Cadenas de Markov en tiempo continuo

Santiago de Diego, Jesús Bueno, Fernando de la Cruz, Javier Ruiz

Contents

1 Introducción

1.1 Cadenas de Markov

Primero de todo, presentamos una introducción a las Cadenas de Markov de forma genérica. Como ya sabemos, las cadenas de Markov son procesos de corta memoria en el sentido de que solo recuerdan el último estado visitado para decidir cual sería el próximo. En procesos con larga memoria el valor que toma el proceso en cada paso depende de todo el pasado.
Formalizando el concepto, el proceso $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados E es una cadena de Markov si:

$$P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n, \ldots, \mathbb{X}_0 = x_0) = P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n)$$

Este tipo de procesos estocásticos tienen mucho interés a la hora de modelar determinados fenómenos, como por ejemplo el tiempo de espera a un servidor en función de la tasa de llegada de los clientes.

1.2 Diferencia entre tiempo discreto y tiempo continuo

La principal diferencia entre cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo es, como dice el propio nombre, el tiempo. En las cadenas de Markov en tiempo continuo, consideramos un $t \in T \subset \mathbb{R}$ mientras que en las cadenas de Markov en tiempo discreto, trabajamos con instantes de tiempo de la forma $t \in \mathbb{N}$.

2 Definición y propiedades

2.1 Definición

Primero de todo, definiremos una Cadena de Markov como:

Definición: Cadena de Markov
Sea $\{\mathbb{X}_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico en tiempo continuo, esto es, $t \in [0, T]$ con $T \in \mathbb{R}$ que toma valores en un conjunto numerable E. Decimos que $\{\mathbb{X}_t\}_{t\geq 0}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si $\forall t, s \geq 0$ y $\forall i, j, x_u \in E$ con $0 \geq u \geq s$, se cumple que:

$$P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i \,,\, \mathbb{X}_u = u \;\forall 0 \leq u \leq s) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i)$$

Es decir, podemos definir una Cadena de Markov como un proceso estocástico en el que el futuro sólo depende del presente, independientemente de sus estados pasados. Además también podemos considerar la definición alternativa:

Definición 2: Cadena de Markov
El proceso estocástico $\{\mathbb{X}_t\,,\, t \in [0,\infty]\}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si para cualquier entero $n \geq 0$, cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ y $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ se verifica:

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_0} = i_0, \ldots \mathbb{X}_{t_n} = i_n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Además, introducimos también el concepto de Cadena de Markov en tiempo continuo homogénea:

Definición: Cadena de Markov homogénea en tiempo continuo
Una CMTC se dice homogénea si la probabilidad de ir del estado i al estado j no depende del instante de tiempo en el que se encuentra la cadena, formalmente esto es:

$$P(\mathbb{X}_n = j \,|\, \mathbb{X}_{n-1} = i) = P(\mathbb{X}_1 = j \,|\, \mathbb{X}_0 = i)$$

Una vez vistas estas definiciones podemos ver las propiedades de una Cadena de Markov.

2.2 Propiedades

Podemos notar dos propiedades fundamentales en cuanto a CMTC, que son:

2.2.1 Primera propiedad

$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \ldots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$
$\forall 0 \leq t_1 < t_2, \ldots, < t_n + m\,, \forall i_k \in S, k = 0, \ldots, n+m$

Demostración 2.1 *Vamos a demostrarlo por inducción:*

Primero hacemos el caso $h = 1$:

$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1}, h = 1 \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k\, k = 0, \ldots n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$
$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+m}\, \forall m \geq 1$ *y* $\forall i_k \in S,\; k = 0, \ldots n+m$

Lo suponemos cierto para h y lo probamos para $h+1$

2.2.2 Segunda propiedad

Demostración 2.2

2.3 Relación con la teoría de autómatas

En concreto, podemos asociar a una cadena de Markov un grafo, como veremos más abajo. De esta forma, el grafo resultante se comporta de igual manera que un **autómata finito determinista**, relacionándose de esta forma las cadenas de Markov con la teoría de autómatas.

Primero de todo, vamos a definir el grafo de una CMTC ya que resulta fundamental para entender lo siguiente:

Definición: Grafo asociado a una CMTC
$G = (E, U, W)$ es el grafo asociado a una CMTC sii:

- E es el conjunto de estados de la cadena
- U es el conjunto de aristas, que en este caso sería el conjunto de transiciones posibles
- W es el conjunto de ponderaciones. Podemos verlo como el conjunto de valores de cada arista

Además G es un grafo orientado, es decir, que tenemos en cuenta cual es el nodo origen y cual es el nodo destino.

