Fundamentos básicos de las matemáticas

por Santi Martínez

November 5, 2025

Índice

1 Aritmética y álgebra básica

Es la rama de las matemáticas que trabaja con **números** y las **operaciones básicas** entre ellos.

Aritmética

Operaciones fundamentales

$$a + b,\ a - b,\ a \times b,\ \frac{a}{b}\ (b \neq 0)$$

Principales propiedades

- **Conmutativa**. $ab = ba$
- **Asociativa**. $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Distributiva**. $a(b + c) = ab + ac$

Potenciación y redicación

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},\ \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Álgebra

Expresiones algebraicas

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Ecuaciones

$$2x + 5 = 11 \longrightarrow x = 3$$

Identidades y factorización

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \implies x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Funciones

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Función lineal: $f(x) = mx + b$

2 Ecuaciones y desigualdades

2.1 Ecuaciones

Una ecuación es una **igualdad** que contienen una o más variables. Resolverla significa hallar los valores que completan dicha igualdad.

Tipos principales:

Lineales

$$ax + b + 0 \longrightarrow x = (-b/a)$$

Cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Polinómicas

$$P(x) = 0 \quad , \quad P(x) \in \mathbb{R}[x]$$

2.2 Desigualdades

Una desidgualdad **compara dos expresiones algebraicas** mediante los símbolos:

$$<, >, \leq, \geq$$

Propiedades básicas

Sumar o restar el mismo número no cambia el sentido de la desigualdad:

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad a + c < b + c$$

Multiplicar o dividir por un **número positivo** mantiene el sentido; por un **número negativo**, invierte el sentido:

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad -a > -b$$

Ejemplo lineal

$$2x - 3 < 5 \quad \Longrightarrow \quad 2x < 8 \quad \Longrightarrow \quad x < 4$$

Desigualdad cuadrática

Resolver: $2x^2 + bx + c > 0$

1. Hallar raices de $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Analizar el signo del trinomio en los intervalos determinados por las raices.
3. Elegir los intervalos dende la desigualdad se cumple.

3 Funciones y gráficas

Una función es una relación entre dos conjuntos, donde cada elemento del dominio se asocia con un único elemento del codominio.

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad x \mapsto f(x)$$

$\mapsto$: x se le asigna x²

Funciones lineales

$$f(x) = mx + b$$

Es una recta que sube o baja según m y que cruza el eje y en b.

Funciones cuadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Funciones polinómicas

$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$

Comportamiento determinado por grado n y coeficiente principal a_n.

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

Posibles `asintotas`* verticales y horizontales
Asíntota: Línea recta a la que una curva se acerca cada vez más cuando x o y tienden a un valor extremo(muy grande o muy pequeño), pero sin llegar a tocarla.

Funciones exponenciales y logarítmicas

$$f(x) = a^x \quad , \quad g(x) = \log_a x$$

Exponenciales siempre positivas; logaritmos definidas para $x > 0$.

Gráficas de funciones

- **Dominio**: Conjunto de valores posibles de x.
- **Rango**: Conjunto de valores posibles de $f(x)$.
- **Interceptos**:
  x-intercepto: $f(x) = 0 \Longrightarrow x$
  y-intercepto: $x = 0 \Longrightarrow f(0)$
- **Crecimiento / Decrecimiento**: Analizar la derivada $f'(x)$ si aplica.
- **Simetría**:
  Par: $f(-x) = f(x)$
  Impar: $f(-x) = -f(x)$

4 Trigonometría

Estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, y las funciones que describen esas relaciones en el **círculo unitario**.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Para un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ*

$$\sin\theta = \frac{cateto - opuesto}{hipotenusa} \quad , \quad \cos\theta = \frac{cateto - adyacente}{hipotenusa} \quad , \quad \tan\theta = \frac{cateto - opue}{cateto - adyac}$$

$*\theta$: Relación entre ángulos y lados en un triángulo rectángulo.
Otras razones derivadas:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Fórmulas de adición y sustracción

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \tfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Doble y mitad de ángulo

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Funciones trigonométricas en el círculo unitario

Relacionan los ángulos con las coordenadas de los puntos en un circulo de radio 1 centrado en el origen (0,0)

- Círculo unitario: radio $r = 1$, centro en $(0, 0)$
- Ángulo θ: medido desde el eje positivo x, en sentido contrario a las manecillas del reloj
- Coordenadas de un punto: $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

Funciones prinicpales:

- Seno: $\sin\theta = y$
- Coseno: $\cos\theta = x$
- Tangente: $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$)
- Cotangente: $\cot\theta = \frac{x}{y}$ (si $y \neq 0$)
- Secante: $\sec\theta = \frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
- Cosecante: $\csc\theta = \frac{1}{y}$ (si $y \neq 0$)

5 Geometría analítica

Combina álgebra y geometría. Sirve para estudiar figuras geométricas usando coordenadas y ecuaciones.
Es decir, en lugar de dibujar solo un triángulo o una línea, podemos respesentarlos con números y fórmulas, lo que permite calcular distancias, pendientes, puntos de inserción, etc.

- Se trabaja normalmente en plano cartesiano.
- Las figuras como líneas, rectas, círculos y parábolas se pueden describir con ecuaciones algebraicas.

En resumen, **traduce la geometría en números y ecuaciones**.

6 Límites y continuidad

Límites

El límite de una función nos dice hacia qué valor se acerca la función cuando la variable x se acerca a un número específico

Idea clave: No importa lo que pase en ese punto, sino hacia qué valor se aproxima la función.

