

Aproximación a la solución de una ecuación diferencial ordinaria a través del método de residuos ponderados

Santiago Chialvo

Agosto 24, 2015

1. Descripción del problema

Para este ejercicio se pide aproximar por el método de los residuos ponderados la solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \phi &= 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \phi(x=0) &= 1 \\ \phi(x=1) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Para la cual la solución exacta está dada por:

$$\phi = \cos(x) - (\cos(1)/\sin(1)) * \sin(x)\tag{2}$$

Los métodos para determinar las funciones de peso que se utilizarán serán colocación puntual, colocación por subdominios y Galerkin.

2. Planteamiento y resolución del problema

Para resolver este problema, comenzamos diciendo que cuando utilizemos Galerkin vamos a considerar aproximaciones elegidas de forma tal que no satisfagan todas las condiciones de contorno. Esto equivale a decir que nuestra $\psi = 0$. Es por ello que para elegir las funciones de prueba independientemente de las condiciones de contorno se utiliza una expansión igual a:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (3)$$

Esta aclaración vale para decir que ahora no solamente tendremos residuo en el interior del dominio, sino también en el borde, definido por:

$$\begin{aligned} R_\Omega &= A(\hat{\phi}) = \mathcal{L}\hat{\phi} + p \\ R_\Gamma &= B(\hat{\phi}) = \mathcal{M}\hat{\phi} + r \end{aligned} \quad (4)$$

Como sabemos, el método de los residuos ponderados consiste en escribir [1]:

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l R_\Gamma d\Gamma = 0 \quad (5)$$

Con las funciones de peso elegidas arbitrariamente. Desarrollando un poco esta última ecuación:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_l (\mathcal{L}\hat{\phi} + p) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l (\mathcal{M}\hat{\phi} + r) d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Omega} W_l (\mathcal{L}(\sum_{m=1}^M a_m N_m) + p) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l (\mathcal{M}(\sum_{m=1}^M a_m N_m) + r) d\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Esta última expresión tiene M incógnitas, y aplicado para $l = 1, 2, \dots, M$ obtenemos un sistema del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{f} \\ K_{lm} &= \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l \mathcal{M} N_m d\Gamma \quad 1 \leq l, m \leq M \\ f_l &= - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{W}_l r d\Gamma \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (7)$$

Desarrollando la ecuación 2.5 para nuestro problema específico, notando que la integral en los extremos se reduce a la evaluación de los puntos extremos del dominio (por ser un problema 1D) llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 W_l R_\Omega dx + [\bar{W}_l R_\Gamma]_{x=0} + [\bar{W}_l R_\Gamma]_{x=1} = 0 \\
& \int_0^1 W_l \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx + [\bar{W}_l (\hat{\phi} - 1)]_{x=0} + [\bar{W}_l \hat{\phi}]_{x=1} = 0 \\
& \int_0^1 W_l \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx + [\bar{W}_l (\hat{\phi})]_{x=0} + [\bar{W}_l * (-1)]_{x=0} + [\hat{W}_l \hat{\phi}]_{x=1} = 0 \\
& \int_0^1 W_l \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx + [\bar{W}_l (\hat{\phi})]_{x=0} + [\bar{W}_l (\hat{\phi})]_{x=1} = -[\bar{W}_l * (-1)]_{x=0}
\end{aligned} \tag{8}$$

Las funciones de peso W_l y \bar{W}_l serán determinadas según el método escogido.

Por otro lado, cuando utilizemos colocación puntual y colocación por subdominios como métodos para las funciones de peso, haremos que las condiciones de borde se cumplan exactamente, por lo que nuestra ψ dejará de ser cero. Nuestra $\hat{\phi}$ quedará de forma similar a la ecuación (3), sólo que con un término adicional ψ sumando. La ecuación general nos quedará entonces de la siguiente forma:

$$\int_0^1 W_l \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx = - \int_0^1 W_l \mathcal{L} \psi dx \tag{9}$$

Para resolver nuestro problema, utilizaremos las funciones de prueba siguientes:

$$\mathcal{M}\phi = \phi \quad r = -1 \quad \text{en } x = 0 \tag{10}$$

$$\mathcal{M}\phi = \phi \quad r = 0 \quad \text{en } x = 1 \tag{11}$$

$$N_m = x^{(m-1)} \quad (\text{Galerkin}) \tag{12}$$

$$N_m = \sin(m * \pi * x) \quad (\text{Puntual y Subdominios}) \tag{13}$$

$$\psi = 0 \quad (\text{Galerkin}) \tag{14}$$

$$\psi = 1 - x \quad (\text{Puntual y Subdominios}) \tag{15}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + 1 \tag{16}$$

