| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Instituto San José** | **Profesor:** Camilo Vargas | **Curso:** 6to Sociales | **Alumno/a:** |
| | **Materia:** Matemática | **Función Polinómica** | | |

1) Con lo que ganó trabajando en la temporada de verano, Julieta quiere armar una pileta de natación en su casa.

Un amigo arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, la pileta debe ser:

- el doble de largo que de ancho.
- la profundidad la mitad del ancho.

Para hacer un presupuesto, Julieta averigua que:

- la soldadura para las juntas \$4.000 el m.
- el material para las paredes y el piso cuesta \$7.500 el $m^2$.
- la excavación y colocación \$5.000 el $m^3$.
- el traslado de materiales \$10.000.

a) Si se quiere construir una pileta de 5 metros de ancho:
- ✓ ¿Cuáles serán las medidas de largo y profundidad?
- ✓ ¿Cuánto costará su construcción?

b) Si Julieta tiene ahorrados \$1.000.000, ¿puede construir una pileta de 8 m de largo?

c) Encuentren una expresión que permita saber lo que costará una pileta de $x$ metros de ancho.

2) Escaneando el código QR, ingresarás a la calculadora online de Geogebra. La misma es una herramienta que, entre varias opciones, permite realizar el gráfico de una función.

La actividad consiste en graficar las siguientes funciones con Geogebra, realizar el dibujo en tu carpeta y luego analizar para las mismas el dominio, las raíces, la ordenada al origen, el conjunto de positividad y de negatividad.

$f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$g(x) = x^5 - 4x^3$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

$i(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$

$j(x) = 2x^3 - 50x$

# GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN POLINÓMICA

Para realizar el **gráfico aproximado de una función polinómica**, debemos conocer las raíces de las mismas. Para poder hallarlas, utilizaremos varios procedimientos vistos en años anteriores, a saber:

- **Teorema de Gauss.**
- **Regla de Ruffini.**
- **Fórmula resolvente o de Bhaskara.**

La idea es que este archivo sea una guía para poder ayudarlos a ustedes a llevar a cabo estos procedimientos.

Para empezar, debemos recordar lo que es una **raíz**. Sabemos que, **gráficamente hablando**, la raíz es el punto de corte con el eje $x$, pero tiene otro también tiene otra definición:

Las **raíces** de una función, son **aquellos valores que al reemplazar en la $x$ de una función y hacer los cálculos correspondientes, el resultado que nos queda es igual a $cero$.**

Por ejemplo, la raíz de la función $f(x) = 2x + 4$ es $-2$, porque al reemplazar con ese número en la $x$ de la función quedaría:

$$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 4$$

$$f(-2) = -4 + 4$$

$$f(-2) = 0$$

Ahora, supongamos que les pida **hallar las raíces de la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}$**. Como una ayuda, les diría que vayan probando con distintos valores hasta encontrar los valores que cumplan con lo previamente dicho, pero seguro me dirían que es un trabajo muy largo y denso.

Entonces, ¿Hay alguna manera de saber cuáles pueden ser las posibles raíces de una función?

La respuesta es sí, mediante el **Teorema de Gauss**. En términos simples, este teorema nos dice que, para hallar las posibles raíces de una función, debemos seguir los siguientes pasos:

- Identificar ***término independiente (TI) y coeficiente principal (CP)***: en este caso, el TI es 3 y el CP es 2.

- Luego, debemos hallar los divisores de cada uno de estos números. Recordemos que un **divisor de un número es otro número que lo divide en forma exacta**, es decir, que al hacer la división en la calculadora nos da un resultado sin coma. Debemos considerar tantos las opciones positivas como las negativas. Entonces:
  - ✓ Los divisores de 3 son $\pm 1 \ y \pm 3$.
  - ✓ Los divisores de 2 son $\pm 1 \ y \pm 2$.

- Ahora, para hallar las posibles raíces, debemos dividir cada divisor del TI con cada divisor del CP quedándonos que las posibles raíces de la función $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ son:

$$\pm 1;\ \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$$

Ahora ya sabemos los valores con los cuales debemos trabajar, ¿qué hacemos?

