ef} y la masa M_{ef} efectivos.

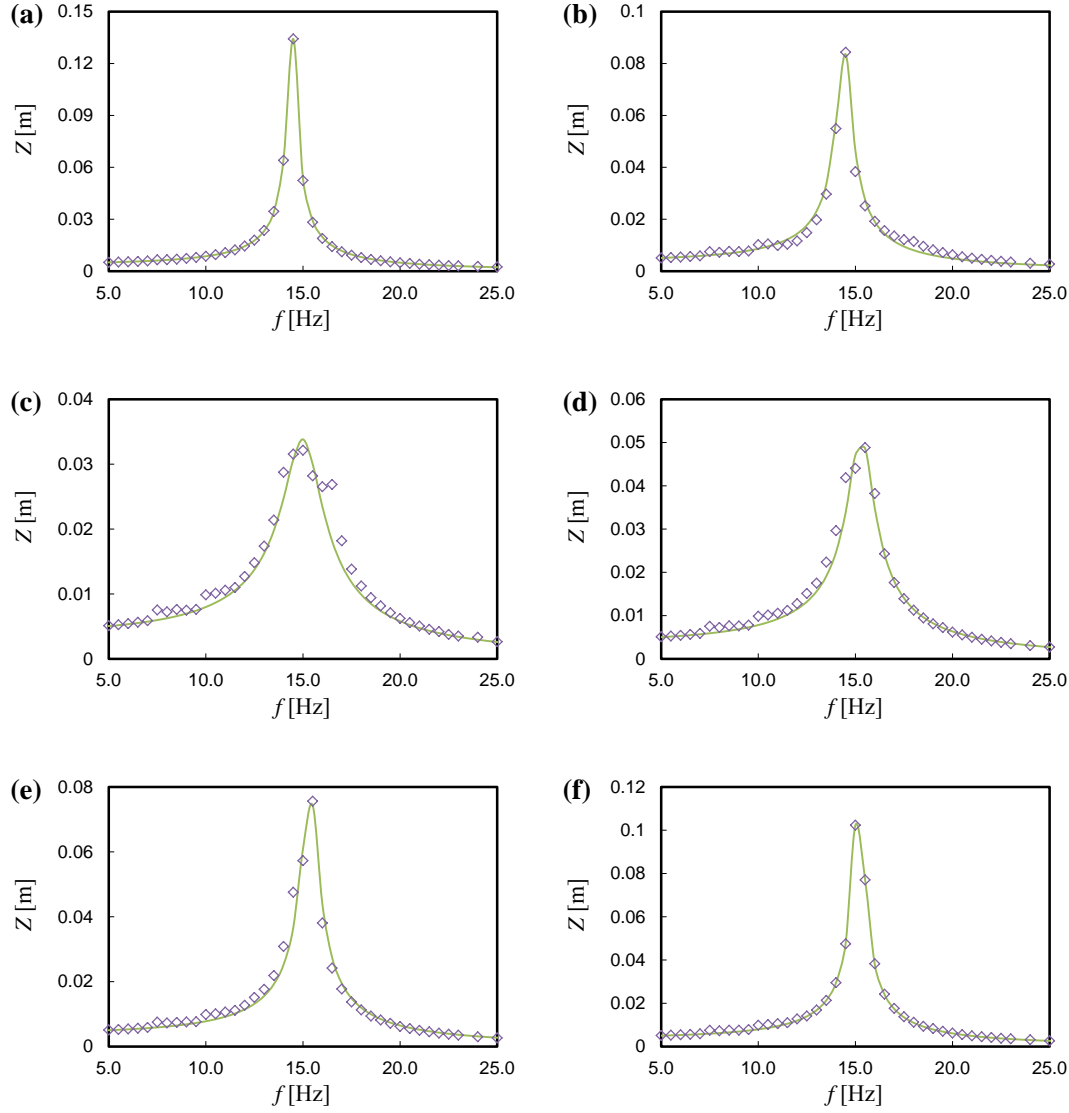


Figura 3.5: **(a)** Ajuste de la Ec. (2.1.21) por el método de mínimos cuadrados para el sistema con $N = 250$, $L_z = 0.042$ m. La línea continua es la respuesta en frecuencia del sistema ajustado y los rombos los valores obtenidos para cada frecuencia en las simulaciones DEM. **(b)** $L_z = 0.072$ m. **(c)** $L_z = 0.117$ m. **(d)** $L_z = 0.162$ m. **(e)** $L_z = 0.222$ m. **(f)** $L_z = 0.372$ m.

Es importante mencionar que, para ciertas alturas del recinto, la FRF no es una función suave como la correspondiente a la Ec. (2.1.21). Sin embargo, la forma general queda bien descrita por los ajustes realizados. Para los recintos más pequeños y más grandes, la forma de la FRF es suave, lográndose un excelente ajuste de los datos. Varios ejemplos de la calidad de los ajustes por mínimos cuadrados se muestran en la Fig. 3.5

para distintos valores de L_z . Nótese que en las Figs. 3.5(c) y (d) los datos de simulación muestran un "hombro" en la FRF que no puede ser descripto por la función suave de la Ec. (2.1.21).

3.2.2. Resultados

Al igual que para la Fig. 3.1(a), ejemplos de la FRF del amortiguador de partículas para algunas alturas de caja L_z y parámetros de la Tabla 3.3 se muestra en la Fig. 3.6. La cama granular en reposo tiene una altura aproximada de 0.039 m, por lo tanto, el tamaño del gap puede ser estimado como $L_z - 0.039$ m. Las tendencias generales observadas son consistentes con trabajos previos de simulación y experimentales (ver por ejemplo Refs. [33, 36, 37]). Para pequeños gaps ($L_z < 0.087$ m) la FRF tiende a la respuesta en frecuencia del sistema sin partículas en su interior, pero con una masa equivalente $M + m_p$. Para recintos muy altos ($L_z > 0.222$ m), la respuesta es similar a la de un sistema sin el amortiguador de partículas, con masa equivalente M . Para valores intermedios de L_z , la amortiguación granular aumenta significativamente y se obtiene una frecuencia de resonancia amortiguada intermedia entre los dos casos asintóticos. Sin embargo, estos valores intermedios de L_z presentan, como ya se ha mencionado, FRF más complejas, con la presencia de más de un "hombro".

Amortiguamiento efectivo y masa efectiva

Una evaluación simple del amortiguamiento efectivo se puede realizar mediante el ajuste de la FRF a un sistema de un grado de libertad con un amortiguador viscoso, tal como se discute en la sección precedente. El amortiguamiento efectivo, C_{ef} se representa gráficamente como función de L_z en la Fig. 3.7, donde se puede apreciar un claro valor óptimo de L_z para el cual se obtiene la mejor eficiencia de amortiguación efectiva.

Un aumento en el coeficiente de amortiguamiento estructural viscoso C conduce a una influencia menos importante de la amortiguación granular sobre el sistema (comparar curvas verde y azul en Fig. 3.7). Esto es debido a que la amortiguación del sistema primario reduce la transferencia de energía a las partículas dentro del recinto.

Los dos casos límite (para pequeñas y grandes alturas L_z) han sido explicados [36, 41, 80] en términos de la proporción del tiempo que las partículas pasan en contacto con el recinto. Para pequeños valores de L_z , las partículas se encuentran esencialmente fijas en sus posiciones, ya que la restricción impuesta por el techo impiden su movimiento relativo. Por lo tanto, las partículas se comportan como una simple masa añadida a la masa primaria M del sistema y no proporcionan amortiguación adicional (en este límite, el amortiguamiento efectivo es igual a la amortiguación viscosas, esto es $C_{ef}/C = 1$ en Fig. 3.7). A la inversa, si el recinto es muy alto, (en excitaciones cercanas a la resonancia) se genera un movimiento excesivo de las partículas y la cama granular llega a un estado

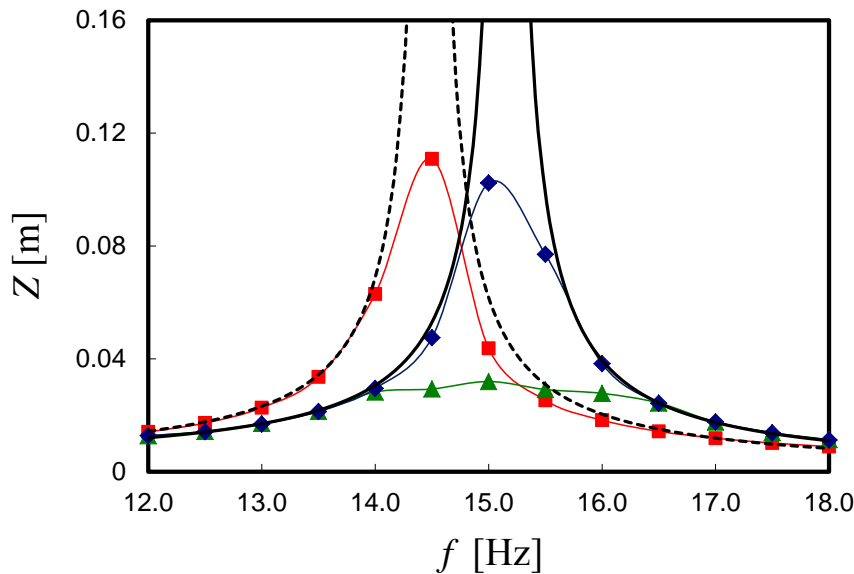


Figura 3.6: Función de respuesta en frecuencia del sistema de un grado de libertad con un amortiguador de partículas. Cada curva corresponde a una altura L_z del recinto de contención diferente. Cuadrados rojos: $L_z = 0.057$ m, triángulos verdes: $L_z = 0.1225$ m y rombos azules: $L_z = 0.372$ m. La línea negra continua corresponde al sistema referencia sin las partículas en el recinto. La línea negra punteada corresponde al sistema de referencia con masa adicional m_p igual a la masa total de partículas. Estos resultados corresponden a simulaciones con $C = 7.6 \text{ Nsm}^{-1}$. Los triángulos verdes corresponden a la FRF del amortiguador de partículas con recinto de altura L_z para la cual se obtiene el amortiguamiento efectivo máximo.

similar a un gas,¹ en el cual la mayor parte del tiempo las partículas están en el aire y chocan sólo ocasionalmente contra el suelo y el techo de la caja. En este caso, las partículas casi no tienen influencia en el movimiento del sistema primario y C_{ef} cae de nuevo a la línea de base, $C_{ef}/C = 1$, impuesta por el amortiguador estructural viscoso.

En la Fig. 3.8 se representa la masa efectiva, M_{ef} , obtenida a partir de los ajustes realizados. Los valores de masas límite esperados M y $M + m_p$ han sido representados en la figura como líneas horizontales de referencia. Se puede ver que, en contraste con la sugerencia de varios estudios anteriores [36, 37], los dos casos límite no se alcanzan de una manera monótona. El sistema alcanza masas efectivas por encima de $M + m_p$ cuando L_z se reduce y, finalmente, cae hacia el valor límite. Del mismo modo, para las grandes L_z , el aumento de la altura del recinto lleva a masas efectivas por debajo de M antes de que el valor límite se obtenga. Algunos indicios de este comportamiento se han observado en algunos experimentos realizados por Yang y colaboradores [41, 42]. Estos autores han mostrado que la frecuencia de resonancia f_0 (que se relaciona simplemente

¹Un análisis detallado de los estados del material granular en la amortiguación se puede encontrar en Ref. [31].

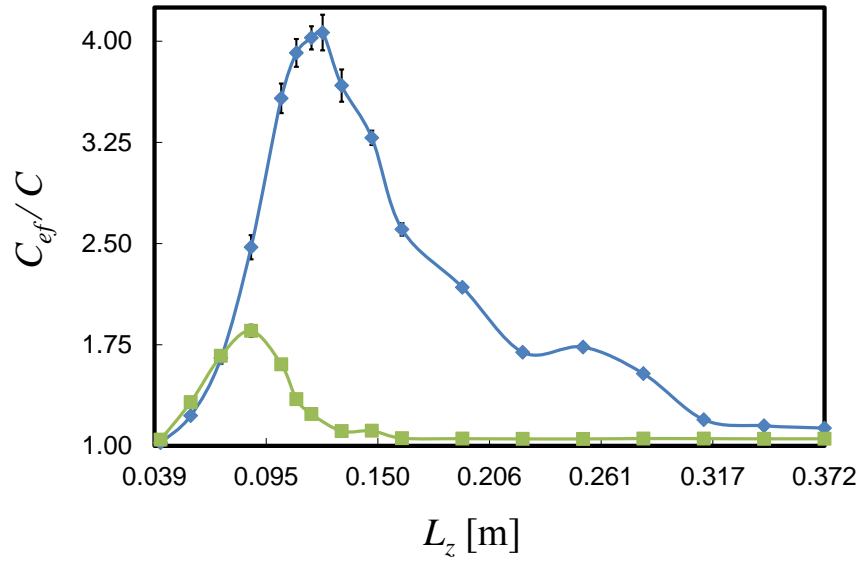


Figura 3.7: Amortiguamiento efectivo C_{ef} en relación al amortiguamiento estructural viscoso C como función de L_z . La línea azul corresponde al sistema con $C = 7.6 \text{ Nsm}^{-1}$ y la línea verde al sistema con $C = 26.365 \text{ Nsm}^{-1}$. Las barras de error corresponden al error estándar asintótico del mejor ajuste de C_{ef} .

con la masa efectiva a través de $M_{ef} = k/(2\pi f_0)^2$) puede alcanzar valores superiores a los esperados para un recinto vacío.

La aparición de masas efectivas por encima y por debajo de los valores esperados, al acercarse a los dos casos límite (gap cero y gap infinito), ha sido pasada por alto o ha recibido poca atención en el pasado y es, de alguna manera, contra intuitiva. En general, los estudios de los amortiguadores de partículas se centran en la región de gaps donde se encuentra el amortiguamiento efectivo máximo. Allí, la masa efectiva es, como se espera, intermedia entre M y $M + m_p$. Sin embargo, el diseño puede requerir trabajar fuera del gap óptimo y en la región donde se producen estos excesos o defectos de masa efectiva.

A continuación se discute el origen de tal comportamiento en la respuesta de los amortiguadores de partículas considerando el movimiento interno de la cama granular.

Movimiento interno de la cama granular

En la Fig. 3.9 se representa la trayectoria del piso y del techo del recinto de contención durante algunos pocos períodos de excitación en estado estacionario. Para dicha representación, se han elegido frecuencias próximas a la frecuencia de resonancia para cada L_z considerado. Esta elección se debe a que los valores de masa y amortiguamiento efectivos obtenidos mediante los ajustes por mínimos cuadrados se determinan en gran

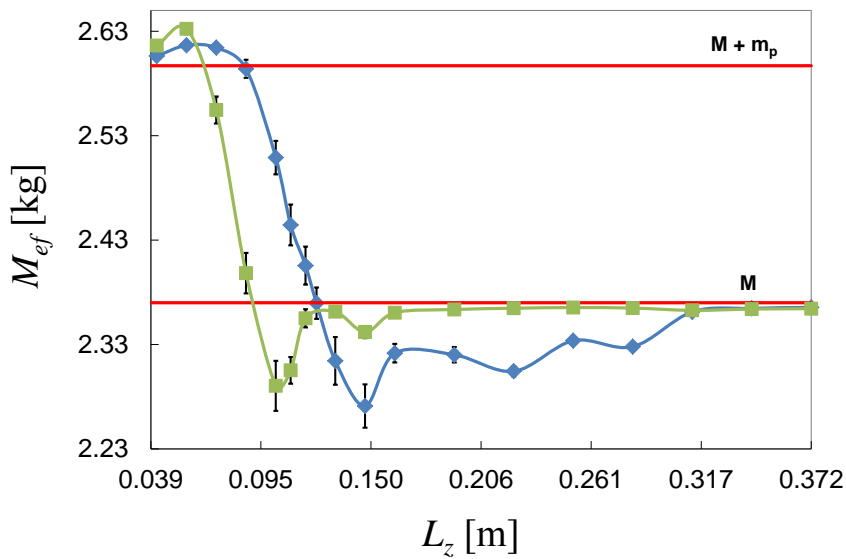


Figura 3.8: Masa efectiva como función de L_z . La línea azul corresponde al sistema con $C = 7.6 \text{ Nsm}^{-1}$ y la línea verde al sistema con $C = 26.365 \text{ Nsm}^{-1}$. Las líneas rojas son sólo una indicación del valor de $M_{ef} = M$ y $M_{ef} = M + m_p$. Las barras de error corresponden al error estándar asintótico del mejor ajuste de M_{ef} .

medida por las frecuencias con mayor amplitud de movimiento.

En la Fig. 3.9 se ha indicado (a través del área coloreada) la posición de la cama granular dentro del recinto por una banda limitada por la coordenada z de la partícula más alta y más baja en cada momento en la simulación. Es importante notar que dicha representación da indicios de la densidad granular y del tiempo aproximado de impacto con la tapa y el piso de la caja. Si el lecho granular se encuentra diluido (con poca densidad), el momento del impacto de la partícula más alta o mas baja, puede no coincidir con el instante en el cual el mayor intercambio de cantidad de movimiento sucede entre el recinto y las partículas. Por esta razón se ha incluido en la Fig. 3.9 la fuerza total ejercida por los granos en el recinto en la dirección z [es decir $F_{part} = F_{granular}^z$, en la Ec. (2.1.22)], que no sólo proporciona una evaluación más precisa del momento del impacto, sino también la intensidad de dichos impactos.

Es importante destacar aquí que la masa efectiva de un modelo masa - resorte - amortiguador está asociada con la respuesta en fase con la fuerza del resorte, mientras que el amortiguamiento efectivo se asocia con la respuesta en fase con la fuerza viscosa.

Para gaps muy pequeños, la respuesta del sistema es similar a la respuesta de un sistema equivalente de un grado de libertad donde la masa total de las partículas es agregada a la masa primaria (es decir, $M_{ef} = M + m_p$). Esto es debido al hecho de que las partículas no son capaces de moverse debido a la restricción impuesta por los recintos muy pequeños. A medida que aumenta ligeramente L_z , las partículas se comportan como un

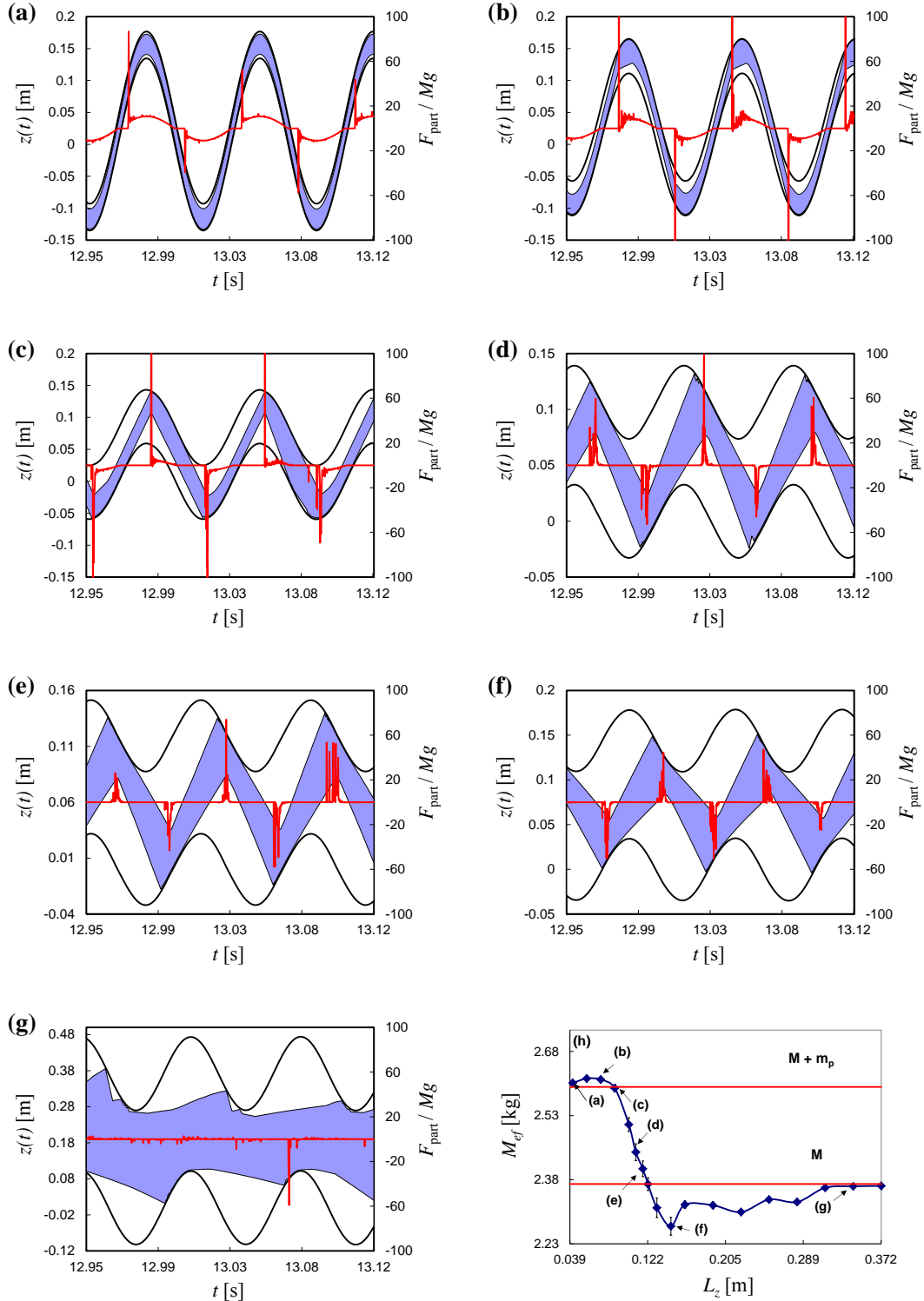


Figura 3.9: Desplazamiento y fuerza de las partículas contra la caja (líneas rojas) para diferentes valores de L_z con $C = 7.6 \text{ Nsm}^{-1}$. Las líneas continuas representan la posición del piso y techo del recinto y el área coloreada indica los límites de la cama granular. (a) $L_z = 0.042 \text{ m}$ y $f = 14.5 \text{ Hz}$. (b) $L_z = 0.057 \text{ m}$ y $f = 14.5 \text{ Hz}$. (c) $L_z = 0.087 \text{ m}$ y $f = 14.5 \text{ Hz}$. (d) $L_z = 0.1095 \text{ m}$ y $f = 15.0 \text{ Hz}$. (e) $L_z = 0.1225 \text{ m}$ y $f = 15.0 \text{ Hz}$. (f) $L_z = 0.147 \text{ m}$ y $f = 15.5 \text{ Hz}$. (g) $L_z = 0.372 \text{ m}$ y $f = 15.0 \text{ Hz}$. (h) Representación de la Fig. 3.8 con la inclusión de flechas que indican los valores de L_z correspondientes a cada panel (a)-(g).

paquete denso que viaja entre el suelo y el techo de la caja (Fig. 3.9(a)). Sin embargo, dentro de un periodo de oscilación, la cama granular se encuentra en pleno contacto con el techo o con el piso del recinto durante porciones importantes de la tiempo. Durante tales periodos de tiempo, las partículas puede considerarse esencialmente como una masa m_p añadida al sistema primario.

Como se observa en la Fig. 3.9(a), en el momento que las partículas dejan el contacto con el techo (piso) e impactan contra el piso (techo), el sistema principal no ha alcanzado aun su máximo desplazamiento hacia abajo (arriba). Por lo tanto, los granos generan un impulso que se transfiere a la caja en contra de la fuerza ejercida por el resorte hacia arriba (abajo). Como consecuencia, la inercia efectiva del sistema durante el impacto es equivalente a un incremento repentino de la masa. Este aumento de masa efectiva supera a la disminución de la misma debida a los cortos períodos de tiempo en los cuales la cama granular se separa del piso o techo (ver los segmentos donde $F_{Part} = 0$ en la Fig. 3.9(a)). El resultado global es una masa efectiva M_{ef} por encima de $M + m_p$.

Si se aumenta L_z , la duración del periodo en que los granos se encuentran en el aire dentro de una oscilación aumenta, pero la transferencia de momento en el impacto también aumenta con un consiguiente aumento general de M_{ef} (ver Fig. 3.9(b)). Eventualmente, la transferencia de la cantidad de movimiento en el impacto es exactamente equilibrada por la pérdida de masa adicional durante los periodos de desprendimiento, tal caso se muestra en la Fig. 3.9(c). Esto genera que el sistema cuente nuevamente con $M_{ef} = M + m_p$. Curiosamente, este cruce se produce cuando la cama granular golpea el piso (techo) en el punto de máximo desplazamiento.

Existen una serie de valores de L_z para los cuales $M < M_{ef} < M + m_p$. En tales casos, la eficiencia de amortiguación es bastante alta. Esto se debe, principalmente, al hecho de que los granos golpean el recinto fuera de fase. En particular, las partículas golpean la base de la caja cuando la masa principal se mueve hacia arriba y la fuerza del resorte se encuentra empujando hacia arriba (Fig. 3.9(d)). Esto produce como resultado una fuerte reducción del desplazamiento máximo del sistema y una masa efectiva superior a M . Sin embargo, debido a que los períodos de desprendimiento son significativamente largos, el agregado promedio en masa debido a los impactos es más pequeño que m_p .

