Cadenas de Markov en tiempo continuo

Santiago de Diego, Jesús Bueno, Fernando de la Cruz, Javier Ruiz

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
   - Q-matriz
4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Introducción

Las cadenas de Markov son procesos de corta memoria en el sentido de que solo recuerdan el último estado visitado para decidir cual será el próximo.

Este tipo de procesos estocásticos tienen mucho interés a la hora de modelar determinados fenómenos, como por ejemplo el tiempo de espera a un servidor en función de la tasa de llegada de los clientes.

Definición de Cadena de Markov

El proceso $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados E es una cadena de Markov si:

$$P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n, \ldots, \mathbb{X}_0 = x_0) = P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n)$$

Diferencia con tiempo discreto

La principal diferencia entre cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo es, como dice el propio nombre, el tiempo.

En las cadenas de Markov en tiempo continuo, consideramos un $t \in T \subset \mathbb{R}$ mientras que en las cadenas de Markov en tiempo discreto, trabajamos con instantes de tiempo de la forma $t \in \mathbb{N}$.

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz

4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Definición y propiedades

Primero de todo presentamos dos definiciones equivalentes de Cadenas de Markov en tiempo continuo:

Definición 1: Cadena de Markov

Decimos que $\{\mathbb{X}_t\}_{t\geq 0}$, proceso estocástico en tiempo continuo es una Cadena de Markov en tiempo continuo si $\forall t, s \geq 0$ y $\forall i, j, x_u \in E$ con $0 \leq u < s$, se cumple que:

$$P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i \,,\, \mathbb{X}_u = u \;\forall 0 \leq u < s) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i)$$

Definición 2: Cadena de Markov

El proceso estocástico $\{\mathbb{X}_t\ ,\ t \in [0, \infty]\}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si para cualquier entero $n \geq 0$, cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ y $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ se verifica:

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_0} = i_0, \ldots \mathbb{X}_{t_n} = i_n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Definición de cadena de Markov homogénea en tiempo continuo

Una CMTC se dice homogénea si la probabilidad de ir del estado i al estado j no depende del instante de tiempo en el que se encuentra la cadena, formalmente esto es:

$$P(\mathbb{X}_{t_n} = j \mid \mathbb{X}_{t_{n-1}} = i) = P(\mathbb{X}_{t_1} = j \mid \mathbb{X}_{t_0} = i)$$

Una vez vistas las dos definiciones anteriores estamos preparados para enunciar dos propiedades muy importantes de Cadenas de Markov de tiempo continuo:

Primera propiedad

$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \ldots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \ldots m \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$

$\forall 0 \leq t_1 < t_2, \ldots, < t_n + m \,, \forall i_k \in S, k = 0, \ldots, n + m$

Segunda propiedad

$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k \,, k = 0, \ldots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz
4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Probabilidades de transición

Definición de Probabilidades de transición

Dada una CMTC $\{\mathbb{X}_t \,,\; t \in [0, \infty]\}$, definimos las probabilidades de transición como:

$$p_{ij}(s,t) := P(\mathbb{X}_t = j \,|\, \mathbb{X}_s = i),\; 0 \leq s < t, \quad i, j \in S$$

A partir de aquí supondremos que la CMTC es homogénea.

La probabilidad de ir del estado i al estado j no depende del instante de tiempo en el que se encuentra la cadena, es decir, $p_{ij}(s,t)$ no depende de s y t, sólo depende de la diferencia $t - s$. Esto nos da pie a enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad

Podemos expresar las probabilidades de transición como:
$p_{ij}(t) = P(\mathbb{X}_t = j \,|\, \mathbb{X}_0 = i) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i)$

Además en la siguiente diapositiva presentamos otras tres propiedades muy importantes:

Propiedades

1. Para cada $t \geq 0$, $p_{ij}(t) \geq 0$, $\forall i, j \in S$,
2. Para cada $t \geq 0$, $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$, $\forall i \in S$,
3. Ecuación de *Chapman-Kolmogorov*:
   $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$, $\forall i, j \in S$, $\forall s, t \in [0, \infty)$.