Una vez presentada la definición de grafo asociado a una CMTC, podemos establecer una biyección entre el conjunto de grafos orientados asociados a una CMTC y el conjunto de los autómatas finitos deterministas, aunque estos resultados se escapan del alcance del trabajo en cuestión. Simplemente mostraremos un ejemplo de uno de estos grafos:

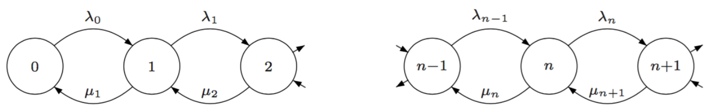


Figure 1: Ejemplo de grafo de una CMTC-h

En el grafo de la izquierda aparecen 3 estados, que corresponden a las variables aleatorias $\mathbb{X}_{t_1}$, $\mathbb{X}_{t_2}$ y $\mathbb{X}_{t_3}$ y representadas como λ_0, λ_1, μ_1, μ_2 aparecen las 4 probabilidades de transición. Por último, las flechas indican la dirección en la que se produce la transición.

El grafo de la derecha es idéntico pero corresponde a las variables aleatorias $\mathbb{X}_{t_{n-1}}$, $\mathbb{X}_{t_n}$ y $\mathbb{X}_{t_{n+1}}$. Además, según lo visto anteriormente tenemos que el grafo corresponde a la manera usual de representar un autómata finito determinista.

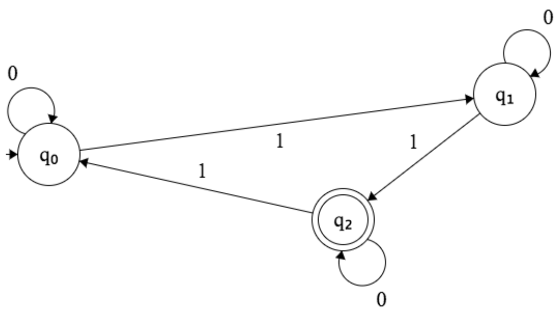
Para concluir presentaremos la definición de autómata finito determinista, por si el lector está interesado en el estudio del mismo:

Definición de autómata finito determinista:
Un AFD es una 5-tupla $(Q, \sum, q_0, \delta, F)$ donde:

- Q es un conjunto de estados
- $\sum$ es un alfabeto
- q_0 es el estado inicial
- $\delta : Q \times \sum \to Q$ es la función de transición
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

Además verifica que $\delta(q, a) = q_1$ y $\delta(q, a) = q_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$ y que no existen transiciones de la forma $\delta(q, \epsilon)$ donde ϵ es la cadena vacía.

Veamos un ejemplo de un autómata finito determinista muy simple:



Observando la definición y aplicándola a este caso concreto podemos diferenciar:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\sum = \{0, 1\}$
- $q_0 = q_0$
- Función de transición $\delta\, t.q$:
  $\delta(q_0, 0) = q_0 \quad \delta(q_1, 0) = q_1 \quad \delta(q_2, 0) = q_2$
  $\delta(q_0, 1) = q_1 \quad \delta(q_1, 1) = q_2 \quad \delta(q_2, 1) = q_0$
- $F = q_2$

3 Probabilidades de transición

4 Ecuación de Kolmogorov

5 Clasificación de los estados

6 Teoremas límite

A continuación presentamos el Teorema Ergódico.

Teorema 6.1 *Para una cadena de Markov irreducible se verifica:*

1. *Si todos los estados son recurrentes positivos:*
$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = u_j > 0\,,\ \forall i, j \in S$$
Además $u = (u_j\,,\ j \in S)$ es la única distribución estacionaria de la cadena y $\lim_{t\to\infty} a_j(t) = u_j\,,\ \forall j \in S$. La distribución de probabilidad u es la solución del sistema $uQ = 0$, siendo Q la Q-matriz de la cadena.

2. *Si todos los estados son recurrentes nulos o transitorios,*
$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0\,,\ \forall i, j \in S\,;\ \ \lim_{t\to\infty} a_j(t) = 0\,,\ \forall j \in S$$

7 Ejemplos

7.1 Ejemplo 1

7.2 Ejemplo 2