Si los impactos resultan ser siempre en el momento en que el resorte no ejerce fuerza alguna a la masa principal, entonces la transferencia de la cantidad de movimiento no dará lugar al agregado de masa. Dicha situación sucede cuando la masa primaria pasa a través del punto de equilibrio del resorte (es decir, con cero desplazamientos del sistema primario). De hecho, encontramos que existe un determinado valor de L_z para el cual la cama granular impacta el piso (techo) en ese preciso momento y la masa efectiva obtenida por ajuste corresponde a M (es decir, no hay incremento de la masa del sistema, ver Fig. 3.9(e)). Es importante destacar que para este valor de L_z se obtiene también el

amortiguamiento efectivo máximo (ver Fig. 3.7 y Refs. [29, 35, 41]). Por lo tanto, para la L_z óptima, donde se obtiene la máxima amortiguación, la masa efectiva coincide con la masa primaria. Esto significa que la adición de partículas no afectan a la frecuencia de resonancia del sistema si se selecciona la L_z óptima. Desde el punto de vista práctico, bajo tales condiciones, no hay necesidad de realizar una compensación de la masa de las partículas durante el diseño del amortiguador granular.

Como es de esperar, un aumento de L_z más allá del valor de óptima amortiguación, conduce a que la cama granular impacte contra el recinto en fase con la fuerza del resorte, tal como se muestra en la Fig. 3.9(f). Dicho de otra forma, los granos golpearan el piso de la caja cuando el resorte se encuentra empujando hacia abajo. Por lo tanto, se produce un efecto inercial aparente en el cual el sistema sufre una disminución repentina en masa, dando como resultado una masa efectiva menor que la masa primaria.

Valores de gaps muy altos producen una expansión significativa de los granos. La cama granular entra en un estado similar a un gas, con impactos de sólo unas pocas partículas contra la caja en cada oscilación (ver Fig. 3.9(g)), lo cual transfiere poca cantidad de movimiento a la masa principal y el sistema presenta una M_{ef} cercana M .

3.3. Sumario y conclusiones

El uso de partículas disipativas resulta un mecanismo viable para la amortiguación de un sistema mecánico. Los resultados muestran que para obtener la mayor reducción de la amplitud de oscilación, en frecuencias cercanas a la resonancia del sistema, es necesario dimensionar el recinto en forma precisa o alternativamente seleccionar apropiadamente el tamaño y número de partículas a ser usadas. En particular, se ha encontrado, al igual que para un sistema vibrante horizontal (ver por ejemplo Ref. [33]), que existe un tamaño óptimo de L_z para el cual la amplitud en resonancia Z_{res} encuentra el menor valor.

Se ha considerado la masa efectiva y de amortiguamiento efectivo del sistema de un grado de libertad mediante el ajuste de la función de respuesta en frecuencia de un sistema simple masa-resorte-amortiguador viscoso. A través de estos ajustes, se ha estudiado el efecto de la altura L_z del recinto de contención

Se ha mostrado que la masa efectiva del sistema alcanza los dos límites descriptos en la literatura para recintos pequeños y grandes. Sin embargo, estos límites no son abordados de una manera monótona y son claramente sobrepasados. Para alturas L_z pequeñas, el sistema presenta masas efectivas por encima de $M + m_p$. Por otro lado, para grandes recintos, las masas efectivas caen por debajo de M . Tal comportamiento puede explicarse considerando tanto el período de tiempo durante el cual la cama granular está en contacto con la caja como los efectos inerciales debido a los impactos de los granos contra el piso y el techo, en fase o en contrafase con la fuerza restitutiva del resorte.

Curiosamente, se ha encontrado que el valor de L_z para el cual se cruza M_{ef} con M

coincide con el valor óptimo del amortiguamiento que se describe en la literatura. Debido a esto, un método simple para encontrar la caja prismática óptima podría consistir en encontrar la intersección de la línea horizontal M en el gráfico M_{ef} vs L_z (ver Fig. 3.8). Creemos que tal estimación puede ser un enfoque más adecuado que la búsqueda de un máximo en el gráfico C_{ef} vs L_z .

Los efectos descritos, donde la M_{ef} supera los límites asintóticos, están presentes fuera del rango de L_z cercanos a la amortiguación máxima y podría ser considerado de interés secundario en aplicaciones industriales. Sin embargo, el diseño puede requerir el trabajo del amortiguador de partículas fuera de la zona de amortiguación óptima y en una de las regiones mencionadas. En particular, para los recintos poco más alto que el correspondiente a la amortiguación óptima, se logran masas efectivas sólo ligeramente por debajo de la masa primaria. Esto implica que la frecuencia de resonancia permanecerá casi inalterada tras la adición de las partículas. Además, con dichos valores de L_z , se consiguen factores de amortiguamiento importantes (aunque no máximos), manteniendo la FRF una forma muy similar (sin la aparición del "hombro") a la observada para un sistema masa-resorte-amortiguador viscoso sin el dispositivo granular incorporado. Esto último puede simplificar la predicción del comportamiento del sistema con el amortiguador granular en tales condiciones.

ANÁLISIS NO LINEAL DEL AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

La eficiencia de un amortiguador de partículas está directamente relacionada con los movimientos interactivos de los granos dentro de la cavidad. Debido a las colisiones inelásticas y a la fricción, el sistema cuenta con un comportamiento altamente no lineal. La característica fundamental que afecta el rendimiento de la amortiguación es el estado granular dentro del recinto. Distintas fases, con comportamientos similares a sólidos, a líquidos o a gases, se han identificado al hacer vibrar los sistemas granulares [31].

Distintos autores se han centrado en el estudio del comportamiento del dispositivo, independientemente de la compleja dinámica interna de las partículas. Si bien existen modelos teóricos derivados de sistemas mono-partícula que si se enfocan en el estudio del comportamiento no lineal dentro del recinto (ver por ejemplo Refs. [15, 29, 81] en relación con el rendimiento de la amortiguación y Refs. [16, 82, 83] en relación con la dinámica no lineal), estos no son aplicables para el análisis de la dinámica no lineal de sistemas multi-partículas.

En este capítulo se analiza la dinámica interna del amortiguador de partículas óptimo obtenido en el Capítulo 3. Se distinguen movimientos periódicos y caóticos de la cama granular dentro del recinto de contención cuando se excita el sistema primario a diferentes frecuencias. Del análisis se observa que las partículas transitan desde un movimiento periódico a un movimiento caótico, con signos de una transición por cuasi-periodicidad, cuando aumenta la frecuencia de excitación. Además, el rendimiento óptimo de amortiguación se produce en una ventana de periodicidad.

4.1. Análisis no lineal

El modelo mecánico descrito en la Sección 2.1.2, con las características óptimas encontradas en la Sección 3.2, es resuelto numéricamente para obtener una secuencia escalar de la posición del centro de masa de la cama granular y de la posición de la caja a

lo largo del eje z , instante a instante. Se ha demostrado en experimentos (ver por ejemplo Ref. [44]), que el movimiento granular es bien descrito por el movimiento del centro de masa de los granos. Por lo tanto, la dinámica no lineal del comportamiento granular dentro del recinto de contención puede ser analizada a partir de las series temporales obtenidas de la simulación vía DEM.

El análisis de sistemas dinámicos no lineales a partir de series de tiempo consiste, principalmente, en el análisis lineal de señales para identificar movimientos periódicos; la reconstrucción del espacio de fases; la determinación de secciones de Poincaré; y la obtención de los máximos exponentes de Lyapunov (MLE) para identificar el comportamiento caótico. En las próximas secciones se presenta un breve resumen de las principales técnicas empleadas en el análisis no lineal de series temporales.

Para el análisis se ha utilizado TISEAN [84, 85]. Este programa implementa distintos algoritmos para el análisis de sistemas dinámicos a partir de series de tiempo.

4.1.1. Análisis lineal de señales

La transformada de Fourier, a través por ejemplo del algoritmo propuesto por Cooley y Tukey [86] (Fast Fourier Transform - FFT), es la técnica más utilizada para analizar series temporales en el dominio de frecuencia. La FFT de una señal periódica presenta espectro discreto, donde un número finito de frecuencias contribuyen a la respuesta del sistema. Por otro lado, las señales caóticas presentan espectros continuos de rango limitado. En este caso, la densidad espectral se extiende sobre un ancho de banda más amplio. Sin embargo, en muchas situaciones puede ser difícil distinguir ruido¹ de caos². En esta tesis se utiliza la FFT para encontrar movimientos regulares de las partículas en el amortiguador granular y frecuencias sub-armónicas, con el fin de identificar posibles duplicaciones del periodo³.

4.1.2. Reconstrucción del espacio de fases

Un sistema dinámico consiste en un conjunto de posibles estados que se suceden en el tiempo, junto a una regla que define el presente estado en términos del estado anterior. Además se requiere que la regla que define la transición entre estados sea determinística,

¹El ruido por lo general denota la pequeña perturbación aleatoria de fondo ya sea de origen mecánico, térmico o eléctrico [87].

²El caos determinista denota al movimiento irregular que se genera en los sistemas no lineales (en los cuales las leyes dinámicas determinan la evolución a partir del estado previo) y corresponde a un tipo de movimiento que es sensible a cambios en las condiciones iniciales donde las trayectorias que comienzan en estados cercanos divergen exponencialmente [88].

³La duplicación de periodo se refiere a un proceso por el cual al cambiar continuamente el parámetro de control, la respuesta periódica del sistema duplica su periodo sucesivamente. Más allá de un valor crítico del parámetro de control, el movimiento se vuelve caótico. Si bien, este escenario de caos se ha observado en muchos sistemas físicos, no es la única ruta al caos existente [87].

lo cual significa que se puede determinar el estado actual simplemente conociendo los estados anteriores. En este contexto, *estado* se refiere a toda la información necesaria para poder determinar que hará o como evolucionará el sistema a través de su regla de transición.

Una manera de representar la respuesta de un sistema dinámico se logra a través del espacio de fases. En un sistema completamente determinista, el espacio de fases consiste en la construcción de un espacio que tiene tantas dimensiones como variables necesarias para especificar el estado del sistema dinámico dado, de tal manera que la especificación de un punto en este espacio especifica el estado del sistema y viceversa. Entonces, es posible estudiar la dinámica del sistema mediante el estudio de la dinámica de los puntos del espacio de fases correspondientes [85]. Una gran cantidad de sistemas pueden ser descritos por un conjunto (posiblemente infinitos) de estados y algún tipo de regla de transición que especifica cómo el sistema puede pasar de un estado a otro.

Al realizar un experimento u obtener resultados de simulaciones, lo observado no es un estado del espacio de fases sino una secuencia temporal de una magnitud. Probablemente será sólo una secuencia de medidas escalares que estará relacionada de alguna manera con el estado del sistema. Por lo tanto, es posible obtener una representación parcial de la trayectoria en el espacio de fases a partir de la serie temporal obtenida del experimento o de la simulación. La técnica más importante para la reconstrucción del espacio de fases desde series temporales es el método del tiempo de retardo [89, 90]. Básicamente, la reconstrucción del espacio de fases considera que una señal (la serie temporal) contiene información multivariada del proceso que generó dicha serie. Esta información, acerca de las variables de estado no observadas, se puede utilizar para predecir el estado actual de la dinámica. Por lo tanto, desde un punto de vista topológico, una serie de tiempo escalar se puede utilizar para construir una serie de tiempo equivalente a la dinámica original del sistema aún sin tener la información de la totalidad de las variables de estado del sistema en estudio.

Sea un sistema en el cual interactúan d variables dependientes del tiempo en cada estado X (con $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))$), al contar con mediciones de una de las d variables (por ejemplo de $x_1(t)$) se obtienen valores $s_1 = x_1(T), s_2 = x_1(2T), s_3 = x_1(3T), \dots, s_k = x_1(kT)$ muestreados en intervalos de longitud T que conforman una serie temporal. A partir de esta serie se puede construir un nuevo espacio de fases (embedding space en su terminología en inglés) con los valores de retardo definidos como:

$$\vec{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_n), \quad (4.1.1)$$

donde m es la dimensión del nuevo espacio y τ el tiempo de retardo. Existen distintos criterios para elegir estos parámetros, tal como se verá mas adelante en esta tesis..

Así, la reconstrucción del atractor¹ a partir del método de retardo se logra graficando en \mathbb{R}^m los vectores (4.1.1) para cada tiempo, de acuerdo con los datos de la serie de tiempo [85, 90].

Las consecuencias prácticas de este enfoque son obvias. No interesa la complejidad de un sistema dinámico, si una sola variable de ese sistema está disponible, es posible reconstruir el espacio de fases original a través de técnicas de inserción (embedding).

El teorema de Takens [91] señala que muchas de las propiedades topológicas fundamentales del atractor original en el espacio de fases se conservan y pueden ser inferidas a partir del espacio de fases reconstruido. Es decir, que una imagen uno a uno del conjunto d -dimensional de puntos visitados por un sistema dinámico estacionario (su atractor) puede ser reconstruida a partir de una inserción en un espacio de retardo con dimensión $m > 2d$. Si la secuencia \vec{s}_n consiste en mediciones escalares del estado de un sistema dinámico, entonces bajo ciertas suposiciones generales, la inserción de retardo proporciona una imagen uno en uno de la serie original, siempre que m sea suficientemente grande.

Se supone que las medidas \vec{s}_n son una parametrización temporal de la proyección unidimensional del atractor que gobierna el sistema dinámico a estudiar, y por ser una proyección se espera que las trayectorias del atractor se solapen en dimensiones menores a la dimensión original. Los solapamientos irán desapareciendo a medida que se incrementa la dimensión m de inserción. El teorema de Takens especifica que si el sistema original se encuentra determinado por una dimensión d , escogiendo $m > 2d$ es suficiente para eliminar cualquier solapamiento de la trayectoria, eliminando cualquier ambigüedad en la reconstrucción.

Existen distintos trabajos sobre la elección óptima de parámetros m y τ , sin embargo, estos valores óptimos dependen en gran medida de la aplicación. En esta tesis, se ha utilizado el método de *Falsos Vecinos Cercanos* [92] para determinar la mínima dimensión de inserción requerida y el método de *Tiempo de Retraso de Información Mutua* para obtener el retardo [93].

¹Un atractor es un conjunto de puntos o un sub-espacio del espacio de fases hacia el cual la historia temporal del sistema se aproxima después de haber desaparecido el transitorio inicial. Los atractores clásicos están asociados con objetos geométricos en el espacio de fases; el estado de equilibrio se asocia con un punto; el movimiento periódico o un ciclo límite se asocia con una curva cerrada; un movimiento cuasi-periódico se asocia con una superficie en un espacio de fases tridimensional. Un "atractor extraño" se asocia con un objeto geométrico llamado conjunto fractal. En un espacio de fases tridimensional, el conjunto fractal de un atractor extraño se parece a una colección de un conjunto infinito de hojas o superficies paralelas, algunas de las cuales están separadas por distancias infinitesimales [87].

Falsos Vecinos Cercanos

La dimensión más baja en la que se despliega el atractor sin que ocurran solapamientos en las orbitas¹ se llama dimensión de inserción m_i .

Si se supone que se tiene una reconstrucción del espacio de fases de dimensión m con vectores de datos según:

$$\vec{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_n), \quad (4.1.2)$$

el vecino más cercano en el espacio de fases del vector \vec{s}_n , el mismo será:

$$\vec{s}_n^{vc} = (s_{n-(m-1)\tau}^{vc}, s_{n-(m-2)\tau}^{vc}, \dots, s_n^{vc}). \quad (4.1.3)$$

Si el vector \vec{s}_n^{vc} es realmente un vecino de \vec{s}_n , entonces proviene de una vecindad de \vec{s}_n en la dinámica original. El vector estará adelante o atrás de \vec{s}_n y llega a la vecindad de \vec{s}_n por evolución de la órbita a lo largo del atractor. Si \vec{s}_n^{vc} es un falso vecino de \vec{s}_n , habiendo llegado a su vecindario por una proyección de una dimensión más alta debido a que la dimensión m actual no despliega completamente al atractor, entonces aumentando la dimensión a $m + 1$ se moverá este vecino falso de las proximidades de \vec{s}_n . Inspeccionando todos los datos de la serie y verificando con cuál dimensión se remueven todos los vecinos falsos, se removerán secuencialmente los solapamientos de las orbitas de dimensión más baja. Cuando no se detecten más falsos vecinos cercanos, se habrá identificado el valor m_i (dimensión de inserción) en el cual el atractor está completamente desplegado.

La idea del algoritmo utilizado para obtener los falsos vecinos es la siguiente. Para cada punto \vec{s}_i en las series de tiempo se busca su vecino más cercano \vec{s}_j en un espacio m -dimensional. A continuación se calcula la distancia $\|\vec{s}_i - \vec{s}_j\|$. Luego se iteran los dos puntos, variando la dimensión y se calcula:

$$R_i = \frac{|\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_{j+1}|}{\|\vec{s}_i - \vec{s}_j\|}. \quad (4.1.4)$$

Si R_i supera un determinado umbral de R_t , este punto se marca como falso vecino cercano [92].

¹En el estudio de los sistemas dinámicos, una órbita es una colección de puntos relacionados por la regla de la evolución del sistema dinámico. La órbita es un subconjunto del espacio de fases y el conjunto de todas las órbitas es una partición del espacio de fases, es decir diferentes órbitas no se cruzan en el espacio de las fases. La comprensión de las propiedades de órbitas usando el método topológico es uno de los objetivos de la teoría moderna de los sistemas dinámicos.

Tiempo de Retardo de Información Mutua

En la teoría de probabilidad y la teoría de la información, la información mutua $I(X; Y)$ entre dos variables aleatorias X e Y es una cantidad que mide la dependencia mutua entre estas dos variables:

$$I(X; Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \ln \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right), \quad (4.1.5)$$

donde $p(x, y)$ es la función de distribución de probabilidad conjunta entre X e Y y $p(x)$ y $p(y)$ son las funciones de distribución marginales de X e Y respectivamente.

La información mutua mide la información que X e Y comparten, es decir, mide como conociendo una de estas variables se reduce la incertidumbre sobre la otra. Así por ejemplo, si X e Y son independientes, entonces conocer X no da ninguna información sobre Y y viceversa, por lo tanto su información mutua será cero. Por otro lado, si X e Y son idénticas, entonces toda la información contenida en X es compartida con Y , es decir, conociendo X se determina el valor de Y y viceversa.

A diferencia de la función de correlación Φ que presenta una medida lineal de la correlación entre las variables X e Y , si las series analizadas son la respuesta temporal de un sistema no lineal, existirá pérdida de información al usar $\Phi(X; Y)$ para detectar algún tipo de correlación no lineal entre las mismas.

El algoritmo utilizado para elegir el tiempo de retardo propone tomar el primer mínimo de la función de información mutua calculado entre las componentes de la misma serie $I(X; X)$. Este criterio presenta grandes ventajas debido a que la información mutua es la herramienta correcta para analizar series de tiempo en sentido no lineal [84, 94].

4.1.3. Mapa de Poincaré y exponentes de Lyapunov

Un método ampliamente utilizado, que permite distinguir órbitas regulares de caóticas, es el cálculo de las secciones de Poincaré. Un mapa de Poincaré [95] es un mapeo de puntos sobre un plano S_i (una sección de Poincaré), transversal a la trayectoria. Este mapeo es obtenido a partir de los puntos de intersección de la trayectoria con S_i . Por lo tanto, un mapa de Poincaré puede ser interpretado como un sistema dinámico discreto, con un espacio de fases de una dimensión menor que el original del sistema dinámico continuo analizado. La aplicación más importante de este mapeo es el estudio de estabilidad asintótica de las órbitas periódicas o cuasi-periódicas.

Si bien, inicialmente, se puede observar un comportamiento caótico del sistema a través del mapa de Poincaré y del espectro de potencia, la respuesta caótica de la cama granular sólo puede ser confirmada mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Es decir, el mapa de Poincaré da una descripción cualitativa del fenómeno caótico, mientras que los exponentes de Lyapunov ofrecen una herramienta cuantitativa para la

caracterización de la dinámica.

El exponente de Lyapunov mide la atracción o separación exponencial en el tiempo de dos trayectorias adyacentes en el espacio de fases con diferentes condiciones iniciales.

Si se supone que se parte de dos condiciones iniciales x_0 y $x_0 + \epsilon_0$ para $t = 0$, y se deja evolucionar el sistema a lo largo del tiempo, se obtienen dos trayectorias. Al calcular la distancia entre las trayectorias, ésta evolucionará de manera exponencial de la siguiente forma:

$$\epsilon_t \approx \epsilon_0 e^{\lambda t}, \quad (4.1.6)$$

Si el exponente $\lambda < 0$, las trayectorias convergerán asintóticamente, ya que $\epsilon_0 e^{\lambda t} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por el contrario, si el exponente $\lambda > 0$ las trayectorias se alejan exponencialmente una de la otra. Si el espacio de fases del sistema es acotado, esta divergencia exponencial es lo que se llama sensibilidad a condiciones iniciales.

La tasa de separación puede ser diferente para diferentes orientaciones de vector de separación inicial. Por lo tanto, existen tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones del espacio de fases. Es común referirse al mayor de los mismos como el Máximo Exponente de Lyapunov (MEL), debido a que este determina la caoticidad de un sistema dinámico. Un MEL positivo indica normalmente un comportamiento caótico del sistema dinámico [87]. Se debe tener en cuenta que un vector arbitrario de separación inicial típicamente contendrá alguna componente en la dirección asociada con el MEL, y debido a que la tasa de crecimiento es exponencial, el efecto de los otros exponentes se volverá despreciable durante la evolución temporal.

En esta tesis, se utilizó el método de la dimensión de inmersión propuesto por Kantz [85, 96] para estimar el MEL desde series temporales.

Algoritmo de Kantz para el cálculo del MEL

Dado que un MEL positivo es una fuerte indicación de caos, es de considerable interés determinar su valor para una serie de tiempo dada. El primer algoritmo para este propósito fue sugerido por Wolf et al. [97]. Desafortunadamente, se requiere mucho cuidado al usarlo y se puede obtener resultados incorrectos fácilmente. Este algoritmo no permite poner a prueba la presencia de divergencia exponencial, sólo asume su existencia. Por lo tanto se obtiene un exponente finito aún series temporales estocásticas, donde el exponente real debería ser infinito ($\lambda = \infty$).

El algoritmo de Kantz [85, 96], utilizado en esta tesis, pone a prueba directamente la divergencia exponencial de trayectorias cercanas y por lo tanto permite decidir si realmente tiene sentido calcular un exponente de Lyapunov para un determinado conjunto de datos.

Al considerar una representación de la serie temporal como una trayectoria en el espacio de inserción, y si se supone que se observa un retorno cercano $\vec{s}_{n'}$ a un punto

previamente visitado \vec{s}_n , entonces se puede considerar la distancia $\epsilon_0 = \vec{s}_n - \vec{s}_{n'}$ como una pequeña perturbación que debe crecer exponencialmente en el tiempo. Su futuro se podrá leer desde la serie temporal: $\epsilon_l = \vec{s}_{n+l} - \vec{s}_{n'+l}$. Si se encuentra que $\epsilon_l \approx \epsilon_0 e^{\lambda l}$ entonces λ será el MEL. Es importante recordar aquí que en el espacio de fases las distancias espaciales no crecen en todas las direcciones con la misma velocidad, es más, localmente estas distancias se pueden reducir, por lo tanto el exponente de Lyapunov será la tasa de divergencia promedio sobre todos los datos.

Sobre la base del procedimiento anterior, se puede obtener un estimador robusto consistente e imparcial para el MEL. Para esto se elige un punto \vec{s}_n de la serie de tiempo en el espacio de inserción y se seleccionan todos los vecinos $\Xi(\vec{s}_n)$ dentro de un entorno pequeño δ . Luego se calcula el promedio de distancias entre todos los vecinos seleccionados y el punto de referencia de trayectoria como una función de tiempo relativo. Entonces:

$$S(\delta, m, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{1}{|\Xi(\vec{s}_n)|} \sum_{\vec{s}_{n'} \in \Xi(\vec{s}_n)} |\vec{s}_{n+t} - \vec{s}_{n'+t}| \right), \quad (4.1.7)$$

si $S(\delta, m, t)$ presenta un crecimiento lineal, la pendiente de este crecimiento será una estimación del MEL de la serie temporal [85, 96].

4.2. Resultados numéricos

Se ha simulado la vibración del sistema con un amortiguador de partículas (ver Sección 2.1.2) por 196.83 s. Después de un transitorio inicial (de aproximadamente 5 s), el sistema alcanza un estado estacionario¹. Una evaluación sencilla de la eficiencia efectiva del amortiguamiento puede ser realizada por el ajuste de la FRF obtenida a la correspondiente a un sistema de un grado de libertad bajo la acción de un movimiento armónico de base con amortiguador viscoso, tal como se expone en la Sección 3.2.1. En este capítulo sólo se realiza un ajuste para obtener M_{ef} , el mismo pretende estimar el corrimiento de la frecuencia de resonancia debido al aumento de la masa del sistema, como se explica en la Sección 3.2.

La Fig. 4.1 muestra la FRF del sistema primario provisto de un amortiguador de partículas en comparación con la FRF del sistema primario sin la adición del mismo. Se puede ver que la adición de las partículas disipativas produce una gran disminución en la amplitud de respuesta en las cercanías de la frecuencia de resonancia. Además, se presentan las distintas áreas en donde el comportamiento dinámico del centro de masa

¹A diferencia de los parámetros utilizados en la Sección 3.2, para todos los análisis realizados en esta sección se han corrido simulaciones particulares con un tiempo de simulación quince veces mayor (196.83 s), con el fin de obtener series temporales de gran longitud para un estudio correcto de la dinámica no lineal.

de la cama de granos varia desde movimientos periódicos a caóticos pasando por una fase de transición. En las zonas caóticas se grafica el valor del MEL estimado según el algoritmo de Kantz (ver Sección 4.1.3). En las siguientes secciones se describirán los distintos comportamientos dinámicos de la capa de granos y se hará referencia a la Fig. 4.1 reiteradamente.