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz

4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Q-matriz

Definición de Q-matriz

Dada una CMTC $\{\mathbb{X}_t\ ,\ t \in [0, \infty]\}$, con matriz de transición $P(t)$. Se define la Q-matriz o generador infinitesimal como:

$$Q := \lim_{t \to 0} \frac{P(t) - I}{t},$$

donde:

- I es la matriz identidad del tamaño correspondiente
- q_i es la *razón de escape* del estado i
- q_{ij} es llamado *razón de transición* del estado i al j.

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
   - Q-matriz
4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Ecuación de Kolmogorov

Teorema de las Ecuaciones Diferenciales de Kolmogorov

Sea $\mathbb{X}_t$ con $t \in [0, \infty)$ es una cadena de Markov que no tiene nigún estado instantáneo. Entonces las probabilidades de transición son diferenciables en t y $\forall i, j$, par de estados, se tiene:

- $P'(t) = P(t)Q$ y $P(0) = I \iff \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -p_{ij}q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)q_{kj}$ $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (Ecuación adelantada)
- $P'(t) = QP(t)$ y $P(0) = I \iff \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -q_i p_{ij} + \sum_{k \neq j} q_{ik} p_{kj}(t)$ $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (Ecuación atrasada)

Teorema

Sea $p_{ij}(t)$ una matriz de transición y $\alpha = \sup_{j \in S} q_j < 0$:

$$p_{ij} = e^{-\beta t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^n}{n!} p_{ij}^{(n)}, t \geq 0, i, j \in S$$

Donde $P{=}(p_{ij})$ es una matriz estocástica definida como:

$$P = I + \frac{1}{\beta} Q, \;\; I = P^{(0)}, \;\; \beta \geq \alpha$$

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz

4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Clasificación de los estados

A continuación clasificaremos los estados de una cadena de Markov según:

1. ξ_i: tiempo que tarda un proceso en abandonar el estado E_i o el tiempo de permanencia en dicho estado.
2. α_{ij}: tiempo de primera llegada al estado E_j partiendo de E_i
3. Clasificación según la posibilidad de ir de un estado a otro

Clasificación según ξ_i

Denotaremos ξ_i el tiempo de permanencia en un estado E_i, concretamente, suponemos que el proceso en el instante s está en el estado E_i, definiremos entonces:

$$\xi_i = inf\{t : t > 0, x_{s+t} \neq i\}$$

Proposición

El tiempo de estancia en un estado E_i sigue una distribución exponencial de parámetro q_i.

Clasificación según α_{ij}

Denotaremos α_{ij} tiempo de primera llegada al estado E_j partiendo de E_i, más concretamente, si suponemos que el proceso en el instante s, se encuentra en el estado E_i, definiremos entonces:

$$\alpha_{ij} = inf\{t : t > \xi_i, x_{s+t} = j\}$$

Definición

Denotaremos como $F_{ij}(t)$ a la función de distribución de α_{ij}:

$$F_{ij}(t) = \begin{cases} P[\alpha_{ij} < t] & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Clasificación según la posibilidad de ir de un estado a otro

Definición 1

Un estado E_i alcanza al estado E_j si siempre es posible llegar del estado i al j en un determinado tiempo:

$$\exists t > 0 \ \ tal \ \ que \ \ p_{ij}(t) > 0$$

Definición 2

Una clase de estados S es un conjunto formado por todos los estados que se comunican entre sí. Diremos que una clase de estados es cerrada si los estados de dicha clase solo se comnunican entre ellos:

$$p_{ij} = 0, \ \ \forall t > 0, \ \ \forall E_i \in S, \ \ \forall E_j \notin S$$

Definición 3

Una clase de estados será minimal si es cerrada y no contiene subclases propias cerradas

Proposición

Una cadena irreducible no puede tener estados absorbentes.

