

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

(1)

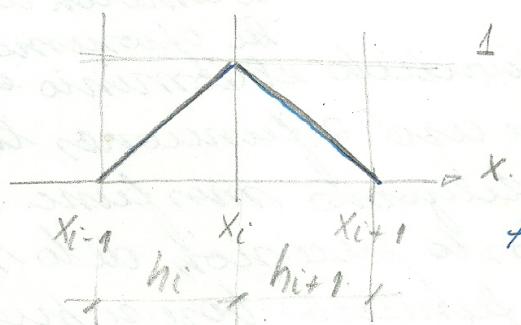
FUNCIONES CONTINUAS A TROZOS.

Consideremos como vimos en Reseñas previas que la formulación débil o fuerte. Como vimos la precisión de la solución depende en gran medida de la elección de las funciones base ("trial function"). Pero esto no es cosa fácil, sobre todo cuando la solución exacta ^{es} desconocida. Se espera que tenga grandes variaciones o gradientes dentro del dominio del problema y más aún cuando dicho dominio tiene formas complejas, en problemas de 2 o 3 dimensiones y/o cuando presenta condiciones de borde complicadas. Un modo de resolver estos inconvenientes consiste en usar funciones continuas a trozos. -

Ej. Consideremos las funciones lineales a trozos en un dominio unidimensional:

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & " \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

Si lo graficamos tenemos:



Función Lineal a Trozos.

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} - u = -x & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 0 \text{ y } u(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{homogéneos})$$

$$M.R.P. = \int_0^1 w \left(\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} - \tilde{u} + x \right) dx = 0$$

Si planteamos la formulación débil:

$$\int_0^1 \left(-\frac{dw}{dx} \frac{d\tilde{u}}{dx} - w\tilde{u} + xw \right) dx + \left[w \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1 = 0$$

porque de acuerdo con las cond. de borde no tenemos residuos en las fronteras. (cond. homogéneas)

Elegimos una conj. de funciones base tal que:

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x)$$

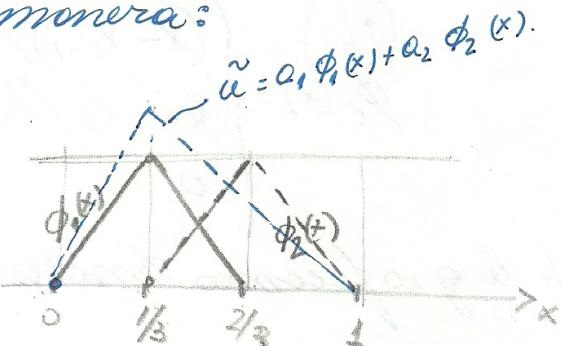
α_1, α_2 } incógnitas o parámetros a determinar

$\phi_1(x), \phi_2(x)$ } funciones trazo base -

Los obtengo de la siguiente manera:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2-3x & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3x-1 & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3-3x & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



los parámetros α_1 y α_2 le cambian la forma a la aproximación.

En este caso hemos dividido el dominio en

3 subdominios y se unen 2 funciones lineales a trozos. Claro, si utilizamos más func. lineales a trozos, mejoraremos la precisión de la solución aproximada. Las funciones base se pueden reescribir como:

$$\tilde{u} \begin{cases} a_1(3x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ a_1(2-3x) + a_2(3x-1) & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ a_2(3-3x) & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= 3a_1 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -3a_1 + 3a_2 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -3a_2 \end{aligned} \quad \text{base} \Rightarrow \text{Ponderación}$$

Si usamos Galerkin como método $\Rightarrow N_e = W_e$

$$W_1 = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2-3x & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial x} &= 3 \\ \frac{\partial W_1}{\partial x} &= -3 \\ \frac{\partial W_1}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$W_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 3x-1 & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3-3x & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} &= 3 \\ \frac{\partial W_2}{\partial x} &= -3 \end{aligned}$$

Planteamos resolviendo ponderaciones: con debilidad

$$I_1 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - w_1 \tilde{u} + x w_1 \right) dx = 0$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(-\frac{\partial w_2}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - w_2 \tilde{u} + x w_2 \right) dx = 0$$

otro lado $\left[\bar{w} \frac{d\tilde{u}}{dx} \right]_0^1$ que vale de la separación de variables

y comite porque $w_1(0) = w_1(1) = w_2(0) = w_2(1) = 0$

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{3}} [-3(3a_1) - 3x(3a_1 x) + x(3x)] dx +$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [-3(-3a_1 + 3a_2) - (2+3x)(2a_1 - 3a_1 x + 3a_2 x - a_2) + x(2-3x)] dx.$$