4.2.1. Comportamiento periódico

A baja frecuencia de excitación (mucho más baja que la frecuencia de resonancia), la aceleración del sistema primario es menor que la aceleración de la gravedad y la cama granular se encuentra siempre en contacto con el suelo de la caja. Así, el centro de masa de las partículas sigue un movimiento regular. Este comportamiento puede verse en la Fig. 4.2.

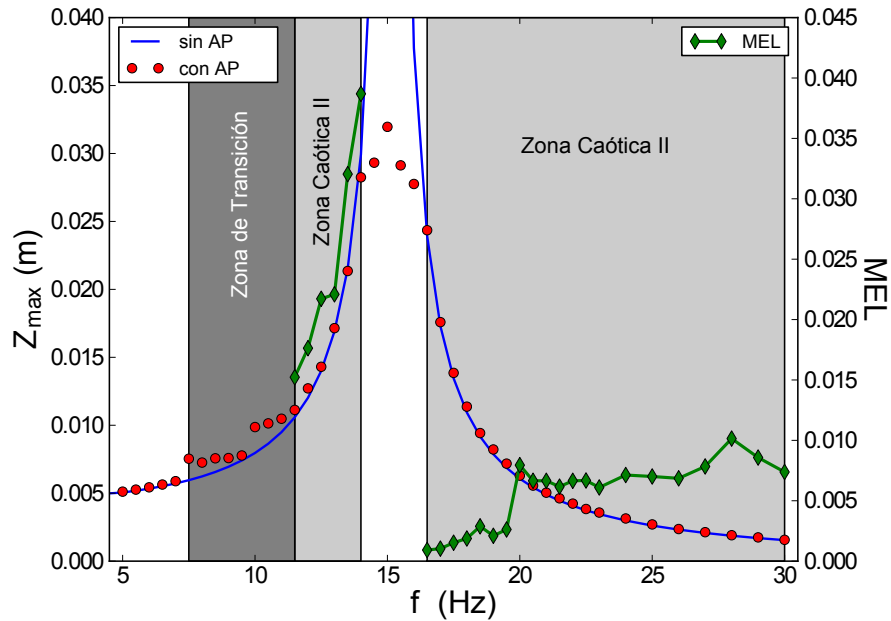


Figura 4.1: Función de respuesta en frecuencia del sistema primario. La línea continua azul corresponde al sistema de un grado de libertad sin partículas en el recinto y con una masa equivalente al sistema con el amortiguador granular. Los círculos rojos corresponden a la FRF para el dispositivo óptimo obtenido por simulación vía DEM. Los rombos verdes representan el MEL para cada frecuencia en la región caótica. El área de color gris oscuro corresponde a la transición al caos, las áreas grises claras corresponden a las zonas caóticas, y las blancas a los movimientos periódicos de la trayectoria del centro de la masa de la cama granular.

En la Fig. 4.2(a) se representa la trayectoria, a lo largo del eje z , del centro de masa granular y el movimiento del suelo y el techo de la caja durante algunos períodos de excitación en régimen estacionario para una frecuencia de base $f = 5.5$ Hz. En dicha

figura, al igual que en el Capítulo 3, se indica la posición de la cama granular dentro del recinto por una banda limitada por las coordenadas z de la partícula más alta y más baja en cada momento de la simulación. Con el fin de mostrar el movimiento regular del centro de masa en esta frecuencia, se representa en la Fig. 4.2(b) la sección de Poincaré (a través de un mapeo estroboscópico). En esta figura se puede ver una sección de Poincaré clásica para un movimiento periódico de una serie de tiempo. Esto es, el punto indica que el sistema corta a la sección de Poincaré en el mismo lugar en cada periodo de excitación. Además, la reconstrucción del atractor del centro de masa (ver Fig. 4.7(a)) es típico de un movimiento regular. Finalmente, la FFT (Fig. 4.2(c)) muestra un pico a la frecuencia de excitación del sistema primario.

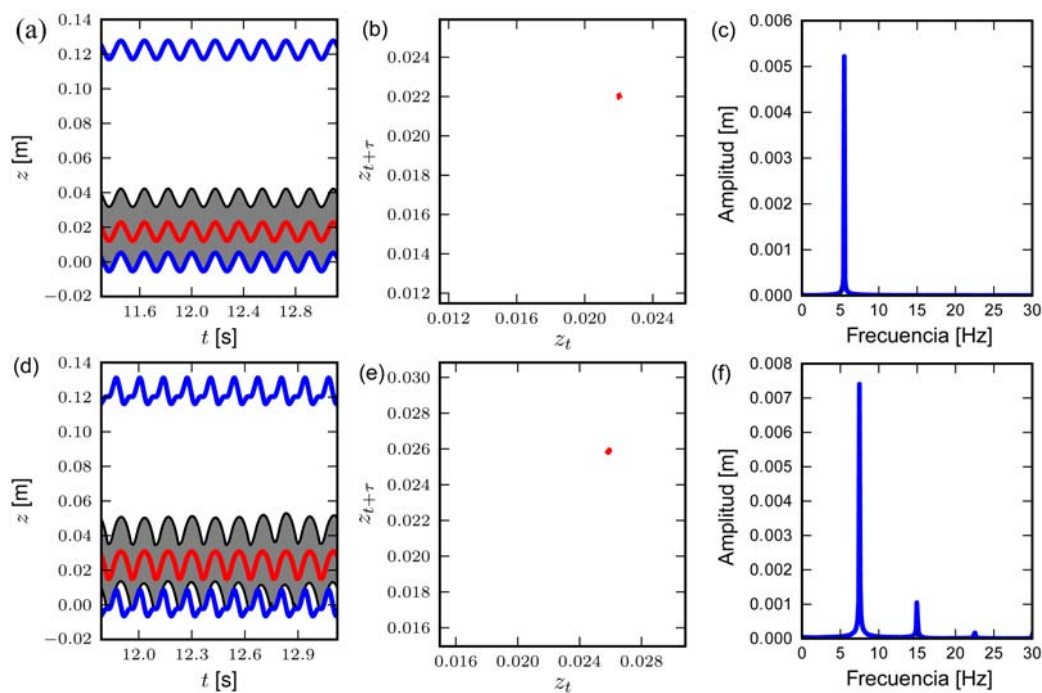


Figura 4.2: Respuesta de la cama granular a las frecuencias de excitación $f = 5.5$ Hz (fila superior) y $f = 7.5$ Hz (fila inferior). **(a)** Desplazamiento de las partículas y del recinto a $f = 5.5$ Hz. Las líneas continuas muestran la posición del piso y del techo del recinto y la zona coloreada indica los límites de la cama granular a través de la posición de la partícula más alta y las más baja en cada instante de tiempo. La línea de color rojo es el movimiento del centro de masa de los granos. **(b)** Mapa de Poincaré para $f = 5.5$ Hz. **(c)** FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 5.5$ Hz. **(d)** Desplazamiento de las partículas y del recinto para $f = 7.5$ Hz (colores como en la Fig. 4.2(a)). **(e)** Mapa de Poincaré para $f = 7.5$ Hz. **(f)** FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 7.5$ Hz.

Claramente, debido a que el nivel de respuesta es demasiado bajo, casi no hay movimiento relativo entre las partículas y entre las partículas y el recinto de contención. Por lo tanto, los granos pueden ser vistos como una masa concentrada que descansa sobre el piso de la cavidad, y la amortiguación efectiva del sistema granular es despreciable. En

la Fig. 4.1 se puede ver que la respuesta del sistema primario a esta baja frecuencia es similar al sistema sin el amortiguador de partículas.

Cuando aumenta la frecuencia de excitación ($f = 7.5$ Hz), el efecto de inercia de las partículas supera la fuerza de gravedad y se desarrolla el movimiento granular. En la Fig. 4.2(d) se traza el movimiento de los granos para dicha frecuencia. Esta figura muestra que se produce un movimiento significativo de las partículas con impactos entre los granos y el suelo del recinto. El nivel de excitación no es lo suficientemente alto para que las partículas puedan impactar el techo de la cavidad, por lo tanto el centro de masa continúa con un movimiento periódico.

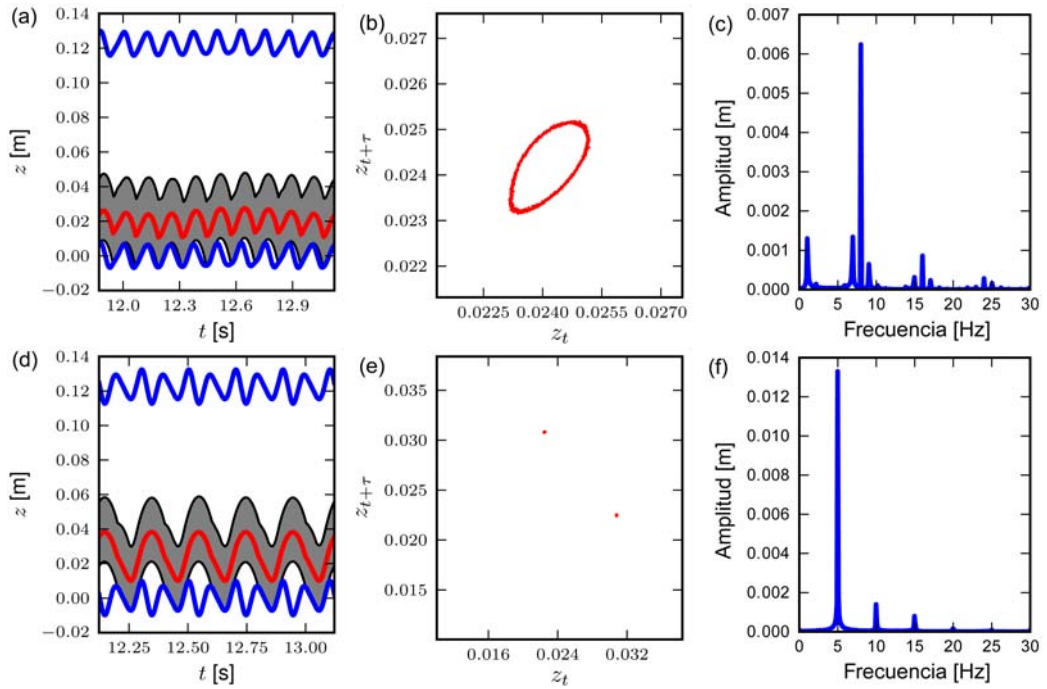


Figura 4.3: Respuesta de la cama granular a las frecuencias de excitación $f = 8.0$ Hz (fila superior) y $f = 10.0$ Hz (fila inferior). (a) Desplazamiento de las partículas y del recinto a $f = 8.0$ Hz. (colores como en la Fig. 4.2(a)). (b) Mapa de Poincaré para $f = 8.0$ Hz. (c) FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 8.0$ Hz. (d) Desplazamiento de las partículas y del recinto para $f = 10.0$ Hz (colores como en la Fig. 4.2(a)). (e) Mapa de Poincaré para $f = 10.0$ Hz. (f) FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 10.0$ Hz.

La sección de Poincaré (Fig. 4.2(e)) es análoga a la observada para $f = 5.5$ Hz. La señal tiene un espectro de armónicos que contiene sólo las componentes cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia de excitación (Fig. 4.2(f)).

4.2.2. Región de transición

Con un aumento mayor en f (mas allá de 7.5 Hz) comienza una fase de transición que finaliza en torno a la frecuencia $f = 11.0$ Hz. La cama granular cambia alternativamente

entre movimientos cuasi-periódicos y movimientos periódicos.

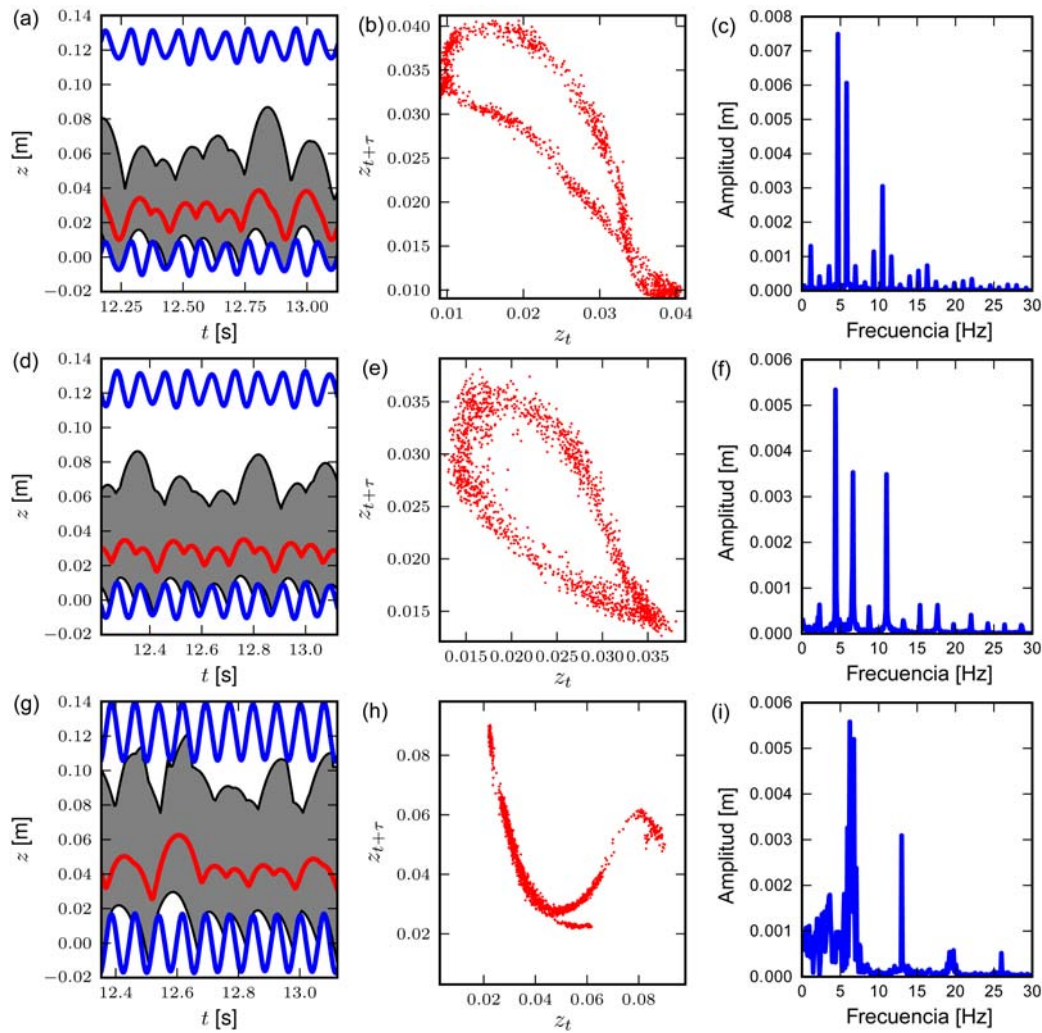


Figura 4.4: Respuesta granular para $f = 10.5$ Hz (primera fila), para $f = 11.0$ Hz (segunda fila) y para $f = 13.0$ Hz (tercera fila). **(a)** Desplazamiento de las partículas y del recinto a $f = 10.5$ Hz (colores como en la Fig. 4.2(a)). **(b)** Mapa de Poincaré para $f = 10.5$ Hz. **(c)** FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 10.5$ Hz. **(d)** Desplazamiento de las partículas y del recinto a $f = 11.0$ Hz (colores como en la Fig. 4.2(a)). **(e)** Mapa de Poincaré para $f = 11.0$ Hz. **(f)** FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 11.0$ Hz. **(g)** Desplazamiento de las partículas y del recinto a $f = 13.0$ Hz (colores como en la Fig. 4.2(a)). **(h)** Mapa de Poincaré para $f = 13.0$ Hz. **(i)** FFT de la trayectoria del centro de masa para $f = 13.0$ Hz.

En los movimientos cuasi-periódicos se observa un atractor tipo toro tal como se muestra en la Fig. 4.3(b) para $f = 8.0$ Hz. El gran número de puntos, en una curva suave cerrada en el mapa de Poincaré, confirma que la respuesta granular es de hecho cuasi-periódica. Dicha respuesta esta compuesta por dos frecuencias que mantienen una relación irracional entre ellas. La FFT (ver Fig. 4.3(c)) muestra un pico a la frecuencia de excitación, y tres picos secundarios, de los cuales uno corresponde a la frecuencia de respuesta de las partículas y los otros dos son simplemente la suma y la diferencia de las

frecuencias de excitación y de respuesta. La aparición de estos picos, que corresponden a fracciones irracionales de la frecuencia de excitación, es prueba de que la respuesta de la cama granular es cuasi-periódica.

Alternando entre estos movimientos cuasi-periódicos, se observan movimientos regulares, que se caracterizan por nubes de puntos en las secciones de Poincaré y picos sub-armónicos en las FFTs. La Fig. 4.3(e) muestra un ejemplo, donde un movimiento de período-2 es encontrado a $f = 10.0$ Hz.

La energía de las partículas dentro del dispositivo continúa siendo baja en esta región y los granos no pueden alcanzar el techo de la caja. El incremento en la amplitud de la vibración del sistema primario produce bajas densidades granulares y la transferencia de la cantidad de movimiento, entre las partículas y el sistema principal, no es significativa aún (ver Fig. 4.3(a) y Fig. 4.3(d)). Por lo tanto, el rendimiento de la amortiguación granular es bajo y la respuesta del sistema primario es similar al sistema sin el amortiguador de partículas montado (ver Fig. 4.1).

4.2.3. Comportamiento caótico: Zona I

A medida que la frecuencia de excitación se acerca a 10.5 Hz, se producen "arrugas" en el toro de la sección de Poincaré. La distorsión del toro se vuelve significativa con el aumento de f , resultando en la ruptura de la curva continua y la formación de una sección toroidal fractal, para $f = 11.0$ Hz. Las dos primeras filas de la Fig. 4.4 muestran el comportamiento granular para $f = 10.5$ Hz y $f = 11.0$ Hz.

El nivel de respuesta es alto en el intervalo comprendido entre $f = 11.0$ Hz y $f = 14.0$ Hz. En esta región, se produce un movimiento significativo entre las partículas, y entre las partículas y la caja, con energía suficiente como para producir impacto con el techo del recinto de contención (ver por ej. la Fig. 4.4(g) para $f = 13.0$ Hz). A estas frecuencias, el mapa de Poincaré consta de un gran número de puntos que forman una curva abierta (Fig. 4.4(h)), lo que sugiere que el atractor es "extraño". Por lo tanto, dicha sección podría indicar una respuesta de tipo caótica para la cama granular.

El ancho de banda de frecuencias que se observa en el espectro (ver Fig. 4.4(i)) sugiere también que el movimiento de las partículas llega a un régimen caótico. El MEL de la respuesta de los granos para el rango de frecuencias entre $f = 11.0$ Hz y $f = 14.0$ Hz se muestra en la Fig. 4.1. Estos valores positivos confirman, finalmente, que el movimiento es de hecho caótico en esta región. Además, se encuentra un atractor caótico en la reconstrucción del espacio de fases, para la gama de frecuencias analizadas en este rango (ver, por ej. Fig. 4.7(b)).

4.2.4. Amortiguamiento óptimo

En el intervalo de frecuencias entre $f = 14.5$ Hz y $f = 16.0$ Hz, se ha encontrado una ventana de periodicidad donde las partículas impactan el recinto dos veces por período de excitación. En este rango de frecuencias, la cama granular entra en un estado tipo sólido [31], chocando tanto el piso como el techo de la cavidad en contra fase con el movimiento primario (ver Fig. 4.5). La compactación granular es alta en este régimen y la transferencia de la cantidad de movimiento en el impacto se incrementa notablemente.

Las velocidades absolutas, del centro de masa de las partículas y del sistema primario, son opuestas entre sí en el instante inmediatamente antes del contacto. Debido a la maximización de la velocidad relativa, el dispositivo logra disipar la máxima energía. Tal como se muestra en la Fig. 4.1, el máximo de la amortiguación efectiva se obtiene en este rango. Un ejemplo del atractor periódico para $f = 14.5$ Hz, se muestra en la Fig. 4.7(c).

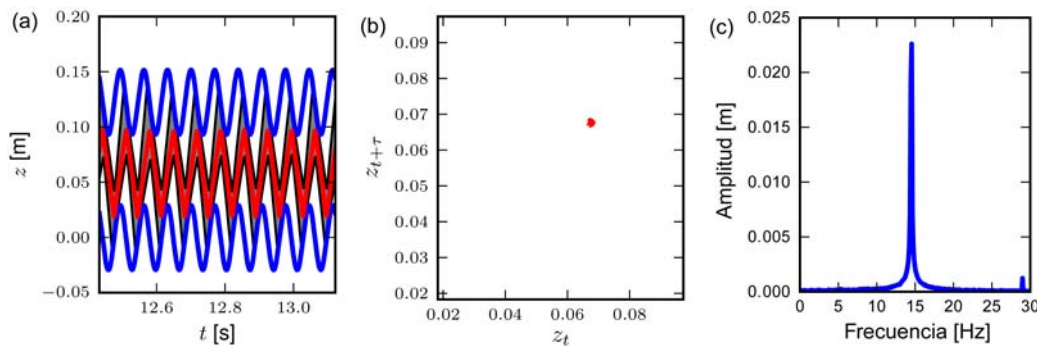


Figura 4.5: Respuesta granular para $f = 14.5$ Hz. (a) Desplazamiento de las partículas y del recinto (colores como en la Fig. 4.2(a)). (b) Mapa de Poincaré. (c) FFT de la trayectoria del centro de masa.

4.2.5. Comportamiento caótico: Zona II

Un aumento adicional en el parámetro de control f , resulta nuevamente en vibración caótica del centro de masa granular. Este comportamiento caótico de la cama granular se observa a partir de $f = 16.5$ Hz, inmediatamente después de finalizada la ventana de periodicidad entorno a la frecuencia de resonancia. En estas frecuencias (por encima de la frecuencia de resonancia del sistema primario) el movimiento de los granos es muy intenso y las partículas entran en un estado similar a un gas [31].

El nivel de excitación es realmente alto en esta zona y la capa de granos se expande ampliamente (compactación granular muy baja). Debido a la alta energía en el sistema, sólo unas pocas partículas impactan las paredes en cada instante de tiempo y nuevamente la respuesta del sistema es similar al sistema sin el dispositivo granular montado (ver Fig. 4.1).

La Fig. 4.6 muestra el comportamiento caótico post-resonancia de la trayectoria del centro de la masa del lecho granular para $f = 21.0$ Hz. La nube de puntos en la sección de Poincaré (Fig. 4.6(b)) y la banda ancha de frecuencias en el espectro (Fig. 4.6(c)) dan indicios que la respuesta granular es caótica nuevamente en este régimen. Más aún, un atractor caótico se identifica claramente a partir de la reconstrucción del espacio de fases para esta frecuencia (Fig. 4.7(d)).

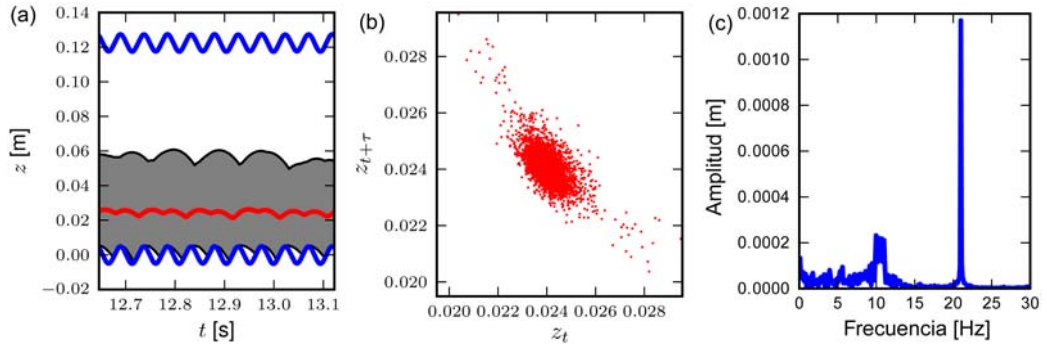


Figura 4.6: Respuesta granular para $f = 21.0$ Hz. (a) Desplazamiento de las partículas y del recinto (colores como en la Fig. 4.2(a)). (b) Mapa de Poincaré. (c) FFT de la trayectoria del centro de masa.

La respuesta del sistema presenta un comportamiento de tipo caótico. Con el fin de justificar esta conclusión, en la Fig. 4.1 se presentan los MEL para este rango de frecuencias. Un MEL positivo es una indicación de que la dinámica es caótica.

Si bien del análisis no lineal se encuentran dos regiones con comportamiento caótico (Zona I y Zona II en Fig. 4.1), una comparación cualitativa del movimiento granular en estas dos regiones (ej. Fig. 4.4(g) y Fig. 4.6(a)) muestra que el comportamiento de las partículas es de hecho diferente en cada zona. El movimiento caótico debajo de la resonancia se caracteriza por partículas que colisionan contra el suelo y el techo. Por otro lado, para frecuencias superiores a la resonancia, la inercia de los granos no permite que el centro de masa siga el movimiento de la caja, por tanto, sólo se producen impactos de unos pocos granos con el piso de la cavidad.

4.3. Sumario y conclusiones

En este capítulo se estudió el comportamiento dinámico del centro de masa de la cama granular dentro del amortiguador de partículas montado en un sistema de un grado de libertad sometido a excitación armónica. Se eligió la L_z óptima.