2.1. Colocación puntual

En este método se anula el residuo en un conjunto finito de puntos x_l , y la ecuación final nos quedaría de la forma

$$\frac{\delta^2 \hat{\phi}(x(l))}{\delta x^2} + \hat{\phi}(x(l)) = -[\psi]_{x=x(l)} \quad (17)$$

2.2. Colocación por subdominios

En este método el error integrado sobre determinadas subregiones definidas previamente debe ser nulo. La ecuación final nos quedaría de la forma:

$$\int_{x(l)}^{x(l+1)} \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx = - \int_{x(l)}^{x(l+1)} \mathcal{L}\psi \, dx \quad (18)$$

2.3. Galerkin

Este es uno de los métodos mas utilizados y consiste en elegir $W_l = N_l$. Para este problema en particular se utiliza $W_l = N_l$ y $\bar{W}_l = -N_l$. La ecuación final nos quedaría de la forma:

$$\int_0^1 N_l \left(\frac{\delta^2 \hat{\phi}}{\delta x^2} + \hat{\phi} \right) dx - \left[\bar{N}_l(\hat{\phi}) \right]_{x=0} - \left[\bar{N}_l(\hat{\phi}) \right]_{x=1} = [\bar{N}_l * (-1)]_{x=0} \quad (19)$$

3. Resultados obtenidos

Con un valor de $M=4$, se han obtenido los resultados favorables, los cuales se observan en la figuras 1,2 y 3. En la tabla 1 se observa el error cuadrático medio para cada método de las funciones de peso a medida que se aumenta el M , y se observa como converge a cero.

Observamos como, a pesar de que todos los métodos dan resultados favorables, Galerkin tiene una convergencia del error a cero mucho mas rápida. Aunque quizá no sea del todo 'correcto' comparar los métodos dado que se utilizan diferentes Nm , la robustez de Galerkin se destaca sobre los demás métodos.

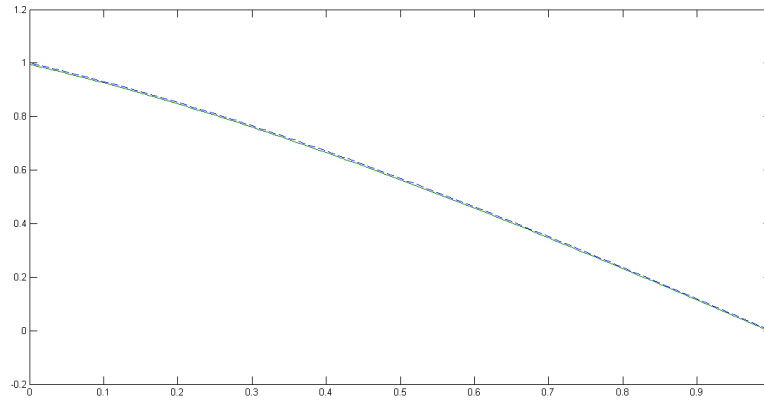


Figura 1: Aproximacion con $M=4$, utilizando Galerkin. Exacta (linea en rayas) y calculada (linea continua)

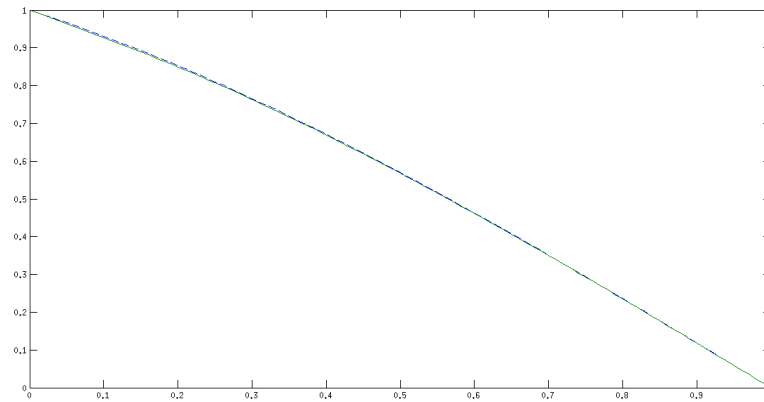


Figura 2: Aproximacion con $M=4$, utilizando colocación puntual. Exacta (linea en rayas) y calculada (linea continua)

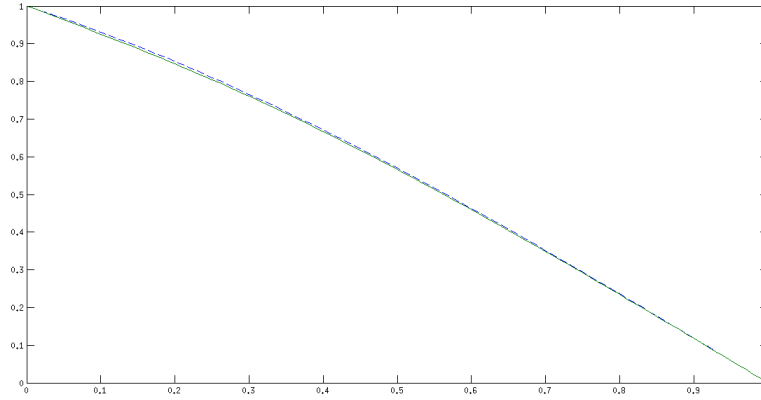


Figura 3: Aproximacion con $M=4$, utilizando colocación por subdominios. Exacta (linea en rayas) y calculada (linea continua)

