

Chapter 5

Técnicas de discretización basadas en el método de los Residuos Ponderados

Habiendo presentado en la primera parte los modelos matemáticos que rigen el movimiento de los fluidos y estableciendo el conjunto de ecuaciones que gobiernan el caso general y algunos otros particulares ahora estamos en condiciones de pasar a tratar algunos aspectos numéricos relacionados con el diseño de los esquemas más comúnmente empleados en fluidodinámica computacional. Una de las técnicas más empleadas en fluidodinámica computacional ha sido la de diferencias finitas. Esta fue una de las primeras en aparecer y conserva vigencia a pesar de algunas restricciones propias de la técnica. Su alta eficiencia para la resolución de problemas definidos en geometrías sencillas lo hace muy atractivo y es muchas veces la mejor opción cuando existe la posibilidad de mapear el dominio real en otro completamente regular y estructurado. Su definición se basa en aproximar los operadores diferenciales por otros denominados *operadores en diferencias* que se aplican a un vector de datos que representa la solución en un conjunto finito de puntos en el dominio. Esta forma de discretizar un operador diferencial es una alternativa y no la única para tal fin. Desventajas claras del método como su difícil implementación en problemas gobernados por geometrías arbitrarias hizo que en los últimos años gran cantidad de investigación en el área de fluidodinámica computacional se volcase al uso de otras técnicas alternativas. La mayoría de las mismas se pueden presentar bajo un método general conocido como el *método de los residuos ponderados* (WRM).

5.1 Método de los residuos ponderados

Resolver una ecuación diferencial o un sistema de ellas en forma aproximada en un conjunto de puntos definidos por la discretización como lo hace diferencias finitas puede a veces ser un tanto restrictivo. No olvidemos que el método de las diferencias finitas se basa en descomponer en series de Taylor la solución deseada sin saber de antemano si ella tendrá los requisitos de regularidad que tal técnica

requiere. Muchas veces estas soluciones presentan discontinuidades o cualquier falta de regularidad que impiden poder despejar una forma diferencial de las formas integrales que normalmente surgen de las ecuaciones de balance. Es decir que es preferible abordar el problema en forma integral que en forma diferencial. Esto justifica aún mas la necesidad de estudiar métodos basados en formas integrales. Existen muchos métodos derivados del planteamiento de las ecuaciones del continuo en forma integral. La mayoría de ellos se pueden heredar de un método general el cual denominamos aquí como el *método de los residuos ponderados*.

5.1.1 Introducción

Este método es conceptualmente diferente a aquel empleado en diferencias finitas ya que asume que la solución a un problema planteado puede ser analíticamente representable mediante una expansión del tipo:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (5.1)$$

donde en general a_m forman un conjunto finito de coeficientes con M la dimensión del espacio finito dimensional empleado y N_m las funciones analíticas conocidas y elegidas para representar o expandir a la solución del problema. Estas funciones son comúnmente denominadas *soluciones de prueba* y su elección hace a la diferencia entre una vasta cantidad de métodos numéricos, como veremos mas adelante.

Como vemos a diferencia del método de diferencias finitas este método no busca aproximaciones a los operadores diferenciales sino que propone un espacio funcional que describa en alguna medida las funciones involucradas en el cálculo a menos de unos coeficientes inciertos (las incógnitas) para luego aplicarle los operadores diferenciales ya sea en forma analítica o en forma numérica. Es como cambiar la discretización de un operador diferencial por la discretización de las funciones a las que luego se le aplican los operadores diferenciales del continuo. En forma esquemática,

$$\begin{aligned} FDM : \mathcal{L}\phi &\Rightarrow L^h \phi^h \\ MRP : \int \mathcal{L}\phi &\Rightarrow \int \mathcal{L}[\mathcal{P}^h(\phi)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

La primera (FDM) genera una aproximación discreta al operador diferencial (L^h) mientras que la segunda (MRP) aproxima la incógnita con funciones analíticas hasta un determinado nivel de truncamiento (\mathcal{P}^h) y luego le aplica el operador diferencial del continuo (\mathcal{L})

La función ψ es introducida en 5.1 con el propósito de satisfacer las condiciones de contorno del problema, o sea los valores impuestos de la función a determinar en los contornos del dominio de aproximación.

Sea Γ el contorno del dominio Ω del problema, entonces la elección de la función ψ es tal que

$$\begin{aligned}\psi|_{\Gamma} &= \phi|_{\Gamma} \\ N_m|_{\Gamma} &= 0 \quad \forall m\end{aligned}\tag{5.3}$$

De la elección de ψ y N_m dependerá la calidad de la solución y la convergencia del método numérico a medida que se refina la discretización, o sea que $M \rightarrow \infty$. Este requisito denominado *completitud* está sustentado fuertemente en bases matemáticas con lo que a diferencia del método de las diferencias finitas esta clase de técnica goza con el apoyo de sólidos conceptos matemáticos de teoría de operadores, análisis funcional y análisis numérico.

Si bien nuestra aplicación será la de obtener soluciones a ecuaciones a derivadas parciales un buen ejercicio para introducir los conceptos de aproximación es el caso simple de aproximar una función conocida a priori con una expansión del tipo (5.1) .

Aproximación puntual de funciones

Este caso simple consiste en dada una función ϕ aproximarla por $\hat{\phi}$ como en 5.1 bajo el requisito que ambas coincidan en M puntos distintos elegidos arbitrariamente sobre Ω . Este requisito conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el conjunto de los parámetros incógnita $\{a_m; m = 1, 2, \dots, M\}$.

Estos parámetros incógnitas representan coeficientes de peso de cada uno de los términos o sino las amplitudes de cada uno de los modos de la expansión. Por ejemplo si la aproximación fuera hecha en series de Fourier estos coeficientes son las amplitudes de cada una de las armónicas que representan la base de Fourier.

Para graficar la explicación supongamos una función a aproximar como

$\phi = \sin(-1.8\pi x) + x$ graficada en la parte superior izquierda de la figura 5.1 en trazo lleno.

En la misma figura se muestra la función lineal ψ que satisface las condiciones de contorno, o sea

$$\begin{aligned}\psi(x=0) &= \phi(x=0) = 0 \\ \psi(x=1) &= \phi(x=1) = \sin(-1.8\pi) + 1\end{aligned}\tag{5.4}$$

La rutina *Ej_2_0.m* permite definir una aproximación a ϕ usando una cantidad M de términos a elección del usuario. Para hacer un barrido y evaluar la convergencia se puede emplear la rutina *drv_Ej_2_0.m*.

En la figura 5.1 se grafica en la parte superior izquierda en linea de puntos la solución numérica obtenida con 2 términos y a su derecha el valor absoluto del error donde como vemos este vale cero en un conjunto de puntos equidistribuidos cuya cantidad coincide con M . Las dos gráficas del medio corresponden a $M = 3$ mientras que las dos de abajo representan solamente el error que se comete cuando $M = 4$ y $M = 9$.

La forma de construir el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver es bastante simple. Se debe reemplazar (5.1) para los M puntos interiores al dominio e igualarlos a los valores de la función ϕ en

esos nodos.

Para fijar ideas, para el caso de $M = 2$ genera lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \psi(x_1) + N_1(x_1)a_1 + N_2(x_1)a_2 &= \phi(x_1) \\
 \psi(x_2) + N_1(x_2)a_1 + N_2(x_2)a_2 &= \phi(x_2) \\
 \begin{pmatrix} N_1(x_1) & N_2(x_1) \\ N_1(x_2) & N_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi(x_1) - \psi(x_1) \\ \phi(x_2) - \psi(x_2) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} N_1(x_1) & N_2(x_1) \\ N_1(x_2) & N_2(x_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \phi(x_1) - \psi(x_1) \\ \phi(x_2) - \psi(x_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde $N_i(x_j)$ es la aplicación de cada función aproximante elegida N_i en cada punto x_j escogido donde se busca que la aproximante coincida con la función a aproximar.