Se ha observado que los granos experimentan una transición desde un movimiento periódico a un movimiento caótico cuando aumenta la frecuencia de excitación. Para frecuencias de excitación baja, el movimiento de las partículas es periódico y la amor-

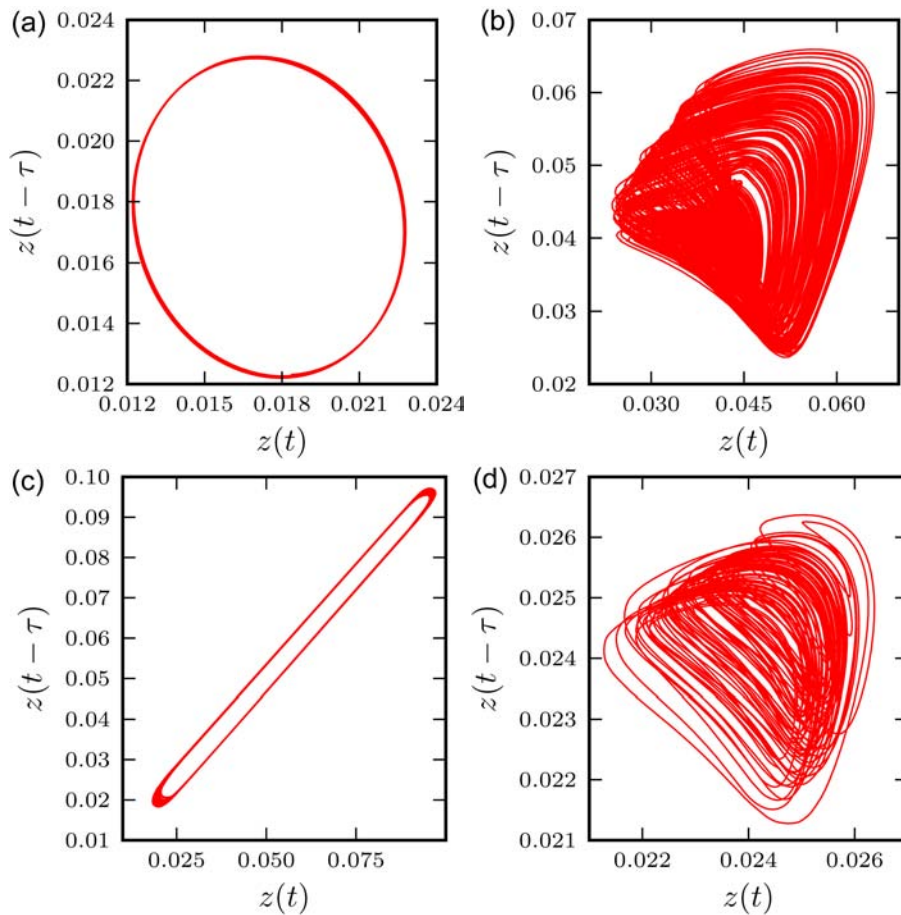


Figura 4.7: Reconstrucción del espacio de fases. **(a)** $f = 5.5$ Hz. **(b)** $f = 13.0$ Hz. **(c)** $f = 14.5$ Hz. **(d)** $f = 21.0$ Hz.

tiguación granular es muy baja, debido a la carencia de movimiento relativo entre las partículas y entre las partículas y la cavidad.

En contraste, para frecuencias de excitación altas (por arriba de resonancia), el lecho granular cuenta con gran energía cinética y su centro de masa se comporta caóticamente. Para mayores frecuencias, la cama granular se expande en forma significativa. A estas frecuencias, los granos entran en un estado similar a un gas, con sólo unas pocas partículas impactando contra la caja en cada oscilación. De hecho, se transfiere poca cantidad de movimiento a la masa primaria y la amortiguación presenta un rendimiento bajo.

No es claro cuál es el tipo de transición al caos, pero hay signos de una transición por cuasi-periodicidad. La aparición de un atractor caótico en la respuesta es precedida por un comportamiento alternativo de movimientos cuasi-periódicos y periódicos con vibraciones sub-armónicas.

Se ha encontrado que las dos zonas caóticas, por encima y por debajo de la resonancia, tienen un comportamiento diferente. Debajo de la frecuencia de resonancia (Zona caótica I), las partículas chocan contra el piso y el techo, mientras que en la zona caótica II el lecho granular sólo choca contra el piso del recinto.

Finalmente, para frecuencias cercanas a la resonancia del sistema primario, se produce una ventana de la periodicidad en la que la amortiguación granular encuentra su máximo. La región de amortiguamiento óptimo se debe, principalmente, al hecho de que las partículas impactan la caja en contra fase, produciendo una fuerte reducción del desplazamiento máximo del sistema primario.

RESPUESTA UNIVERSAL DEL AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

Los amortiguadores granulares son dispositivos que logran la atenuación de las vibraciones mecánicas, explotando el carácter disipativo de la interacción entre partículas macroscópicas. El movimiento de los granos dentro del recinto de contención, cuando la estructura primaria vibra, es capaz de disipar parte de la energía a través de las colisiones no conservativas, reduciendo así la amplitud de la vibración. A su vez, tal como se demuestra en el Capítulo 4, la cama granular puede mostrar tanto comportamientos regulares como caóticos dentro de amortiguador de partículas cuando la estructura primaria es excitada armónicamente. En particular, se muestra un comportamiento periódico de la cama granular dentro de un recinto óptimo en frecuencias alrededor de la resonancia que produce el mayor intercambio de energía con la consiguiente óptima atenuación de la amplitud de vibración.

En este capítulo se muestra que la respuesta de un amortiguador de partículas óptimo es independiente de la interacción partícula-partícula, hasta el punto que las características de fricción (o alternatively de colisión inelástica) se pueden suprimir sin alterar la atenuación de la vibración. Este efecto es explicado en términos de la restitución efectiva nula del sistema granular, causada por el fenómeno del colapso inelástico en sistemas granulares densos. Además, se muestra que esta interpretación permite establecer los límites de la respuesta universal de los amortiguadores de partículas óptimos y se discuten implicaciones cruciales para el diseño y mantenimiento de los amortiguadores granulares.

5.1. Modelo de simulación

Al igual que en capítulos anteriores, se consideró un modelo de simulación de un grado de libertad, tal como se muestra en la Fig. 2.2, el cual fue resuelto vía DEM. El sistema primario consiste en una masa $M = 2.37$ Kg, un resorte lineal de rigidez $K =$

21500 Nm⁻¹ y un amortiguador viscoso con constante de amortiguamiento $C = 7.6$ Nsm⁻¹. El amortiguador de partículas ha sido modelado con $N = 250$ granos esféricos de acero en una caja prismática de lados $L_x = L_y = 0.03675$ m y altura $L_z = 0.1225$ m que representan al recinto de contención óptimo para los parámetros establecidos. Las propiedades del material de las partículas (y paredes del recinto) como así también los parámetros de simulación son similares a los utilizados en el Capítulo 3, los mismos se muestran en la Tabla 5.1.

Propiedad	Valor
Modulo de Young E	2.03×10^{11} Nm ⁻²
Densidad ρ	8030 Kgm ⁻³
Coefficiente de Poisson ν	0.28
Rigidez normal de contacto k_n	$\frac{4}{3}E_*\sqrt{R/2}$
Coefficiente de fricción dinámica μ_d	0.3
Amortiguamiento normal de contacto γ_n	variando entre 0 y 1×10^4 Kgs ⁻¹ m ^{-1/2}
Amortiguamiento tangencial de contacto γ_s	variando entre 0 y 1×10^4 Kgs ⁻¹ m ^{-1/2}
Amplitud de excitación U	0.0045 m
Tiempo de integración δt	8.75×10^{-8} s
Tiempo total de simulación	13.12 s
Radio de las partículas R_i	0.003 m
Masa total de las partículas m_p	0.227 Kg
Frecuencia de excitación f	variando entre 0.5 y 30 Hz

Tabla 5.1: Características materiales y parámetros de la simulación.

5.2. Colapso inelástico

El colapso inelástico [98, 99] en materiales granulares densos es el efecto por el cual un sistema puede disipar la totalidad de su energía cinética en un corto tiempo, incluso si las colisiones tienen un coeficiente de restitución muy alto. En los sistemas densos, el número de colisiones crece tan rápidamente que incluso una disipación diminuta en cada colisión es suficiente para hacer que el sistema se comporte como completamente disipativo.

En una dimensión (1D), la ocurrencia del colapso inelástico puede estimarse usando el producto del numero de partículas N y la disipación por contacto $(1 - e)$. La disipación efectiva $\kappa = N(1 - e)$ tiene un valor critico κ_c arriba del cual ocurre el colapso. En sistemas bidimensionales, el fenómeno también se presenta pero involucra solamente algunas partículas dispuestas casi en línea recta, lo cual concluye que el fenómeno es principalmente un efecto de una dimensión y que las predicciones del valor crítico κ_c deben funcionar correctamente en 2D [100].

Un ejemplo típico del fenómeno, donde dos esferas de igual masa y baja restitución

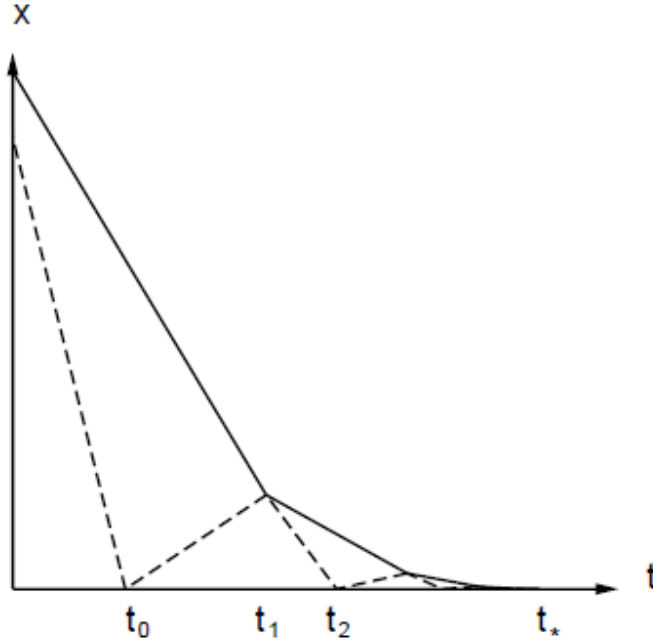


Figura 5.1: Ejemplo de colapso inelástico. Dos partículas colapsando contra una pared. Reproducido de la Ref. [101].

($e \ll 1$) se mueven sobre una línea recta y colisionan contra una pared, puede encontrarse en la Ref. [101]. La Fig. 5.1 muestra las trayectorias espacio-tiempo de las dos partículas colisionando. Sea V el orden de magnitud de las velocidades en el tiempo t_0 , y X la posición de la partícula más alejada de la pared. En el tiempo t_0 , la partícula más cercana a la pared choca contra la pared y rebota con una velocidad $eV \ll V$. Mientras tanto, la partícula mas alejada continua acercándose, y golpea contra la partícula anterior después de un tiempo $t_1 = t_0 + X/[V(1+e)] \approx t_0 + X/V$. En ese instante, la partícula mas cercana esta a una distancia $eV(t_1 - t_0) \approx eX$ de la pared. Después de la colisión, las partículas se separan con una velocidad eV , pero están moviéndose a $V/2$ con respecto a la pared. Al tiempo $t_2 = t_1 + 2eX/V$, la partícula mas cercana a la pared se encuentra colisionando nuevamente contra la pared. En este momento, las partículas tienen una separación de $eV(t_2 - t_1) = 2e^2X$. En todo aspecto, el sistema es exactamente como en t_0 , excepto que las distancias y velocidades han sido re-escaladas. Vale decir que, la escala de distancia se contrajo más rápidamente que la escala de velocidad: $X(t_2) = 2e^2X(t_0) \ll X(t_0)$, mientras que $V(t_2) = V(t_0)/2$. El ciclo se repite para cada escala de tiempo y distancia y puede encontrarse que $(t_4 - t_2) = 4e^2(t_2 - t_0)$ y que un numero infinito de ciclos tiene lugar en un tiempo finito: $t_\infty - t_0 = (t_2 - t_0)/(1 - 4e^2)$.

El modelo requiere ($e \ll 1$). Cuando e aumenta, eventualmente se llegará a un valor para el cual el colapso no ocurre. Este valor critico dependerá del numero de partículas y de hecho $e_c(N) \rightarrow 1$ cuando $N \rightarrow \infty$.

En los sistemas físicos reales donde las colisiones no son instantáneas, los granos

nunca sufren un número infinito de colisiones en un tiempo finito. Esto es debido a que el coeficiente de restitución aumenta con la disminución de la velocidad de impacto v_{imp} [69, 102]. Así, los experimentos muestran que $e \rightarrow 1$ cuando $v_{imp} \rightarrow 0$. Si bien a altas velocidades el coeficiente de restitución se mantiene constante, si un grupo de partículas experimenta un colapso, las velocidades decrecerán y eventualmente el coeficiente de restitución sobrepasará el valor crítico (antes de que la velocidad se reduzca a cero), produciendo que el grupo de partículas en cuestión se disperse.

El colapso inelástico se refiere a una divergencia matemática del número de colisiones por unidad de tiempo cuando se consideran interacciones instantáneas. Los sistemas reales exhiben un incremento notable en la tasa de colisión [98, 103]. Si bien las colisiones no llegan a ser infinitas en un tiempo finito como en una divergencia, la gran cantidad de impactos que se producen conllevan a la pérdida de gran cantidad de energía. Por ejemplo, la colisión de una bolsa plástica llena de partículas contra el piso demuestra un coeficiente de restitución efectivo del empaquetamiento cercano a cero [30]. Así, se ha demostrado recientemente que dichos sistemas pueden modelarse por una única masa m con un coeficiente de restitución efectivo cero y sin propiedades de fricción [104].

En las siguientes secciones se usará el concepto de colapso inelástico para explicar el comportamiento encontrado en los amortiguadores de partículas óptimos.

5.3. Resultados

5.3.1. Efecto de la interacción entre partículas

Con el fin de evaluar el efecto de las interacciones entre partículas, la Fig.5.2(a) muestra la FRF para la altura óptima del recinto de contención y diferentes valores de γ_n y γ_s . Los coeficientes de restitución, normal y tangencial, de la interacción grano-grano son una función de decaimiento exponencial de estos parámetros y dependen de la velocidad relativa en el impacto [61].

Como se puede apreciar en Fig.5.2(a), los diferentes parámetros de interacción producen la misma FRF, lo que sugiere un comportamiento universal de los amortiguadores de partículas óptimos. Vale decir, que incluso eliminar la característica de fricción de las partículas o, alternativamente, eliminar la naturaleza disipativa de la interacción normal, no es suficiente para inducir un cambio en la FRF para un amplio intervalo de frecuencias. Como es de esperar, la eliminación de ambas, tanto la parte disipativa normal como la tangencial de la interacción, convierte al sistema en un sistema conservativo (que no produce atenuación de la respuesta). En este caso (ver rombos en la Fig.5.2(a)), sólo se produce un cambio en la frecuencia de resonancia debido a la adición de la masa m_p (la línea marrón discontinua en la Fig.5.2(a) representa la solución analítica [Ec. (2.1.21)] del sistema de referencia con $M_{ef} = M + m_p$).

La energía disipada, en cada ciclo de oscilación, se muestra en la Fig.5.2(b) como una función de la frecuencia de excitación f . Tal como se discutió en la Sección 3.1.2, tanto la energía disipada por fricción como la disipada por las colisiones inelásticas toman los mayores valores en frecuencias cercanas a la resonancia del sistema. La proporción de energía disipada, a través de un modo u otro (por colisión o fricción) depende de los parámetros de interacción partícula-partícula considerados. Sin embargo, la energía total disipada es independiente de las características de fricción o de restitución de las partículas.

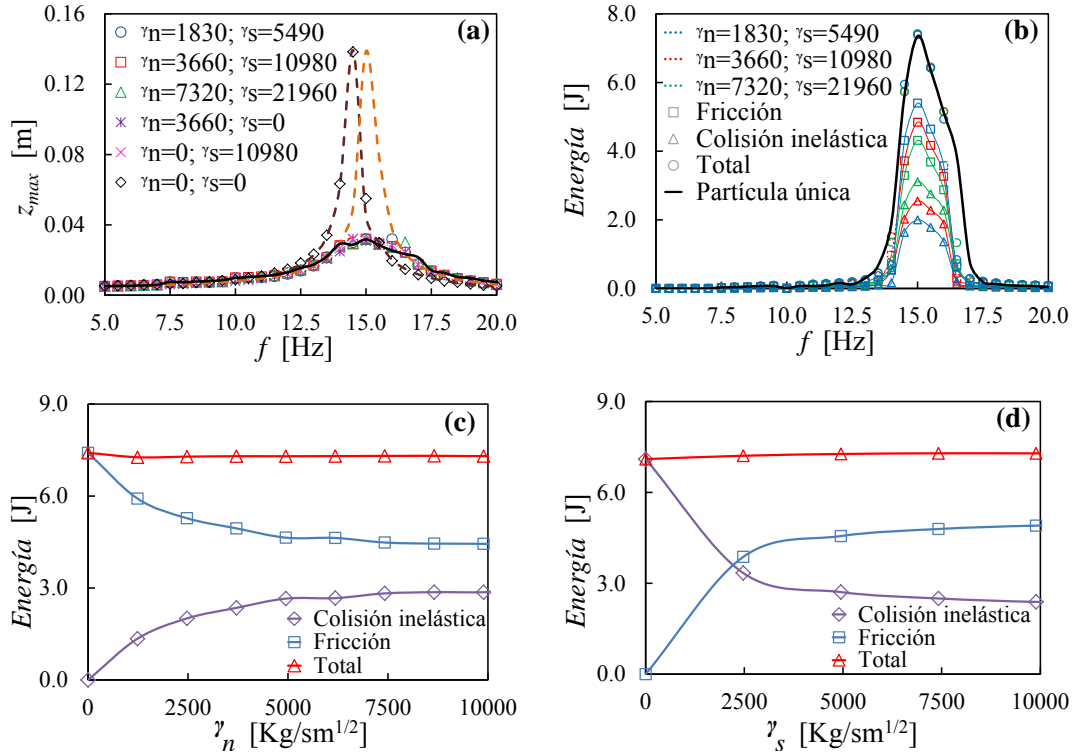


Figura 5.2: **(a)** Función de respuesta en frecuencia para un amortiguador de partículas con altura óptima ($L_z = 0.12255$ m) y $N = 250$ partículas con diferentes parámetros de la interacción γ_n y γ_s (ver leyenda para detalles sobre los valores utilizados en $\text{kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$). Las líneas discontinuas corresponden a la FRF del sistema de referencia [Ec. (2.1.21)] para: el sistema con $M_{ef} = M$ (naranja), y con $M_{ef} = M + m_p$ (marrón). La línea continua de color negro corresponde al modelo del amortiguador de impacto (ver Sección 2.1.3) con $e = 0$. **(b)** Energía disipada por ciclo de oscilación como función de f para los modos de fricción (cuadrados) y de colisión (triángulos) para tres diferentes parámetros de interacciones (ver leyenda). La energía disipada total (círculos) es independiente de γ_n y γ_s . La línea continua de color negro corresponde al modelo del amortiguador de impacto (ver Sección 2.1.3) con $e = 0$. **(c)** Energía disipada en función de γ_n a la frecuencia de resonancia para $\gamma_s = 10980.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$. **(d)** Energía disipada en función de γ_s a la frecuencia de resonancia para $\gamma_n = 3660.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$.

Con el fin de analizar con mas detalle el alcance de la aparente respuesta universal de los amortiguadores granulares, se ha considerado una amplia gama de parámetros

de interacción, γ_n y γ_s . Como puede observarse en la Fig.5.2(c), cuando se considera la respuesta del sistema con $N = 250$ excitado en resonancia, el aumento de γ_n al mantener constante γ_s conduce a un aumento en la energía disipada por el modo de colisión. Lo contrario también es cierto; si γ_s se incrementa, manteniendo constante γ_n , la energía de fricción comienza a tener mayor preponderancia (ver Fig.5.2(d)). Sin embargo, en ambos casos la energía total disipada permanece constante, incluso si γ_n ó γ_s caen a cero. Por lo tanto, el sistema es capaz de disipar la misma cantidad de energía, con independencia de los modos de disipación disponibles para las partículas.

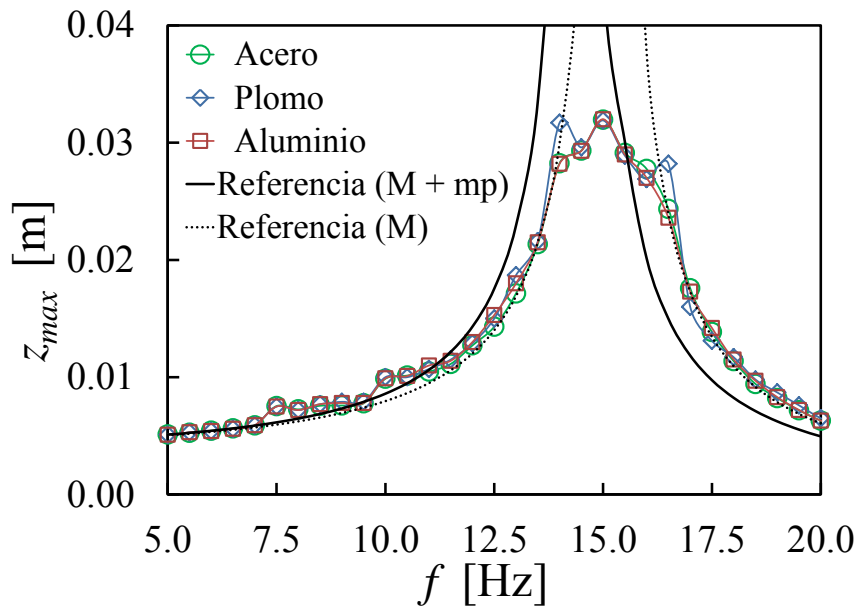


Figura 5.3: Función de respuesta en frecuencia para un sistema con $N = 250$ partículas y distintos materiales. La línea negra discontinua corresponde a la FRF del sistema de referencia [Ec. (2.1.21)] para: el sistema con $M_{ef} = M$. La línea negra continua corresponde a la FRF del sistema de referencia [Ec. (2.1.21)] para: el sistema con $M_{ef} = M + m_p$. Los círculos verdes corresponden a los valores obtenidos mediante DEM con las características materiales del acero. Los rombos azules corresponden a las características materiales del plomo y los cuadrados rojos a las del aluminio. En todas la simulaciones se mantuvo constante la relación de masa M/m_p y las propiedades materiales se obtuvieron de las Refs. [70] y [72].

Con el fin de evaluar otras características, hemos considerado distintas propiedades de los materiales, tales como el módulo de Young y el coeficiente de fricción dinámica, sin embargo, no se obtienen cambios en la FRF. La Fig.5.3 muestra la respuesta en frecuencia para distintos materiales, manteniendo siempre constante la relación de masa M/m_p .

5.3.2. Origen de la respuesta universal

Basados en el fenómeno del colapso inelástico de los materiales granulares (ver Sección 5.2), creemos que la respuesta universal del amortiguador de partículas se encontrará siempre que un gran número de partículas permanezca en un estado más o menos denso [31]. Para una cama granular densa (por ejemplo para la que se muestra en la Fig.3.9(e)), el número de colisiones por unidad de tiempo, cuando los granos impactan con los límites del recinto, aumenta dramáticamente debido a un colapso inelástico efectivo.

Simulaciones recientes que omiten el efecto de fricción entre granos, han sido capaces de ajustar datos experimentales de amortiguadores de partículas en condiciones de microgravedad [44]. Los autores justifican este resultado inesperado diciendo que la fricción no tiene un papel predominante en microgravedad. Sin embargo, este hecho puede explicarse como una consecuencia de la respuesta universal mostrada en la Fig.5.2. Además, de acuerdo con la Fig.5.2(c), la restitución también se puede sintonizar en 1.0 y cualquier fricción no nula será suficiente para lograr la respuesta universal del amortiguador granular, tal como se muestra en la Fig.5.2(a). Esto último indica que un conjunto amplio de diferentes interacciones pueden lograr un colapso inelástico efectivo.

Se ha resuelto numéricamente un modelo unidimensional simple de una única partícula (ver Sección 2.1.3) de masa $m = m_p$ y coeficiente de restitución $e = 0$, que se mueve entre el piso y el techo. Debido a que se ha modelado una única partícula y el modelo no considera el diámetro de la misma, se ha tomado $L_z = 0.0835$ que corresponde aproximadamente al gap del amortiguador granular con $N = 250$ y $L_z = 0.1225$. La FRF de este modelo simplificado se muestra en la Fig.5.2(a) con línea continua negra.

Con el fin de obtener la disipación de energía, se ha calculado la energía cinética ΔT convertida en calor durante el impacto en este modelo, según lo establecido en la Ref. [29]. Luego

$$\Delta T = \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} (v_p^- - v_z^-)^2, \quad (5.3.1)$$

donde v_p^- y v_z^- son las velocidades de la partícula y del recinto respectivamente antes del impacto. Los resultados obtenidos a partir de la Ec. (5.3.1) se presentan en la Fig.5.2(b) con línea continua negra. Se puede apreciar en esta figura que la disipación total de energía del amortiguador de partículas es bien descripta por la Ec. (5.3.1) para el rango de frecuencia estudiado.

Es evidente que el modelo simplificado de una partícula con $e = 0$ proporciona la esencia para describir la amortiguación granular en un recinto prismático de dimensiones óptimas. Por lo tanto, el diseño puede basarse en este modelo simple, sin preocuparse por una detallada selección de las propiedades de las partículas. Trabajos anteriores han utilizado modelos un poco más complicados, en donde el coeficiente de restitución es

obtenido de un ajuste de experimentos (ver por ejemplo Refs. [29, 44]). Los resultados presentados en esta tesis indican que esta complicación puede ser innecesaria.