M	Galerkin	C. Puntual	C. Subdominios
4	2.5400e-05	4.0937e-06	1.4355e-05
5	1.3123e-07	1.9848e-06	7.1294e-06
6	4.1307e-10	1.0756e-06	3.9281e-06
7	8.4604e-13	6.3242e-07	2.3378e-06

Cuadro 1: Error cuadrático medio para cada método de las funciones de peso a medida que aumenta el M

4. Código utilizado

A continuación se presenta el código utilizado para resolver el problema, escrito en el software Matlab.

```

1 %% Aproximacion a PDE por una funcion continua de prueba a
   %%   a traves del metodo de residuos ponderados
2
3 %% Utilizando funciones de peso
4 %1-Galerkin
5 %2-Colocacion Puntual
6 %3-Subdominios
7
8 %Defino el dominio de la funcion

```

```

9
10 x=0:0.01:1;
11 lx=length(x);
12
13 %Numero de terminos usados para la aproximacion
14 M=7;
15
16 %Matriz K y vector F
17 K_1_s = sym( zeros(M,M) );
18 K_2=zeros(M,M);
19 K_3_s = sym( zeros(M,M) );
20 F_1=zeros(M,1);
21 F_2=zeros(M,1);
22 F_3=zeros(M,1);
23
24 %Se definen los puntos equiespaciados (Segun M)
25 delta_x=(max(x)-min(x))/(M+1);
26 xc=zeros(M,1);
27
28 for i=1:M
29     xc(i) = min(x)+i*delta_x;
30 end
31 xc(M+1)=max(x);
32
33 syms X N Deriv1_N Deriv2_N;
34 N=sym( zeros(1,M) );
35
36 %Calculo los Nm para Galerkin
37 for i=1:M
38     N(i)=X^(i-1);
39 end
40
41 %Lleno las matrices y el vector
42 for l=1:M,
43     for m=1:M,
44         Deriv1_N = (1 - (m^2 * pi^2))*sin(m*pi*X);
45         Deriv2_N = (m-1)*(m-2)*X^(m-3) + X^(m-1);
46         K_1_s(l,m) = int((Deriv2_N*N(l),X,0,1) - (subs(N(m),X,0)*
47             subs(N(l),X,0)) - (subs(N(m),X,1)*(subs(N(l),X,1))));
48         K_2(l,m) = subs(Deriv1_N,X,xc(l));
49         K_3_s(l,m) = int(Deriv1_N,X,xc(l),xc(l+1));
50     end
51     F_1(l)= subs(N(l),X,0)*-1;
52     F_2(l)= -subs(1-X,X,xc(l));
53     F_3(l)= -int(1-X,X,xc(l),xc(l+1));
54 end
55
56 %Pasar de simbolo a numero
57 K_1 = double(K_1_s);

```

```

57 K_3 = double(K_3_s);
58
59 %Computo la solucion
60 a_1 = K_1\F_1;
61 a_2 = K_2\F_2;
62 a_3 = K_3\F_3;
63
64 % Solucion exacta
65 phi_ex = (-cos(1)/sin(1))*sin(x) + cos(x);
66 psi = 1-x;
67 phi_1=0;
68 phi_2=psi;
69 phi_3=psi;
70 % Solucion aproximada
71 for m=1:M,
72     phi_1 = phi_1 + a_1(m)*(x.^(m-1));
73     phi_2 = phi_2 + a_2(m)*sin(m*pi*x);
74     phi_3 = phi_3 + a_3(m)*sin(m*pi*x);
75 end
76
77
78 %Computo el error cuadratico medio
79 Err_1=0;
80 Err_2=0;
81 Err_3=0;
82 for i=1:length(x)
83     Err_1=Err_1+(phi_ex(i)-phi_1(i))^2;
84     Err_2=Err_2+(phi_ex(i)-phi_2(i))^2;
85     Err_3=Err_3+(phi_ex(i)-phi_3(i))^2;
86 end
87
88 L = length(phi_ex);
89 Err_1=Err_1/L;
90 Err_2=Err_2/L;
91 Err_3=Err_3/L;
92
93 % Ploteo resultados
94 plot(x, phi_ex, '—', x, phi_3);

```


Referencias

- [1] Nigro, Norberto, Storti, Mario. *Métodos Numéricos en Fenómenos de Transporte*, Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería, 2011.