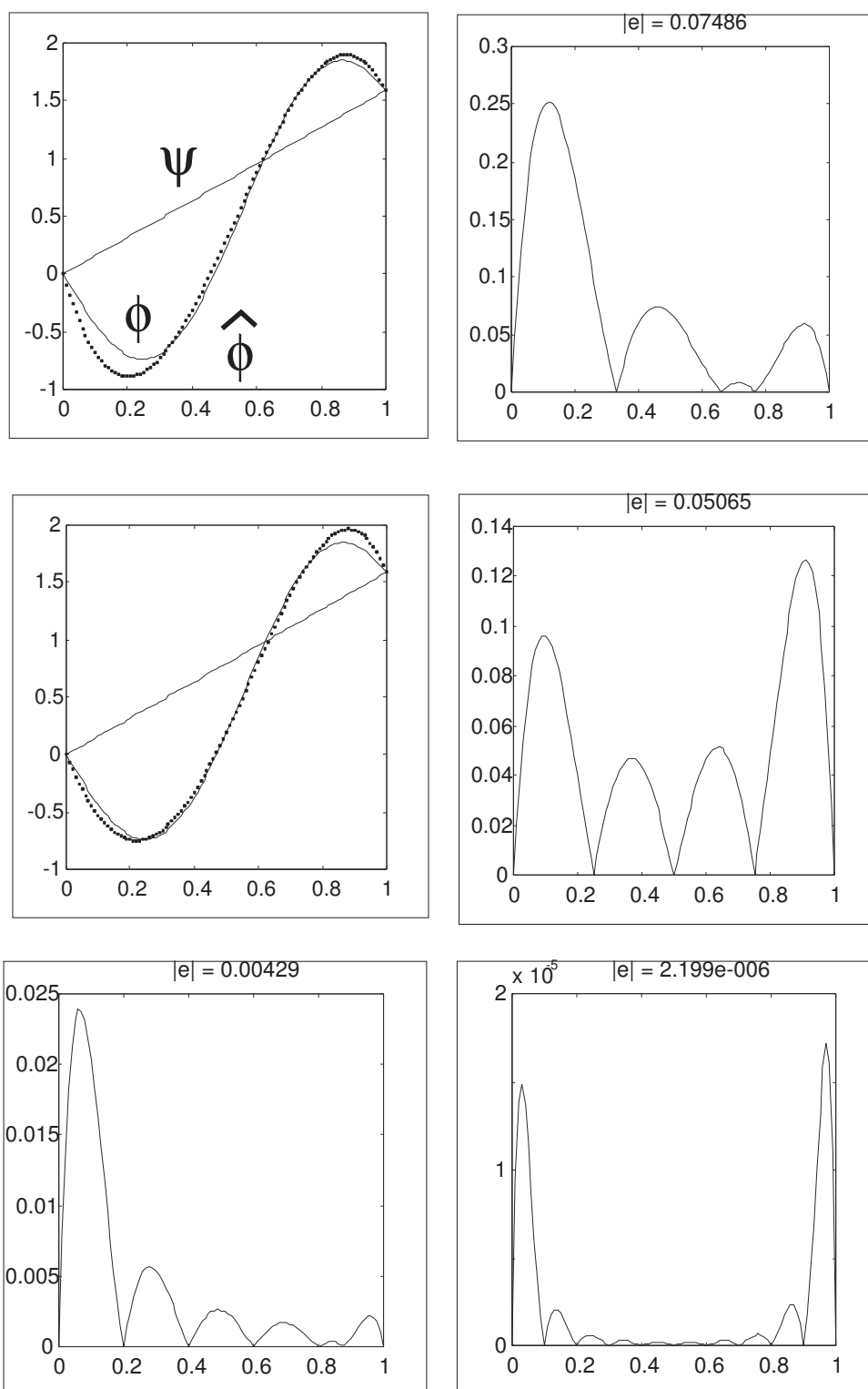


Figure 5.1: Aproximación de una función por ajuste puntual

La figura 5.2 muestra como varía el error en un gráfico semilogarítmico siendo su convergencia del tipo espectral. En general el error en la aproximación se puede escribir como:

$$\begin{aligned}(|e|) &= Ch^M \\ \log(|e|) &= \log(C) + M\log(h)\end{aligned}\tag{5.6}$$

por lo que la pendiente en el gráfico logarítmico nos da una idea del orden de convergencia en función de la discretización.

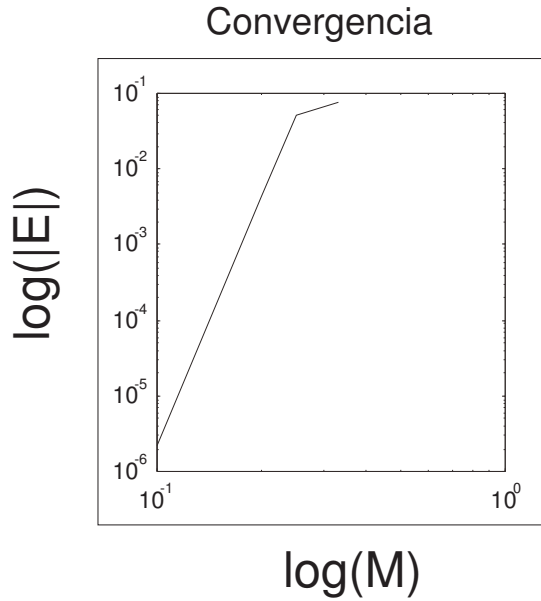


Figure 5.2: Convergencia de la aproximación

Edite la rutina *Ej_2.0.m* y compruebe los cálculos que se hacen de acuerdo a la teoría que se presenta en esta sección.

Aproximación por series de Fourier

Usando la teoría de series de Fourier es posible aproximar una función ϕ arbitraria siempre que esta cuente con un número finito de discontinuidades y de extremos locales, cosa que casi siempre ocurre en las aplicaciones que nos interesan de la ingeniería.

Entonces la aproximación se escribe como:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{m\pi x}{L_x} \quad 0 \leq x \leq L_x \tag{5.7}$$

La inherente completitud de que gozan las series de Fourier le confiere la propiedad que al incrementar la dimensión del espacio de trabajo la precisión mejora.

5.1.2 Aproximación por residuos ponderados

A continuación se presenta un método general que permite hallar los coeficientes de (5.1) siendo los dos casos anteriores particulares del mismo. Definamos el error o residuo $R_\Omega(\mathbf{x})$ como la insatisfacción en la aproximación del siguiente modo:

$$R_\Omega = \phi - \hat{\phi} \quad (5.8)$$

siendo ésta una función de la posición en el dominio Ω . En la figura 5.1 hemos presentado funciones de este tipo. La idea es que en lugar de pedir que esta función R_Ω sea idénticamente nula en todo el dominio le pedimos que integrada mediante alguna función de peso esta sea nula, es decir:

$$\int_{\Omega} W_l(\phi - \hat{\phi})d\Omega = \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (5.9)$$

con W_l un conjunto de funciones de peso independientes. Entonces en lugar de pedir que $\hat{\phi} \rightarrow \phi$ como $M \rightarrow \infty$ le pedimos que 5.8 se satisfaga para todo l como $M \rightarrow \infty$. De alguna manera se puede verificar que esto último equivale a asumir que $R_\Omega \rightarrow 0$ en todo el dominio.

Reemplazando $\hat{\phi}$ de (5.1) en (5.8) e introduciendo esto en (5.9)

$$\int_{\Omega} W_l(\phi - (\psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m))d\Omega = \int_{\Omega} W_l(\phi - \psi)d\Omega - \int_{\Omega} W_l(\sum_{m=1}^M N_m a_m)d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (5.10)$$

obtenemos un conjunto o sistema de ecuaciones algebraicas lineales para los coeficientes incógnitas a_m que puede ser escrito en forma genérica como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{a}^T &= (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_M) \\ K_{lm} &= \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \\ f_l &= \int_{\Omega} W_l(\phi - \psi)d\Omega \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde la matriz \mathbf{K} depende exclusivamente de las funciones escogidas como base de peso y de aproximación y el miembro derecho \mathbf{f} contiene los datos del problema, tanto la evaluación de la función a aproximar (ϕ) como sus condiciones de contorno (ψ).

Una vez que se conoce la función ϕ a aproximar se elige ψ tal que satisfaga las condiciones de contorno y finalmente se elijen las funciones de peso W_l y de prueba N_m .

Diferentes funciones de peso dan origen a diferentes métodos, todos del tipo de residuos ponderados.

Método de colocación puntual

En este método las funciones de peso son de la forma:

$$W_l = \delta(x - x_l) \quad (5.12)$$

con $\delta(x - x_l)$ la delta de Dirac evaluada en el punto de coordenadas x_l .

Por las propiedades de la delta de Dirac

$$\int \delta(x - x_l) I(x) d\Omega = I(x_l) \quad (5.13)$$

se cumple que aplicar una delta de Dirac a un integrando en una expresión integral equivale a evaluar ese integrando en el punto de aplicación de la delta.

Por lo tanto en nuestro caso (5.11) equivale a anular el residuo en un conjunto finito de puntos determinados por las coordenadas x_l , o sea es similar a una aproximación por ajuste puntual, como la vista en (5.5).

La matriz \mathbf{K} y el vector derecho se calculan como:

$$K_{lm} = N_m(x_l) \quad f_l = [\phi - \psi]_{x=x_l} \quad (5.14)$$

con lo cual el sistema a resolver queda lleno, es decir, a priori no hay evidencias que la matriz tenga estructura de banda, como las que suelen aparecer en el metodo de diferencias finitas.

Método de colocación por subdominios

Este método es una primera aproximación a la partición del dominio en pedazos, característica de muchos de los métodos que luego presentaremos. Aquí el dominio Ω se divide en subdominios

$$\Omega_l = \{x | x_l \leq x \leq x_{l+1}\}$$

y en ellos se define una función de peso constante (arbitraria) y por comodidad unitaria.

$$W_l = \begin{cases} 1 & x_l < x < x_{l+1} \\ 0 & x < x_l, x > x_{l+1} \end{cases} \quad (5.15)$$

donde en este caso se requiere que el error promediado sobre cada una de estas subregiones sea nulo.