Probamos los valores hasta hallar una raíz. En este caso si probamos con 1:

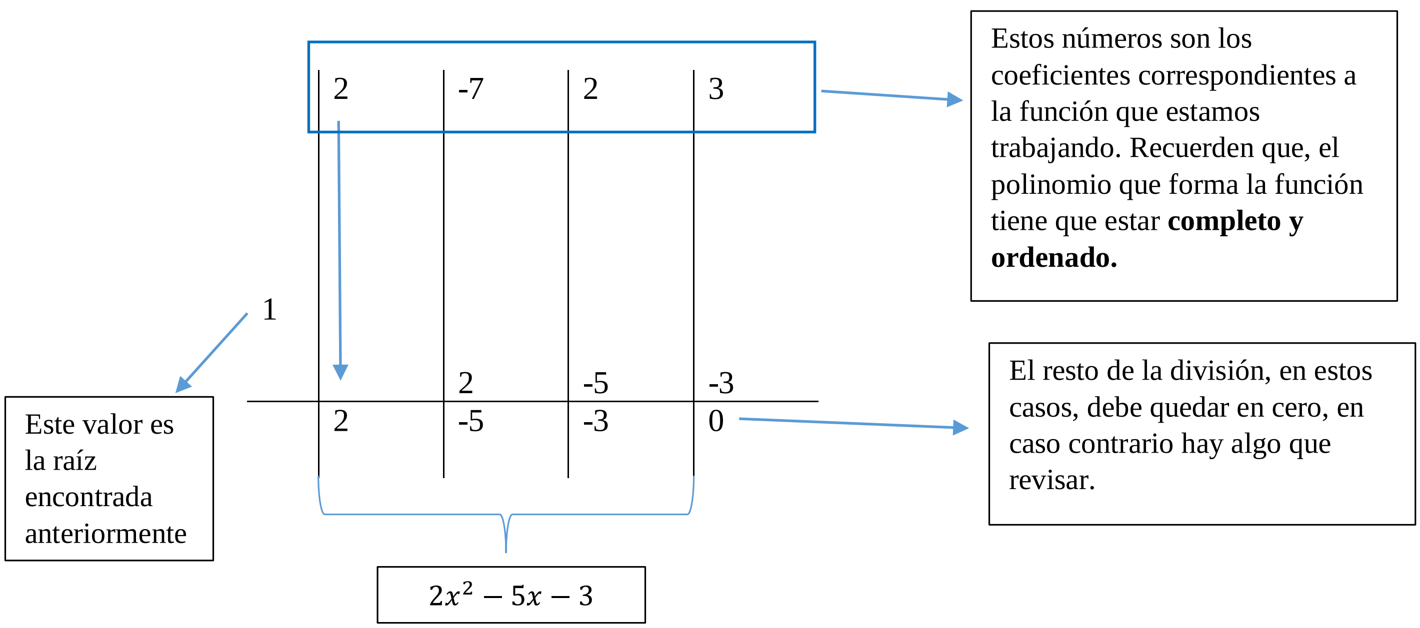
$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3$$

$$f(1) = 2 - 7 + 2 + 3$$

$$f(1) = 0$$

Encontramos la primera raíz. Ahora ¿cómo seguimos?

Ahora es donde entra la **regla de Ruffini**. La misma la vimos durante el periodo de diagnóstico. Recuerden que debemos armar una especie de tabla para su resolución:




Por último, y para ir finalizando este bello ejercicio, debemos utilizar la **Fórmula resolvente o de Bhaskara**, recuerden que la misma es:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Otro recordatorio es que la expresión utilizada en esta fórmula tiene que ser de grado 2, es decir, como mucho, tiene que tener $x^2$.

¿Con qué aplicamos Bhaskara? Con el cociente obtenido en el paso anterior: $2x^2 - 5x - 3$

$$a = 2 \qquad b = -5 \qquad c = -3$$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$\frac{5 \pm 7}{4}$$

| | |
|---|---|
| $\frac{5+7}{4}$ <br> $\frac{12}{3} = 3$ | $\frac{5-7}{4}$ <br> $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ |

Y listo, hemos hallado las raíces de la función $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$, las mismas son:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Con esto podremos realizar el gráfico aproximado de la función, pero eso será un tema para ver en la próxima clase.

Ahora, les dejo dos ejercicios para que puedan practicarlo ustedes:

3) Hallen las raíces de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$$

A continuación, les dejo un par de herramientas para que puedan ir verificando los procedimientos que van realizando:

Calculadora de divisores: les dará inmediatamente los divisores de un número. Útil cuando el número con el que se está trabajando es muy grande. Recuerden que, para el **Teorema de Gauss**, se utilizan divisores tanto positivos como negativos.

Calculadora Teorema de Ruffini.

Calculadora fórmula resolvente o de Bhaskara.

Una vez que conocemos el valor de las raíces, podemos pasar a la parte de graficar. Para ello, utilizaremos algo bien conocido por ustedes: la **tabla de valores**. Ahora, ¿qué valores tenemos que utilizar? ¿Le podemos dar cualquier valor a la tabla?