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
   - Q-matriz
4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Teoremas límite

Teorema Ergódico

Para una cadena de Markov irreducible se verifica:

1. Si todos los estados son recurrentes positivos:

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = u_j > 0\,,\ \forall i,j \in S$$

   Además $u = (u_j\,,\ j \in S)$ es la única distribución estacionaria de la cadena y $\lim\limits_{t\to\infty} a_j(t) = u_j\,,\ \forall j \in S$. La distribución de probabilidad u es la solución del sistema $uQ = 0$, siendo Q la Q-matriz de la cadena.

2. Si todos los estados son recurrentes nulos o transitorios,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0\,,\ \forall i,j \in S\,;\quad \lim_{t\to\infty} a_j(t) = 0\,,\ \forall j \in S$$

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz

4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Aplicaciones

- Modelos epidemiológicos
- Internet
- Simulación
- Juegos de azar
- Economía y finanzas
- Genética
- Música
- Redes neuronales

Índice

1 Introducción
2 Definición y propiedades
3 Probabilidades de transición
- Q-matriz
4 Ecuación de Kolmogorov
5 Clasificación de los estados
6 Teoremas límite
7 Aplicaciones
8 Relación con la teoría de autómatas

Relación con la teoría de autómatas

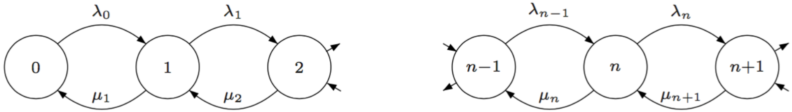
Definición de Grafo de una CMTC

$G = (E, U, W)$ es el grafo asociado a una CMTC sii:

- E es el conjunto de estados de la cadena
- U es el conjunto de transiciones posibles (aristas)
- W es el conjunto de ponderaciones. Podemos verlo como el conjunto de valores de cada arista

Además G es un grafo orientado, es decir, que tenemos en cuenta cual es el nodo origen y cual es el nodo destino.

Aquí podemos ver un ejemplo de grafo de una CMTC:



Una vez vista la definición de grafo de una CMTC vamos a introducir la definición de autómata finito determinista:

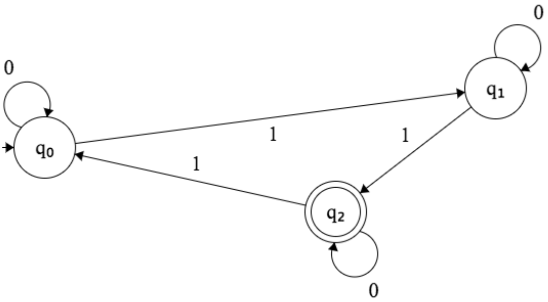
Definición de autómata finito determinista

Un AFD es una 5-tupla $(Q, \sum, q_0, \delta, F)$ donde:

- Q es un conjunto de estados
- $\sum$ es un alfabeto
- q_0 es el estado inicial
- $\delta : Q \times \sum \to Q$ es la función de transición
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales

Además verifica que $\delta(q, a) = q_1$ y $\delta(q, a) = q_2 \Rightarrow q_1 \neq q_2$ y que no existen transiciones de la forma $\delta(q, \epsilon)$ donde ϵ es la cadena vacía

Aquí podemos ver un ejemplo de AFD:



En el ejemplo anterior podemos diferenciar:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\sum = \{0, 1\}$
- $q_0 = q_0$
- δ $t.q$:
  $\delta(q_0, 0) = q_0 \quad \delta(q_1, 0) = q_1 \quad \delta(q_2, 0) = q_2$
  $\delta(q_0, 1) = q_1 \quad \delta(q_1, 1) = q_2 \quad \delta(q_2, 1) = q_0$
- $F = q_2$

De manera intuitiva, podemos ver la relación entre el grafo de una CMTC y un AFD, sin más que considerar que este último tiene $F = \emptyset$, es decir, no tiene estados finales.

Además podemos ver la correspondencia: $Q = E$, $\sum = W$ y $|\delta| = U$