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_m dx \quad f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\phi - \psi) dx \quad (5.16)$$

En la figura 5.3 vemos una función $f(x)$ definida en los reales y una ventana asociada al dominio de cálculo, en este caso $0 \leq x \leq L$, y una de las funciones de peso, asociada al intervalo Ω_l , que es constante a lo largo de todo ese intervalo cayendo a cero fuera del mismo.

Ejercicio Aproximar la función $f = \sin(2\pi x/L)$ con $0 \leq x \leq L$ mediante colocación por subdominios. Seleccione la función de aproximación en forma completamente libre y justifique la solución obtenida.

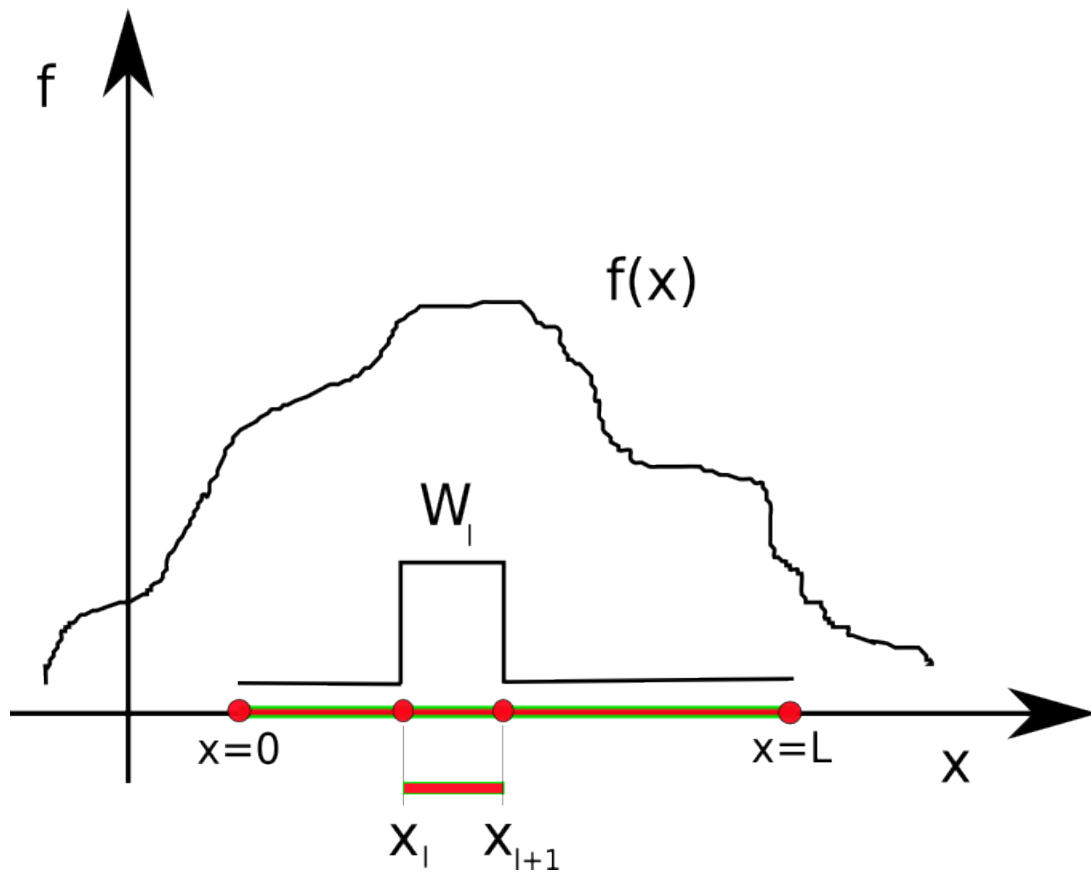


Figure 5.3: Residuos ponderados pesado con colocación por subdominios

Método de Galerkin

Es uno de los más populares métodos y se basa en elegir

$$W_l = N_l \quad (5.17)$$

con lo cual el sistema a resolver está formado por:

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_l N_m dx \quad f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} N_l (\phi - \psi) dx \quad (5.18)$$

Este método goza con la ventaja de que la matriz del sistema es simétrica debido a que el integrando de dicha matriz viene expresado por el producto de las funciones de peso con las de aproximación, es decir el orden de los factores no altera el producto.

Si elegimos como funciones de prueba y de peso aquellas que conforman la base de un desarrollo en series de Fourier se puede demostrar que el sistema queda reducido a una simple expresión para los coeficientes a_m ya que la matriz del sistema es diagonal. Esta característica tan particular se debe a que la base elegida, la base de Fourier, es *ortogonal* con lo que $\int_{\Omega} N_l N_m d\Omega = 0 \quad l \neq m$.

En general esta propiedad tan ventajosa de generar una matriz diagonal no se tiene. Este tipo de elecciones da lugar a los métodos espectrales, siendo no solo la base de Fourier la posible elección, otras

como la de Chebyshev o la de Bessel entre otras tambien dan origen a metodos que son espectrales. y por ende de alto orden. Estos métodos son muy aplicables cuando uno realiza experimentos virtuales de fenómenos físicos muy complejos en recintos geoméricamente simples, por ejemplo analizar la turbulencia generada en un conducto o un canal donde las características propias de la turbulencia requieren modelarla con una aproximación de alto orden (mayor a 2).

Ejercicio Aproximar la función $f = \sin(2\pi x/L)$ con $0 \leq x \leq L$ mediante el método de Galerkin. Seleccione la función de aproximación en forma completamente libre y justifique la solución obtenida.

Otros pesos

En general existen muchas posibles elecciones de la función de peso. Entre las más conocidas aún no presentadas podemos mencionar el *método de los momentos* donde $W_l = x^{l-1}$ donde se requiere que no solo la integral del error sea nula sino algunos de sus momentos.

Otro método del estilo de los presentados bajo el método de los residuos ponderados es el *método de los cuadrados mínimos*. Comúnmente definido como la minimización de un funcional formado como:

$$I(a_1, a_2, \dots, a_M) = \int_{\Omega} (\phi - \hat{\phi})^2 d\Omega \quad (5.19)$$

la idea es hallar un extremo de dicho funcional mediante $\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0$, que al introducirla en (5.19) produce que

$$\int_{\Omega} (\phi - \hat{\phi}) N_l d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

habiendo usado el hecho que $\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial a_i} = N_l$ a partir de (5.1).

(5.20) equivale al método de Galerkin y es un caso particular del mismo.

Remark: Obtener una aproximación a una función por el método de Galerkin equivale a aproximar la misma función por cuadrados mínimos.

5.1.3 Residuos ponderados para la resolución de ecuaciones diferenciales

En la sección anterior hemos visto como utilizar el método de los residuos ponderados para aproximar funciones conocidas analíticamente o aquellas en donde conocemos su evaluación en un conjunto discreto de puntos. En esos casos el residuo estaba asociado a la diferencia entre la función a aproximar y la aproximante. En esta sección trataremos el caso de la resolución de ecuaciones diferenciales, en donde el residuo viene dado por la diferencia entre un operador diferencial aplicado a la función a aproximar y el mismo operador aplicado a la aproximante. En el primer capítulo hemos hecho un repaso a los modelos físicos y matemáticos que gobiernan muchos de los problemas de interés en fluidodinámica computacional. Para comenzar con un caso simple tomemos un operador diferencial sencillo como la ecuación de Poisson,

Funciones de prueba que satisfacen las condiciones de contorno

En esta sección trataremos el caso de funciones aproximantes que satisfacen exactamente las condiciones de contorno a través de la elección apropiada de las funciones de prueba. Sea el problema de Poisson:

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \mathcal{L}\phi + p = 0 && \text{en } \Omega \\ \mathcal{L}\phi &= \frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial y}) \\ p &= Q \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde κ puede ser la conductividad térmica de un material y Q el flujo de calor aportado por una fuente y en este caso ϕ sería la temperatura. En el caso lineal κ y Q son independientes de ϕ . En general un problema de valores de contorno como éste para estar bien planteado requiere definir las condiciones de frontera. Estas en general pueden ser escritas como otro operador diferencial, del tipo:

$$B(\phi) = \mathcal{M}\phi + r = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.22)$$

En general existen diferentes tipos de condiciones de frontera. Las más conocidas son del tipo:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{M}\phi = \phi & r = -\bar{\phi} & \text{sobre } \Gamma_\phi & \text{DIRICHLET} \\ \mathcal{M}\phi = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} & r = -\bar{q} & \text{sobre } \Gamma_q & \text{NEUMANN} \\ \mathcal{M}\phi = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} + h\phi & r = -h\bar{\phi} & \text{sobre } \Gamma_{q+\phi} & \text{MIXTAS} \end{array} \quad (5.23)$$

