

Fundamentos básicos de las matemáticas

por Santi Martínez

November 1, 2025

Índice

1	Aritmética y álgebra básica	3
2	Ecuaciones y desigualdades	5
2.1	Ecuaciones	5
2.2	Desigualdades	6
3	Funciones y gráficas	7
4	Trigonometría	9
5	Geometría analítica	11
6	Límites y continuidad	12
7	Derivadas y aplicaciones	14
8	Integrales	16
9	Matrices y determinantes	19
10	Vectores, espacios vectoriales, álgebra lineal básica	20
11	Lógica matemática y combinatoria	21

1 Aritmética y álgebra básica

Es la rama de las matemáticas que trabaja con **números** y las **operaciones básicas** entre ellos.

Aritmética

Operaciones fundamentales

$$a + b, a - b, a \times b, \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$$

Principales propiedades

- **Conmutativa.** $ab = ba$
- **Asociativa.** $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Distributiva.** $a(b + c) = ab + ac$

Potenciación y radicación

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Álgebra

Expresiones algebraicas

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Ecuaciones

$$2x + 5 = 11 \longrightarrow x = 3$$

Identidades y factorización

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \implies x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Funciones

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Función lineal: $f(x) = mx + b$

2 Ecuaciones y desigualdades

2.1 Ecuaciones

Una ecuación es una **igualdad** que contienen una o más variables. Resolverla significa hallar los valores que completan dicha igualdad.

Tipos principales:

Lineales

$$ax + b + 0 \longrightarrow x = (-b/a)$$

Cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Polinómicas

$$P(x) = 0 \quad , \quad P(x) \in \mathbb{R}[x]$$

2.2 Desigualdades

Una desigualdad **compara dos expresiones algebraicas** mediante los símbolos:

$$<, >, \leq, \geq$$

Propiedades básicas

Sumar o restar el mismo número no cambia el sentido de la desigualdad:

$$a < b \implies a + c < b + c$$

Multiplicar o dividir por un **número positivo** mantiene el sentido; por un **número negativo**, invierte el sentido:

$$a < b \implies -a > -b$$

Ejemplo lineal

$$2x - 3 < 5 \implies 2x < 8 \implies x < 4$$

Desigualdad cuadrática

Resolver: $2x^2 + bx + c > 0$

1. Hallar raíces de $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Analizar el signo del trinomio en los intervalos determinados por las raíces.
3. Elegir los intervalos donde la desigualdad se cumple.

3 Funciones y gráficas

Una función es una relación entre dos conjuntos, donde cada elemento del dominio se asocia con un único elemento del codominio.

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad x \mapsto f(x)$$

\mapsto : x se le asigna x^2

Funciones lineales

$$f(x) = mx + b$$

Es una recta que sube o baja según m y que cruza el eje y en b .

Funciones cuadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Funciones polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

Comportamiento determinado por grado n y coeficiente principal a_n .

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

Posibles **asintotas*** verticales y horizontales

Asíntota: Línea recta a la que una curva se acerca cada vez más cuando x o y tienden a un valor extremo (muy grande o muy pequeño), pero sin llegar a tocarla.

Funciones exponenciales y logarítmicas

$$f(x) = a^x \quad , \quad g(x) = \log_a x$$

Exponenciales siempre positivas; logaritmos definidas para $x > 0$.

Gráficas de funciones

- **Dominio:** Conjunto de valores posibles de x .
- **Rango:** Conjunto de valores posibles de $f(x)$.
- **Interceptos:**
x-intercepto: $f(x) = 0 \implies x$
y-intercepto: $x = 0 \implies f(0)$
- **Crecimiento / Decrecimiento:** Analizar la derivada $f'(x)$ si aplica.
- **Simetría:**
Par: $f(-x) = f(x)$
Impar: $f(-x) = -f(x)$

4 Trigonometría

Estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, y las funciones que describen esas relaciones en el **círculo unitario**.

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Para un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ *

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto} - \text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto} - \text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad , \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto} - \text{opuesto}}{\text{cateto} - \text{adyacente}}$$

* θ : Relación entre ángulos y lados en un triángulo rectángulo.