5.3.3. Límite de la respuesta universal

El colapso inelástico sucederá sólo si se considera un gran número de granos y en zonas con elevada densidad granular. Con el fin de analizar los límites de la repuesta universal, se ha configurado el sistema en un régimen en donde no se produzcan las condiciones necesarias para el colapso. Para esto, se redujo el numero N de partículas y se promovió la dilución de los granos a través del aumento de las dimensiones del recinto.

En la Fig. 5.4 se presenta la variación de la amplitud de vibración Z_{res} , a la frecuencia de resonancia, como una función del parámetro normal de disipación γ_n (Fig. 5.4(a)) y del parámetro tangencial de disipación γ_s (Fig. 5.4(b)) para diferentes valores de N . Para lograr dichas simulaciones, se ha cambiado el diámetro de las partículas, con el fin de mantener la relación de masa constantes mientras se varía N . Para valores de $N > 100$, se encuentra una respuesta constante (universal), mientras que en los sistemas con menos cantidad de partículas se presenta una mejor atenuación de la amplitud en resonancia Z_{res} a medida que aumenta cualquiera de las dos propiedades disipativas (γ_n o γ_s), en total acuerdo con la intuición. Estos resultados confirman la especulación de que la respuesta universal sólo se produce si un número relativamente grande de partículas está implicado.

Por supuesto, los valores de N en que se alcanza esta respuesta universal dependerá del tamaño horizontal del recinto de contención. Estimamos, a partir de estas simulaciones, que siempre que el recinto se llene con tres o más capas de partículas, la respuesta del sistema cerca de la resonancia será independiente de la interacción partícula-partícula.

Una forma de inducir un comportamiento similar a un gas dentro del recinto (a fin de crear un régimen diluido donde el colapso inelástico no se produzca) es aumentar la altura de la cavidad. En la Fig. 5.5(a) y (b) se representa la energía disipada por ciclo como una función de γ_n y γ_s para un recinto con $L_z = 0.282$ m. Para esta longitud L_z (mucho mas grande que la longitud óptima), la cama granular se expande de manera significativa y no se mueve como una masa concentrada, lo que reduce drásticamente el número de colisiones por unidad de tiempo. Los resultados finales muestran una disipación efectiva del amortiguador de partículas que depende de la interacción disipativa partícula-partícula. Curiosamente, en este régimen, el aumento de γ_n o γ_t conduce a una disminución de la energía total disipada. Si bien no se ha estudiado con profundidad esta situación, se especula que el aumento en la disipación de cada grano en particular puede producir tiempos de vuelos ligeramente distintos a los óptimos y posiblemente generar que la cama granular deje de impactar contra el techo de la cavidad.

Dado que los amortiguadores granulares están diseñados para optimizar la atenuación

en un número importante de aplicaciones, el tamaño del recinto generalmente promueve el movimiento agrupado de las partículas, produciendo una masa densa de partículas colisionando con las paredes en el interior de la cavidad [105]. Por lo tanto, en muchas condiciones de trabajo de interés, el sistema se encontrará en un régimen donde se obtiene una FRF universal.

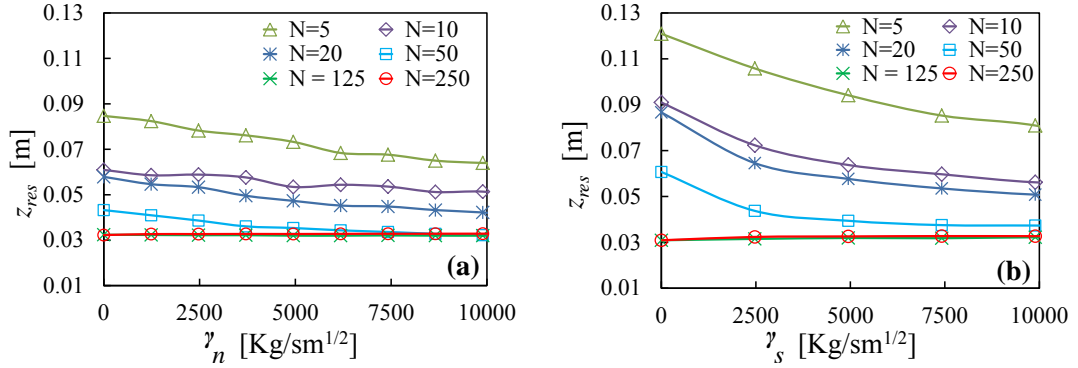


Figura 5.4: **(a)** Amplitud Z_{res} en resonancia como función de la disipación normal γ_n para $\gamma_s = 10980.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$ y para diferente número N de granos en el recinto (ver leyenda). El tamaño de las partículas se eligieron para producir una masa total de partículas $m_p = 0.227 \text{ kg}$ en todos los casos. **(b)** Igual que **(a)**, pero se muestra la dependencia con γ_s considerando $\gamma_n = 3660.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$.

5.4. Sumario y conclusiones

En este capítulo se ha demostrado que un fenómeno básico (el colapso inelástico) conduce a una respuesta universal de los amortiguadores de partículas, en el sentido de que la interacción partícula-partícula se hace irrelevante. Esto permite determinar los límites de esta universalidad. Así, para lograr este comportamiento se debe utilizar un número relativamente grande de partículas y el movimiento granular debe ser como el de una masa densa concentrada.

Vale la pena mencionar que el modelo de interacción utilizado para las simulaciones es de poca relevancia para los resultados presentados. Se ha demostrado que un modelo mucho más simple (el modelo de una única partícula con restitución cero) también muestra la misma respuesta. De hecho, la universalidad propuesta implica que los detalles de las interacciones no sean relevantes. Si bien el sistema analizado considera la acción de la gravedad, se espera que los mismos resultados sean aplicables a sistemas con vibraciones horizontales.

La respuesta universal es compatible con algunas observaciones en experimentos y simulaciones donde se han probado unas pocas propiedades materiales [32, 39, 43, 45, 106]. Dicha respuesta puede explicar el acuerdo inesperado entre modelos simplificados

y experimentos complejos (ver por ej. [44]). Los polvos, a diferencia de los materiales granulados, no pueden seguir esta respuesta universal, incluso en condiciones de resonancia. Los polvos son partículas finas y la hidrodinámica del aire circundante afecta en gran medida el movimiento de los mismos en el interior de la cavidad. Los polvos finos se dispersarán debido a las interacciones con las partículas de aire y el colapso inelástico será poco probable. Algunos experimentos preliminares con amortiguadores de partículas que utilizan polvos finos parecen confirmar esta hipótesis [43].

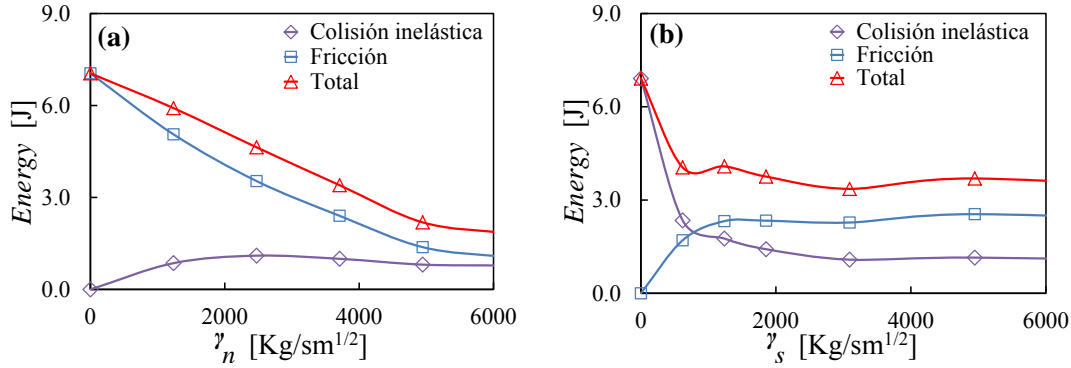


Figura 5.5: **(a)** Energía disipada por ciclo a la frecuencia de resonancia como una función de la disipación normal γ_n para un recinto de grandes dimensiones ($L_z = 0.282 \text{ m}$) y con $N = 250$ partículas y $\gamma_s = 10980.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$. **(b)** Igual que **(a)**, pero se muestra el efecto de la fricción (γ_s) considerando $\gamma_n = 3660.0 \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$.

La capacidad de los amortiguadores de partículas para trabajar en ambientes hostiles, en principio, puede entenderse como una consecuencia de la universalidad descrita. Las temperaturas y presiones extremas pueden provocar cambios leves en las propiedades de disipación de los granos, sin embargo, esta alteración no producirá cambio alguno en la respuesta del dispositivo. Más importante aún, la degradación de las partículas durante el funcionamiento debido al desgaste, la deformación y la fragmentación probablemente no comprometa la eficiencia de amortiguación. Los cambios en la fricción o en la restitución no son importantes y si bien no se han estudiado diferentes formas de partículas, se especula que los fragmentos pueden ser tan eficaces como las partículas originales, siempre y cuando las mismas no se lleguen a convertir en polvo fino. Por otra parte, la fragmentación sólo puede aumentar N , manteniendo la respuesta universal del amortiguador. Esto explica el bajo requerimiento de mantenimiento de estos dispositivos. Sin embargo, las temperaturas muy elevadas pueden soldar las partículas e inducir una reducción efectiva de N que puede reducir drásticamente la atenuación de las vibraciones.

El diseño de los amortiguadores granulares se puede simplificar mediante la elección de un número N grande y utilizando un modelo simple, como el de una única partícula de restitución cero utilizado en esta tesis. Bajo estas condiciones, la selección de las propiedades materiales de las partículas no es importante para el rendimiento de la

amortiguación y dicha elección puede concentrarse, por ejemplo, sobre la optimización de costos.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En esta tesis han sido estudiados los amortiguadores de partículas montados sobre una estructura primaria, la cual se encuentra sometida a vibración armónica de base. Principalmente, se encontró que la eficiencia de amortiguación es importante.

Distintos parámetros tienen gran influencia en el rendimiento de la amortiguación granular. Particularmente, la altura del recinto de contención es crítica para obtener la eficiencia óptima para atenuar la respuesta en resonancia del sistema primario. Alternativamente, la parametrización óptima se puede conseguir variando el número de partículas o las dimensiones de las mismas (ver Capítulo 3).

Al variar las dimensiones del recinto de contención se producen corrimientos de la frecuencia natural amortiguada del sistema. Estos corrimientos van desde la frecuencia mas baja (cuando $M_{ef} = M + m_p$) hasta la frecuencia mas alta (cuando $M_{ef} = M$). Si bien, estos corrimientos han sido planteados por varios autores en la literatura, se ha encontrado en esta tesis que la transición no es monótona, pasando por estados con masas tanto superiores como inferiores a los límites teóricos (ver Capítulo 3).

La condición de máxima transferencia de energía, entre los granos y la cavidad, se produce cuando el impacto contra el piso o contra el techo es en contrafase. La maximización de la velocidad relativa produce la mayor transferencia de la cantidad de movimiento entre el sistema estructural y las partículas dentro del recinto. Así, la energía transferida se transforma en calor a través de las colisiones inelásticas y la fricción.

El alto grado de no linealidad del sistema, produce estados del movimiento del centro de masa granular tanto periódicos como caóticos, dependiendo de la frecuencia de excitación. Los análisis presentados en el Capítulo 4 sugieren que la transición al caos se produce por la ruta de la cuasi-periodicidad. En las cercanías de la resonancia, para el recinto de dimensiones óptimas, ocurre una ventada de periodicidad entre dos regiones de comportamiento caótico. En esta ventana se produce la mayor transferencia de energía entre el sistema primario y la cama granular. En estas condiciones, la cama granular se comporta como una masa compacta de granos, impactando entre el piso y el techo en

contrafase.

El fenómeno de colapso inelástico, clásico en el comportamiento de materiales granulares densos, permite explicar la "universalidad" del dispositivo óptimo. Estos sistemas pueden disipar la totalidad de su energía cinética en un corto tiempo, incluso si las colisiones tienen un coeficiente de restitución muy alto. En este sentido, la interacción partícula-partícula se hace irrelevante (ver Capítulo 5).

La universalidad descrita implica que se puede utilizar, para el diseño de los amortiguadores de partículas óptimos, un modelo simple de una única partícula de masa equivalente a la totalidad de los granos en el interior del recinto y con coeficiente de restitución $e = 0$. Esto permitiría a los diseñadores contar con una herramienta simple de diseño básico y evitar la dificultad de implementar complicados algoritmos basados en DEM. Además, estas características evitan incluir en la etapa de diseño una variable como es el material de las partículas para obtener mayor eficiencia de amortiguación. Así, la elección del material puede basarse en los costos de fabricación sin comprometer el funcionamiento del amortiguador.

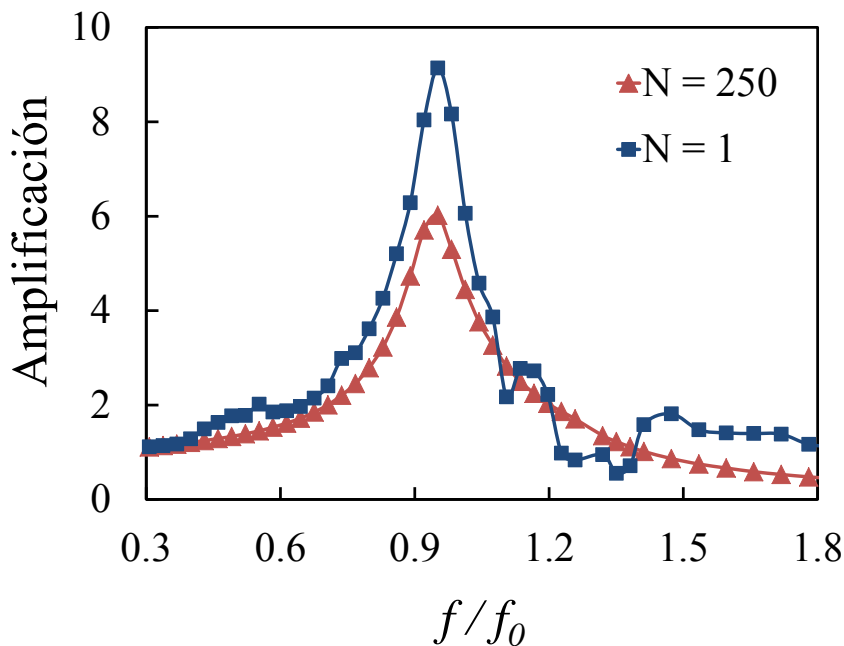


Figura 6.1: Respuesta en frecuencia para $N = 1$ y 250 con $L_z = 0.11$ m.

Por último, es importante destacar que los amortiguadores de impacto son muy usados en la industria y han sido ampliamente estudiados en la literatura [4, 15, 82]. Sin embargo, paradójicamente, el sistema constituido por una sola partícula (con coeficiente de restitución $e \neq 0$) presenta un comportamiento más complejo que los sistemas granulares estudiados en esta tesis. Como ejemplo se muestra en la Fig. 6.1 la respuesta en frecuencia de un sistema de una única partícula (con coeficiente de restitución $e = 0.8$)

en comparación con el correspondiente sistema granular de $N = 250$. El sistema de una partícula presenta una curva más compleja, con máximos secundarios. Basándose en esta figura, es claro que en un dispositivo donde la frecuencia de excitación pueda variar por diferentes motivos, caso muy usual en la práctica, la compleja respuesta del sistema con $N = 1$ puede inducir cambios abruptos en la eficacia de la amortiguación en comparación con la respuesta del sistema con una cama granular en donde la curva es mucho más suave.

6.1. Trabajos futuros

En esta tesis se identificaron algunas líneas de investigación que se deben continuar desarrollando. Así, la investigación se limitó a un pequeño subconjunto de parámetros en sistemas bajo excitación armónica. En el resto de esta sección, se enumeran posibles áreas de investigación que sugieren los estudios de esta tesis.

6.1.1. Excitación no armónica

Todos los resultados presentados en este trabajo son válidos para excitaciones armónicas. En muchas aplicaciones de los amortiguadores de partículas pueden no estar sometidas a estas condiciones y se requieren estudios detallados para, por ejemplo, vibraciones transitorias o aleatorias. Es posible estudiar, bajo estas condiciones, la eficiencia óptima de la amortiguación, el comportamiento no lineal y la posible aplicación del criterio de universalidad a través del fenómeno del colapso inelástico.

6.1.2. Fragmentación de partículas y granos de distintas formas

El fenómeno del colapso inelástico produce la universalidad de la respuesta de los amortiguadores de partículas siempre y cuando exista una gran cantidad de partículas moviéndose en forma más o menos densa. Bajo estas condiciones, resultan irrelevantes las propiedades disipativas de cada partícula. La fragmentación de las partículas, trabajando en condiciones extremas, en principio, generará mayor cantidad de granos (con distintas formas) en el interior de la cavidad. Sería importante llevar a cabo distintos estudios detallados sobre la influencia del aumento del número de partículas en la cavidad y sobre las distintas formas de los mismos. Finalmente, sería importante analizar las consecuencias de este fenómeno sobre los costos de mantenimiento del dispositivo.

6.1.3. Amortiguadores con polvos finos

Los polvos finos (por ej. la arena) no se comportan como partículas sólidas de mayor tamaño. En ellos, la hidrodinámica del aire circundante puede tener un efecto desfavo-

rable en el comportamiento del amortiguador. Futuros trabajos de simulación y experimentales serían importantes llevar a cabo para analizar este comportamiento y definir los posibles límites de la universalidad descrita en el Capítulo 5.

6.1.4. Control del caos - Ampliación de la amortiguación óptima

Del análisis de la dinámica no lineal surge que la maximización de la energía transferida sucede en una ventana de periodicidad. En dicha zona, las partículas se comportan como una masa densa que impacta dos veces por período de excitación con la caja. Fuera de esta región de frecuencias, se encuentran en general estados caóticos. Una forma posible de evitar estos estados caóticos es utilizar varios amortiguadores en paralelo de diferentes alturas de recinto con partículas para amortiguar eficazmente un rango más amplio de frecuencias. Cuando una frecuencia es excitada, el amortiguador óptimo para dicho estado actuará, produciendo la máxima eficiencia.

Otro método podría ser utilizar partículas magnetizadas para producir la unión de las mismas y provocar intencionalmente la formación de una masa densa de granos. Al impactar las paredes del recinto, la colisión puede producir el rompimiento de la unión magnética, ocasionando un pseudo-colapso inelástico de la cama granular.

6.1.5. Amortiguadores de partículas activos

Muchas aplicaciones industriales requieren dispositivos de amortiguación que sean utilizables en un gran rango de frecuencias. Cuando no es posible utilizar solo amortiguadores pasivos de vibración, los dispositivos activos cumplen una función muy importante en la variación de distintas características que permiten lograr eficiencias por encima de los estándares. Así por ejemplo sería importante estudiar amortiguadores de partículas activos con un parámetro de control como la masa efectiva. Este parámetro permitiría variar las condiciones operativas en función de los requerimientos externos. Como se mostró en el Capítulo 3, una simple interpolación de la masa efectiva permitiría estimar el tamaño óptimo del recinto para obtener la mejor eficiencia de amortiguación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. M. Harris y A. G. Piersol. *Harris's Shock and vibration handbook*. McGraw-Hill, New York, 5th edition, 2002.
- [2] C. W. De Silva. *Vibration Damping, Control, and Design*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.
- [3] D. Inman. *Engineering Vibration*. Prentice Hall Inc, New Jersey, 2001.
- [4] S. Braun, D. Ewins y S. S. Rao. *Encyclopedia of vibration*. Academic Press, London, 2002.
- [5] J. Q. Sun, M. R. Jolly y M. A. Norris. Passive, adaptive, and active tuned vibration absorbers a survey. *Journal of Mechanical Design*, 117(B):234–242, 1995.
- [6] C. W. De Silva. *Vibration and Shock Handbook*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [7] N. Olgac y B. T. Holm-Hansen. Novel active vibration absorption technique: delayed resonator. *Journal of Sound and Vibration*, 176(1):93–104, 1994.
- [8] M. A. Franchek, M. W. Ryan y R. J. Bernhard. Adaptive passive vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 189(5):565–585, 1996.
- [9] M.A. Dokainish y H. Elmaraghy. Optimum design parameters for impact dampers. *The ASME Publications Design Engineering and Technical Conference*, 61: 1–7, 1973.
- [10] C. N. Bapat y S. Sankar. Single unit impact damper in free and forced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 99(1):85–94, 1985.
- [11] P. Lieber y D. P. Jensen. An acceleration damper: Development, design and some applications. *Transactions of ASME*, 67:523–530, 1945.
- [12] C. Grubin. On the theory of the acceleration damper. *Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics*, 23(3):373–378, 1956.

- [13] M. M. Sadek y B. Mills. Effect of gravity on the performance of an impact damper: part 1. steady-state motion. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12(4): 268–277, 1970.
- [14] M. M. Sadek y C. J. H. Williams. Effect of gravity on the performance of an impact damper: Part 2. stability of vibrational modes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12(4):278–287, 1970.
- [15] M. R. Duncan, C. R. Wassgren y C. M. Krousgrill. The damping performance of a single particle impact damper. *Journal of Sound and Vibration*, 286(1-2): 123–144, 2005.
- [16] P. J. Holmes. The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration*, 84(2):173–189, 1982.
- [17] S. W. Shaw y P. J. Holmes. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 90(1):129–155, 1983.
- [18] N. Tufillaro, T. A. Abbott y J. P. Reilly. *Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Redwood, CA, 1992.
- [19] A. A. Oledzki, I. Siwicki y J. Wisniewski. Impact dampers in application for tube, rod and rope structures. *Mechanism and Machine Theory*, 34(2):243–253, 1999.
- [20] S. Ema y E. Marui. Suppression of chatter vibration of boring tools using impact dampers. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 40(8):1141–1156, 2000.
- [21] K. P. Duffy, R.L. Bagley y O. Mehmed. On a self-tuning impact vibration damper for rotating turbomachinery. Reporte Técnico NASA/TM-2000-210215, NASA, 2000.
- [22] E. Skipor y L. J. Bain. Application of impact damping to rotary printing equipment. *Journal of Mechanical Design*, 102:338–343, 1980.
- [23] C. Cempel. Receptance model of the multi-unit vibration impact neutralizer. *Journal of Sound and Vibration*, 40(2):249–266, 1975.
- [24] C. N. Bapat y S. Sankar. Multiunit impact damper re-examined. *Journal of Sound and Vibration*, 103(4):457–469, 1985.
- [25] T. Sato, K. Tanaka, S. Aida y Y. Mouri. Vibration isolation in a system using granular medium. *JSME international journal*, 38-C(3):434–440, 1995.

- [26] Y. Araki, I. Yokomichi y J. Inoue. Impact dampers with granular materials. *Bulletin of JSME*, 28:1466–1472, 1985.
- [27] A. Papalou y S. F. Masri. Response of impact dampers with granular materials under random excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25: 253–267, 1996.
- [28] A. Papalou y S. F. Masri. An experimental investigation of particle dampers under harmonic excitation. *Journal of Vibration and Control*, 4:361–379, 1998.
- [29] R. D. Friend y V. K. Kinra. Particle impact damping. *Journal of Sound and Vibration*, 233(1):93–118, 2000.
- [30] C. Cempel y G. Lotz. Efficiency of vibrational energy dissipation by moving shot. *Journal of Structural Engineering*, 119(9):2642–2652, 1993.
- [31] C. Salueña, S. E. Esipov y T. Pöschel. Dissipative properties of vibrated granular materials. *Physical Review E*, 59(4):4422–4425, 1999.
- [32] T. Chen, K. Mao, X. Huang y M. Y. Wang. Dissipation mechanisms of non-obstructive particle damping using discrete element method. En *Proceedings of SPIE*, Smart Structures and Material: Damping and Isolation, páginas 294–301, Newport Beach, CA, Marzo 2001.
- [33] M. Saeki. Impact damping with granular materials in a horizontally vibrating system. *Journal of Sound and Vibration*, 251(1):153–161, 2002.
- [34] M. Saeki. Analytical study of multi-particle damping. *Journal of Sound and Vibration*, 281(1):1133–1144, 2005.
- [35] Z. Lu, X. Lu y S. F. Masri. Studies of the performance of particle dampers under dynamic loads. *Journal of Sound and Vibration*, 319:5415–5433, 2010.
- [36] X. Fang y J. Tang. Granular damping in forced vibration: qualitative and quantitative analyses. *Journal of Vibration and Acoustic*, 128:489–500, 2006.
- [37] W. Liu, G. R. Tomlinson y J. A. Rongong. The dynamic characterisation of disk geometry particle dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 280:849–861, 2005.
- [38] C. Wong y J. A. Rongong. Control of particle damper nonlinearity. *AIAA Journal*, 47(1):953–960, 2009.
- [39] X. M. Bai, L. M. Keer, Q. J Wang y R. Q. Snurr. Investigation of particle damping mechanism via particle dynamics simulations. *Granular Matter*, 11:417–429, 2009.

