Cadenas de Markov en tiempo continuo

Santiago de Diego, Jesús Bueno, Fernando de la Cruz, Javier Ruiz

Índice

Introducción

Las cadenas de Markov son procesos de corta memoria en el sentido de que solo recuerdan el último estado visitado para decidir cual será el próximo.

Este tipo de procesos estocásticos tienen mucho interés a la hora de modelar determinados fenómenos, como por ejemplo el tiempo de espera a un servidor en función de la tasa de llegada de los clientes.

Definición de Cadena de Markov

El proceso $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados E es una cadena de Markov si:

$$P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n, \ldots, \mathbb{X}_0 = x_0) = P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n)$$

Diferencia con tiempo discreto

La principal diferencia entre cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo es, como dice el propio nombre, el tiempo.

En las cadenas de Markov en tiempo continuo, consideramos un $t \in T \subset \mathbb{R}$ mientras que en las cadenas de Markov en tiempo discreto, trabajamos con instantes de tiempo de la forma $t \in \mathbb{N}$.

Índice

Definición y propiedades

Primero de todo presentamos dos definiciones equivalentes de Cadenas de Markov en tiempo continuo:

Definición 1: Cadena de Markov

Decimos que $\{\mathbb{X}_t\}_{t\geq 0}$, proceso estocástico en tiempo continuo es una Cadena de Markov en tiempo continuo si $\forall t, s \geq 0$ y $\forall i, j, x_u \in E$ con $0 \geq u \geq s$, se cumple que:

$$P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i\,,\, \mathbb{X}_u = u \;\forall 0 \leq u \leq s) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i)$$

Definición 2: Cadena de Markov

El proceso estocástico $\{\mathbb{X}_t\ ,\ t \in [0, \infty]\}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si para cualquier entero $n \geq 0$, cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ y $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ se verifica:

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_0} = i_0, \ldots \mathbb{X}_{t_n} = i_n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Una vez vistas las dos definiciones anteriores estamos preparados para enunciar dos propiedades muy importantes de Cadenas de Markov de tiempo continuo:

Primera propiedad

$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \ldots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$

$\forall 0 \leq t_1 < t_2, \ldots, < t_n + m \,, \forall i_k \in S, k = 0, \ldots, n + m$

Segunda propiedad

$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k \,, k = 0, \ldots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$

Índice

Probabilidades de transición

Esto es una introducción

Índice

Ecuación de Kolmogorov

Esto es una introducción

Índice

Clasificación de los estados

Esto es una introducción

Índice

Teoremas límite

Teorema Ergódico

Para una cadena de Markov irreducible se verifica:

1. Si todos los estados son recurrentes positivos:

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = u_j > 0\,,\ \forall i,j \in S$$

   Además $u = (u_j\,,\ j \in S)$ es la única distribución estacionaria de la cadena y $\lim_{t\to\infty} a_j(t) = u_j\,,\ \forall j \in S$. La distribución de probabilidad u es la solución del sistema $uQ = 0$, siendo Q la Q-matriz de la cadena.

2. Si todos los estados son recurrentes nulos o transitorios,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0\,,\ \forall i,j \in S\,;\quad \lim_{t\to\infty} a_j(t) = 0\,,\ \forall j \in S$$

Índice

Relación con la teoría de autómatas

Definición de Grafo de una CMTC

$G = (E, U, W)$ es el grafo asociado a una CMTC sii:

- E es el conjunto de estados de la cadena
- U es el conjunto de transiciones posibles (aristas)
- W es el conjunto de ponderaciones. Podemos verlo como el conjunto de valores de cada arista

Además G es un grafo orientado, es decir, que tenemos en cuenta cual es el nodo origen y cual es el nodo destino.

Aquí podemos ver un ejemplo de grafo de una CMTC:

Una vez vista la definición de grafo de una CMTC vamos a introducir la definición de autómata finito determinista:

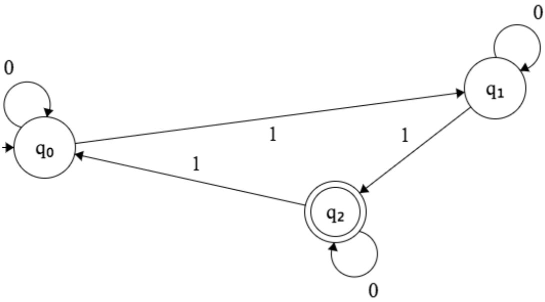
Definición de autómata finito determinista

Un AFD es una 5-tupla $(Q, \sum, q_0, \delta, F)$ donde:

- Q es un conjunto de estados
- $\sum$ es un alfabeto
- q_0 es el estado inicial
- $\delta : Q \times \sum \to Q$ es la función de transición
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

Además verifica que $\delta(q, a) = q_1$ y $\delta(q, a) = q_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$ y que no existen transiciones de la forma $\delta(q, \epsilon)$ donde ϵ es la cadena vacía

Aquí podemos ver un ejemplo de AFD:



En el ejemplo anterior podemos diferenciar:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\sum = \{0, 1\}$
- $q_0 = q_0$
- δ $t.q$:
  $$\begin{array}{lll} \delta(q_0, 0) = q_0 & \delta(q_1, 0) = q_1 & \delta(q_2, 0) = q_2 \\ \delta(q_0, 1) = q_1 & \delta(q_1, 1) = q_2 & \delta(q_2, 1) = q_0 \end{array}$$
- $F = q_2$

Índice

Índice

Ejemplos

Esto es una introducción

Ejemplo 1

Esto es una introducción