Santiago Florián Bustamante

23/10/20

# Parcial 2

1) Asuma que la costa es una linea recta. La tierra esta a un lado de la costa y a otro lado el océano. Cada isla pequeña es un punto ubicado en el lado del océano. Y cualquier radar puede ser ubicado en la costa, puede cubrir una distancia d, entonces una isla en el océano puede ser cubierta por el radio del radar si la distancia entre ambos es como minimo d

Usamos un sistema de coordenadas cartecianas, donde la costa se ubica sobre el eje $x$. El océano esta por encima del eje $x$ y la tierra por debajo. Dada la posición de cada isla en el océano, y dada la distancia del radio de covertura, su tarea es escribir un programa que encuentre el número mínimo de radares que cubran todas las islas. Note que la posición de una isla esta dada por las coordenadas $x$ y $y$

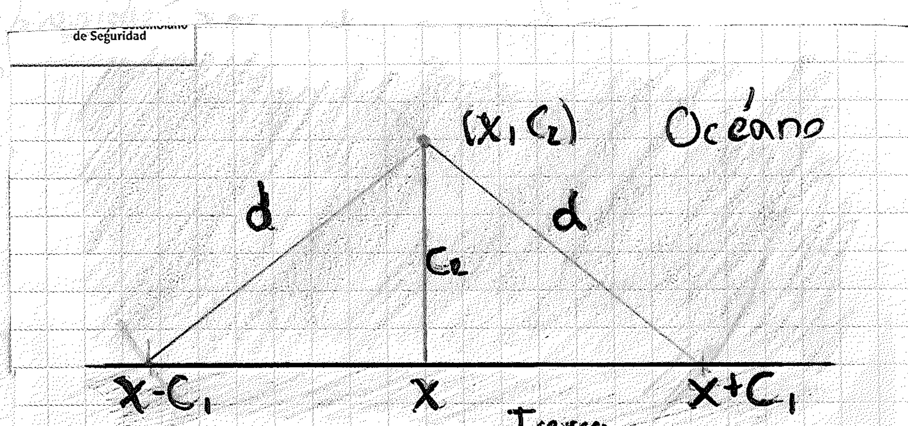
Tabien considere las siguientes especificaciones al problema

Entrada: $P[0..N)[0..2)$, $N \geq 0$, con las coordenadas de las Islas y $D > 0$

Salida: Mínima cantidad de radares con cubrimiento D que se deben instalar sobre el borde costero para que se cubran todas las islas en $P[0..N)[0..2)$.

Con base en la informacion:

a) Proponga una transformacion del problema dado al problema mínimo cubrimiento de intervalos de tal forma que la respuesta al problema de los radares se pueda calcular directamente con un algoritmo que resuelva el problema de mínimo cubrimiento de intervalos. Justifique respuesta




$d^2 = C_1^2 + C_2^2$

$C_1 = \sqrt{d^2 - C_2^2}$

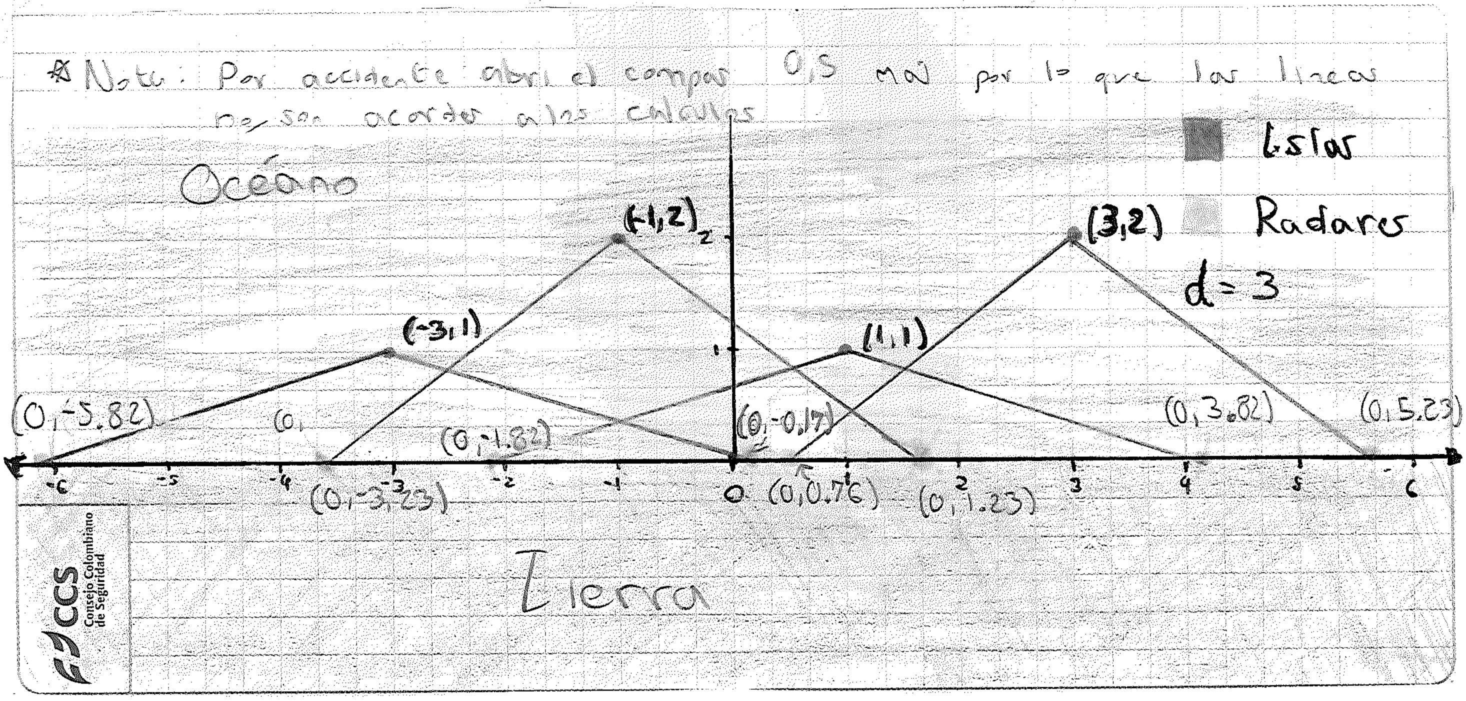
$C_1$ funciona de manera simetrica para $x$.