$$+ \int_{\frac{2}{3}}^1 0 \cdot dx = 0$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{3}} [0] dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} [-3(-3a_1 + 3a_2) - (3x-1)(2a_1 - 3x a_1 + 3x a_2 - a_2) + x(3x-1)] dx +$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 [3(-3a_2) - (3-3x)(3a_2 - 3a_2 x) + x(3-3x)] dx = 0$$

$$I_1 = -6.2222a_1 + 2.9444a_2 + 0.1111 = 0$$

$$I_2 = 2.9444a_1 + 6.2222a_2 + 0.2222 = 0$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.0488 \\ a_2 &= 0.0569 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = 0.0488 \phi_1(x) + 0.0569 \phi_2(x)$$

Si hubiéramos usado la misma función base anterior pero con la formulación fuerte $\int w \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \tilde{u} + k \right) dx$ desaparecería sobre el dominio y no se hubiero podido resolver.

Formulación de Elementos Finitos por Galerkin

De lo dicho sacamos la sg. conclusión. Si se usan funciones base del tipo libro a trozo o continuas a trozos tiene ventajas. Si implementamos el uso de subdominios para las funciones o trozo, podemos representar funciones complejas usando únicamente la suma de func. lineales a trozos.

Estos subdominios recibieron luego el nombre de "Elementos Finitos" (EF).

Lo que ahora es calcular resultados numéricos de una manera sistemática usando EF y funciones lineales a trozos. Antes las funciones lineales a trozos los definimos en término de coeficientes generales que llamamos $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$. Pero ~~para~~ hacerlo más sistemático los vamos a definir en término de variables nodales.

Consideremos un rebolomino o EF de los nodos en x_i y x_{i+1} . La coordenada de punto es x y las variables móviles a calcular son u_i y u_{i+1} . (3)



Suponemos que nuestra función incógnita es:

$$\tilde{u} = c_1 x + c_2 \quad (1)$$

Y lo quiero expresar en términos de variables móviles es decir reemplazamos c_1 y c_2 por u_i y u_{i+1} respectivamente

$$\Rightarrow u(x_i) = c_1 x_i + c_2 = u_i \quad (2)$$

$$u(x_{i+1}) = c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1}$$

$$\text{despejamos } c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad c_2 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Luego reemplazamos (2) en (1) y nos queda la

$$\Rightarrow u = H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1} \quad (3)$$

$$\text{donde: } H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i} \quad H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i} \quad (4)$$

$$\text{con } h_i = x_{i+1} - x_i$$

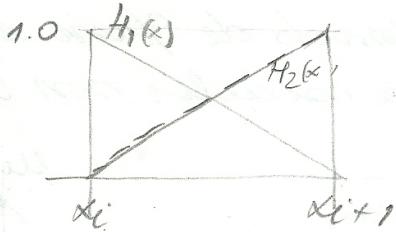
La (3) da una expresión de la variable u en términos de las variables móviles y las (4) se denominan "funciones lineales de forma" ("shape linear function") que tienen las sig. propiedades:

- 1) Todo función de forma asociado con el modo i toma el valor unitario en ese modo y desaparece en los otros:

$$H_1(x_i) = 1 \quad H_1(x_{i+1}) = 0 \quad H_2(x_i) = 0 \quad H_2(x_{i+1}) = 1$$

- 2) La suma de las funciones de forma es la unidad

$$\sum_{i=1}^n H_i(x) = 1$$



Estos dos son propiedades importantes. Lo primero solo me dice que la variable u deberá ser igual a la correspondiente variable nodal en el nodo $u(x_i) = u_i$; $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$. Lo segundo nos dice que u puede representar una solución uniforme dentro del elemento. Si esta solución permanece constante dentro del elemento $\Rightarrow u = u_i = u_{i+1}$

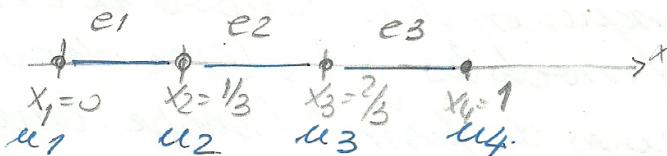
$$\Rightarrow u = \{H_1(x) + H_2(x)\} u_i = u_i \quad (5)$$

Volvemos al problema original anterior, lo vamos a resolver asimismo con elementos finitos. \rightarrow Planteamos RP \Rightarrow