Otras razones derivadas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad , \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad , \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Identidades trigonométricas fundamentales

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Fórmulas de adición y sustracción

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Doble y mitad de ángulo

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas en el círculo unitario

Relacionan los ángulos con las coordenadas de los puntos en un círculo de radio 1 centrado en el origen $(0,0)$

- Círculo unitario: radio $r = 1$, centro en $(0,0)$
- Ángulo θ : medido desde el eje positivo x , en sentido contrario a las manecillas del reloj
- Coordenadas de un punto: $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$

Funciones principales:

- Seno: $\sin \theta = y$
- Coseno: $\cos \theta = x$
- Tangente: $\tan \theta = \frac{y}{x}$ (si $x \neq 0$)
- Cotangente: $\cot \theta = \frac{x}{y}$ (si $y \neq 0$)
- Secante: $\sec \theta = \frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
- Cosecante: $\csc \theta = \frac{1}{y}$ (si $y \neq 0$)

5 Geometría analítica

Combina álgebra y geometría. Sirve para estudiar figuras geométricas usando coordenadas y ecuaciones.

Es decir, en lugar de dibujar solo un triángulo o una línea, podemos respesentarlos con números y fórmulas, lo que permite calcular distancias, pendientes, puntos de insercción, etc.

- Se trabaja normalmente en plano cartesiano.
- Las figuras como líneas, rectas, círculos y parábolas se pueden describir con ecuaciones algebraicas.

En resumen, **traduce la geometría en números y ecuaciones.**

6 Límites y continuidad

Límites

El límite de una función nos dice hacia qué valor se acerca la función cuando la variable x se acerca a un número específico

Idea clave: No importa lo que pase en ese punto, sino hacia qué valor se aproxima la función.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

”El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L ”.

Ante $\frac{0}{0}$, al ser indeterminada, habría que factorizar.

Continuidad

Una función es continua en un punto si no tiene saltos, agujeros ni interrupciones.

Condiciones para que $f(x)$ sea continua en $x=a$

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas falla, la función **no es continua** en es punto.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

- En $x = 3$, tenemos $f(3) = 9$
- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$
- Coinciden \rightarrow La función es continua en $x = 3$

7 Derivadas y aplicaciones

La derivada de una función mide la **velocidad de cambio** de esa función en un punto.

- Qué tan rápido cambia y y cuando cambia x .
- En geometría: es la **pendiente de la tangente a la curva** en un punto.

$$f'(x) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx}$$

Reglas de implementación

Regla del potencia: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Regla del producto: $(uv)' = u'v + uv'$

Regla de Suma/Resta: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

Regla de cociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Cadena: $(f(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$

Interpretación

Si $f(x) = x^2$, en $x = 3$

$$f'(x) = 2 \times 3 = 6$$

Esto significa que $x = 3$, **la curva sube 6 unidades de y por cada unidad que avanzamos de x .**

Geométricamente: **la pendiente de la tangente en $x = 3$ es 6.**

Derivadas básicas

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$

8 Integrales

La integración es la operación inversa de la derivación y se utiliza para calcular áreas, volúmenes y acumulaciones.

Reglas de integración

- **Potencia:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
- **Exponenciales:** $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- **Logaritmicas:** $\int e^x dx = e^x + c$
- **Suma / resta:** $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- **Reglas trigonométricas:**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

Integral indefinida

Representa una **familia de funciones** cuya derivada es $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde C es la constante de integración

Integral definida

Representa el **área bajo la curva** de $f(x)$ entre a y b

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propiedades:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Métodos de integración

Por sustitución

Si $u = g(x)$, entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Fracciones parciales

Descomposición de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Trigonómicas y sustituciones especiales

- $x = a \sin \theta \longrightarrow$ para $\sqrt{a^2 - x^2}$
- $x = a \tan \theta \longrightarrow$ para $\sqrt{a^2 + x^2}$

Teorema fundamental del cálculo

Conecta derivación e integración:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

9 Matrices y determinantes

10 Vectores, espacios vectoriales, álgebra lineal básica

11 Lógica matemática y combinatoria