

Cadenas de Markov en tiempo continuo

Santiago de Diego, Jesús Bueno, Fernando de la Cruz, Javier Ruiz

Índice

1 Introducción

2 Definición y propiedades

3 Probabilidades de transición

- Q-matriz

4 Ecuación de Kolmogorov

5 Clasificación de los estados

6 Teoremas límite

7 Relación con la teoría de autómatas

8 Ejemplos

- Ejemplo 1

Introducción

Las cadenas de Markov son procesos de corta memoria en el sentido de que solo recuerdan el último estado visitado para decidir cual será el próximo.

Este tipo de procesos estocásticos tienen mucho interés a la hora de modelar determinados fenómenos, como por ejemplo el tiempo de espera a un servidor en función de la tasa de llegada de los clientes.

Definición de Cadena de Markov

El proceso $\{\mathbb{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con espacio de estados E es una cadena de Markov si:

$$P(\mathbb{X}_{n+1} = y \mid \mathbb{X}_n = x_n, \dots, \mathbb{X}_0 = x_0) = P(\mathbb{X}_{n+1} = y \mid \mathbb{X}_n = x_n)$$

Diferencia con tiempo discreto

La principal diferencia entre cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo es, como dice el propio nombre, el tiempo.

En las cadenas de Markov en tiempo continuo, consideramos un $t \in T \subset \mathbb{R}$ mientras que en las cadenas de Markov en tiempo discreto, trabajamos con instantes de tiempo de la forma $t \in \mathbb{N}$.

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Definición y propiedades

Primero de todo presentamos dos definiciones equivalentes de Cadenas de Markov en tiempo continuo:

Definición 1: Cadena de Markov

Decimos que $\{\mathbb{X}_t\}_{t \geq 0}$, proceso estocástico en tiempo continuo es una Cadena de Markov en tiempo continuo si $\forall t, s \geq 0$ y $\forall i, j, x_u \in E$ con $0 \leq u < s$, se cumple que:

$$P(\mathbb{X}_{t+s} = j \mid \mathbb{X}_s = i, \mathbb{X}_u = x_u \forall 0 \leq u \leq s) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \mid \mathbb{X}_s = i)$$

Definición 2: Cadena de Markov

El proceso estocástico $\{\mathbb{X}_t, t \in [0, \infty]\}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si para cualquier entero $n \geq 0$, cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ y $i_0, \dots, i_n, i_{n+1} \in S$ se verifica:

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid \mathbb{X}_{t_0} = i_0, \dots, \mathbb{X}_{t_n} = i_n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Una vez vistas las dos definiciones anteriores estamos preparados para enunciar dos propiedades muy importantes de Cadenas de Markov de tiempo continuo:

Primera propiedad

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \dots, m \mid \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \dots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \dots, m \mid \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2, \dots, < t_n + m, \forall i_k \in S, k = 0, \dots, n + m$$

Segunda propiedad

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \mid \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \dots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \mid \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición**
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov

- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Probabilidades de transición

Definición de Probabilidades de transición

Dada una CMTC $\{\mathbb{X}_t, t \in [0, \infty]\}$, definimos las probabilidades de transición como:

$$p_{ij}(s, t) := P(\mathbb{X}_t = j \mid \mathbb{X}_s = i), \quad 0 \leq s < t, \quad i, j \in S$$

A partir de aquí supondremos que la CMTC es homogénea.

La probabilidad de ir del estado i al estado j no depende del instante de tiempo en el que se encuentra la cadena, es decir, $p_{ij}(s, t)$ no depende de s y t , sólo depende de la diferencia $t - s$. Esto nos da pie a enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad

Podemos expresar las probabilidades de transición como:

$$p_{ij}(t) = P(\mathbb{X}_t = j \mid \mathbb{X}_0 = i) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \mid \mathbb{X}_s = i)$$

Además en la siguiente diapositiva presentamos otras tres propiedades muy importantes:

Propiedades

- 1 Para cada $t \geq 0$, $p_{ij}(t) \geq 0$, $\forall i, j \in S$,
- 2 Para cada $t \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$, $\forall i \in S$,
- 3 Ecuación de *Chapman-Kolmogorov*:
$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t), \quad \forall i, j \in S, \quad \forall s, t \in [0, \infty).$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición**
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Q-matriz

Definición de Q-matriz

Dada una CMTC $\{\mathbb{X}_t, t \in [0, \infty]\}$, con matriz de transición $P(t)$. Se define la Q-matriz o generador infinitesimal como:

$$Q := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t) - I}{t},$$

donde:

- I es la matriz identidad del tamaño correspondiente
- q_i es la *razón de escape* del estado i
- q_{ij} es llamado *razón de transición* del estado i al j .