Aproximando la solución mediante funciones del tipo (5.1) y eligiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\psi &= -r \\ \mathcal{M}N_m &= 0 \end{aligned} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5.24)$$

entonces $\hat{\phi}$ automáticamente satisface las condiciones de borde (5.22) para todos los valores de a_m . Aplicando el operador diferencial a la función aproximante (5.1) y asumiendo que las funciones de prueba y sus derivadas son continuas tenemos:

$$\begin{aligned} \phi &\approx \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &\approx \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\approx \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Aquí se requiere que hasta la segunda derivada sea continua. Cuando en las próximas secciones analicemos el método de los elementos finitos veremos como estas restricciones serán debilitadas. La forma en la cual hemos construido la aproximación garantiza el cumplimiento de las condiciones de

borde y entonces nos queda que $\hat{\phi}$ debe satisfacer solo la ecuación diferencial en el interior del dominio. Sustituyendo $\hat{\phi}$ en (5.21) :

$$R_{\Omega} = A(\hat{\phi}) = \mathcal{L}\hat{\phi} + p = \mathcal{L}\psi + \left(\sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \quad (5.26)$$

obtenemos el residuo de la misma con \mathcal{L} asumido un operador lineal. Una vez definido el residuo aplicamos el método de los residuos ponderados

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l \left\{ \mathcal{L}\psi + \left(\sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right\} d\Omega = 0 \quad (5.27)$$

Esta ecuación contiene M incógnitas, entonces aplicando esta misma ecuación para $l = 1, 2, \dots, M$ se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que pueden ser escritas en forma compacta como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{f} \\ K_{lm} &= \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}N_m d\Omega \quad 1 \leq l, m \leq M \\ f_l &= - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}\psi d\Omega \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (5.28)$$

El procedimiento requiere calcular los coeficientes de las matriz y del miembro derecho y luego invertir el sistema para calcular los coeficientes con los cuales se obtiene la solución aproximada al operador diferencial de (5.21). Ya que las funciones de prueba elegidas para aproximar la solución tienen soporte global entonces la matriz de coeficientes será llena y no tendrá estructura de banda, típica de los métodos de diferencias finitas y elementos finitos. Además, en lo anterior nada se ha dicho acerca de la elección de las funciones de peso con lo cual uno puede aplicar todo lo presentado en la sección anterior a las distintas alternativas mostradas en secciones anteriores.

A modo de ejemplo calcularemos la solución al siguiente problema de valores de contorno unidimensional:

Ejemplo 1D Hallar $\hat{\phi}$ solución aproximada de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi &= 0 \\ \phi(x=0) &= 0 \\ \phi(x=1) &= 1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

De acuerdo a las definiciones generales presentadas antes las condiciones de borde y las funciones de prueba elegidas son:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\phi &= \phi \quad r = 0 \quad \text{en } x = 0 \\ \mathcal{M}\phi &= \phi \quad r = -1 \quad \text{en } x = 1 \\ \psi &= x \\ N_m &= \sin(m\pi x) \end{aligned} \quad (5.30)$$

La elección de ψ y N_m es arbitraria, existen muchas otras posibles alternativas a estas pero aquí usaremos la base trigonométrica. Aplicando el método de los residuos ponderados y la definición de los coeficientes de la matriz y el vector del miembro derecho tenemos:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_0^1 W_l(1 + m^2\pi^2) \sin(m\pi x) dx \\ f_l &= - \int_0^1 W_l x dx \end{aligned} \quad (5.31)$$

Si tomamos $M = 2$ dos términos en la expansión y si aplicamos el método de colocación puntual obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} K_{11} &= (1 + \pi^2) \sin(\pi/3) & K_{12} &= (1 + 4\pi^2) \sin(2/3\pi) \\ K_{21} &= (1 + \pi^2) \sin(2/3\pi) & K_{22} &= (1 + 4\pi^2) \sin(4/3\pi) \\ f_1 &= -1/3 & f_2 &= -2/3 \end{aligned} \quad (5.32)$$

mientras que si aplicamos Galerkin en virtud de la ortogonalidad de las funciones de prueba,

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_0^1 (1 + m^2\pi^2) \sin(m\pi x) \sin(l\pi x) dx = (1 + m^2\pi^2) \int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(l\pi x) dx = \\ &= (1 + m^2\pi^2) \frac{1}{m\pi} \frac{m\pi x - \sin(2m\pi x)/2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 + m^2\pi^2) \\ f_l &= - \int_0^1 x \sin(l\pi x) dx = - \frac{\sin(l\pi) - (l\pi) \cos(l\pi)}{(l\pi)^2} = \frac{(-1)^l}{(l\pi)} \end{aligned} \quad (5.33)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{2}(1 + \pi^2) & K_{12} &= 0 \\ K_{21} &= 0 & K_{22} &= \frac{1}{2}(1 + 4\pi^2) \\ f_1 &= -\frac{1}{\pi} & f_2 &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \quad (5.34)$$

La solución numérica del sistema de ecuaciones resultante da:

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.05312 & a_2 &= 0.004754 & \text{COLOCACION PUNTUAL} \\ a_1 &= -0.05857 & a_2 &= 0.007864 & \text{GALERKIN} \end{aligned} \quad (5.35)$$

La solución exacta a este problema es del tipo

$$\phi = \frac{1}{e - 1/e} (e^x - e^{-x}) \quad (5.36)$$

La rutina Ej.2.1 contiene la resolución de este ejemplo.

La figura (5.4) muestra a la derecha la solución exacta, la aproximada por Galerkin y la de colocación a la cual se le ha removido la función $\psi = x$ para poder notar mejor las diferencias. A la izquierda vemos una distribución puntual del error donde se alcanza a notar, para este ejemplo, una mejor aproximación obtenida mediante el método de Galerkin.

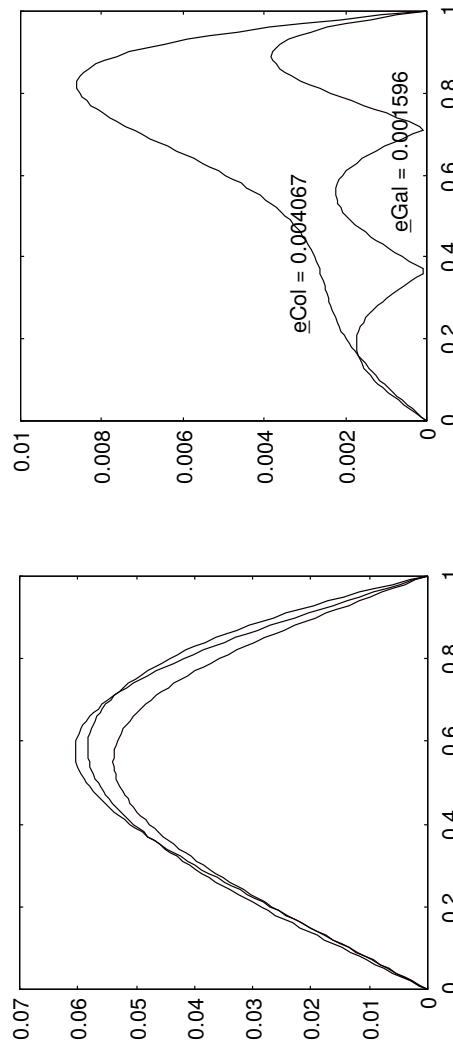


Figure 5.4: Solución aproximada a una ODE mediante residuos ponderados

Ejemplo 2D La ecuación que gobierna la torsión elástica de barras prismáticas es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (5.37)$$

donde G es el módulo elástico de torsión, θ es el ángulo que se gira la sección y ϕ equivale a una función tensión que de acuerdo a la teoría es nula en todo el contorno. Detalles acerca de la forma que se obtiene esta ecuación pueden verse en libros sobre teoría de la elasticidad, como por ejemplo Timoschenko [Ti]. Esta ecuación tiene la estructura de una ecuación de Poisson y analogías con otros experimentos gobernados por la misma ecuación pueden hacerse. Por ejemplo la anterior también surgiría si queremos resolver un problema de conducción del calor con una fuente aplicada en todo el volumen del material asumiendo que en la dirección z la barra es infinita y la temperatura del contorno está fija a un valor de referencia.

Supongamos que en este ejemplo $G\theta = 1$, con lo cual la ecuación a resolver se transforma en:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -2 & x \in [-3, 3], y \in [-2, 2] \\ \phi &= 0 & x = \pm 3, y = \pm 2\end{aligned}\tag{5.38}$$

Aquí apelamos a la intuición. Siendo el problema simétrico respecto a los ejes x e y deberíamos elegir funciones de prueba que tengan esta propiedad y satisfagan las condiciones de contorno. Por ejemplo, si tomamos $\psi = 0$ y usamos 3 términos una elección posible sería:

$$\begin{aligned}N_1 &= \cos(\pi x/6) \cos(\pi y/4) \\ N_2 &= \cos(3\pi x/6) \cos(\pi y/4) \\ N_3 &= \cos(\pi x/6) \cos(3\pi y/4)\end{aligned}\tag{5.39}$$

La rutina Ej.2.2 muestra el aspecto que tienen estas tres funciones donde se alcanza a apreciar la paridad deseada.