Izquierda $= x - \sqrt{d^2 - C_2^2}$

Derecha $= x + \sqrt{d^2 - C_2^2}$

Haciendo uso del teorema de pitagoras, se puede calcular las posiciones que pueden ser colocado un radar con respecto a la posición de una isla en las coordenadas $x$ y $y$ y el radio de cobertura del radar. Asi podemos transformar el problema de los radares a gas stations o mejor dicho cobertura de intervalos minimos

b) Formule un ejemplo que ilustre la transformación propuesta en el numeral anterior con almenos 4 islas




Isla 1 = $(-3,1)$:

Izquierda = $-3-\sqrt{3^2-1^2} = -5,828$

derecha = $-3+\sqrt{3^2-1^2} = -0,171$

Isla 2 = $(-1,2)$:

Izquierda = $-1-\sqrt{3^2-2^2} = -3,236$

Derecha = $-1+\sqrt{3^2-2^2} = 1,236$

Isla 3 = $(1,1)$:

Izquierda = $1-\sqrt{3^2-1^2} = -1,828$

Derecha = $1+\sqrt{3^2-1^2} = 3,828$

Isla 4 = $(3,2)$:

Izquierda = $3-\sqrt{3^2-2^2} = 0,763$

Derecha = $3+\sqrt{3^2-2^2} = 5,236$

c) Entrada: Conjunto R[0..N) de parejas de numeros (ai, bi) tales que ai ≤ bi que indican la posición más a la izquierda y de más a la derecha respectivamente, que puede cubrir una isla i, $0 \leq i \leq N$

Salida: Mínima cantidad de radares para cubrir todas las islas

Def FO: $\varnothing(n)$: "Un cubrimiento mínimo para las islas en R[0...N) donde $0 \leq n \leq N$"

Objetivo: $\varnothing(0)$: "Un cubrimiento mínimo para las islas en R[0...N) donde $0 \leq n \leq N$"

Estrategia voraz: Se parte con la intución de que las islas estan organizadas de la más izquierda hasta la más a la derecha, y ponemos el radar en la bi, que representa la posición de más a la derecha que puede cubrir a una isla i y descartamos todas las islas que queden cubiertas por el radar. Recurrir con la isla de más a la izquierda de las islas restantes

c) Teorema: Sea T un cubrimiento mínimo para los islas en R y sea $x$ la primera isla. Entonces $x$ debe ser la isla de más a la izquierda en R

Demostración: Suponga que $y$ sea la isla de más a la izquierda en R y G el cubrimiento mínimo como $y$ de primero. Entonces

Si $x = y$: El teorema se vuelve cierto ya que el cubrimiento mínimo no cambia

Si $x != y$: Entonces $x$ no es la isla de más a la izquierda y el cubrimiento T no incluye a $y$ por lo tanto no es un cubrimiento mínimo

Complejidad temporal: Ejecutar el algoritmo esta acotado por la función de ordenamiento por lo tanto es de la forma $O(n \log n)$

Complejidad espacial: Debido a que solo se almacena la cantidad de radares usados, es de la forma $O(c)$ constante, 1

2) Considere la siguiente especificación:

Entrada: $A[0..N)$, $N \geq 0$, arreglo de números enteros

y $K \geq 0$ número entero

Salida: ¿Existe una LIS en $A[0..N)$ de longitud $K$?

Con base en esta información:

a) Diseñe una función recurrente que resuelva el problema dado usando la técnica de reintento.