En este tipo de funciones, nos conviene utilizar unos números en específico para la formación de la tabla: **números que se encuentra por detrás y por delante de las raíces que encontramos**. ¿Qué quiere decir esto?

Tomemos de ejemplo la función que utilizamos anteriormente:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$$

Aquí averiguamos que sus raíces eran:

$$x_1 = 1$$

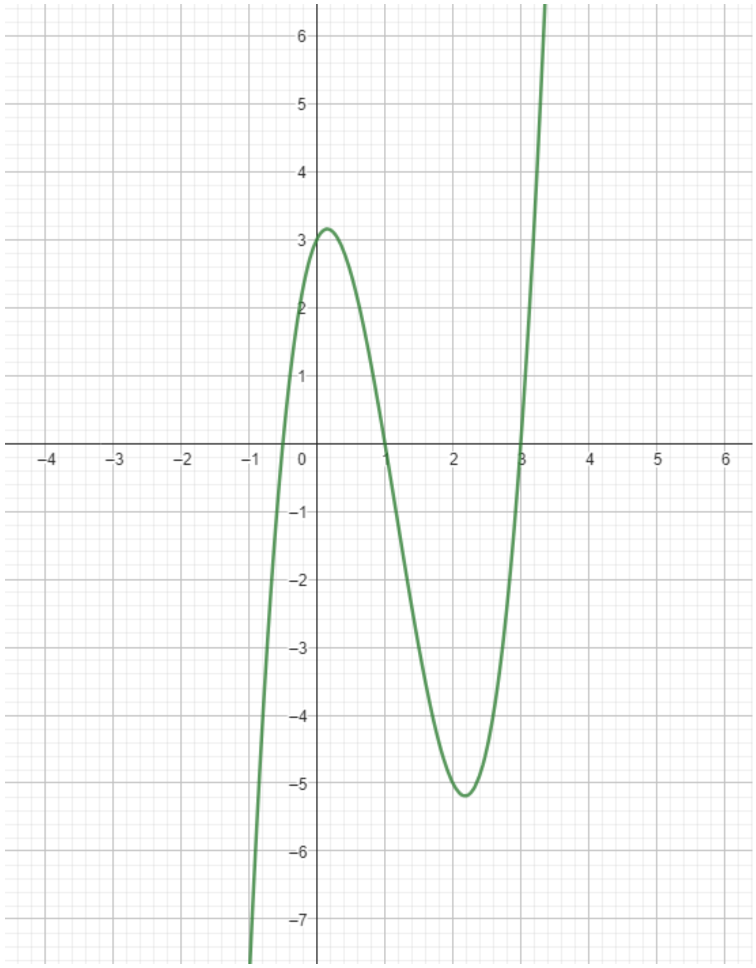
$$x_2 = 3$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}$$

Ahora armamos la tabla de valores:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $-8$ |
| $\mathbf{-\frac{1}{2}}$ | $\mathbf{0}$ |
| $0$ | $3$ |
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{0}$ |
| $2$ | $-5$ |
| $\mathbf{3}$ | $\mathbf{0}$ |
| $4$ | $27$ |

Con los valores hallados, armamos el gráfico correspondiente:




Por otro lado, utilizando las raíces halladas, podemos escribir la función en lo que se denomina $\boldsymbol{forma\ factorizada\ de\ una\ funci}$ón.

La misma tiene la forma general:

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots$

Donde $a$ es el coeficiente principal de la función, y $x_1, x_2\ y\ x_3$ son las raíces.

Entonces, en este caso, la **forma factorizada** de la función $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ es:

$$f(x) = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

4) Grafica las funciones correspondientes a la actividad anterior.

5) Determina las raíces de esta función.

$$i(x) = 2x^3 + 14x^2 + 30x + 18.$$

6) Para la función $h(x) = 5x^3 + 25x^2 - 125x - 625$, se sabe una de sus raíces es 5, ¿Cuáles son las otras raíces? ¿Cómo sería la forma factorizada de esta función?

7) Realiza el gráfico correspondiente a las funciones de las actividades 5 y 6.

8) Completa la siguiente tabla:

| Función | Raíces | Forma Factorizada |
|---|---|---|
| $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$ | $x_1 = -\frac{1}{2}$<br>$x_2 = 1$<br>$x_3 = 3$ | |
| $g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ | $x_1 = -3$<br>$x_2 = -1$<br>$x_3 = 2$ | |
| $h(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ | $x_1 = -4$<br>$x_2 = -2$<br>$x_3 = 3$ | |
| $i(x) = 2x^3 + 14x^2 + 30x + 18$ | $x_1 = -1$<br>$x_2 = -3$<br>$x_3 = -3$ | |
| $j(x) = 5x^3 + 25x^2 - 125x - 625$ | $x_1 = -5$<br>$x_2 = -5$<br>$x_3 = 5$ | |

9) Analiza los gráficos de las funciones realizadas con anterioridad. Fíjate que, en algunos casos, las raíces de las funciones atraviesan al *eje x* y en otras ocasiones rebotan sobre él. ¿Por qué crees que ocurre estos comportamientos?