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - wu + xw \right) dx + [u'w]^1_0 = 0$$

para "n" elementos \Rightarrow supongamos que dividiremos el dominio en 3 elementos \Rightarrow

$$n=3$$



\Rightarrow Vamos a element e1 y planteo RP \Rightarrow

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - wu + xw \right) dx$$

$$u = H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1}$$

y asumimos por el método de Galerkin $w_1 = H_1(x)$
 $w_2 = H_2(x)$

Nos quedará:

(4)

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} [H'_1, H'_2] + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} [H_1, H_2] \right) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_{i+1} \end{array} \right\} + \\ + \int_{x_i}^{x_{i+1}} x \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} dx$$

H_i son los nodos en (4).

$$H_i = \frac{\partial h_i}{\partial x}$$

represen lo
formable con
los nodos del elemento

$$H_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

$$H_2(x) = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Calcularon los integrales \Rightarrow

$$-\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{h_i} & \frac{1}{h_i} \\ \frac{1}{h_i} & \frac{1}{h_i} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_i \\ u_{i+1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_i}{6} (x_{i+1} + 2x_i) \\ \frac{h_i}{6} (2x_{i+1} + x_i) \end{array} \right\}$$

para cada elemento E_i con nodos x_i, x_{i+1}

Elemento 1:

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0.0185 \\ 0.0370 \end{array} \right\}$$

u_1, u_2
son los nodos
de elemento
1,2 variable local.

Elemento 2:

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1^2 \\ u_2^2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0.0741 \\ 0.0926 \end{array} \right\}$$



Elemento 3:

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 \\ 2.9444 & -3.1111 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} u_1^3 \\ u_2^3 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0.1296 \\ 0.1481 \end{array} \right\}$$

Sumando la contribución de cada elemento (esta sola de
este elemento)

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - wu + xu \right) dx + [wu]'_0 = 0$$

planteo de
Residuos Pondera
dos).

Cada elemento tiene diferentes nodos asociados con él
Como resultado, "expresión" cada ecuación tal que
la ecuación general tendrá una matriz y un vector

de dimensión m' que es el nro de grados de libertad en todo el sistema.

Por ejemplo para este problema $m=4$. El nro de grados de libertad es el mismo que el total de modos porque solo una variable (ej. la temperatura) describiendo las ecuaciones anteriores

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3.911 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -3.111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 \\ 0.0370 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_1' \\ u_2 = u_1^2 = u_2' \\ u_3 = u_2^2 = u_1^3 \\ u_4 = u_2^3 \end{cases}$$

para los nodos locales

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.111 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -3.111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0741 \\ 0.0926 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.111 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1296 \\ 0.1481 \end{Bmatrix}$$

Sumamos todos los matrices.

$$\begin{bmatrix} -3.111 & 2.9444 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.222 & 2.9444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.222 & 2.9444 \\ 0 & 0 & 2.9444 & -3.111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 = 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0185 + u'(0) \\ 0.1111 \\ 0.2222 \\ 0.1481 + u'(1) \end{Bmatrix}$$

flejos en los extremos

$\textcircled{A} = 0$

Una cosa interesante es que hemos agregado los cond. de borde de Neumann. el vector del lado derecho. Para este problema conocemos la temperatura en los extremos, es decir $u_1=0$ y $u_4=0$ y los cond. de Neumann no son dotos. La ecuac. matricial anterior se puede resolver con u_2 , u_3 encontrando el resto de los variables nodales y los cond. de flujo mágnitos

En lo que respecta directamente de cada elemento se resuelve y se forma lo siguiente es la matriz en la que se mencionan los valores nodales incógnitos, llamados los variables primarios, son resueltos primero y luego los cond. de borde incógnitos se resuelven posteriormente. Pero ello lo ecuación matricial anterior es modificada con los cond. de borde conocidos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.9444 & -6.2222 & 2.8444 & 0 \\ 0 & 2.9444 & -6.2222 & 2.8444 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.1111 \\ -0.2222 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Acá va el valor de los cond. de borde conocida

La 1^a y la última fila o ecuaciones no reemplazables por los cond. de borde Dirichlet. Resolvemos esto obtenemos $u_1 = 0$, $u_2 = 0.0448$, $u_3 = 0.0569$ y $u_4 = 0$. Si volvemos a la primera ecuación matricial, ~~los restantes~~ tenemos estos resultados podemos calcular $u'(0)$

y $u'(1)$ obteniendo los flujos incógnitos

Bueno los variables nodales son determinados, la solución dentro de cada elemento puede ser obtenida desde las correspondientes variables nodales y las funciones de forma utilizadas. Por ejemplo dentro del 1^o elemento la solución sera:

para $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ $\tilde{u} = h_1(x) u_1 + h_2(x) u_2 = 0.1344x$.

