Cadenas de Markov en tiempo continuo

Santiago de Diego, Jesús Bueno, Fernando de la Cruz, Javier Ruiz

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Introducción

Las cadenas de Markov son procesos de corta memoria en el sentido de que solo recuerdan el último estado visitado para decidir cual será el próximo.

Este tipo de procesos estocásticos tienen mucho interés a la hora de modelar determinados fenómenos, como por ejemplo el tiempo de espera a un servidor en función de la tasa de llegada de los clientes.

Definición de Cadena de Markov

El proceso $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con espacio de estados E es una cadena de Markov si:

$$P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n, \ldots, \mathbb{X}_0 = x_0) = P(\mathbb{X}_{n+1} = y \,|\, \mathbb{X}_n = x_n)$$

Índice

1. Introducción
   - Diferencia con tiempo discreto
2. Definición y propiedades
3. Grafo de una CMTC
4. Probabilidades de transición
5. Ecuación de Kolmogorov
6. Clasificación de los estados
7. Teoremas límite
8. Ejemplos
   - Ejemplo 1

Diferencia con tiempo discreto

La principal diferencia entre cadenas de Markov en tiempo discreto y tiempo continuo es, como dice el propio nombre, el tiempo.

En las cadenas de Markov en tiempo continuo, consideramos un $t \in T \subset \mathbb{R}$ mientras que en las cadenas de Markov en tiempo discreto, trabajamos con instantes de tiempo de la forma $t \in \mathbb{N}$.

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Definición y propiedades

Primero de todo presentamos dos definiciones equivalentes de Cadenas de Markov en tiempo continuo:

Definición 1: Cadena de Markov

Decimos que $\{\mathbb{X}_t\}_{t\geq 0}$, proceso estocástico en tiempo continuo es una Cadena de Markov en tiempo continuo si $\forall t, s \geq 0$ y $\forall i, j, x_u \in E$ con $0 \geq u \geq s$, se cumple que:

$$P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i \,,\, \mathbb{X}_u = u \;\forall 0 \leq u \leq s) = P(\mathbb{X}_{t+s} = j \,|\, \mathbb{X}_s = i)$$

Definición 2: Cadena de Markov

El proceso estocástico $\{\mathbb{X}_t\ ,\ t \in [0, \infty]\}$ es una Cadena de Markov en tiempo continuo si para cualquier entero $n \geq 0$, cualesquiera $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$ y $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in S$ se verifica:

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_0} = i_0, \ldots \mathbb{X}_{t_n} = i_n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+1}} = i_{n+1} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Una vez vistas las dos definiciones anteriores estamos preparados para enunciar dos propiedades muy importantes de Cadenas de Markov de tiempo continuo:

Primera propiedad

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \dots m \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k, k = 0, \dots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h}, h = 1, \dots m \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2, \dots, < t_n + m \,, \forall i_k \in S, k = 0, \dots, n + m$$

Segunda propiedad

$$P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_k} = i_k \,, k = 0, \dots, n) = P(\mathbb{X}_{t_{n+h}} = i_{n+h} \,|\, \mathbb{X}_{t_n} = i_n)$$

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Grafo de una CMTC

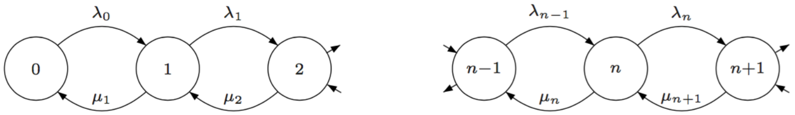
Definición de Grafo de una CMTC

$G = (E, U, W)$ es el grafo asociado a una CMTC sii:

- E es el conjunto de estados de la cadena
- U es el conjunto de transiciones posibles (aristas)
- W es el conjunto de ponderaciones. Podemos verlo como el conjunto de valores de cada arista

Además G es un grafo orientado, es decir, que tenemos en cuenta cual es el nodo origen y cual es el nodo destino.

Aquí podemos ver un ejemplo de grafo de una CMTC:



Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 **Probabilidades de transición**

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Probabilidades de transición

Esto es una introducción

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Ecuación de Kolmogorov

Esto es una introducción

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Clasificación de los estados

Esto es una introducción

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Teoremas límite

Teorema Ergódico

Para una cadena de Markov irreducible se verifica:

1. Si todos los estados son recurrentes positivos:

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = u_j > 0\,,\ \forall i,j \in S$$

   Además $u = (u_j\,,\ j \in S)$ es la única distribución estacionaria de la cadena y $\lim_{t\to\infty} a_j(t) = u_j\,,\ \forall j \in S$. La distribución de probabilidad u es la solución del sistema $uQ = 0$, siendo Q la Q-matriz de la cadena.

2. Si todos los estados son recurrentes nulos o transitorios,

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0\,,\ \forall i,j \in S\,;\quad \lim_{t\to\infty} a_j(t) = 0\,,\ \forall j \in S$$

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Índice

1 Introducción
- Diferencia con tiempo discreto

2 Definición y propiedades

3 Grafo de una CMTC

4 Probabilidades de transición

5 Ecuación de Kolmogorov

6 Clasificación de los estados

7 Teoremas límite

8 Ejemplos
- Ejemplo 1

Ejemplos

Esto es una introducción

Ejemplo 1

Esto es una introducción