- [40] X. M. Bai, B. Shah, L. M. Keer, Q. J. Wang y R. Q. Snurr. Particle dynamics simulations of a piston-based particle damper. *Powder Technology*, 189:115–125, 2009.
- [41] M. Y. Yang. Development of master design curves for particle impact dampers. Phd dissertation, The Pennsylvania State University, 2003.
- [42] M. Yang, G. A. Lesieutre, S. A. Hambric y G. H. Koopmann. Development of a design curve for particle impact dampers. *Noise Control Engineering Journal*, 53 (1):5–13, 2005.
- [43] K. S. Marhadi y V. K. Kinra. Particle impact damping: effect of mass ratio, material, and shape. *Journal of Sound and Vibration*, 283:433–448, 2005.
- [44] M. N. Bannerman, J. E. Kollmer, A. Sack, M. Heckel, P. Mueller y T. Pöschel. Movers and shakers: Granular damping in microgravity. *Physical Review E*, 011301: 1–9, 2011.
- [45] Z. Lu, S. F. Masri y X. Lu. Parametric studies of the performance of particle dampers under harmonic excitation. *Structural contro and health monitoring*, 18: 79–98, 2011.
- [46] R. A. Bhatti y W. Yanrong. Simulation of particle damping under centrifugal loads. *Engineering and Technology*, 57:313–318, 2009.
- [47] D. N. J. Els. The effectiveness of particle dampers under centrifugal loads. Phd dissertation, University of Stellenbosch, 2009.
- [48] H. V. Panossian. Structural damping enhancement via non-obstructive particle damping technique. *Journal of Vibration and Acoustics*, 114:101–105, 1992.
- [49] B. Li, C. Deng y F. Li. A passive vibration suppression technique for turbopump. En *Proceedings of the 3rd International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics*, páginas 1685–1688, Beijing, Octubre 2009.
- [50] R. Ehrgott, H. Panossian y G. Davis. Modeling techniques for evaluation the effectiveness of particle damping in turbomachinery. Reporte Técnico MSFC-2224, NASA, Marshall Space Flight Center, Julio 2009.
- [51] Z. Xu, M. Y. Wang y T. Chen. A particle damper for vibration and noise reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 270:1033–1040, 2004.
- [52] H. V. Panossian. Structural damping/acoustic attenuation optimization via NOPD. En *JANNAF Propulsion Meeting*, páginas 2–4, Anaheim, CA, 1990.

- [53] S. S. Simonian. Particle beam damper. En *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Material: Passive Damping*, páginas 149–160, San Diego, CA, Marzo 1995.
- [54] H. R. Hamilton III, G.S. Riggs y J.A. Pickett. Increased damping in cantilevered traffic signal structures. *Journal of Structural Engineering*, 126(4):530–537, 2000.
- [55] Z. Xia, X. Liu y Y. Shan. Application of particle damping for vibration attenuation in brake drum. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 7(2):178–194, 2011.
- [56] A. S. Velichkovich y S. V. Velichkovich. Vibration-impact damper for controlling the dynamic drillstring conditions. *Chemical and Petroleum Engineering*, 37(3-4): 213–215, 2001.
- [57] M. Heckel, A. Sack, J. E. Kollmer y T. Pöschel. Granular dampers for the reduction of vibrations of an oscillatory saw. *Physica A*, 391(19):4442–4447, 2012.
- [58] S. S. Rao. *Mechanical vibrations*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
- [59] W. Massa. *Crystal Structure Determination*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2004.
- [60] T. Pöschel y T. Schwager. *Computational Granular Dynamics: Models and Algorithms*. Springer, Berlin, 2004.
- [61] J. Schäfer, S. Dippel y D. E. Wolf. Force schemes in simulations of granular materials. *Journal de Physique I*, 6:5–20, 1996.
- [62] P. A. Cundall y O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29:47–65, 1979.
- [63] H. J. Herrmann y S. Luding. Modeling granular media on the computer - review article. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 10(4):189–231, 1998.
- [64] R. Venugopal y R. K. Rajamani. 3d simulation of charge motion in tumbling mills by the discrete element method. *Powder Technology*, 115:157–166, 2001.
- [65] P. W. Cleary. DEM prediction of industrial and geophysical particle flows. *Powder Technology*, 8:106–118, 2010.
- [66] K. Mao, Wang M. Y., Z. Xu y T. Chen. DEM simulation of particle damping. *Powder Technology*, 142:154–165, 2004.
- [67] M. P. Allen y D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Clarendon Press, Oxford, 1989.

- [68] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1985.
- [69] G. Kuwabara y K. Kono. Restitution coefficient in collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26:1230–1233, 1987.
- [70] H. Kruggel-Emden, E. Simsek, S. Rickelt, S. Wirtz y V. Scherer. Review and extension of normal force models for the discrete element method. *Powder Technology*, 171:157–173, 2007.
- [71] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J. M. Hertzsch y T. Pöschel. Model for collisions in granular gases. *Physical Review E*, 53(5):5382–5392, 1996.
- [72] H. Kruggel-Emden, S. Wirtz y V. Scherer. A study on tangential force laws applicable to the discrete element method (DEM) for materials with viscoelastic or plastic behavior. *Chemical Engineering Science*, 63:1523–1541, 2008.
- [73] B. C. Vemuri, L. Chen, L. Vu-Quoc, X. Zhang y O. Walton. Efficient and accurate collision detection for granular flow simulation. *Graphical models and image processing*, 60:403–422, 1998.
- [74] H. K. Kim, L. J. Guibas y S. Y. Shin. Efficient collision detection among moving spheres with unknown trajectories. *Algorithmica*, 43:195–210, 2005.
- [75] H. Mio, A. Shimosaka, Y. Shirakawa y J. Hidaka. Cell optimization for fast contact detection in the discrete element method algorithm. *Advanced Powder Technology*, 18(4):441–453, 2007.
- [76] E. G. Nezami y Y. M. A. Hashash. A fast contact detection algorithm for 3-d discrete element method. *Computers and Geotechnics*, 31:575–587, 2004.
- [77] H. Goldstein. *Mecánica Clásica*. Reverté, Barcelona, 2006.
- [78] C. F. F. Karney. Quaternions in molecular modeling. *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, 25:595–604, 2007.
- [79] W. R. Hamilton. On quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 3: 1–16, 1847.
- [80] S. Brennan y S. S. Simonian. Parametric test results on particle dampers. Structures, Structural Dynamics and Material Conference, páginas 4192–4208, Honolulu, HI, 2007.
- [81] S. Ramachandran y G. Lesieutre. Dynamics and performance of a harmonically excited vertical impact damper. *Journal of Vibration and Acoustics*, 130(2): 0210081–02100811, 2008.

-
- [82] B. Blazejczyk Okolewska. Analysis of an impact damper of vibration. *Chaos, Solitons and Fractals*, 12:1983–1988, 2000.
- [83] J. M. Luck y A. Mehta. Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking and chaos. *Physical Review E*, 48(5), 1993.
- [84] R. Hegger, H. Kantz y T. Schreiber. Practical implementation of nonlinear time series methods: The tisean package. *CHAOS*, 9:413–435, 1999.
- [85] H. Kantz y T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [86] J. W. Cooley y J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19:297–301, 1965.
- [87] F. C. Moon. *Chaotic and fractal dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.
- [88] H. G. Schuster y W. Just. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2005.
- [89] T. Sauer, J. A. Yorke y M. Casdagli. Embedology. *Journal of Statistical Physics*, 65:579–616, 1991.
- [90] K. T. Alligood, T. D. Sauer y J. A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, New York, 2000.
- [91] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898:366–381, 1981.
- [92] M. B. Kennel, R. Brown y H. D. I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45:3403–3411, 1992.
- [93] A. M. Fraser y H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33:1134–1140, 1986.
- [94] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of observed chaotic data*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [95] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos*. Westview Press, Reading, MA, 2000.
- [96] H. Kantz. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Physics Letters A*, 185:77–87, 1994.

- [97] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney y J. A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [98] L. P. Kadanoff. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. *Reviews of Modern Physics*, 71(1):435–444, 1999.
- [99] S. McNamara y W. R. Young. Inelastic collapse and clumping in a onedimensional granular medium. *Physics of Fluids*, 4(3):496–504, 1992.
- [100] S. Luding y S. McNamara. How to handle the inelastic collapse of a dissipative hard-sphere gas with the tc model. *Granular Matter*, 1(3):113–128, 1998.
- [101] J. Karkheck (Ed.). *Dynamics: Models and Kinetic Methods for Non-equilibrium Many Body Systems*. Nato Science Series E. Kluwer Press, Dordrecht, 2000.
- [102] T. Schwager y T. Pöschel. Coefficient of normal restitution of viscous particles and cooling rate of granular gases. *Physical Review E*, 57:650–654, 1998.
- [103] A. Mehta. *Granular Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [104] F. F. Chung, S. S. Liaw y W. C. Chang. Collective motion of inelastic particles between two oscillating walls. *Granular Matter*, 13:787–794, 2011.
- [105] S. S. Simonian, V. S. Camelo y J. D. Sienkiewicz. Disturbance suppression using particle dampers. En *49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC*, número AIAA 2008-2105 en Structures, Structural Dynamics and Material Conference, Schaumburg, IL, 2008.
- [106] Y. Duan y Q. Chen. Simulation and experimental investigation on dissipative properties of particle dampers. *Journal of Vibration and Control*, 17:777–788, 2011.

SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

Para simular el comportamiento de los amortiguadores de partículas en esta tesis se ha implementado el Método de Elementos Discretos (ver Sección 2.2) en lenguaje C.

A continuación se detalla la funcionalidad de cada uno de los archivos intervinientes y se presenta el contenido de los mismos.

- **Resonancia.c**: Código principal del software. En dicho archivo se definen todas las condiciones iniciales y se llaman a las rutinas principales que llevan adelante la simulación mediante el DEM (ver Sección 2.2.2). Además, se definen las celdas para la búsqueda de colisiones (ver Sección 2.3).
- **Compute.c**: Calcula las aceleraciones de traslación y rotación de las partículas dentro del recinto usando las leyes de fuerzas de interacción (ver Sección 2.2.3) y la aceleración del sistema primario después de resolver numéricamente la Ec. (2.1.22) .
- **Update.c**: Actualiza las posiciones y velocidades, tanto de traslación como de rotación, para cada partícula y para el sistema primario usando el algoritmo de Verlet con Velocidades (ver Sección 2.2.2 y 2.4).
- **Constantes.h**: Define las constantes generales para la simulación.
- **Globales.h**: Define las variables globales.
- **Variables.h**: Condiciones iniciales para las variables generales.
- **Salida.c**: Salida de resultados. Escribe archivos de salida. Este archivo se modifica en función de los requerimientos de salida para post-procesado. No se presenta en este apéndice.

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
1 // File: Resonancia.c - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Función de Respuesta en Frecuencia - FRF.
6
7 // *****
8
9 // ** NOTA: **
10
11 // En las siguientes líneas se realizan distintas funciones básicas. Por
12 // simplicidad se han eliminado y solo se hace referencia a las mismas con
13 // comentarios. Solo las sentencias de importancia para la simulación
14 // se presentan.
15
16 // *****
17
18 #include <stdio.h>
19 #include <math.h>
20 #include <iostream>
21 #include <cstdlib>
22 using namespace std;
23
24 // *****
25 // Definición de constantes y variables globales.
26
27 #include "Constantes.h"
28 #include "Variables.h"
29
30 // *****
31 // Prototipos de funciones.
32
33 void salida(void);
34 void update(void);
35 void compute(void);
36
37 // *****
38
39 main() {
40
41     double omega1[1]; // Frecuencia de excitación.
```

```

42
43 // En las líneas siguientes se leen desde archivos y se definen
44 // distintos datos iniciales. Las líneas de códigos se eliminaron
45 // para simplificación.
46
47 // Toma de frecuencia desde archivo "omega.dat".
48
49 // Toma de radios de las partículas desde el archivo "radios.vtf".
50
51 // Definición de la aceleración inicial de las partículas igual a la
52 // a la aceleración de la gravedad.
53
54 // Definición de condición inicial de cuaterniones.
55
56 // Toma de posiciones iniciales "X" desde el archivo "pos0.vtf".
57
58 // Toma de posiciones iniciales "Y" desde el archivo "pos1.vtf".
59
60 // Toma de posiciones iniciales "Z" desde el archivo "pos2.vtf".
61
62 // Cálculo de las masas de partículas, dado el tamaño de cada partícula
63 // y la densidad del material de las mismas.
64
65 // Cálculo de momentos de inercia de las partículas.
66
67 // *****
68 // Definición de celdas para búsqueda de colisiones. Detalles completos del
69 // algoritmo para la creación de las celdas y la utilización de las mismas
70 // en la búsqueda de colisiones entre las partículas se puede encontrar en
71 // la Sección 2.3 de esta tesis.
72
73 n_cell_search = (int)ceil((2*radio_max)/lado_cell);
74
75 matriz_cell = (int ***)malloc(n_cell_x* sizeof(int **));
76 int i, j;
77 for (i = 0; i < n_cell_x; i++) {
78     matriz_cell[i] = (int**)malloc(n_cell_y*sizeof(int*));
79     for (j = 0; j < n_cell_y; j++) {
80         matriz_cell[i][j] = (int*)malloc(n_cell_z*sizeof(int));
81     }
82 }

```

```
83
84 // Se vacían inicialmente las celdas. Se asignan ceros a todas las celdas.
85 // Para mas detalles ver Sección 2.3.
86
87 for (int i=0; i<n_cell_x; i++) {
88     for (int j=0; j<n_cell_y; j++) {
89         for (int k=0; k<n_cell_z; k++) {
90             matriz_cell[i][j][k] = 0;
91         }
92     }
93 }
94
95 // *****
96 // Asignación de partículas a celdas. Ver Sección 2.3.
97 // Las siguientes líneas recorren la totalidad de las partículas de la
98 // simulación, en función de su posición espacial y del tamaño de las celdas,
99 // previamente definidas, se coloca el numero de cada partícula en la celda
100 // que le corresponde. Dicho proceso genera una matriz tridimensional de
101 // celdas.
102
103 for (int i=1; i<ini_np+1; i++) {
104     pos_cell_x = ((int)(ceil(((pos[i-1][0])+ini_bxF)/lado_cell↵
105         )));
106     pos_cell_y = ((int)(ceil(((pos[i-1][1])+ini_byF)/lado_cell↵
107         )));
108     pos_cell_z = ((int)(ceil(((pos[i-1][2])+ini_bzF-pos_caja2)↵
109         /lado_cell)));
110     matriz_cell[pos_cell_x][pos_cell_y][pos_cell_z]=i;
111 }
112 // *****
113 // Se generan distintos archivos vacíos de salida para post-procesamiento.
114 // ** Posición instante a instante del recinto.
115 // ** Velocidad instante a instante del recinto.
116 // ** Aceleración instante a instante del recinto.
117 // ** Energías (Potencial, Cinética, Deformación, etc.)
118 // ** Fuerzas (Partículas, Resorte, Amortiguador viscoso, etc.)
119 // *****
120
```

```
121 // COMIENZO DE SIMULACIÓN PARA EL OMEGA DETERMINADO.
122 // Las siguientes líneas definen el programa principal de las simulaciones.
123 // Para un numero total de pasos definido previamente se realiza
124 // un bucle pasando la rutina de actualización de las posiciones, velocidades
125 // y aceleraciones tanto de traslación como de rotación (update).
126 // Además, cada una cierta cantidad de pasos se guardan
127 // resultados en los archivos de salida.
128
129     for(step = 1; step <= step_num; step++) {
130         if (step == step_print_num) {
131             salida(); // Salida de resultados en archivos previamente creados.
132             step_print_num = step_print_num + step_print_num_c;
133         }
134         update(); // Actualización de posiciones y rotaciones.
135     }
136
137 // *****
138
139 // Se cierran los archivos de salida.
140
141 } // Fin de Resonancia.c.
```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
1 // File: compute.c - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Cálculos de aceleraciones e interacción macroscópica.
6
7 // *****
8
9 // ** NOTA: **
10
11 // En las siguientes líneas se realizan distintas funciones básicas. Por
12 // simplicidad se han eliminado y solo se hace referencia a las mismas con
13 // comentarios. Solo las sentencias de importancia para la simulación
14 // se presentan.
15
16 // *****
17
18 #include <stdio.h>
19 #include <math.h>
20 #include <iostream>
21 #include <stdlib.h>
22 #include <cstdlib>
23
24 using namespace std;
25
26 // *****
27 // Definición de constantes y variables globales*/
28
29 #include "Constantes.h"
30 #include "Globales.h"
31
32 void compute(void) {
33
34 // Todas la aceleraciones y los torques de partículas se ponen a cero.
35
36 // La aceleración de caja y las energías se ponen a cero.
37
38
39 // Definición de variables locales a utilizar en compute.c.
40
41 int i = 0;
```

```

42     int j = 0;
43     int x, y, z; // Posición de la partícula en consideración.
44     double Xij, Yij, Zij, Rij; // Posición relativa en contacto.
45     double Mod_Vn; // Velocidad normal de contacto.
46     double E_eff_i, E_eff_j, E_eff; // Módulos de elasticidad efectivos.
47     double R_eff, kn; // Radio efectivo de contacto y rigidez de contacto.
48     double eps; // Penetración.
49     double Fn, FnX, FnY, FnZ, abs1, abs2; // Fuerzas normales y valores
        absolutos.
50     double Xn, Yn, Zn, Xs, Ys, Zs, mo; // Dirección normal y tangencial.
51     double Fs, FsX, FsY, FsZ; // Fuerzas tangenciales.
52     double Mod_Vs; // Velocidad tangencial.
53     double n[3], v[3], Vn[3], Vt[3], Vs[3], Oa[3]; // Definición de
        vectores.
54     double Ob[3], OA[3], OB[3], s[3], Ti[3], Tj[3]; // Definición de
        vectores.
55
56     // *****
57     // *****
58     // INTERACCIÓN DE LAS PARTÍCULAS INTERNAS.
59     // Comienzo búsqueda de colisiones.
60
61     for (i=0; i<ini_np; i++) {
62
63         // Obtención de la posición de la partícula i.
64         x = ((int)(ceil(((pos[i][0])+ini_bxF)/lado_cell)))-1;
65         y = ((int)(ceil(((pos[i][1])+ini_byF)/lado_cell)))-1;
66         z = ((int)(ceil(((pos[i][2])+ini_bzF-pos_caja2)/lado_cell)<-
            ))-1;
67
68         // Búsqueda de vecinos de la partícula i.
69         for (int k1=(max(0,x-n_cell_search)); k1<=(min(n_cell_x-1,<-
            x+n_cell_search)); k1++) {
70             for (int k2=(max(0,y-n_cell_search)); k2<=(min(n_cell_y<-
                -1,y+n_cell_search)); k2++) {
71                 for (int k3=(max(0,z-n_cell_search)); k3<=(min(<-
                    n_cell_z-1,z+n_cell_search)); k3++) {
72
73                     // Calculo de la penetración (Ver Sección 2.2.3).
74                     j = (matriz_cell[k1][k2][k3])-1;
75                     if (i<j) {

```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
76         Xij = pos[i][0]-pos[j][0];
77         Yij = pos[i][1]-pos[j][1];
78         Zij = pos[i][2]-pos[j][2];
79         Rij=sqrt(((Xij)*(Xij))+((Yij)*(Yij))+((Zij)*(Zij)))↵
            );
80         eps = (ini_radios[j]+ini_radios[i])-Rij;
81
82 // Verificación de la colisión.
83
84         if (eps > 0.0) {
85
86 // Calculo de Fn (Ver Sección 2.2.3).
87
88         Xn = Xij/Rij;      // Obtención de la dirección normal.
89         Yn = Yij/Rij;
90         Zn = Zij/Rij;
91         n[0]= Xn;
92         n[1]= Yn;
93         n[2]= Zn;
94         v[0]= vel[j][0]-vel[i][0];
95         v[1]= vel[j][1]-vel[i][1];
96         v[2]= vel[j][2]-vel[i][2];
97
98         Mod_Vn = n[0]*v[0] + n[1]*v[1] + n[2]*v[2]; // ↵
            Velocidad normal de
            impacto.
99         Vn[0] = Mod_Vn*n[0];
100        Vn[1] = Mod_Vn*n[1];
101        Vn[2] = Mod_Vn*n[2];
102
103 // Cálculos de módulos de elasticidad efectivos y radios efectivos.
104
105         if (i>=ini_np) {
106             E_eff_i = (1-((ini_poissonb)*(ini_poissonb)))/↵
                ini_Eb;
107         }
108         else {
109             E_eff_i = (1-((ini_poisson)*(ini_poisson)))/↵
                ini_E;
110         }
111
```

```

112         if (j>=ini_np) {
113             E_eff_j = (1-((ini_poissonb)*(ini_poissonb)))/←
                ini_Eb;
114         }
115         else {
116             E_eff_j = (1-((ini_poisson)*(ini_poisson)))/←
                ini_E;
117         }
118
119     E_eff = 1./((E_eff_i)+(E_eff_j));    // Modulo de elasticidad efectivo.
120     R_eff = 1./((1./ini_radios[i])+(1./ini_radios[j]));    // Radio
                efectivo.
121     kn = (4./3.)*E_eff*sqrt(R_eff);    // Rigidez normal (Ec. 2.2.9).
122
123
124     // Calculo de Energías de deformación e inelástica para salida
125     // de resultados.
126     // Mas detalles se pueden encontrar en la Sección 2.5.
127
128     // Cálculo final de la Fuerza de interacción normal.
129     // Ver ecuaciones 2.2.8 y 2.2.12.
130
131     Fn = -kn*(pow(eps,(3./2.)))-gama_n*Mod_Vn*sqrt(eps); // Ec. 2.2.8.
132
133     FnX = Fn*Xn; // Ecs. 2.2.12.
134     FnY = Fn*Yn;
135     FnZ = Fn*Zn;
136
137
138     // Calculo de Fs (Ver Sección 2.2.3).
139
140     Vt[0] = v[0] - Vn[0]; // Velocidad tangencial.
141     Vt[1] = v[1] - Vn[1];
142     Vt[2] = v[2] - Vn[2];
143
144     // A continuación se realizan los productos vectoriales para
145     // obtener la velocidad de impacto en la dirección de corte.
146     // Para mas detalles ver ec. 2.2.15.
147
148     Oa[0] = vel_ang[i][0]*ini_radios[i];
149     Oa[1] = vel_ang[i][1]*ini_radios[i];

```

```

150         Oa[2] = vel_ang[i][2]*ini_radios[i];
151
152         Ob[0] = vel_ang[j][0]*ini_radios[j];
153         Ob[1] = vel_ang[j][1]*ini_radios[j];
154         Ob[2] = vel_ang[j][2]*ini_radios[j];
155
156         OA[0] = Oa[1]*Zn - Oa[2]*Yn;
157         OA[1] = Oa[2]*Xn - Oa[0]*Zn;
158         OA[2] = Oa[0]*Yn - Oa[1]*Xn;
159
160         OB[0] = Ob[1]*Zn - Ob[2]*Yn;
161         OB[1] = Ob[2]*Xn - Ob[0]*Zn;
162         OB[2] = Ob[0]*Yn - Ob[1]*Xn;
163
164         Vs[0] = Vt[0] + OA[0] + OB[0]; // Velocidad de corte.
165         Vs[1] = Vt[1] + OA[1] + OB[1];
166         Vs[2] = Vt[2] + OA[2] + OB[2];
167
168         // Las líneas siguientes eliminan singularidad en el caso que la velocidad sea cero.
169
170         if (Vs[0] == 0.0 && Vs[1] == 0.0 && Vs[2] == 0.0) {
171             Fs = 0.0;
172             FsX = 0.0;
173             FsY = 0.0;
174             FsZ = 0.0;
175             Mod_Vs = 0.0;
176         }
177         else {
178             mo = sqrt(Vs[0]*Vs[0]+Vs[1]*Vs[1]+Vs[2]*Vs[2]);
179             Xs = Vs[0]/mo;
180             Ys = Vs[1]/mo;
181             Zs = Vs[2]/mo;
182             s[0] = Xs;
183             s[1] = Ys;
184             s[2] = Zs;
185             Mod_Vs = Vs[0]*s[0] + Vs[1]*s[1] + Vs[2]*s[2];
186
187         // A continuación se calcula la fuerza de fricción según ec. 2.2.13.
188
189             abs1 = fabs(gama_s*sqrt(eps)*Mod_Vs);
190             abs2 = fabs(mu_d*Fn);

```