Explique y justifique el diseño del la función propuesta siguiendo la metodología estudiada en el curso

* La entrada y la salida ya estan definidas por el ejercicio

Def $\phi$: $\phi(n,K)$: "¿Existe un LIS en $A[0..n)$, $0 \leq n \leq N$ de longitud $K$?"

Objetivo: $\phi(N,K)$: "¿Existe un LIS en $A[0..n)$, $0 \leq n \leq N$ de longitud $K$?"

Recursión:

$$\phi(n,K) = \begin{cases} \bot, & \text{Si } n = 0 \\ \top, & \text{Si } n \neq 0 \wedge K = 0 \\ \bot \vee (\vee i \mid 0 \leq i < n \wedge A[i] \leq A[n] : \phi(i, K-1) \vee \bot), & \text{Si } n \neq 0 \wedge K \neq 0 \end{cases}$$

c

b) Proponga "el" teorema de corrección de la función diseñada y demuestrelo

Teorema: Sea $n$ tal que $0 \leq n < N$ y $K$, $K \geq 0$
los valores para $\emptyset(n,K) = T$ Si
$A[0..n)$ posee una secuencia ascendence
de números de tamaño $K$

Demostración Note que si $n \neq 0$ y $K = 0$, se tiene que $\emptyset(n,K) = T$, $A[0..n)$ y $K = 0$ el arreglo A posee una secuencia ascendente de tamaño $0$.
Por suposición (i.e. para el enunciado del problema) la propiedad es cierta.

Supongamos que $K \neq 0$; es decir que $K > 0$:

($\Rightarrow$): Si $\emptyset(n,K) = T$, el objetivo es demostrar que

$A[0..n)$ posee una secuencia ascendente de tamaño $K$... Como $\emptyset(n,K) = T$, entonces hay un índice $i$ $0 \leq i < n$ tal que

$A[i] \leq A[n] = T$
$\emptyset(i, K-1) = T$

En conclusión, $A[0..n]$ posee una secuencia ascendente de tamaño $K$

($\Leftarrow$): Si $\emptyset(n,K) = \bot$, el objetivo es demostrar que

$A[0..n]$ no posee una secuencia ascendente de tamaño $K$. Sea $i$ tal que $0 \leq i < n$. Como

$\emptyset(n,k)=\bot$, recursivamente $A[i]>A[n]$ ó $\emptyset(n,k)=\bot$

- Si $A[i]>A[n]$, note que $A[i]$ no hace parte de la secuencia ascendente
- Si $\emptyset(n,k)=\bot$, note que $A[0\ldots n)$ no posee una secuencia ascendente de tamaño $k$

En conclusión de los casos casos se concluye que $A[0..n)$ no posee una secuencia ascendente de tamaño $k$

$$(p\equiv q) = (\neg p \equiv \neg q)$$

Corolario: El valor $\emptyset(n,0)=T$ sii $A[0..n)$ posee una secuencia ascendente de tamaño $0$ para $n>0$

Demostración: Cualquier cadena de números mayor a $0$ sin ordenar posee como mínimo un elemento en su cadena ascendente y $1>0$

3) Resuelva el problema Interval Stabbing (Ejercicio 4.4 pagina 178 de Algorithms por J. Erickson) con un algoritmo voraz. Demuestre que su solución es correcta y estime las complejidades respectivas

Problema: Sea $X$ un conjunto de intervalos en la linea real. Decimos que un conjunto P apuñala (stabbs) si para cualquier intervalo en $X$ contiene al menos un punto en P. Describa y analice un algoritmo eficiente que calcule un conjunto de puntos que apuñale que calcule un conjunto de puntos que apuñale a $X$. Asuma que su entrada consiste en dos arreglos $L[1...n)$ y $R[1...n)$, representando la izquierda y la derecha de intervalos en $X$. Como es usual use un algoritmo voraz y demuestre su correctitud

Entrada: Conjunto de intervalos $X$ comprendido por $L[1...N)$ y $R[1...N)$ que representan el inicio y el fin para un intervalo $I_i$ para $1 \le i \le N$ donde $L_i < R_i$

Salida: Mínima cantidad de apuñalamientos para $X$

Estrategia Voraz: Sea asume que $X$ es un conjunto cerrado de intervalos organizados de menor a mayor por su tiempo de finalizacion.

Un apuñalamiento optimo n esta dado para un punto antes de la actividad que termine primero.
Descartar las actividades que intersecten el apuñalamiento y recurrir

Lemma: El apuñalamiento minimo intersectan a todas las actividades como minimo una vez

Prueba: Sea $f$ la actividad que termina primero. Suponga que tenemos un apuñalamiento $X$ minimo que no incluye a $f$. Sea $g$ la actividad que termina primero en $X$. Puede ocurrir dos cosas, que $f$ sea apuñalada por el punto que intersecta a $g$ ó que no lo intersecte.

- Si el apuñalamiento de $g$ tambien intersecta a $f$, el apuñalamiento sige siendo optimo
- Si el apuñalamiento de $g$ no intersecta a $f$, entonces $X$ no es un apuñalamiento minimo ya que no intersecta a todas las actividades