De esta forma aplicando la aproximación (5.1), comparando (5.21) con (5.37) y usando la definición de la matriz y el vector derecho del sistema algebraico (5.11) que permite calcular los coeficientes a_m tenemos:

$$\begin{aligned}K_{lm} &= \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 N_l \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) dy dx \\ f_l &= - \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 2N_l dy dx\end{aligned}\tag{5.40}$$

Como vemos, ahora las integrales a calcular son bidimensionales por lo que debe estimarse con más detalle la forma de realizar el cálculo. Nosotros aquí solo deseamos mostrar la metodología a usar y en este caso estas integrales las realizaremos a mano. Cuando se pretende volcar estos conceptos en un programa para fines de cálculo intensivo deben adoptarse métodos más eficientes y generales para tal fin, como por ejemplo la integración numérica, tema que veremos más adelante cuando abordemos el estudio del método de los elementos finitos. Analizando (5.40) vemos que la derivada segunda de funciones tipo cosenos generan funciones cosenos, y considerando la ortogonalidad de estas bases las integrales en (5.40) se simplifican notablemente.

La rutina Ej.2.2 contiene el cálculo de este ejemplo donde se puede apreciar la forma de calcular la matriz (diagonal) y el miembro derecho del sistema. En este caso se ha empleado una resolución analítica de las integrales. La rutina mejorada Ej.2.2b muestra como puede emplearse una rutina de integración numérica con el fin de evitar tediosos cálculos.

La figura (5.5) muestra en la parte superior la solución obtenida con la mencionada rutina en la cual se incluye el valor de la tensión máxima que es de 3.103, cercano al teórico de 2.96 5% de error.

Para terminar esta sección mencionamos que el método de los cuadrados mínimos aplicado a la resolución de ecuaciones a derivadas parciales no es equivalente al método de los residuos ponderados

de Galerkin. Para ver esto tomemos como antes el funcional definido como:

$$I(a_1, a_2, \dots, a_M) = \int_{\Omega} R_{\Omega}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{L}\psi + \left(\sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right\}^2 d\Omega$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_l} &= 0 & l &= 1, 2, \dots, M \\ \int_{\Omega} R_{\Omega} \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial a_l} d\Omega &= 0 & l &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$W_l = \frac{\partial R_{\Omega}}{\partial a_l} = \mathcal{L}N_l$$

o sea la función de peso que surge del método de los cuadrados mínimos equivalente al operador diferencial del problema aplicado a las funciones de prueba. Este tipo de aproximaciones se la suele llamar *Galerkin Least Square (GLS)* y será muy útil para lograr soluciones estables para operadores de diversa índole, desde ecuaciones elípticas, pasando por parabólicas hasta hiperbólicas.

Ejercicio evaluador Resuelva el siguiente problema

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi &= 0 \\ \phi(x=0) &= 1 \\ \phi(x=1) &= 0\end{aligned}\tag{5.42}$$

que tiene como solución exacta

$$\phi = 1 - \frac{\sin(x)}{\sin(1)}$$

utilizando como aproximación

$$\hat{\phi} = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Resuelva utilizando los distintos métodos presentados

- colocación puntual
- colocación por subdominios
- Galerkin
- mínimos cuadrados
- método de los momentos

y compáre el error de los distintos métodos en una tabla.

Funciones de prueba que no satisfacen las condiciones de contorno

Hasta aquí hemos considerado aproximaciones elegidas de forma tal de satisfacer las condiciones de contorno. Esto muchas veces puede ser dificultoso y ante esto es preciso relajar tal requisito. Para poder elegir las funciones de prueba independientemente de las condiciones de contorno postulamos una expansión del tipo:

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m\tag{5.43}$$

que no satisface las condiciones de contorno. Entonces el residuo en el interior del dominio (R_Ω) es suplementado por otro en el borde (R_Γ):

$$\begin{aligned}R_\Omega &= A(\hat{\phi}) = \mathcal{L}\hat{\phi} + p \\ R_\Gamma &= B(\hat{\phi}) = \mathcal{M}\hat{\phi} + r\end{aligned}\tag{5.44}$$

En este caso el método de los residuos ponderados consiste en escribir:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (5.45)$$

con W_l y \overline{W}_l elegidas en forma arbitraria e independiente. Reemplazando (5.44) en (5.45) llegamos a la definición del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} &= \mathbf{f} \\ K_{lm} &= \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_l \mathcal{M} N_m d\Gamma \quad 1 \leq l, m \leq M \\ f_l &= - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Gamma} \overline{W}_l r d\Gamma \quad 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (5.46)$$

Es de mencionar que a diferencia del caso anterior donde uno garantizaba la satisfacción de las condiciones de contorno en forma fuerte, es decir en forma exacta, en este caso la condición de contorno se cumple solo aproximadamente y los coeficientes a determinar (a_m) se modifican atendiendo la satisfacción del residuo global.

Para ilustrar el procedimiento tomaremos el ejemplo 1D anteriormente presentado.

Ejemplo 1D (Eqn. 5.29) versión 2 Aquí resolveremos el mismo problema presentado en (5.29) con la diferencia que usaremos como funciones de prueba la base $N_m = x^{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$

En este caso simple la integral de borde en (5.45) se reduce a la evaluación del integrando en los dos puntos extremos de este dominio definido por el intervalo $[0, 1]$. Entonces

$$\int_0^1 W_l R_{\Omega} dx + [\overline{W}_l R_{\Gamma}]_{x=0} + [\overline{W}_l R_{\Gamma}]_{x=1} = 0 \quad (5.47)$$

En este ejemplo usaremos para el peso en el interior del dominio el método de Galerkin $W_l = N_l$ mientras que para el peso en el borde $\overline{W}_l = -N_l|_{\Gamma}$, entonces:

$$\int N_l \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \hat{\phi} \right) dx - [N_l \hat{\phi}]_{x=0} - [N_l (\hat{\phi} - 1)]_{x=1} = 0 \quad (5.48)$$

Observar que los dos términos que representan la contribución al residuo de la condición al contorno el primero de ellos es nulo porque $N_l(x = 0) = 0$ para todo l mientras que el segundo genera una contribución a la matriz del tipo $N_l(x = 1) \times N_l(x = 1) = 1$ que aporta un coeficiente adicional unitario en todos los coeficientes de la matriz definida en (5.33). Además hay un aporte unitario en todos los coeficientes del término derecho.

Si usamos una expansión en tres términos se llega a la siguiente matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & -2/3 \\ 3/2 & 4/3 & 1/4 \\ 4/3 & 5/4 & 8/15 \end{pmatrix} \\ \mathbf{f} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

La solución a este problema es:

$$a_1 = 0.068 \quad a_2 = 0.632 \quad a_3 = 0.226 \quad (5.50)$$

Ejemplo 2D - versión 2 Usando como aproximación la siguiente

$$\hat{\phi} = (4 - y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + a_5x^4)$$

es obvio ver que la misma satisface las condiciones de contorno en $y = \pm 2$, mientras que la condición $x = \pm 3$ debe incluirse en el cálculo.

Tomando (5.44) y (5.46) y reemplazando la anterior expresión vemos que:

$$\int_{-3}^3 \int_{-2}^2 W_l \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} + 2 \right) dy dx + \int_{-2}^2 \overline{W}_l \hat{\phi}|_{x=3} dy - \int_{-2}^2 \overline{W}_l \hat{\phi}|_{x=-3} dy = 0 \quad (5.51)$$

Usando $W_l = N_l$ y $\overline{W}_l = N_l|_r$ se llega a armar el sistema de ecuaciones. La rutina Ej_2.3 muestra una forma de resolver este problema apelando a las capacidades de cálculo simbólico de MatLab. Se recomienda editar y leer esta rutina para entender la metodología que es extensible a otros ejemplos utilizando diferentes funciones de base.

La figura (5.5) en la parte inferior muestra la solución numérica obtenida donde se alcanza a ver que la condición de contorno en $y = \pm 2$ se satisface exactamente pero aquella en $x = \pm 3$ se cumple solo aproximadamente. Esta es una de las diferencias entre las dos metodologías propuestas. Además la tensión máxima es un poco superior a la obtenida con la primera metodología alejándose un poco más del valor teórico. La figura 5.5 en la parte inferior derecha muestra la variación de la tensión a lo largo del contorno $x = \pm 3$ en función de la coordenada y .

5.1.4 Condiciones de contorno naturales

Como hemos visto en la sección anterior es posible facilitar la selección de las funciones de prueba sin necesidad de que satisfagan las condiciones de contorno a expensas de un trabajo algebraico mayor y de una degradación en la calidad de la solución. El primer ítem está relacionado con la resolución de las integrales que permiten el cálculo de los coeficientes. En (5.46) vemos que además de las integrales en el interior tenemos la necesidad de evaluar integrales en el contorno del dominio, las cuales pueden contener operadores diferenciales que complican aún más la situación. Aquí veremos que existen ciertas condiciones de contorno las cuales surgen como las naturales al problema, en el sentido que permiten cierta cancelación de términos cuando el problema se expresa en su forma débil. Supongamos que aplicamos el método de los residuos ponderados al problema definido en (5.21) .