```

191
192         if (Mod_Vs < 0) {
193             Fs = min(abs1,abs2);
194         }
195         else {
196             Fs = -min(abs1,abs2);
197         }
198         FsX = Fs*Xs;    // Fricción en componentes.
199         FsY = Fs*Ys;
200         FsZ = Fs*Zs;
201     }
202
203     // Calculo de Energía de fricción para la salida de resultados
204     // Ver Sección 2.5.
205
206
207     // *****
208     // *****
209     // Calculo de aceleraciones sobre las partículas.
210
211     acc[i][0] -= ((FnX/ini_masa[i]) + (FsX/ini_masa[i]));
212     acc[i][1] -= ((FnY/ini_masa[i]) + (FsY/ini_masa[i]));
213     acc[i][2] -= ((FnZ/ini_masa[i]) + (FsZ/ini_masa[i]));
214
215     acc[j][0] += (FnX/ini_masa[j]) + (FsX/ini_masa[j]);
216     acc[j][1] += (FnY/ini_masa[j]) + (FsY/ini_masa[j]);
217     acc[j][2] += (FnZ/ini_masa[j]) + (FsZ/ini_masa[j]);
218
219
220     // *****
221     // *****
222     // Calculo de torque sobre las partículas.
223
224     Ti[0] = FsY*Zn - FsZ*Yn;
225     Ti[1] = FsZ*Xn - FsX*Zn;
226     Ti[2] = FsX*Yn - FsY*Xn;
227
228     Ts[i][0] -= Ti[0];
229     Ts[i][1] -= Ti[1];
230     Ts[i][2] -= Ti[2];
231

```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
232         Tj[0] = Ti[0]*(ini_radios[j]/ini_radios[i]);
233         Tj[1] = Ti[1]*(ini_radios[j]/ini_radios[i]);
234         Tj[2] = Ti[2]*(ini_radios[j]/ini_radios[i]);
235
236         Ts[j][0] -= Tj[0];
237         Ts[j][1] -= Tj[1];
238         Ts[j][2] -= Tj[2];
239
240     }
241 }
242 }
243 }
244 }
245
246 // *****
247 // *****
248 // *****
249
250 // Las siguientes líneas de código son similares a las anteriores pero se busca
251 // interacción entre los granos y las seis partículas que forman la caja.
252 // Por simplicidad se dejan solamente las líneas donde se encuentra dicha
253 // interacción. Encontrada la colisión de una partícula interna con una de la caja
254 // la metodología es la misma, dado que la caja esta formada por partículas
255 // esféricas de tamaño extremadamente grande en comparación con los granos. Asegurando
256 // de esta manera que serán vista como paredes planas para las partículas interiores.
257
258
259 // INTERACCIÓN CON LAS PARTÍCULAS QUE FORMAN LA CAJA.
260
261     for (j=ini_np; j<ini_npt; j++) {
262         Xij = pos[i][0]-pos[j][0];
263         Yij = pos[i][1]-pos[j][1];
264         Zij = pos[i][2]-pos[j][2];
265         Rij=sqrt(((Xij)*(Xij))+((Yij)*(Yij))+((Zij)*(Zij)));
266
267         eps = (ini_radios[j]+ini_radios[i])-Rij;
268         if (eps > 0.0) {
269
270 // Calculo de Fn.
271
272 // Calculo de Energías de deformación e inelástica para salida
```

```

273 // de resultados.
274 // Mas detalles se pueden encontrar en la Sección 2.5.
275
276 // Cálculo final de la Fuerza de interacción normal.
277 // Ver ecuaciones 2.2.8 y 2.2.12.
278
279 Fn = -kn*(pow(eps,(3./2.)))-gama_n*Mod_Vn*sqrt(eps); // Ec. 2.2.8.
280
281 FnX = Fn*Xn; // Ecs. 2.2.12.
282 FnY = Fn*Yn;
283 FnZ = Fn*Zn;
284
285
286 // Calculo de Fs.
287
288 // A continuación se calcula la fuerza de fricción según ec. 2.2.13.
289
290         abs1 = fabs(gama_s*sqrt(eps)*Mod_Vs);
291         abs2 = fabs(mu_d*Fn);
292
293         if (Mod_Vs < 0) {
294             Fs = min(abs1,abs2);
295         }
296         else {
297             Fs = -min(abs1,abs2);
298         }
299         FsX = Fs*Xs; // Fricción en componentes.
300         FsY = Fs*Ys;
301         FsZ = Fs*Zs;
302
303
304
305 // Calculo de Energía de fricción para la salida de resultados.
306 // Ver Sección 2.5.
307
308 // *****
309 // *****
310
311 // Calculo de aceleraciones sobre las partículas.
312 // Calculo de torque sobre las partículas.
313

```

```
314
315 // *****
316 // *****
317 // Calculo final de fuerzas y aceleraciones sobre el sistema primario.
318
319 double suma = 0.0;
320 for (int j=(ini_np); j<ini_npt; j++) {
321     suma += acc[j][2]; // Se suma la aceleración generada por todas
322     // las partículas en la dirección "z" sobre la caja.
323 }
324
325 FCajaPart = suma/Masa_caja; // Fuerza/Masa (Aceleración) de partículas
    resultante.
326 FCajaResoI = - (Kres/Masa_caja)*((pos[ini_np+2][2] + ini_br ←
    - ref)); // Fuerza/Masa (Aceleración) del resorte generada por el sistema
    primario.
327 FCajaAmorI = - (C/Masa_caja)*(vel[ini_np+2][2]); // Fuerza/Masa
    (Aceleración) del amortiguador viscoso generada por el sistema primario.
328 FCajaResoE = (Kres/Masa_caja)*(Ampl*cos(omega*(dt*step))); ←
    // Fuerza/Masa (Aceleración) del resorte generada por la base
    excitadora.
329 FCajaAmorE = - (C/Masa_caja)*(Ampl*omega*sin(omega*(dt*step)←
    )); // Fuerza/Masa (Aceleración) del amortiguador viscos generada por la base
    excitadora.
330
331
332 acc_caja = FCajaPart + FCajaResoI + FCajaAmorI + FCajaResoE ←
    + FCajaAmorE; // Aceleración total sobre la
    caja.
333
334 for (int i=0; i<ini_np; i++) {
335     acc[i][2] += acc_g; // Aceleración de la gravedad sobre las partículas
    internas.
336 }
337 }
```

```

1 // File: update.c - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Actualización de posiciones y velocidades.
6
7 // *****
8
9 // ** NOTA: **
10
11 // En las siguientes líneas se realizan distintas funciones básicas. Por
12 // simplicidad se han eliminado y solo se hace referencia a las mismas con
13 // comentarios. Solo las sentencias de importancia para la simulación
14 // se presentan.
15
16 // *****
17
18 #include <stdio.h>
19 #include <math.h>
20 #include <iostream>
21 #include <stdlib.h>
22 #include <cstdlib>
23
24 using namespace std;
25
26 // *****
27 // Definición de constantes y variables globales.
28
29 #include "Constantes.h"
30 #include "Globales.h"
31
32 // *****
33 // Prototipos de funciones.
34
35 void compute(void);
36
37 // *****
38 void update(void) {
39
40 // Actualización de cuaterniones para las rotaciones. Las siguientes sentencias
41 // actualizan las derivadas primeras y segundas de los cuaterniones tal como se

```

```

42 // describe en la Sección 2.4.1 de esta tesis.
43 // Finalmente la actualización del cuaternion se realiza para cada partícula según
44 // la ec. 2.4.17.
45
46 for (int i = 0; i<ini_np; i++) {
47
48     q1[i][0] = 0.5*(-q[i][1]*vel_ang_b[i][0]-q[i][2]*vel_ang_b[i][1]-q[i][3]*vel_ang_b[i][2]);
49     q1[i][1] = 0.5*(q[i][0]*vel_ang_b[i][0]-q[i][3]*vel_ang_b[i][1]+q[i][2]*vel_ang_b[i][2]);
50     q1[i][2] = 0.5*(q[i][3]*vel_ang_b[i][0]+q[i][0]*vel_ang_b[i][1]-q[i][1]*vel_ang_b[i][2]);
51     q1[i][3] = 0.5*(-q[i][2]*vel_ang_b[i][0]+q[i][1]*vel_ang_b[i][1]+q[i][0]*vel_ang_b[i][2]);
52
53     q2[i][0] = 0.5*((-q1[i][1]*vel_ang_b[i][0]-q1[i][2]*vel_ang_b[i][1]-q1[i][3]*vel_ang_b[i][2])+(-q[i][1]*acc_ang[i][0]-q[i][2]*acc_ang[i][1]-q[i][3]*acc_ang[i][2]));
54     q2[i][1] = 0.5*((q1[i][0]*vel_ang_b[i][0]-q1[i][3]*vel_ang_b[i][1]+q1[i][2]*vel_ang_b[i][2])+(q[i][0]*acc_ang[i][0]-q[i][3]*acc_ang[i][1]+q[i][2]*acc_ang[i][2]));
55     q2[i][2] = 0.5*((q1[i][3]*vel_ang_b[i][0]+q1[i][0]*vel_ang_b[i][1]-q1[i][1]*vel_ang_b[i][2])+(q[i][3]*acc_ang[i][0]+q[i][0]*acc_ang[i][1]-q[i][1]*acc_ang[i][2]));
56     q2[i][3] = 0.5*((-q1[i][2]*vel_ang_b[i][0]+q1[i][1]*vel_ang_b[i][1]+q1[i][0]*vel_ang_b[i][2])+(-q[i][2]*acc_ang[i][0]+q[i][1]*acc_ang[i][1]+q[i][0]*acc_ang[i][2]));
57
58     q[i][0] += q1[i][0]*dt + q2[i][0]*(dt_2); // Actualización cuaternión q0 (ec. 2.4.17).
59     q[i][1] += q1[i][1]*dt + q2[i][1]*(dt_2); // Actualización cuaternión q1 (ec. 2.4.17).
60     q[i][2] += q1[i][2]*dt + q2[i][2]*(dt_2); // Actualización cuaternión q2 (ec. 2.4.17).
61     q[i][3] += q1[i][3]*dt + q2[i][3]*(dt_2); // Actualización cuaternión q3 (ec. 2.4.17).
62

```

```

63     qn = sqrt((q[i][0]*q[i][0]) + (q[i][1]*q[i][1]) + (q[i]↵
        ][2]*q[i][2]) + (q[i][3]*q[i][3])); // Modulo del
        Cuaternión.
64
65     q[i][0] = (q[i][0])/qn; // Normaliza cuaternión q0 (ec. 2.4.11)
66     q[i][1] = (q[i][1])/qn; // Normaliza cuaternión q1 (ec. 2.4.11)
67     q[i][2] = (q[i][2])/qn; // Normaliza cuaternión q2 (ec. 2.4.11)
68     q[i][3] = (q[i][3])/qn; // Normaliza cuaternión q3 (ec. 2.4.11)
69
70
71 // *****
72 // Definición de la matriz de transformación. Se definen los elementos de la
73 // matriz de rotación con los cuaterniones actualizados previamente. Ver
74 // Sección 2.4.1 y ec. 2.4.13.
75
76     Q[0][0] = (q[i][0]*q[i][0]) + (q[i][1]*q[i][1]) - (q[i]↵
        ][2]*q[i][2]) - (q[i][3]*q[i][3]);
77     Q[1][0] = 2*(q[i][1]*q[i][2]-q[i][0]*q[i][3]);
78     Q[2][0] = 2*(q[i][1]*q[i][3]+q[i][0]*q[i][2]);
79
80     Q[0][1] = 2*(q[i][1]*q[i][2]+q[i][0]*q[i][3]);
81     Q[1][1] = (q[i][0]*q[i][0]) - (q[i][1]*q[i][1]) + (q[i]↵
        ][2]*q[i][2]) - (q[i][3]*q[i][3]);
82     Q[2][1] = 2*(q[i][2]*q[i][3]-q[i][0]*q[i][1]);
83
84     Q[0][2] = 2*(q[i][1]*q[i][3]-q[i][0]*q[i][2]);
85     Q[1][2] = 2*(q[i][2]*q[i][3]+q[i][0]*q[i][1]);
86     Q[2][2] = (q[i][0]*q[i][0]) - (q[i][1]*q[i][1]) - (q[i]↵
        ][2]*q[i][2]) + (q[i][3]*q[i][3]);
87
88     vel_ang_b[i][0] += dt_5*acc_ang[i][0]; // Velocidad angular en el
        sistema fijo a la partícula.
89     vel_ang_b[i][1] += dt_5*acc_ang[i][1];
90     vel_ang_b[i][2] += dt_5*acc_ang[i][2];
91
92     vel_ang[i][0] = Q[0][0]*vel_ang_b[i][0] + Q[1][0]*↵
        vel_ang_b[i][1] + Q[2][0]*vel_ang_b[i][2]; // Velocidad
        angular en el sistema de laboratorio.
93     vel_ang[i][1] = Q[0][1]*vel_ang_b[i][0] + Q[1][1]*↵
        vel_ang_b[i][1] + Q[2][1]*vel_ang_b[i][2];
94     vel_ang[i][2] = Q[0][2]*vel_ang_b[i][0] + Q[1][2]*↵

```

```
        vel_ang_b[i][1] + Q[2][2]*vel_ang_b[i][2];
95
96     }
97
98     // *****
99     // Actualiza posiciones y velocidades para la traslación. Se actualizan las
100     // posiciones y velocidades de traslación de acuerdo a la metodología del
101     // algoritmo de Verlet con Velocidades. Ver Sección 2.2.2.
102
103     for (int i=0; i<ini_np; i++) {
104         pos[i][0] += vel[i][0]*dt+acc[i][0]*dt_2; // (Ec. 2.2.4).
105         pos[i][1] += vel[i][1]*dt+acc[i][1]*dt_2; // (Ec. 2.2.4).
106         pos[i][2] += vel[i][2]*dt+acc[i][2]*dt_2; // (Ec. 2.2.4).
107
108         vel[i][0] += dt_5*acc[i][0]; // (Ec. 2.2.4).
109         vel[i][1] += dt_5*acc[i][1]; // (Ec. 2.2.4).
110         vel[i][2] += dt_5*acc[i][2]; // (Ec. 2.2.4).
111
112     }
113
114     // *****
115     // Actualización Posición Caja y Velocidad Caja. Resuelta la ecuación
116     // diferencial del sistema primario (ec. 2.1.21) se actualizan la posición
117     // y la velocidad de la caja instante a instante en la simulación.
118
119     pos_caja = vel_caja*dt + acc_caja*dt_2;
120     for (int i=ini_np; i<ini_npt; i++) {
121         pos[i][2] += pos_caja;
122     }
123
124     vel_caja += acc_caja*dt_5;
125     for (int i=ini_np; i<ini_npt; i++) {
126         vel[i][2] = vel_caja;
127     }
128
129     // *****
130     // Definición de la variable para mover las celdas. Las celdas para la búsqueda
131     // de colisiones deben ser movidas para mantenerse dentro del recinto de
132     // contención. Calcula la actualización de la posición de la caja, se mueve la
133     // matriz tridimensional de celdas.
134
```

```

135     pos_caja2 = pos[ini_np+2][2] + ini_br - ref;
136
137     // Se vacían inicialmente las celdas. Se asignan ceros a todas las celdas.
138     // Para mas detalles ver Sección 2.3.
139
140     for (int i=0; i<n_cell_x; i++) {
141         for (int j=0; j<n_cell_y; j++) {
142             for (int k=0; k<n_cell_z; k++) {
143                 matriz_cell[i][j][k] = 0;
144             }
145         }
146     }
147
148     // *****
149     // Asignación de partículas a celdas. Ver Sección 2.3.
150     // Las siguientes líneas recorren la totalidad de las partículas de la
151     // simulación, en función de su posición espacial y del tamaño de las celdas,
152     // previamente definidas, se coloca el numero de cada partícula en la celda
153     // que le corresponde. Dicho proceso genera una matriz tridimensional de
154     // celdas.
155
156     for (int i=1; i<ini_np+1; i++) {
157         pos_cell_x = ((int)(ceil(((pos[i-1][0])+ini_bxF)/lado_cell↵
158             ))) - 1;
159         pos_cell_y = ((int)(ceil(((pos[i-1][1])+ini_byF)/lado_cell↵
160             ))) - 1;
161         pos_cell_z = ((int)(ceil(((pos[i-1][2])+ini_bzF-pos_caja2)↵
162             /lado_cell)))) - 1;
163         matriz_cell[pos_cell_x][pos_cell_y][pos_cell_z]=i;
164     }
165
166     // *****
167     // Calculo de las fuerzas, momentos y aceleraciones. Se llama a las funciones
168     // para calculo de las fuerzas de interacción (compute.c).
169
170     compute();
171
172     // *****
173     // Actualización de las velocidades después del calculo de las aceleraciones.
174     // Como se detalla en la Sección 2.2.2 es necesario para el algoritmo actualizar
175     // las velocidades con los valores del instante siguiente de simulación. Se

```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
173 // realiza tanto para las velocidades de traslación como de rotación.
174
175 // => Para traslación:
176 for (int i=0; i<ini_np; i++) {
177     vel[i][0] += dt_5*acc[i][0];
178     vel[i][1] += dt_5*acc[i][1];
179     vel[i][2] += dt_5*acc[i][2];
180 }
181
182 vel_caja += acc_caja*dt_5;
183 for (int i=ini_np; i<ini_npt; i++) {
184     vel[i][2] = vel_caja;
185 }
186
187 // => Para rotación:
188 // *****
189 // Actualización de los cuaterniones.
190
191 for (int i=0; i<ini_npt; i++) {
192     acc_ang[i][0] = 0.0;
193     acc_ang[i][1] = 0.0;
194     acc_ang[i][2] = 0.0;
195 }
196
197 // *****
198 // Definición de la matriz de transformación.
199
200 for (int i = 0; i<ini_np; i++) {
201
202     Q[0][0] = (q[i][0]*q[i][0]) + (q[i][1]*q[i][1]) - (q[i][2]*q[i][2]) - (q[i][3]*q[i][3]);
203     Q[1][0] = 2*(q[i][1]*q[i][2]-q[i][0]*q[i][3]);
204     Q[2][0] = 2*(q[i][1]*q[i][3]+q[i][0]*q[i][2]);
205
206     Q[0][1] = 2*(q[i][1]*q[i][2]+q[i][0]*q[i][3]);
207     Q[1][1] = (q[i][0]*q[i][0]) - (q[i][1]*q[i][1]) + (q[i][2]*q[i][2]) - (q[i][3]*q[i][3]);
208     Q[2][1] = 2*(q[i][2]*q[i][3]-q[i][0]*q[i][1]);
209
210     Q[0][2] = 2*(q[i][1]*q[i][3]-q[i][0]*q[i][2]);
211     Q[1][2] = 2*(q[i][2]*q[i][3]+q[i][0]*q[i][1]);
```

```

212     Q[2][2] = (q[i][0]*q[i][0]) - (q[i][1]*q[i][1]) - (q[i]↵
        ][2]*q[i][2]) + (q[i][3]*q[i][3]);
213
214
215     Tb[i][0] = Q[0][0]*Ts[i][0] + Q[0][1]*Ts[i][1] + Q[0][2]*↵
        Ts[i][2]; // Calculo del torque en el sistema fijo a la
        partícula.
216     Tb[i][1] = Q[1][0]*Ts[i][0] + Q[1][1]*Ts[i][1] + Q[1][2]*↵
        Ts[i][2];
217     Tb[i][2] = Q[2][0]*Ts[i][0] + Q[2][1]*Ts[i][1] + Q[2][2]*↵
        Ts[i][2];
218
219     acc_ang[i][0] = Tb[i][0]/ini_I[i];
220     acc_ang[i][1] = Tb[i][1]/ini_I[i];
221     acc_ang[i][2] = Tb[i][2]/ini_I[i];
222
223     vel_ang_b[i][0] += dt_5*acc_ang[i][0]; // Velocidad angular en el
        sistema fijo a la partícula.
224     vel_ang_b[i][1] += dt_5*acc_ang[i][1];
225     vel_ang_b[i][2] += dt_5*acc_ang[i][2];
226
227 }
228
229 }
```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
1 // File: Constantes.h - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Definición de constantes generales para las simulaciones.
6
7 // *****
8
9 // ** NOTA: **
10
11 // Este archivo define las constantes a utilizar en las simulaciones.
12 // Todos los valores son adimensionales.
13
14 // *****
15
16 #ifndef Constantes
17 #define Constantes
18
19 // *****
20 // Definición de constantes
21
22 #define PI 3.14159265358979 // Define el numero Pi.
23 #define step_num 150000000 // Numero máximo de pasos de simulación.
24 #define dt 5.0e-6 // Paso de tiempo.
25 #define dt_2 0.5* dt* dt // 0.5*dt al cuadrado.
26 #define dt_5 0.5* dt // 0.5*dt.
27
28
29 // *****
30 // Propiedades del sistema
31
32 #define Masa_caja 1.0 // Masa del sistema primario.
33 #define Kres 2.77706 // Constante de rigidez K del resorte (ver Fig. 1.1).
34 #define C 0.05610 // Constante de amortiguamiento viscoso C (ver Fig. 1.1).
35 #define Ampl 1.5 // Amplitud de excitación (ver ec. 2.1.21).
36 #define Ampl_cero 0.0 // Amplitud inicial de la caja desde la posición de
    equilibrio.
37 #define ini_np 250 // Cantidad de granos dentro del recinto.
38 #define ini_npt (ini_np + 6) // Numero total de granos (np + 6 partículas de la
    caja).
39 #define ini_dens 9.1481e-5 // Densidad del material de las partículas.
```

```

40 #define ini_E 78661.84448 // Modulo de elasticidad de las partículas.
41 #define ini_poisson 0.28 // Coeficiente de Poisson de las partículas.
42 #define acc_g -1.0 // Aceleración de la gravedad.
43 #define mu_d 0.3 // Coeficiente de fricción dinámico.
44 #define ini_densb 9.1481e-5 // Densidad del material de la caja.
45 #define ini_Eb 78661.84448 // Modulo de elasticidad de la caja.
46 #define ini_poissonb 0.28 // Coeficiente de Poisson de la caja.
47
48 #define ini_bx 12.25 // Dimensión en X de la caja.
49 #define ini_by 12.25 // Dimensión en Y de la caja.
50 #define ini_bz 40.85 // Dimensión en Z de la caja.
51 #define ini_br 10.0e8 // Radio de las partículas que forman la caja.
52 #define ini_bxC 2*ini_bx // Variables para definición de celdas en X.
53 #define ini_byC 2*ini_by // Variables para definición de celdas en Y.
54 #define ini_bzC 2*ini_bz // Variables para definición de celdas en Z.
55
56 #endif

```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
1 // File: Globales.h - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Definición de Variables Globales.
6
7 // *****
8
9 // ** NOTA: **
10
11 // Este archivo define las variables globales a utilizar en las simulaciones.
12
13 // *****
14
15 #ifndef Globales
16 #define Globales
17
18 // *****
19 // Variables Globales
20
21 extern int step; // Numero de pasos.
22 extern double step_print_num; // Numero de pasos para salida de resultados.
23 extern double step_print_num_c; // Actualiza numero de pasos para salida de
    resultados.
24
25 extern double ref; // Posición inicial de equilibrio.
26 extern double omega; // Frecuencia de excitación.
27
28 extern double pos_caja; // Posición de la caja.
29 extern double pos[ini_npt][3]; // Posición de las partículas.
30 extern double pos_ang[ini_npt][3]; // Posición angular de las partículas.
31 extern double pos_caja2; // Variable para mover celdas.
32
33 extern double vel[ini_npt][3]; // Velocidad de las partículas.
34 extern double vel_ang[ini_npt][3]; // Velocidad angular de las partículas
    en el sistema de referencia.
35 extern double vel_ang_b[ini_npt][3]; // Velocidad angular de las partículas
    en el sistema de la partícula.
36 extern double vel_caja; // Velocidad de la caja.
37
38 extern double acc[ini_npt][3]; // Aceleración de las partículas.
```

```

39  extern double acc_ang[ini_npt][3];    // Aceleración angular de las partículas.
40  extern double acc_caja;                // Aceleración de la caja.
41  extern double Fs[ini_npt][3];         // Fuerza tangencial.
42  extern double Ts[ini_npt][3];         // Torque de las partículas en el sistema
    de referencia.
43  extern double Tb[ini_npt][3];         // Torque de las partículas en el sistema
    de la partícula.
44
45  extern double qn;                      // Cuaternión normalizado.
46  extern double q[ini_np][4];           // Cuaterniones de las partículas.
47  extern double q1[ini_np][4];          // Derivada primera de cuaterniones.
48  extern double q2[ini_np][4];          // Derivada segunda de cuaterniones.
49  extern double Q[3][3];                 // Matriz de transformación.
50
51  extern double ini_masa[ini_npt];       // Masa de partículas.
52  extern double ini_I[ini_npt];          // Momento de inercia de partículas.
53  extern double ini_vol[ini_npt];        // Volumen de partículas.
54  extern double vol_caja;                // Volumen del recinto de contención.
55  extern double vol_ocup;                // Volumen ocupado por partículas.
56  extern double ini_radios[ini_npt];     // Vector de radios de las partículas.
57  extern double radios;                  // Valor de radio definido constante.
58  extern double gama_n, gama_s;          // Características disipativas de las
    fuerzas de interacción.
59  extern int reply_radios;                // Define radios con distribución normal.
60  extern int reply_radios1;               // Define radios aleatorios en intervalo.
61  extern int reply_radios2;               // Define radios iguales de partículas.
62  extern double A_inter, B_inter;         // Intervalo para radios aleatorios.
63  extern double radio_max;                // Radio máximo.
64  extern double radio_min;                // Radio mínimo.
65
66  extern double lado_cell;                // Lado de la celda para búsqueda de colisiones.
67  extern double ini_bxF;                  // Variables de posicionamiento interno de celdas en X.
68  extern double ini_byF;                  // Variables de posicionamiento interno de celdas en Y.
69  extern double ini_bzF;                  // Variables de posicionamiento interno de celdas en Z.
70  extern int pos_cell_x;                  // Posición X de celda determinada.
71  extern int pos_cell_y;                  // Posición Y de celda determinada.
72  extern int pos_cell_z;                  // Posición Z de celda determinada.
73
74  extern int n_cell_search;                // Numero de celdas para buscar vecinos.
75  extern int ***matriz_cell;              // Definición de la matriz de celdas.
76

```

APÉNDICE A. SOFTWARE DE SIMULACIÓN BASADO EN DEM: AMORTIGUADOR DE PARTÍCULAS

```
77  extern int  n_cell_x;      // Numero total de celdas en X.
78  extern int  n_cell_y;      // Numero total de celdas en Y.
79  extern int  n_cell_z;      // Numero total de celdas en Z.
80
81  extern double FCajaPart;    // Fuerza/Masa (Aceleración) de partículas resultante.
82  extern double FCajaResoE;   // Fuerza/Masa (Aceleración) del resorte generada por
    la base excitadora.
83  extern double FCajaAmorE;   // Fuerza/Masa (Aceleración) del amortiguador viscos
    generada por la base excitadora.
84  extern double FCajaResoI;   // Fuerza/Masa (Aceleración) del resorte generada por
    el sistema primario.
85  extern double FCajaAmorI;   // Fuerza/Masa (Aceleración) del amortiguador viscoso
    generada por el sistema primario.
86
87  // Definición global de archivos de salida y de variables
88  // necesarias para salida (por ejemplo Energías).
89
90  #endif
```