10) Dadas las funciones factorizadas, completar la siguiente tabla:

| Función Factorizada | Grado | Raíces | Multiplicidad de las raíces |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x(x-1)^4(x+4)^3$ | | | |
| $g(x) = -3(x-2)^2(x+4)^4$ | | | |
| $h(x) = x^5(x+3)(x+2)^2$ | | | |
| $i(x) = -2x^6(x-6)^3$ | | | |
| $j(x) = (x-2)^2(x+3)^3(x+4)$ | | | |

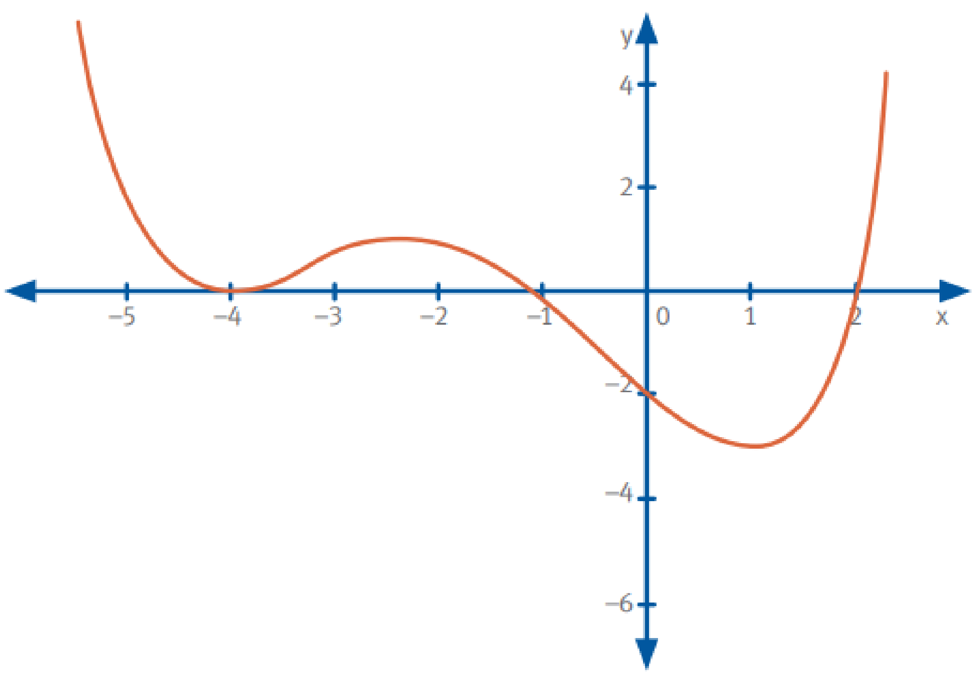
11) Realizar el gráfico de las funciones de la actividad anterior en Geogebra y analizar sus raíces. Luego, completa los siguientes enunciados:

a) La función atraviesa al *eje x* cuando la multiplicidad de la raíz es ____________________.
b) La función rebota sobre el *eje x* cuando la multiplicidad de la raíz es ____________________.

12) Escriban la fórmula de una función polinómica que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a) La función es de grado 3. Posee raíz simple en $x=-2$ y raíz doble en $x=-1$.
b) La función es de grado 5. Posee como raíces a -3; 0 y 4. Se sabe además que pasa por el punto (2; 4).
c) La función es de grado 4. Posee 2 raíces dobles, en $x=-5$ y $x=-1$ y corta al eje Y en $\frac{3}{2}$.

13) Observar el gráfico y marcar las opciones correctas.



¿Qué tipo de orden de multiplicidad tiene la raíz $x = -4$?

a) Par.
b) Impar.

¿En cuáles intervalos la función es positiva?

a) $(3;\ \infty)$.
b) $(-\infty;\ -4)$.
c) $(-4;\ -1)$.
d) $(2;\ \infty)$.

¿En cuáles intervalos la función es negativa?

a) $(-4;\ -1)$.
b) $(-\infty;\ -4)$.
c) $(-1; 2)$.
d) $(-3; 0)$.

¿Cuál es el menor grado posible de la función?

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.

¿Cuál es la ordenada al origen?

a) $(-2; 0)$.
b) $(0;\ -4)$.
c) $(-4; 0)$.
d) $(0;\ -2)$.