

Repaso de álgebra

Enteros

$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q , donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n > 0$$

Radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad n > 0 \text{ un entero}$$

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

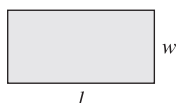
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.

Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

Fórmulas de geometría

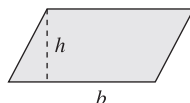
Área A , circunferencia C , volumen V , área superficial S

RECTÁNGULO



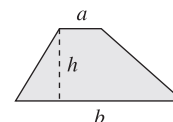
$$A = lw, \quad C = 2l + 2w$$

PARALELOGRAMO



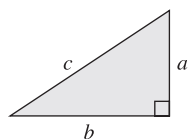
$$A = bh$$

TRAPEZOIDE



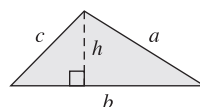
$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



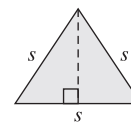
Teorema de Pitágoras:
 $c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



$$A = \frac{1}{2}bh, \quad C = a + b + c$$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



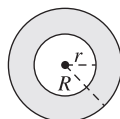
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

CÍRCULO



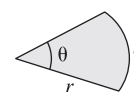
$$A = \pi r^2, \quad C = 2\pi r$$

ANILLO CIRCULAR



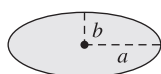
$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

SECTOR CIRCULAR



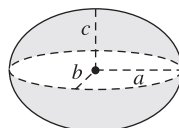
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta, \quad s = r\theta$$

ELIPSE



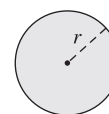
$$A = \pi ab$$

ELIPSOIDE



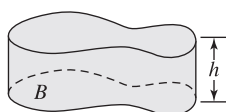
$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

ESFERA



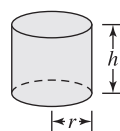
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S = 4\pi r^2$$

CILINDRO RECTO



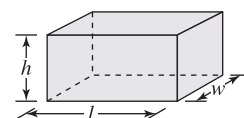
$$V = Bh, \quad B, \text{ área de la base}$$

CILINDRO CIRCULAR RECTO



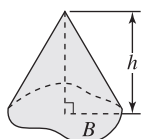
$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r h \text{ (lado lateral)}$$

PARALELEPÍPEDO
RECTANGULAR



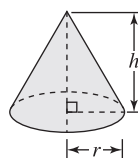
$$V = lwh, \quad S = 2(hl + lw + hw)$$

CONO



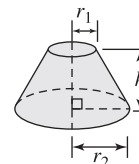
$$V = \frac{1}{3}Bh, \quad B, \text{ área de la base}$$

CONO CIRCULAR RECTO



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

FRUSTO DE UN CONO



$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Gráficas y funciones

Para encontrar intersecciones

intersecciones y : Sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y

intersecciones x : Sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,

Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (h, k) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y

Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades

$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades

$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades

$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades

$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y

$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

Asíntota vertical:

$$x = a \text{ cuando } q(a) = 0,$$

Asíntota horizontal:

$$y = a_n/b_m \text{ cuando } n = m \text{ y } y = 0 \text{ cuando } n < m,$$

Asíntota oblicua:

$$y = ax + b \text{ cuando } n = m + 1.$$

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$.

Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

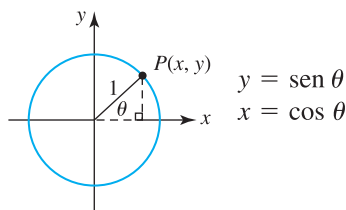
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



Otras funciones trigonométricas

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

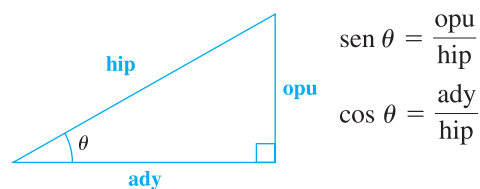
$$\sec \theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\text{cos } \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto

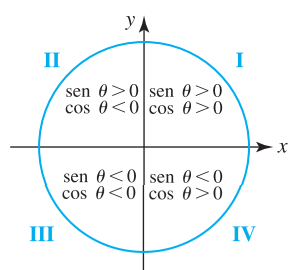


Otras funciones trigonométricas

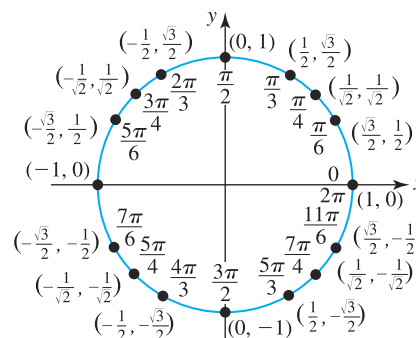
$$\tan \theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot \theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc \theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \text{cos } x \leq 1$$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \quad \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x$$

$$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$$

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Identidades de cofunción

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cos } x$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades par/impar

Par

$$\text{cos}(-x) = \text{cos } x$$

$$\sec(-x) = \sec x$$

Impar

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$$

$$\csc(-x) = -\csc x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

Fórmulas de suma

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

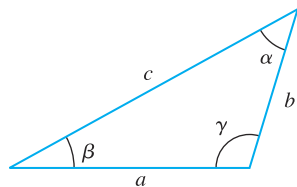
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



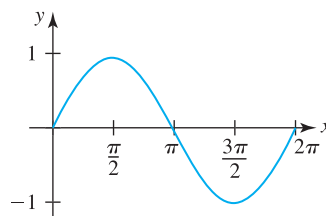
Funciones trigonométricas inversas

$$y = \sin^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \sin y, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

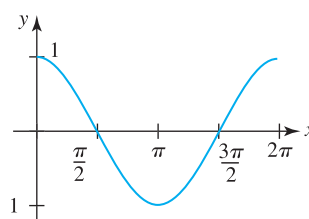
$$y = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \tan^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$$

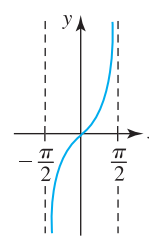
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

Funciones exponencial y logarítmica

El número e

$$e = 2.718281828459...$$

Definiciones del número e

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$$

Función exponencial

$$f(x) = b^x, \quad b > 0, b \neq 1$$

Función exponencial natural

$$f(x) = e^x$$

Función logarítmica

$$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b M^c = c \log_b M$$

Propiedades de logaritmos

$$\log_b b = 1, \quad \log_b 1 = 0$$

$$\log_b b^x = x, \quad b^{\log_b x} = x$$

Cambio de la base b a la base e

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad |x| > 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right), \quad x \neq 0$$

Identidades par/impar

Par

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

Impar

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

Identidades adicionales

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$$

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$$

Diferenciación

Reglas

1. Constante: $\frac{d}{dx}c = 0$
2. Múltiplo constante: $\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$
3. Suma: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$
4. Producto: $\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
5. Cociente: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
6. Cadena: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
7. Potencia: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
8. Potencia: $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonómicas:

9. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
11. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
13. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
14. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonómicas inversas:

15. $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$
18. $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$
19. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
20. $\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Hiperbólicas:

21. $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$
22. $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
23. $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
24. $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
25. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
26. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
28. $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
29. $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$
30. $\frac{d}{dx}\coth^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$
31. $\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
32. $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$

Exponenciales:

33. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
34. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$
36. $\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{x(\ln b)}$