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l (\mathcal{L}\hat{\phi} + p) d\Omega \quad (5.52)$$

La *forma débil* de la anterior formulación integral se obtiene mediante la integración por partes que en su versión general puede escribirse como:

$$\int_{\Omega} W_l \mathcal{L}\hat{\phi} d\Omega = \int_{\Omega} (CW_l)(\mathcal{D}\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}\hat{\phi} d\Gamma \quad (5.53)$$

donde $C, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ son operadores diferenciales lineales involucrando órdenes de derivación inferiores a la del operadores \mathcal{L} . Usando (5.44) y (5.53) en (5.45) se llega a:

$$\int_{\Omega} (CW_l)(\mathcal{D}\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}\hat{\phi} d\Gamma + \int_{\Gamma} \overline{W_l} \mathcal{M}\hat{\phi} d\Gamma = - \left(\int_{\Omega} W_l p d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W_l} r d\Gamma \right) \quad (5.54)$$

donde lo que se pretende es anular las contribuciones al contorno del miembro izquierdo, o sea:

$$\int_{\Gamma} W_l \mathcal{E}\hat{\phi} + \overline{W_l} \mathcal{M}\hat{\phi} d\Gamma = 0 \quad (5.55)$$

Un ejemplo de condiciones de contorno natural que comúnmente se tiene en las aplicaciones es la especificación de un flujo impuesto en el contorno. Pensando en el problema térmico podemos imaginar que extraemos calor del contorno de una pieza con una magnitud \bar{q} especificada. En esos casos la condición de contorno viene expresada como:

$$-\kappa \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad (5.56)$$

Si echamos un vistazo a (5.44) vemos que $\mathcal{M} = \frac{\partial}{\partial n}$ y si lo que estamos resolviendo es la ecuación de conducción térmica en ese caso el operador $\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial n} = \mathcal{M}$, por lo cual $\overline{W_l} = -W_l$ satisface (5.55) simplificando (5.54) a:

$$\int_{\Omega} (CW_l)(\mathcal{D}\hat{\phi}) d\Omega = - \left(\int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Gamma} W_l r d\Gamma \right) \quad (5.57)$$

En lo anterior hemos utilizado el teorema de Green o su equivalente, la fórmula de integración por partes. Una versión un poco más detallada del mismo aplicada a un caso sencillo expresa que:

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \beta d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \alpha \beta d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \beta \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.58)$$

con α y β funciones escalares. A pesar que (5.58) incluye solo derivadas de primer orden, la técnica es bien general como lo expresa 5.53 e incluso se extiende al caso de funciones vectoriales. No obstante en la mayoría de las aplicaciones los operadores que se trabajan son de relativo bajo orden.

5.1.5 Métodos de solución del contorno

Hasta aquí los métodos empleados resolvían el problema en el interior del dominio pudiendo trabajar con funciones de prueba que satisfagan o no las condiciones de contorno. Si en lugar de elegir funciones de prueba que satisfagan las condiciones de contorno elegimos aquellas que satisfacen el operador diferencial en el interior del dominio el problema se reduce a resolver solo el residuo en el contorno.

Este tipo de estrategia dió lugar al *método de los paneles* y al *método de los elementos de contorno*. De esta forma como las funciones de prueba satisfacen el operador diferencial en el interior entonces:

$$R_{\Omega} = A(\hat{\phi}) = \sum_{m=1}^M a_m A(N_m) = 0 \quad (5.59)$$

con lo cual la definición del método de los residuos ponderados (5.45) se reduce simplemente a:

$$\int_{\Gamma} \overline{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (5.60)$$

Un solo conjunto de funciones de prueba \overline{W}_l , definidas solamente sobre el borde del dominio deben definirse. Además como el problema se plantea sobre el contorno la dimensión espacial se reduce en una unidad con lo cual problemas en 3D se transforman en bidimensionales y aquellos en 2D en unidimensionales. Estas ventajas tiene su contracara en la dificultad de elegir funciones de prueba que satisfagan el operador diferencial en el interior del dominio. Este es el principal limitante de esta técnica que se muestra atractiva por todo lo que implica reducir la dimensión espacial. Una de las aplicaciones más divulgadas de esta técnica es la resolución de problemas gobernados por la ecuación de Laplace, por ejemplo: conducción del calor, flujo potencial, elasticidad lineal, y otros. La razón es que si pensamos en funciones analíticas de variable compleja $z = x + iy$, estas satisfacen automáticamente la ecuación de Laplace. Supongamos una función analítica del tipo:

$$f(z) = u + iv \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (5.61)$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f'' \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= i^2 f'' = -f'' \end{aligned}$$

$$\text{sumando m.a.m.} \quad (5.62)$$

$$\nabla^2 f = \nabla^2 u + i \nabla^2 v = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$$

$$\text{con } f'' = \frac{df}{dz}$$

Por ejemplo tomando la función analítica

$$f(z) = z^n \quad (5.63)$$

Todas las funciones u y v que surgen de (5.63) satisfacen la ecuación de Laplace siendo todas ellas candidatas para integrar las funciones de prueba con las cuales armar una función aproximante que satisfaga este problema en particular en el interior del contorno. El siguiente ejemplo muestra una aplicación del método de los elementos de contorno al problema de la torsión de una viga.

5.1.6 Sistema de ecuaciones diferenciales

El método de los residuos ponderados en cualquiera de sus versiones puede ser extendido para tratar el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales. Un sistema de ecuaciones diferenciales surge cuando en el modelo matemático se pretende resolver campos vectoriales en una o varias dimensiones espaciales o cuando se pretenden acoplar varios campos escalares y/o vectoriales tanto en una como en varias dimensiones espaciales. En esos casos la solución a obtener viene representada por un vector

$$\boldsymbol{\phi} = \{\phi_1, \phi_2 \dots\} \quad (5.64)$$

que debe satisfacer ciertas ecuaciones diferenciales, una por cada componente del vector incógnita

$$\begin{aligned} A_1(\boldsymbol{\phi}) &= 0 \\ A_2(\boldsymbol{\phi}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

la cual en forma compacta puede escribirse como

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} A_1(\boldsymbol{\phi}) \\ A_2(\boldsymbol{\phi}) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (5.66)$$

Del mismo modo con las ecuaciones en el contorno

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} B_1(\boldsymbol{\phi}) \\ B_2(\boldsymbol{\phi}) \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma \quad (5.67)$$

Para cada componente del vector necesitamos definir una aproximación del tipo (5.1), que escrita en forma compacta se expresa como:

$$\boldsymbol{\phi} \approx \hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\psi} + \sum_{m=1}^M \mathbf{N}_m \mathbf{a}_m \quad (5.68)$$

donde \mathbf{N}_m es una matriz diagonal donde en cada término de la diagonal se halla la función de prueba de cada componente del vector incógnita. Del mismo modo las funciones de peso, tanto para la integral sobre el interior del dominio como para la del contorno son también matrices diagonales. De esta forma la extensión del método de los residuos ponderados escalar aplicado al caso vectorial es directa.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_I \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\phi}}) d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{\mathbf{W}}_I \mathbf{B}(\hat{\boldsymbol{\phi}}) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (5.69)$$

La mayoría de los casos de interés tanto en la industria como en la ciencia involucran sistemas de

ecuaciones diferenciales .

$$\begin{aligned}
\phi &= \{u, v\} \text{ Elasticidad lineal} \\
\phi &= \{u, v, w, p\} \text{ Flujo incompresible viscoso (a)} \\
\phi &= \{\psi, \omega\} \text{ Flujo incompresible viscoso (b)} \\
\phi &= \{\rho, u, v, w, p\} \text{ Flujo compresible viscoso}
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Los problemas de elasticidad bidimensional están generalmente formulados en dos variables, los desplazamientos u, v según las componentes x e y respectivamente. Los problemas de flujo viscoso incompresible tridimensional vienen muchas veces expresados en término de las variables primitivas del problema, las tres componentes de la velocidad y la presión. No obstante en 2D muchos prefieren la formulación vorticidad ω , función de corriente ψ que desde el punto de vista computacional tiene una implementación más fácil y no requiere un tratamiento especial de la incompresibilidad como lo necesita la formulación en variables primitivas. El caso de flujo compresible 3D tiene un vector incógnita con 5 componentes. Esta es solo una breve descripción de algunos de los casos típicos donde se necesita resolver un sistemas de ecuaciones diferenciales . El agregado de modelos adicionales, por ej. turbulencia u otros, muchas veces también agrega componentes al vector incógnita. Por último en pos de reducir el orden de una ecuación diferencial se puede transformar la misma en un sistemas de ecuaciones diferenciales donde el orden se ha reducido completamente equivalente al original.