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

"El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L".

Ante $\frac{0}{0}$, al ser indeterminada, habría que factorizar.

Continuidad

Una función es continua en un punto si no tiene saltos, agujeros ni interrupciones.

Condiciones para que f(x) sea continua en x=a

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas falla, la función **no es continua** en es punto.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

- En $x = 3$, tenemos $f(3) = 9$
- $\lim_{x \longrightarrow 3} x^2 = 9$
- Coinciden $\longrightarrow$ La función es continua en $x = 3$

7 Derivadas y aplicaciones

La derivada de una función mide **la velocidad de cambio** de esa función en un punto.

- Qué tan rápido cambia y y cuando cambia x.
- En geometría: es la **pendiente de la tangente a la curva** en un punto.

$$f'(x) \quad o \quad \frac{dy}{dx}$$

Reglas de implementación

Regla del potencia: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Regla del producto: $(uv)' = u'v + uv'$

Regla de Suma/Resta: $(u \pm v') = u' \pm v'$

Regla de cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Cadena: $(f(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$

Interpretación

Si $f(x) = x^2$, en $x = 3$

$$f'(x) = 2 \times 3 = 6$$

Esto significa que $x = 3$**, la curva sube 6 unidades de** y **por cada unidad que avanzamos de** x.

Geométricamente: **la pendiente de la tangente en** $x = 3$ **es 6.**

Derivadas básicas

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x) = -\sin x'$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$

8 Integrales

La integración es la operación inversa de la derivación y se utiliza para calculas áreas, volúmenes y acumulaciones.

Reglas de integración

Función $f(x)$	**Derivada** $f'(x)$	**Observaciones**
$\sin x$	$\cos x$	Derivada positiva
$\cos x$	$-\sin x$	Cambia el signo
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sec^2 x$	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$-\csc^2 x$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\sec x \tan x$	Producto de ambas
$\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$-\csc x \cot x$	Signo negativo

Table 1: Derivadas básicas de funciones trigonométricas

Integral indefinida

Representa una **familia de funicones** cuya derivada es $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde C es la constante de integración

Integral definida

Representa el **área bajo la curva** de $f(x)$ entre a y b

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propiedades:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Métodos de integración

Por sustitución

Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Fracciones parciales

Descomposición de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Trigonométricas y sustituciones especiales

- $x = a \sin \theta \longrightarrow$ para $\sqrt{a^2 - x^2}$
- $x = a \tan \theta \longrightarrow$ para $\sqrt{a^2 + x^2}$

Teorema fudamental del cálculo

Conecta derivación e integración:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

9 Matrices y determinantes

10 Vectores, espacios vectoriales, álgebra lineal básica

Entidad matemática que tiene magnitud (tamaño) y dirección.

Se utiliza para representar desplazamientos, fuerzas velocidades y otras cantidades físicas o geométricas que no se escriben solo con un número.

Características principales

- **Magnitud** $||\mathbf{v}||$ $\longrightarrow$ longitud del vector
- **Dirección** $\longrightarrow$ la orientación del vector en el espacio
- **Sentido** $\longrightarrow$ hacia qué lado apunta
- **Punto de aplicación** (opcional en algunos contextos) $\longrightarrow$ el punto desde donde se "origina" el vector

Representación

Un vector puede representarse de varias formas:

- **Gráfica** como una flecha en el plano o el espacio.
- **Algebraica (componentes)**:
  En 2D: $\mathbf{v} = \mathbf{(x,y)}$
  En 3D: $\mathbf{v} = \mathbf{(x,y,z)}$
- **Vector unitario**: vector de magnitud 1, usado para indicar dirección

Operaciones con vectores

Suma

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$\longrightarrow$ Se suman componente a componente

Resta

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Producto por un escalar

$$k(x, y) = (kx, ky)$$

$\longrightarrow$ cambia la magnitud, puede invertir el sentido

Producto punto (escalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\longrightarrow$ da un número. Indica cuánto apuntan en la misma dirección.

Producto cruz (solo en 3D)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

$\longrightarrow$ da un **vector perpendicular** a ambos.

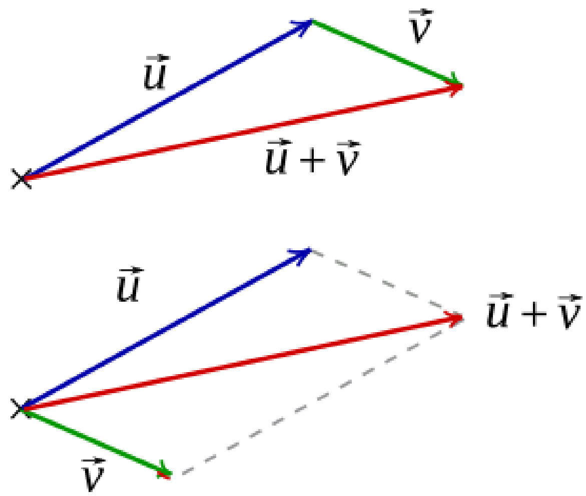

Figure 1: Vector

Magnitud o módulo

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Conceptos relacionados

- **Vector nulo**: (0,0,0) , sin dirección ni magnitud.
- **Vectores paralelos**: tienen la misma dirección (uno es múltiplo escalar del otro)
- **Vectores ortogonales**: su producto punto es 0.
- **Base canónica**: vectores unitarios de referencia, por ejemplo **i,j,k**

11 Lógica matemática y combinatoria