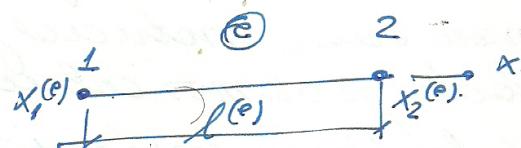
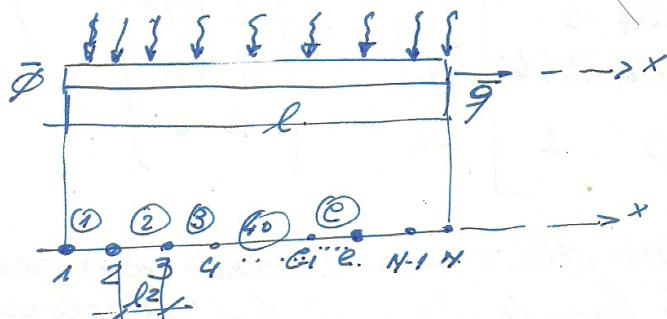
~~PRINCIPIO DE LOS ELEMENTOS FINITOS~~

EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS DE POISSON UNIDIMENSIONALES

Vamos a aplicar el método en problemas unidimensionales de Poisson.

Consideremos una discretización del dominio. Se divide en l subintervalos (en este caso con 10) en subintervalos no interseccionantes entre sí, a los que denominaremos Elementos finitos.

Q.



$x_1^{(e)}$ y $x_2^{(e)}$ órdenes del 1º y 2º modo del elemento (e)

Entre las diferentes opciones que tenemos para aproximar la función incógnita ϕ elegimos la más sencilla, utilizando funciones polinómicas definidas localmente por cada elemento. Esto nos queda:

$$\phi(x) \approx \tilde{\phi}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

n: nro de puntos del elemento obviamente se supone conocido. Valores aproximados de ϕ .

Estos puntos se llaman "modos o nudos"

(6)

Como vimos en RP, los parámetros $a_1, a_2 \dots a_n$ son constantes q' no dependen de los valores de ϕ en los nodos.

En lo podremos escribirnos

$$\tilde{\phi}(x) = N_1^{(e)} \phi_1^{(e)} + N_2^{(e)} \phi_2^{(e)} + N_3^{(e)} \phi_3^{(e)} + \dots + N_m^{(e)} \phi_m^{(e)} = \\ = \sum_{i=1}^m N_i^{(e)} \phi_i^{(e)}$$

⇒ El MET combina el MRP con aproximaciones polinómicas (locales) dentro de cada elemento.

donde $N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, \dots, N_m^{(e)}(x)$ son las funciones de interpolación polinómicas definidas en el dominio del elemento. Se llaman **FUNCIONES DE FORMA** o **FUNCIONES TUALES**. $\phi_i^{(e)}$ es el valor de la función buscada en el modo i e.g. desplazamientos, velocidad, temperatura, entre otros.

Por lo que vemos cada función de forma en un modo genérico "i" vale 1 en ese modo y cero en el resto. La función de forma $N_i^{(e)}(x)$ interpola dentro del elemento exactamente los desplazamientos que corresponden al nodo i y de allí su nombre y por eso su valor en ese nodo.

Ahora bien volviendo al procedimiento conocido en MRP, verificaremos la expresión general de $\tilde{\phi}(x)$ para cada elemento en la expresión integral del método, por lo tanto a través de un sencillo cálculo matemático, ésta nos permite obtener los

ecuaciones algebraicas de equilibrio del problema desriptas en función de los valores de ϕ en los nodos. Si escribimos en forma matricial:

$$\underline{K} \underline{\phi} = \underline{f}$$

con

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \quad \underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

N es el número total de nodos de la malla de elementos finitos. -

Por analogía con el cálculo de barras en ingeniería estructural \underline{K} se denomina MATRIZ DE RIGIDEZ de la malla de E.F. a $\underline{\phi}$ son los vectores en los que nodos y de flujo nodal equivalente, respectivamente.

\underline{K} y \underline{f} global se pueden obtener a través de la contribución individual de cada elemento, igual a lo que los ingenieros estructurales hacen con estructuras de barras. Con los valores de ϕ en los nodos obtenemos los gradientes y los flujos en el interior de cada elemento. -

Para corroborar lo que decimos, estudiaremos la ecuación de Poisson 1D, con el ejemplo de propagación del calor en una barra de sección constante. Primero veremos con una malla de 1 elemento y luego con otras (2) elementos de 2 nodos cada uno. -