5.1.7 Problemas no lineales

Muchos problemas prácticos modelados físicamente producen tanto ecuaciones diferenciales como condiciones de contorno que son no lineales. Esta no linealidad se expresa porque existe una dependencia de los operadores, tanto el del interior como el del contorno, con la variable de estado o función incógnita. Dado que en todas las secciones anteriores hemos considerado la aplicación del método de los residuos ponderados al caso lineal se hace necesario hacer algunos comentarios respecto al caso no lineal. El método de los residuos ponderados es completamente aplicable al caso no lineal. Supongamos que queremos resolver un problema de conducción del calor donde la conductividad depende de la misma temperatura. La ecuación de gobierno puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\kappa(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y}) + Q &= 0 & \text{en } \Omega \\
\phi &= \bar{\phi} & \text{en } \Gamma_{\phi} \\
\kappa(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -\bar{q} & \text{en } \Gamma_q
\end{aligned} \tag{5.71}$$

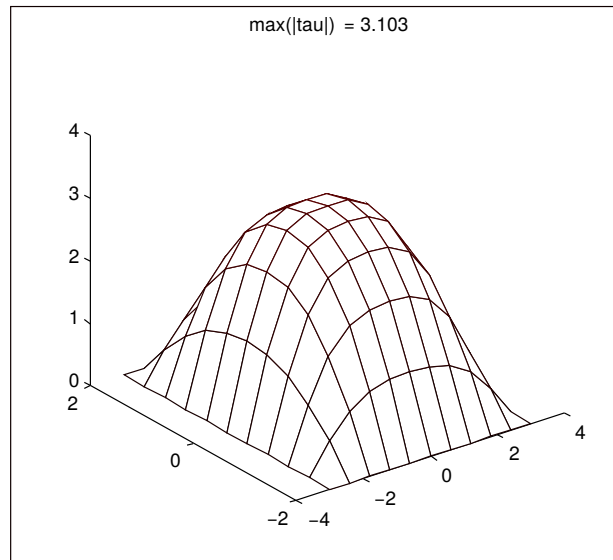
Planteando una aproximación del tipo (5.1), introduciendo la misma en la formulación por residuos ponderados de (5.71) produce un sistema de ecuaciones algebraico no lineales del tipo:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{5.72}$$

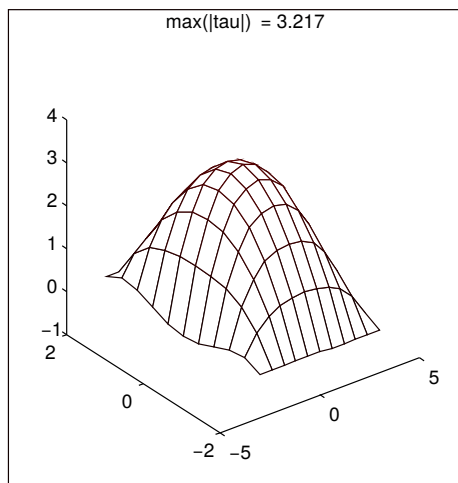
que puede resolverse iterativamente en la forma:

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}^{n-1})\mathbf{a}^n = \mathbf{f}^{n-1} \quad (5.73)$$

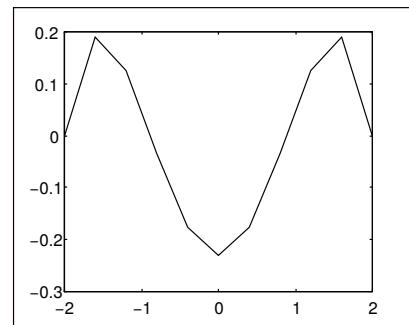
Además del caso de la ecuación de conducción no lineal existen muchos otros problemas de interés a mencionar como el caso de la ec. de Burgers, el caso de la ecuación de flujo viscoso incompresible expresada en una formulación $\psi - \omega$ donde la no linealidad se halla en las condiciones de contorno. Obviamente las ecuaciones de flujo compresible e incompresible expresada en las variables primitivas o conservativas son también ejemplos claros de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.



Funciones de prueba que satisfacen las condiciones de contorno



ϕ



y

Solucion en $x=3$

Funciones de prueba que no satisfacen las condiciones de contorno

Figure 5.5: Torsión de una barra prismática

VER [/home/nnigro/BETO/TEX2/curso_CFD_2008/TP/theory/PDE_continuous](#) para hacer un índice de los ejemplos propuestos con sus distintas rutinas en Octave para que puedan ser usados como practicas de aprendizaje al tema método de los residuos ponderados

5.1.8 Extensión del método a geometrías mas complejas

En esta sección se pretende intentar extender el método al caso de geometrías no tan restrictivas a formas cartesianas, polares o esféricas.

Sea por ejemplo un dominio en forma de L como el de la siguiente figura:

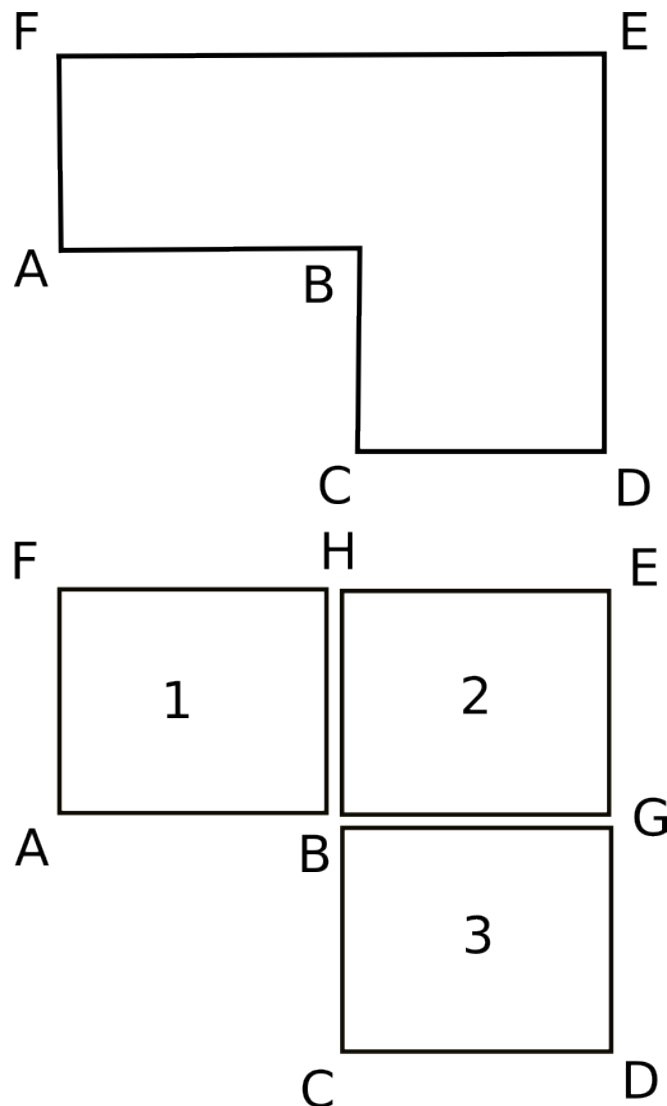


Figure 5.6: Extensión del Método de Residuos Ponderados al caso de una geometría en forma de L

En esta figura vemos que la geometría en L que inicialmente se torna difícil de tratar por el método de los residuos ponderados en su forma habitual pero podemos dividir en 3 bloques cartesianos que unidos de la forma en que se ve en la parte inferior de la figura permite emplear esta metodología .

Lo único que se debe agregar es que el bloque 1 y 2 se hallan unidos a través de una condición de contorno definida como *interna* representada por la arista **BH** mientras que los bloques 2 y 3 se unen mediante la arista **BG** también interna.

Estas condiciones de contorno interna requieren que se establezcan ecuaciones adicionales o restricciones que vinculan la variable incógnita entre los bloques.

A continuación presentamos los 3 problemas y las restricciones que permiten acoplar estos 3 problemas para generar una única solución.

Problema en el Bloque 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial y}) + Q &= 0 & \text{en } \Omega \\ \phi^{(1)} &= \bar{\phi} & \text{en } BA \cup AF \cup FH \end{aligned} \quad (5.74)$$

Problema en el Bloque 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial y}) + Q &= 0 & \text{en } \Omega \\ \phi^{(2)} &= \bar{\phi} & \text{en } HE \cup EG \end{aligned} \quad (5.75)$$

Problema en el Bloque 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial y}) + Q &= 0 & \text{en } \Omega \\ \phi^{(3)} &= \bar{\phi} & \text{en } BC \cup GD \\ \kappa(\phi^{(3)}) \frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial n} &= -\bar{q} & \text{en } CD \end{aligned} \quad (5.76)$$

Restricciones

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &= \phi^{(2)} & \text{en } BH \\ \phi^{(2)} &= \phi^{(3)} & \text{en } BG \end{aligned} \quad (5.77)$$

CONTINUARLO

Otro ejemplo que se podría tratar con esta metodología y que es ampliamente estudiado es el caso mostrado en la siguiente figura

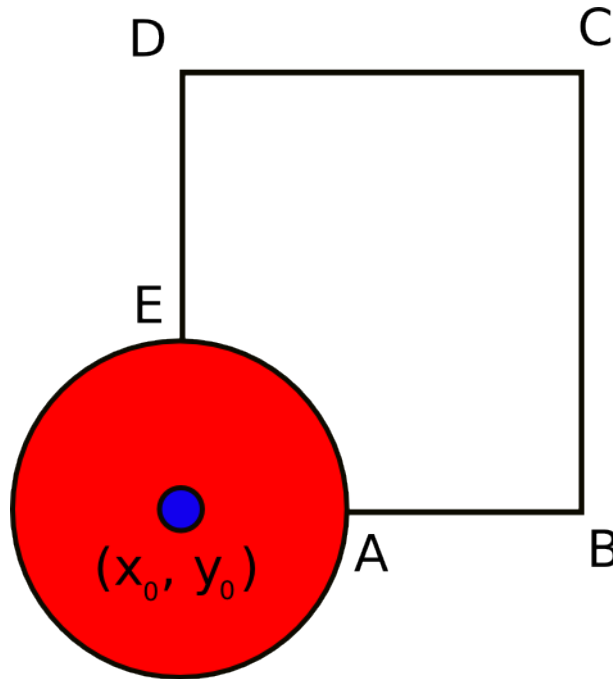


Figure 5.7: Extensión del Método de Residuos Ponderados al caso de una placa con un agujero

que puede ser usado para analizar el estado tensional de una chapa con un agujero o bien puede tambien ser usado para analizar la temperatura de la misma chapa o sino alrededor de un objeto (el círculo) mojado por un flujo tanto en régimen con pura conducción o incluyendo convección, como vimos en la sección 4.8.