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Ecuación de Kolmogorov

Teorema de las Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov

Sea \mathbb{X}_t con $t \in [0, \infty)$ es una cadena de Markov que no tiene ningún estado instantáneo. Entonces las probabilidades de transición son diferenciables en t y $\forall i, j$, par de estados, se tiene:

- $P'(t) = P(t)Q$ y $P(0) = I \iff \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -p_{ij}q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}$
 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (Ecuación adelantada)

- $P'(t) = QP(t)$ y $P(0) = I \iff \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -q_i p_{ij} + \sum_{k \neq j} q_{ik} p_{kj}(t)$
 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (Ecuación atrasada)

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Clasificación de los estados

Esto es una introducción

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite**
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Teoremas límite

Teorema Ergódico

Para una cadena de Markov irreducible se verifica:

- 1 Si todos los estados son recurrentes positivos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i,j}(t) = u_j > 0, \forall i, j \in S$$

Además $u = (u_j, j \in S)$ es la única distribución estacionaria de la cadena y $\lim_{t \rightarrow \infty} a_j(t) = u_j, \forall j \in S$. La distribución de probabilidad u es la solución del sistema $uQ = 0$, siendo Q la Q -matriz de la cadena.

- 2 Si todos los estados son recurrentes nulos o transitorios,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = 0, \forall i, j \in S; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_j(t) = 0, \forall j \in S$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas**
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Relación con la teoría de autómatas

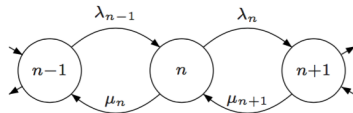
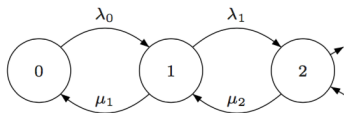
Definición de Grafo de una CMTC

$G = (E, U, W)$ es el grafo asociado a una CMTC sii:

- E es el conjunto de estados de la cadena
- U es el conjunto de transiciones posibles (aristas)
- W es el conjunto de ponderaciones. Podemos verlo como el conjunto de valores de cada arista

Además G es un grafo orientado, es decir, que tenemos en cuenta cual es el nodo origen y cual es el nodo destino.

Aquí podemos ver un ejemplo de grafo de una CMTC:



Una vez vista la definición de grafo de una CMTC vamos a introducir la definición de autómata finito determinista:

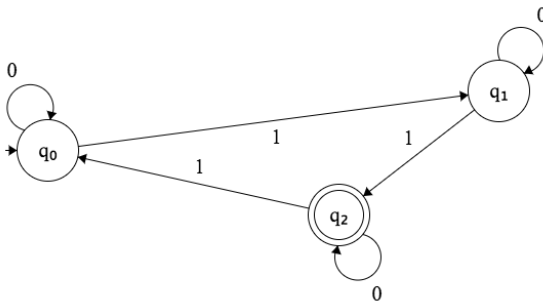
Definición de autómata finito determinista

Un AFD es una 5-tupla $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ donde:

- Q es un conjunto de estados
- Σ es un alfabeto
- q_0 es el estado inicial
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es la función de transición
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

Además verifica que $\delta(q, a) = q_1$ y $\delta(q, a) = q_2 \Rightarrow q_1 = q_2$ y que no existen transiciones de la forma $\delta(q, \epsilon)$ donde ϵ es la cadena vacía

Aquí podemos ver un ejemplo de AFD:



En el ejemplo anterior podemos diferenciar:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $q_0 = q_0$
- $\delta t.q$:
 $\delta(q_0, 0) = q_0$ $\delta(q_1, 0) = q_1$ $\delta(q_2, 0) = q_2$
 $\delta(q_0, 1) = q_1$ $\delta(q_1, 1) = q_2$ $\delta(q_2, 1) = q_0$
- $F = q_2$

De manera intuitiva, podemos ver la relación entre el grafo de una CMTC y un AFD, sin más que considerar que este último tiene $F = \emptyset$, es decir, no tiene estados finales.

Además podemos ver la correspondencia: $Q = E$, $\Sigma = W$ y $|\delta| = U$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición y propiedades
- 3 Probabilidades de transición
 - Q-matriz
- 4 Ecuación de Kolmogorov
- 5 Clasificación de los estados
- 6 Teoremas límite
- 7 Relación con la teoría de autómatas
- 8 Ejemplos
 - Ejemplo 1

Ejemplos

Esto es una introducción

Ejemplo 1

Esto es una introducción