```

1 // File: Variables.h - Name: M. Sánchez - Fecha: 08.06.10
2
3 // Dinámica molecular por: Verlet con velocidades.
4 // Análisis de amortiguadores de partículas.
5 // Definición de Variables.
6
7 // *****
8
9 #ifndef Variables
10 #define Variables
11
12 // *****
13 // Definición de variables globales.
14
15 int step = 120000000; // Numero de pasos totales.
16 double step_print_num = 2000; // Pasos para guardar resultados.
17 double step_print_num_c = 2000; // Actualiza pasos para guardar
    resultados.
18 double gama_n = 1.47993; // Característica disipativas de Fn.
19 double gama_s = 4.43979; // Característica disipativas de Fs.
20 double ref = (Masa_caja*acc_g)/Kres; // Calculo de la posición de
    equilibrio.
21
22 // *****
23 // Definición de radios
24
25 int reply_radios = 0; // Radios de distribución normal = 1 sino 0.
26
27 int reply_radios1 = 0; // Radios aleatorios en intervalo = 1 sino 0.
28 double A_inter = 1.0; // Menor valor del intervalo.
29 double B_inter = 1.0; // Mayor valor del intervalo.
30
31 int reply_radios2 = 1; // Radios de partículas iguales = 1 sino 0.
32 double radios = 1.0; // Valor del radio.
33 double radio_max = 1.0; // Valor necesario para definir celdas.
34 double radio_min = 1.0;
35
36 // *****
37 // Colocación de radios, volúmenes y posiciones iniciales.
38
39 double ini_masa[ini_npt] = {0.};

```

```
40 double ini_I[ini_npt] = {0.};
41 double ini_vol[ini_npt] = {0.};
42 double vol_caja = 0.0;
43 double vol_ocup = 0.0;
44 double ini_radios[ini_npt] = {0.};
45 double pos_caja = 0.0;
46 double pos[ini_npt][3] = {0.};
47 double pos_r[ini_np][3] = {0.};
48 double pos_ang[ini_npt][3] = {0.};
49 double pos_rs[ini_npt][3] = {0.};
50 double pos_caja2 = 0.0;
51 double **pos_S;
52 int ini_npb_S = 0;
53
54 // *****
55 // Colocación de velocidades iniciales.
56
57 double vel[ini_npt][3] = {0.};
58 double vel_ang[ini_npt][3] = {0.};
59 double vel_ang_b[ini_npt][3] = {0.};
60 double vel_caja = 0.0;
61
62 // *****
63 // Colocación de la aceleraciones, fuerzas y torques iniciales.
64
65 double acc[ini_npt][3] = {0.};
66 double acc_ang[ini_npt][3] = {0.};
67 double acc_caja = 0.0;
68 double acc_caja2 = 0.0;
69 double Fs[ini_npt][3] = {0.};
70 double Ts[ini_npt][3] = {0.};
71 double Tb[ini_npt][3] = {0.};
72
73 // *****
74 // Definición de cuaterniones iniciales.
75
76 double qn = {1.};
77 double q[ini_np][4] = {0.};
78 double q1[ini_np][4] = {0.};
79 double q2[ini_np][4] = {0.};
80 double Q[3][3] = {0.};
```

```

81
82 // *****
83 // Definición de celdas.
84
85 double lado_cell = (0.95*((2*radio_min)/(sqrt(3))));
86 double ini_bxF = 2*radio_max;
87 double ini_byF = 2*radio_max;
88 double ini_bzF = ((2-1)*ini_bz)/2;
89 int pos_cell_x = 0;
90 int pos_cell_y = 0;
91 int pos_cell_z = 0;
92
93 int n_cell_x = (int)(ceil(((ini_bxC+ini_bxF)+lado_cell)/↵
    lado_cell));
94 int n_cell_y = (int)(ceil(((ini_byC+ini_byF)+lado_cell)/↵
    lado_cell));
95 int n_cell_z = (int)(ceil(((ini_bzC+ini_bzF)+lado_cell)/↵
    lado_cell));
96
97 int n_cell_search = 2;
98 int ***matriz_cell;
99
100 // *****
101 // Definición de fuerzas.
102
103 double FCajaPart = 0.0;
104 double FCajaResoE = 0.0;
105 double FCajaAmorE = 0.0;
106 double FCajaResoI = 0.0;
107 double FCajaAmorI = 0.0;
108
109 // Iniciación de archivos de salida y de variables
110 // necesarias para salida (por ejemplo Energías).
111
112 #endif

```


SOFTWARE DE SIMULACIÓN HÍBRIDO DEM - DINÁMICA DE COLISIONES: AMORTIGUADOR DE IMPACTO

La simulación del amortiguador de impacto (Ver Sección 2.1.3) se ha implementado en MatLab®. Dada la simplicidad de este modelo, que considera una partícula única, se ha implementado directamente en un único archivo con distintas funciones.

Vale la pena repetir que el algoritmo usado es híbrido, donde se utiliza el método de "Verlet con velocidades" para los períodos en los cuales la partícula se encuentra en vuelo (o en contacto continuo con el recinto) y el método de "Dinámica de colisiones" cuando se producen los impactos entre la partícula y el recinto de contención. En dichos instantes se utiliza un coeficiente de restitución efectivo e para obtener las velocidades de la partícula y el recinto después de la colisión. Esto último se realiza en lugar del calcular de las fuerzas de interacción requeridas por el DEM.

```

1  %File: Impact.m - Name: M. Sánchez - Fecha: 16.10.11
2
3  %Análisis de amortiguadores de impacto.
4  %Las colisiones se tratan con coeficiente de restitución.
5
6  %*****
7
8  %** NOTA: **
9
10 %En las siguientes líneas se realizan distintas funciones básicas. Por
11 %simplicidad se han eliminado y solo se hace referencia a las mismas con
12 %comentarios. Solo las sentencias de importancia para la simulación
13 %se presentan.
14

```

APÉNDICE B. SOFTWARE DE SIMULACIÓN HÍBRIDO DEM - DINÁMICA DE COLISIONES: AMORTIGUADOR DE IMPACTO

```
15 %En todo los casos donde aparecen guiones medios (-) los mismos significan
16 %que han sido eliminadas las variables pasadas por argumentos para
17 %facilitar la lectura del código.
18
19 %*****
20
21 function Impact
22
23     freq = [5.0, 10., 15., 20., 25.] ;    %Frecuencias a analizar en Hz.
24     freq_N = length(freq);                %Numero de frecuencias a correr.
25
26     step_num = 6000000;                    %Pasos de simulación.
27     step_print_num = 100;                  %Pasos para guardar resultados.
28     step_print_num_c = 100;                %Actualiza pasos para guardar resultados.
29
30     dt = 5.0e-6;                           %Paso de tiempo.
31     dt_2 = 0.5*dt*dt;                       %0.5*dt al cuadrado.
32     dt_5 = 0.5*dt;                           %0.5*dt.
33
34     %*****
35     %Definición de constantes
36     e = 0.0;                                %Coeficiente de restitución.
37     g = 9.81;                                %Aceleración de la gravedad.
38     C = 7.6;                                %Coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema primario.
39     K = 21500;                               %Coeficiente de rigidez del resorte del sistema primario.
40     M = 2.37;                                %Masa del sistema primario.
41     m = 0.22704;                             %Masa de 1 partícula.
42     me = m;
43     Amp = 0.0045;                            %Amplitud de excitación.
44     gap = 0.0835;                            %Gap del recinto de contención.
45     flag_techo = 0;                          %Flag para contacto con el techo ( = 1 en contacto).
46     flag_piso = 0;                          %Flag para contacto con el piso ( = 1 en contacto).
47
48     %Movimiento del sistema sin el amortiguador de impacto.
49     B = (((K^2+(C*omega)^2)/((K-M*omega^2)^2+(C*omega)^2))^0.5)*←
        Amp;
50
51     %*****
52     %COMIENZO DE LA SIMULACIÓN PARA CADA FRECUENCIA
53     for i = 1:freq_N
54         Frecuencia = freq(i)                %Se toma la frecuencia i.
```

```

55     omega = frec(i)*2*pi;      %Frec en rad/s.
56
57 %Definición de las condiciones iniciales para la frecuencia a analizar.
58
59     pos_caja = 0.0;            %Posición de la caja inicial.
60     vel_caja = 0.0;            %Velocidad de la caja inicial.
61     acc_caja = 0.0;            %Aceleración de la caja inicial.
62     pos_part = 0.05;           %Posición de la partícula inicial.
63     vel_part = 0.0;            %Velocidad de la partícula inicial.
64     acc_part = 0.0;            %Aceleración de la partícula inicial.
65
66 %Se definen distintas variable en función de los resultados a obtener
67 %en la función de salida de datos.
68
69     for step = 1 : step_num
70         if ( step == step_print_num )
71             [-] = salida(-);    %Los guiones indican variables de entra y
                                   %salida. Se eliminaron para simplificación.
72             step_print_num = step_print_num + step_print_num_c←
                                   ;
73         end
74         [-] = update(-);        %Los guiones indican variables de entra y
                                   %salida. Se eliminaron para simplificación.
75     end
76
77     save( Result.mat ); %Guarda resultados.
78
79 %=====
80 function [-] = update(-);
81
82 %Actualización de posiciones y velocidades de caja.
83 pos_caja = pos_caja + vel_caja*dt + acc_caja*dt_2;
84 vel_caja = vel_caja + acc_caja*dt_5;
85
86 %Actualización de posiciones y velocidades de la partícula
87 %para la traslación. Se define también los flag si son necesarios para
88 %realizar y mantener el contacto de la partícula con el piso o el techo.
89 %Para mas detalles ver Sección 2.1.3.
90
91 if flag_techo == 1
92     pos_part = pos_caja + gap;

```

```
93     vel_part = vel_caja;
94 elseif flag_piso == 1
95     pos_part = pos_caja;
96     vel_part = vel_caja;
97 else
98     pos_part = pos_part + vel_part*dt + acc_part*dt_2;
99     vel_part = vel_part + acc_part*dt_5;
100 end
101
102 [-] = compute(-);    %Llama a la función compute para calculo de fuerzas.
103
104 %Actualización de la velocidad después del cálculo de la aceleración.
105 %Como se detalla en la Sección 2.2.2 es necesario para el algoritmo actualizar
106 %las velocidades con los valores del instante siguiente de simulación.
107 %Se define también los flag si son necesarios para
108 %realizar y mantener el contacto de la partícula con el piso o el techo.
109 %Para mas detalles ver Sección 2.1.3.
110
111 vel_caja = vel_caja + acc_caja*dt_5;
112
113 if flag_techo == 1
114     vel_part = vel_caja;
115 elseif flag_piso == 1
116     vel_part = vel_caja;
117 else
118     vel_part = vel_part + acc_part*dt_5;
119 end
120
121 %=====
122 function [-] = compute(-);
123
124 %Se ponen a cero por ejemplo las energías y demás variables de salida no
125 %acumulativas.
126
127
128 if flag_techo == 0    %La partícula no toca el techo del recinto.
129     if (pos_caja + gap) < pos_part
130         pos_part = pos_caja + gap;
131
132         vel_part_ant = vel_part;    %Se guarda velocidad anterior de la
            partícula.
```

```

133         vel_caja_ant = vel_caja;           %Se guarda velocidad anterior de la caja.
134
135     %A continuación se calculan las velocidades de la partícula y de la caja en
136     %función del coeficiente de restitución considerado. Para mas detalles ver
137     %Sección 2.1.3 y ecs. 2.1.25 y 2.1.26.
138
139         vel_part = ((1 + e)*vel_caja_ant + ((m/M) - e)*↵
            vel_part_ant)/(1 + (m/M));
140         vel_caja = ((1 - e*(m/M))*vel_caja_ant + (m/M)*(1 + e)*↵
            *vel_part_ant)/(1 + (m/M));
141
142         %Se calculan energías y variables de colisión si es necesario.
143
144         %Se compara la aceleración de la caja con la de la gravedad. Esta
145         %verificación es para asegurar que la partícula mantendrá en contacto o no
146         %con el techo del recinto de contención. Ver Sección 2.1.3.
147
148         if acc_caja < -g
149             flag_techo = 1;
150             me = M + m;
151         end
152
153     end
154 end
155
156 if flag_piso == 0           %La partícula no toca el piso del recinto.
157     if pos_caja > pos_part
158         pos_part = pos_caja;
159
160         vel_part_ant = vel_part; %Se guarda velocidad anterior de la partícula.
161         vel_caja_ant = vel_caja; %Se guarda velocidad anterior de la caja.
162
163     %A continuación se calculan las velocidades de la partícula y de la caja en
164     %función del coeficiente de restitución considerado. Para mas detalles ver
165     %Sección 2.1.3 y ecs. 2.1.25 y 2.1.26.
166
167         vel_part = ((1 + e)*vel_caja_ant + ((m/M) - e)*↵
            vel_part_ant)/(1 + (m/M));
168         vel_caja = ((1 - e*(m/M))*vel_caja_ant + (m/M)*(1 + e)*↵
            vel_part_ant)/(1 + (m/M));
169

```

```
170     %Se calculan energías y variables de colisión si es necesario.
171
172     %Se compara la aceleración de la caja con la de la gravedad. Esta
173     %verificación es para asegurar que la partícula mantendrá en contacto o no
174     %con el piso del recinto de contención. Ver Sección 2.1.3.
175
176     if acc_caja > -g
177         flag_piso = 1;
178         me = M + m;
179     end
180
181 end
182 end
183
184 %Se calcula la aceleración del recinto de acuerdo con la ec. 2.1.22.
185
186 acc_caja = -(K/me)*(pos_caja-(Amp*cos(omega*(dt*step))))-(C/me*←
187     )*(vel_caja-(-Amp*omega*sin(omega*(dt*step))))-g;
188
189 %Se colocan los flag correspondientes y se le coloca a la partícula la
190 %aceleración de la gravedad si no se encuentra en contacto con el recinto.
191
192 if acc_caja >= -g & flag_techo == 1
193     flag_techo = 0;
194     me = M;
195 end
196
197 if acc_caja <= -g & flag_piso == 1
198     flag_piso = 0;
199     me = M;
200 end
201
202 if flag_techo == 1 | flag_piso == 1
203     acc_part = acc_caja;
204 else
205     acc_part = -g;
206 end
207
208 %=====
209 function [-] = salida(-);
```

210 %En esta función se colocan todas las variables necesarias para la salida
211 %de datos, las mismas se actualizaran en función de las necesidades.

IMPLEMENTACIÓN DE ROTACIONES

En tres dimensiones son necesarias seis coordenadas para definir la posición y orientación de las partículas. Tres coordenadas establecen la posición del centro de masa de los granos y los tres ángulos (Φ, Θ, Ψ) establecen la orientación de los mismos.

La orientación de un cuerpo rígido establece la relación entre un sistema de ejes fijo en el espacio $S^s (x, y, z)$ y un sistema de ejes móvil fijo con respecto al cuerpo $S^b (x', y', z')$. En el sistema S^s , los momentos de inercia de las partículas son dependientes del tiempo y contienen elementos fuera de la diagonal, mientras que en el sistema principal S^b (con ejes coincidentes con los ejes principales de inercia de la partícula), el tensor de inercia \hat{I} es diagonal. Así, en S^b se tiene:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.1})$$

Sin embargo, el sistema S^b no es inercial, ya que se mueve con una aceleración aún desconocida, debido a la interacción de la partícula dada con otras partículas del sistema granular. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento no se pueden formular en este sistema. Para resolver este problema, se define un sistema de coordenadas S^f , que es idéntico al S^b en el instante t . Obviamente, a cada instante de tiempo le corresponde un sistema S^f diferente. Así, los ejes del sistema S^f en el tiempo t son idénticos a los ejes del sistema S^b en el mismo tiempo t . En este sistema, el tensor de inercia adopta su forma simple C.0.1. Además S^f es inercial dado que no rota con el cuerpo como S^b , por lo tanto, el mismo permite una formulación simple de las ecuaciones de movimiento.

Cualquier vector unitario e puede ser expresado en términos de los componentes tanto en S^s como en $S^b(S^f)$ ¹. Estas componentes estarán relacionadas por la matriz de

¹A partir de este momento, se utilizará de manera indistinta S^f y S^b , teniendo en cuenta siempre que las ecuaciones de movimiento se plantean en $S^f \equiv S^b$ para el tiempo t

rotación A de la siguiente manera:

$$\vec{e}^b = A\vec{e}^s, \quad (\text{C.0.2})$$

donde \vec{e}^b es el vector unitario en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo y \vec{e}^s en el sistema fijo en el espacio.

Los elementos de la matriz de rotación son los nueve cosenos directores del sistema fijo al cuerpo con respecto al sistema fijo en el espacio. Los mismos definen completamente la orientación de las partículas, sin embargo, sólo tres cantidades son independientes y necesarias para definir unívocamente a la matriz A . Así, generalmente, son tomados como independientes los tres ángulos de Euler.

De esta manera, la matriz de rotación se puede escribir en forma de un producto triple de las rotaciones definidas por los ángulos de Euler (ver Fig. C.1 y [77]). La rotación inicial del ángulo Φ alrededor del eje z se puede describir mediante la matriz D :

$$\xi = Dx, \quad (\text{C.0.3})$$

donde ξ y x son vectores columnas y D es de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.4})$$

Análogamente, la siguiente transformación (una rotación entorno al eje x del ángulo Θ) se puede describir mediante una matriz C :

$$\xi' = C\xi, \quad (\text{C.0.5})$$

con:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.6})$$

Finalmente, la última rotación del ángulo Ψ sobre z se realiza mediante una matriz B de la siguiente manera:

$$x' = B\xi', \quad (\text{C.0.7})$$

donde:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.8})$$

Por lo tanto, la transformación completa [Ec. (C.0.2)] estará definida por el producto

sucesivo de matrices, de la siguiente forma:

$$A = BCD, \quad (C.0.9)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\sin\Psi & \sin\Theta\sin\Psi \\ -\cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Theta\cos\Psi & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Theta\cos\Psi & \sin\Theta\cos\Psi \\ \sin\Phi\sin\Theta & -\cos\Phi\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}. \quad (C.0.10)$$

Para la definición de la transformación se ha utilizado el "convenio x " de los ángulos de Euler, tal como se muestra en la Fig. C.1.

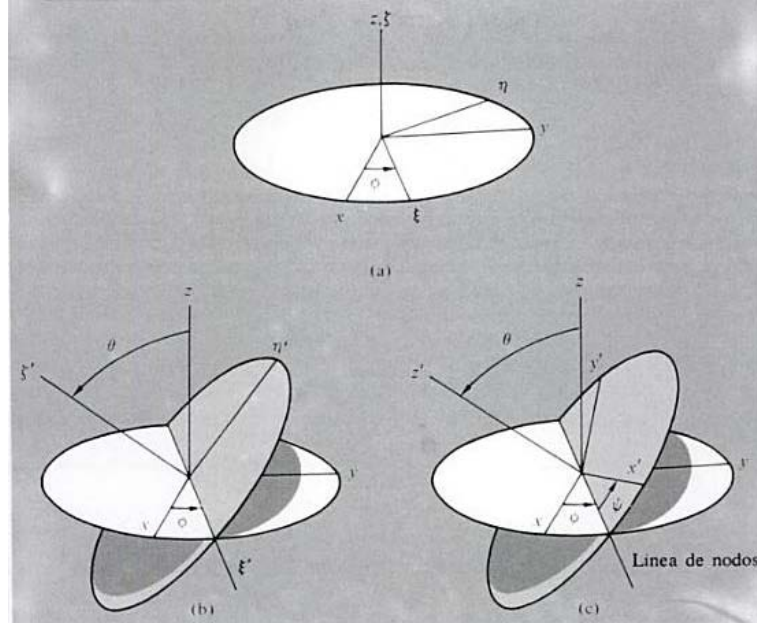


Figura C.1: Rotaciones que definen a los ángulos de Euler. "Convenio x ". Reproducido de la Ref. [77].

Al considerar rotaciones, los vectores intervinientes generalmente variarán con el tiempo al moverse la partícula, esta variación dependerá del sistema de coordenadas al cual se refieren las observaciones. El vector \vec{e}^b aparecerá como constante cuando se mida en el sistema de ejes fijo a la partícula, en cambio las componentes del vector, al medirse en el sistema espacial S^s , variarán con el tiempo si la partícula se mueve.

Por lo tanto, la variación de las componentes del vector en un tiempo δt será diferente vistas desde uno u otro sistema de referencia. Es posible establecer una relación entre ambas variaciones considerando que la única diferencia es el efecto de la rotación del sistema de ejes fijo al cuerpo, así:

$$\dot{\vec{e}}^s = \dot{\vec{e}}^b + \vec{\omega}^s \otimes \vec{e}^b, \quad (C.0.11)$$

donde $\vec{\omega}^s$ es la velocidad angular instantánea de la partícula y puede ser expresada en

función de los ángulos de Euler y de sus derivadas respecto al tiempo.

La rotación infinitesimal general, asociada a $\vec{\omega}^s$, puede considerarse que consiste en tres rotaciones infinitesimales sucesivas con velocidades angulares $\omega_\Phi = \dot{\Phi}$, $\omega_\Theta = \dot{\Theta}$ y $\omega_\Psi = \dot{\Psi}$. A consecuencia de la propiedad vectorial de las rotaciones infinitesimales, el vector $\vec{\omega}^s$ puede obtenerse sumando los tres vectores velocidad angular.

Si bien las direcciones de ω_Φ , ω_Θ y ω_Ψ no están situadas simétricamente,¹ es posible utilizar las transformaciones ortogonales previamente definidas (matrices B , C y D), para obtener los componentes de estos vectores según cualquier sistema de ejes.

Aplicando la transformación ortogonal $A = BCD$ [Ec. (C.0.10)], es posible obtener las componentes del vector ω_Φ en el sistema S^b , de manera que:

$$\omega_\Phi^b = A\omega_\Phi^s = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.12})$$

De este modo, las componentes de ω_Φ en el sistema fijo a la partícula vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_\Phi^{x'} &= \dot{\Phi} \sin\Theta \sin\Psi, \\ \omega_\Phi^{y'} &= \dot{\Phi} \sin\Theta \cos\Psi, \\ \omega_\Phi^{z'} &= \dot{\Phi} \cos\Theta. \end{aligned} \quad (\text{C.0.13})$$

La línea de nodos, en la cual se dirige ω_Θ , coincide con el eje ξ de la transformación intermedia $\xi\eta\zeta$ (ver Fig. C.1). Por lo tanto, las componentes respecto del sistema S^b se obtendrán aplicando solamente la transformación ortogonal B :

$$\omega_\Theta^b = B\omega_\Theta^s = B \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.0.14})$$

Así, las componentes en S^b serán:

$$\begin{aligned} \omega_\Theta^{x'} &= \dot{\Theta} \cos\Psi, \\ \omega_\Theta^{y'} &= -\dot{\Theta} \sin\Psi, \\ \omega_\Theta^{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.0.15})$$

Dado que ω_Ψ se encuentra dirigida según el eje z' del sistema S^b , no es necesaria

¹ ω_Φ se encuentra dirigida según el eje z del espacio, ω_Θ según la línea de nodos y ω_Ψ según el eje z' del cuerpo (ver Fig. C.1).

ninguna transformación adicional. De esta manera, sumando las componentes se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi, \\ \omega_{y'} &= \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi, \\ \omega_{z'} &= \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi}.\end{aligned}\tag{C.0.16}$$

El sistema de ecuaciones (C.0.16) puede ser resuelto para $\dot{\Phi}$, $\dot{\Theta}$ y $\dot{\Psi}$ con el fin de obtener la evolución de los ángulos de Euler.

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= -\omega_{x'} \frac{\cos \Psi}{\sin \Theta} + \omega_{y'} \frac{\sin \Psi}{\sin \Theta}, \\ \dot{\Theta} &= \omega_{x'} \sin \Psi + \omega_{y'} \cos \Psi, \\ \dot{\Psi} &= \omega_{x'} \frac{\cos \Psi \cos \Theta}{\sin \Theta} - \omega_{y'} \frac{\sin \Psi \cos \Theta}{\sin \Theta} + \omega_{z'}.\end{aligned}\tag{C.0.17}$$

Al considerar cualquier sistema inercial, la derivada temporal del momento angular cinético es el momento resultante de los torques exteriores, así, es posible escribir para el sistema S^s que:

$$\dot{\vec{L}}^s = \vec{M}^s,\tag{C.0.18}$$

donde \vec{L}^s es el momento angular cinético en el sistema de referencia fijo en el espacio y \vec{M}^s es el momento resultante de los torques exteriores. De la misma manera, es posible escribir para el sistema fijo a la partícula S^b que:

$$\dot{\vec{L}}^b + \vec{\omega}^b \otimes \vec{L}^b = \vec{M}^b.\tag{C.0.19}$$

Teniendo en cuenta que en S^b , tomando como ejes de referencia los ejes principales de inercia de la partícula i , la relación entre \vec{L}^b y $\vec{\omega}^b$ esta dada por:

$$\dot{\vec{L}}_i^b = \hat{I} \dot{\vec{\omega}}_i^b,\tag{C.0.20}$$

y que los momentos de inercia son constantes en este sistema, tenemos:

$$\hat{I} \dot{\vec{\omega}}_i^b + \vec{\omega}_i^b \otimes (\hat{I} \vec{\omega}_i^b) = \vec{M}^b.\tag{C.0.21}$$

Desarrollando la Ec. (C.0.21), teniendo en cuenta que para el sistema del cuerpo el tensor de inercia es diagonal, las tres ecuaciones para el movimiento de la partícula serán:

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) &= M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= M_3,\end{aligned}\tag{C.0.22}$$

donde los subíndices numéricos referencian las tres direcciones de sistema fijo en el cuerpo alineados con los ejes principales de inercia.

Estas ecuaciones, llamadas ecuaciones de Euler, describen la evolución de la velocidad angular en el sistema de referencia fijo a la partícula. Las mismas pueden ser resueltas de la misma manera que las ecuaciones de Newton para el movimiento lineal.