En este ejemplo la idea es utilizar una familia de funciones que represente la solución buscando satisfacer las condiciones de contorno. En el ejemplo térmico de la chapa con el agujero podríamos pedir que la temperatura sobre el contorno circular EA centrado en el punto x_0, y_0 sea nula y en los contornos exteriores $DC \cup CB$ sean distinta de cero.

CONTINUARLO

5.1.9 Conclusiones

En esta primera parte de este capítulo que trata acerca de diferentes técnicas numéricas de discretización hemos presentado el caso del método de los residuos ponderados aplicado a la resolución de ecuaciones a derivadas parciales utilizando para aproximar un conjunto de funciones de prueba definidas globalmente, satisfaciendo o no las condiciones de contorno, de fácil extensión al caso de sistemas de ecuaciones diferenciales y al caso no lineal. No obstante, como se desprende de los ejemplos incluidos la elección de dichas funciones no es tarea fácil, incluso no es extensible al caso de geometrías arbitrarias si uno requiere que dichas funciones satisfagan las condiciones de contorno exactamente. Además, a

medida que se aumenta el grado de la aproximación el condicionamiento del sistema lineal a resolver se vuelve crítico salvo que se usen funciones base con mayor grado de ortogonalidad. Esto se logra mediante el uso de polinomios de Legendre o de Chebyshev. En realidad estos son muy frecuentemente utilizados en el contexto de los *métodos espectrales* el cual en forma indirecta ha sido el tema de esta sección (5.1) . Este tema daría para una sección aparte pero por el momento diferimos un tratamiento más detallado para futuras versiones de estas notas. En las próximas secciones trataremos de relajar algunas de las limitaciones de esta técnica, en especial aquella relacionada con el tratamiento de dominios de forma arbitraria, presentando primero el método de los elementos finitos y posteriormente el método de los volúmenes finitos .

5.1.10 TP.chapV– Trabajo Práctico #2

1. Tome la rutina Ej_2_0.m y transfórmela para ser usada con funciones de prueba del tipo $N_m = \sin(m\pi x)$. Comience con $M = 2$ y refínelo para testear la convergencia de la aproximación.
2. Demuestre que la aproximación por residuos ponderados del tipo Galerkin, tomando como funciones de prueba la base $N_m = \sin(m\pi x/L_x)$ conduce a un sistema de ecuaciones con una matriz diagonal.
3. Un ensayo experimental sobre la deflexión $u(x, y)$ de una placa cuadrada de lado unitario con todo su contorno empotrado dio como resultado los valores que se muestran en la figura.

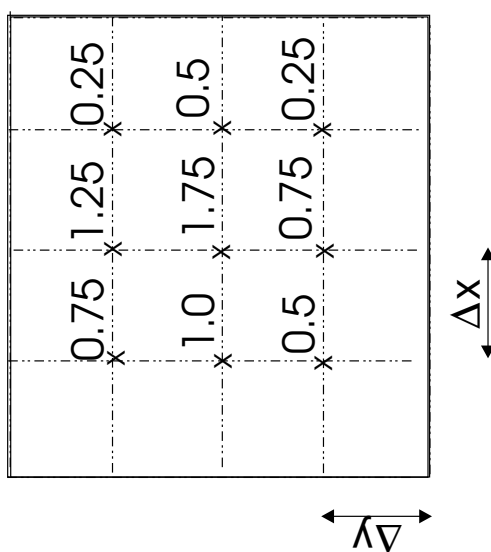


Figure 5.8: Ej. 3 Torsión de una barra

Aproximar la deflexión mediante

$$\hat{u}(x, y) = \psi(x, y) + \sum_{\substack{l,m=1 \\ l+m \leq 4}}^M a_{lm} \sin(l\pi x) \sin(m\pi y) \quad (5.78)$$

y usando el método de los residuos ponderados estimar los coeficientes a_{lm} . Ayuda: las integrales que aparecen del cálculo de los coeficientes pueden resolverse mediante integración numérica usando regla del trapecio bidimensional

4. Mediante el uso de un adecuado conjunto de funciones de prueba aproxime la función $\phi = 1 + \sin(\pi x/2)$ en el rango $0 \leq x \leq 1$. Utilice colocación puntual, colocación por subdominios y el método de Galerkin e investigue numéricamente la convergencia de las sucesivas aproximaciones.
5. La rutina Ej_2_1 contiene la resolución del problema de valores de contorno presentado en las notas

teóricas:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi &= 0 \\ \phi(x=0) &= 0 \\ \phi(x=1) &= 1\end{aligned}\tag{5.79}$$

El mismo se ha usado con $M = 2$ términos en la expansión. Pruebe de modificar la cantidad de términos y trace una curva donde se muestre la convergencia de cada uno de los métodos.

6. Resuelva el ejercicio anterior pero utilizando como conjunto de funciones de prueba la base $N_m = x^m(1-x)$. Construya una rutina en base a la Ej.2.1 para resolver este problema y muestre la convergencia de la misma. Saque conclusiones respecto a los obtenido en este ejercicio y el anterior.
7. Utilizando como base la rutina Ej.2.2 realice las modificaciones necesarias para realizar un estudio de convergencia de la aproximación. Tenga en cuenta de mantener la simetría en la elección de las funciones de prueba y utilice las propiedades de ortogonalidad para calcular la matriz de coeficientes.
8. Utilice el método de los residuos ponderados aplicado al residuo en el dominio interior y agregado el proveniente del contorno para resolver el problema de la torsión de la barra definido en la teoría. Utilice una expansión del tipo

$$\hat{\phi} = (4 - y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + a_5x^4)$$

que satisface la condición de contorno en $y = \pm 2$ pero no satisface aquella en $x = \pm 3$. Elija $W_l = N_l$ y $\bar{W}_l = N_l|_{\Gamma}$ y obtenga el sistema de ecuaciones a resolver y la solución. Estudie la convergencia del residuo al tomar diferente cantidad de términos en la expansión arriba presentada. *Sugerencia: Realice un programa del tipo Ej.2.2 para el mismo y para resolver las integrales use integración numérica*

9. **Condiciones de contorno naturales** Resolver el problema de conducción térmica estacionaria

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} &= 0 \\ \phi &= 0 & y &= \pm 1(\Gamma_{\phi}) \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} &= \cos(\pi y/2) & x &= \pm 1(\Gamma_q) \\ \kappa &= 1\end{aligned}\tag{5.80}$$

usando como función aproximante

$$\hat{\phi} = (1 - y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2 + a_4x^2y^2 + a_5x^4)$$

Utilice la rutina Ej.2.3 para este fin.

10. Método de los elementos de contorno - Torsión de una viga.

El problema de la torsión de una viga definido en la teoría

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -2 & \text{en } \Omega = [-3, 3] \times [-2, 2] \\ \phi &= 0 & \text{en } \Gamma\end{aligned}\quad (5.81)$$

puede ser transformado a una ecuación de Laplace mediante la siguiente igualdad:

$$\phi = \theta - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Usando el método de los residuos ponderados aplicado solo al contorno y la siguiente base de funciones

$$\hat{\theta} = a_1 + a_2(x^2 - y^2) + a_3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

hallar la solución aproximada $\hat{\phi}$ y compararla con la obtenida por el método de los residuos ponderados aplicado al interior.

11. Sistema de ecuaciones diferenciales

El problema de conducción térmica

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) + Q &= 0 & \text{en } \Omega \\ \phi(x=0) &= 0 & q(x=1) = 0\end{aligned}\quad (5.82)$$

puede descomponerse en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$\begin{aligned}q + \kappa \frac{d\phi}{dx} &= 0 \\ \frac{dq}{dx} - Q &= 0\end{aligned}\quad (5.83)$$

siendo el vector incógnita $\phi = \begin{pmatrix} q \\ \phi \end{pmatrix}$. Usando la aproximación:

$$\begin{aligned}N_{m,1} &= x^{m-1}(1-x) \\ N_{m,2} &= x^m\end{aligned}\quad (5.84)$$

calcular la solución a este problema usando dos términos.

12. Ejemplo : Problemas no lineales

Resolver la ecuación no lineal

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\kappa \frac{d\phi}{dx}) &= -10x \\ \phi(x=0) &= 0 \\ \phi(x=1) &= 0 \\ \kappa &= 1 + 0.1\phi\end{aligned}\quad (5.85)$$

usando como funciones de prueba la base $N_m = x^m(1 - x)$ con dos términos mediante un método de los residuos ponderados por colocación puntual.