

# Fundamentos básicos de las matemáticas

por Santi Martínez

November 1, 2025

# Índice

<b>1 Aritmética y álgebra básica</b>	<b>3</b>
<b>2 Ecuaciones y desigualdades</b>	<b>5</b>
2.1 Ecuaciones . . . . .	5
2.2 Desigualdades . . . . .	6
<b>3 Funciones y gráficas</b>	<b>7</b>
<b>4 Trigonometría</b>	<b>9</b>
<b>5 Geometría analítica</b>	<b>11</b>
<b>6 Límites y continuidad</b>	<b>12</b>
<b>7 Derivadas y aplicaciones</b>	<b>14</b>
<b>8 Integrales</b>	<b>16</b>
<b>9 Matrices y determinantes</b>	<b>19</b>
<b>10 Vectores, espacios vectoriales, álgebra lineal básica</b>	<b>20</b>
<b>11 Lógica matemática y combinatoria</b>	<b>21</b>

# 1 Aritmética y álgebra básica

Es la rama de las matemáticas que trabaja con **números** y las **operaciones básicas** entre ellos.

## Aritmética

### Operaciones fundamentales

$$a + b, a - b, a \times b, \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

### Principales propiedades

- **Comutativa.**  $ab = ba$
- **Asociativa.**  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Distributiva.**  $a(b + c) = ab + ac$

### Potenciación y redicación

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

## Álgebra

### Expresiones algebraicas

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

### Ecuaciones

$$2x + 5 = 11 \longrightarrow x = 3$$

## Identidades y factorización

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\a^2 + b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

## Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \implies x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

## Funciones

**Función cuadrática:**  $f(x) = ax^2 + bx + c$

**Función lineal:**  $f(x) = mx + b$

## 2 Ecuaciones y desigualdades

### 2.1 Ecuaciones

Una ecuación es una **igualdad** que contienen una o más variables. Resolverla significa hallar los valores que completan dicha igualdad.

Tipos principales:

#### Lineales

$$ax + b + 0 \longrightarrow x = (-b/a)$$

#### Cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

#### Polinómicas

$$P(x) = 0 , \quad P(x) \in \mathbb{R}[x]$$

## 2.2 Desigualdades

Una desigualdad **compara dos expresiones algebraicas** mediante los símbolos:

$$<, >, \leq, \geq$$

### Propiedades básicas

Sumar o restar el mismo número no cambia el sentido de la desigualdad:

$$a < b \implies a + c < b + c$$

Multiplicar o dividir por un **número positivo** mantiene el sentido; por un **número negativo**, invierte el sentido:

$$a < b \implies -a > -b$$

### Ejemplo lineal

$$2x - 3 < 5 \implies 2x < 8 \implies x < 4$$

### Desigualdad cuadrática

Resolver:  $2x^2 + bx + c > 0$

1. Hallar raíces de  $ax^2 + bx + c = 0$ .
2. Analizar el signo del trinomio en los intervalos determinados por las raíces.
3. Elegir los intervalos donde la desigualdad se cumple.

### 3 Funciones y gráficas

Una función es una relación entre dos conjuntos, donde cada elemento del dominio se asocia con un único elemento del codominio.

$$f : X \longrightarrow Y , \quad x \mapsto f(x)$$

$\mapsto$ : x se le asigna  $x^2$

#### Funciones lineales

$$f(x) = mx + b$$

Es una recta que sube o baja según  $m$  y que cruza el eje  $y$  en  $b$ .

#### Funciones cuadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Parábola que abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$ .

Vértice:  $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

#### Funciones polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

Comportamiento determinado por grado  $n$  y coeficiente principal  $a_n$ .

## Funciones racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad Q(x) \neq 0$$

Posibles **asintotas\*** verticales y horizontales

**Asíntota:** Línea recta a la que una curva se acerca cada vez más cuando  $x$  o  $y$  tienden a un valor extremo(muy grande o muy pequeño), pero sin llegar a tocarla.

## Funciones exponenciales y logarítmicas

$$f(x) = a^x \quad , \quad g(x) = \log_a x$$

Exponentiales siempre positivas; logaritmos definidas para  $x > 0$ .

## Gráficas de funciones

- **Dominio:** Conjunto de valores posibles de  $x$ .
- **Rango:** Conjunto de valores posibles de  $f(x)$ .
- **Interceptos:**
  - x-intercepto:  $f(x) = 0 \implies x$
  - y-intercepto:  $x = 0 \implies f(0)$
- **Crecimiento / Decrecimiento:** Analizar la derivada  $f'(x)$  si aplica.
- **Simetría:**
  - Par:  $f(-x) = f(x)$
  - Impar:  $f(-x) = -f(x)$

## 4 Trigonometría

Estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, y las funciones que describen esas relaciones en el **círculo unitario**.

### Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Para un triángulo rectángulo con ángulo agudo  $\theta^*$

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} , \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} , \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

\* $\theta$ : Relación entre ángulos y lados en un triángulo rectángulo.

Otras razones derivadas:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} , \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} , \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

### Identidades trigonométricas fundamentales

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \csc^2 \theta\end{aligned}$$

### Fórmulas de adición y sustracción

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

## Doble y mitad de ángulo

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan(2\theta) &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

## Funciones trigonométricas en el círculo unitario

Relacionan los ángulos con las coordenadas de los puntos en un círculo de radio 1 centrado en el origen (0,0)

- Círculo unitario: radio  $r = 1$ , centro en  $(0, 0)$
- Ángulo  $\theta$ : medido desde el eje positivo  $x$ , en sentido contrario a las manecillas del reloj
- Coordenadas de un punto:  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$

Funciones principales:

- Seno:  $\sin \theta = y$
- Coseno:  $\cos \theta = x$
- Tangente:  $\tan \theta = \frac{y}{x}$  (si  $x \neq 0$ )
- Cotangente:  $\cot \theta = \frac{x}{y}$  (si  $y \neq 0$ )
- Secante:  $\sec \theta = \frac{1}{x}$  (si  $x \neq 0$ )
- Cosecante:  $\csc \theta = \frac{1}{y}$  (si  $y \neq 0$ )

## 5 Geometría analítica

Combina álgebra y geometría. Sirve para estudiar figuras geométricas usando coordenadas y ecuaciones.

Es decir, en lugar de dibujar solo un triángulo o una línea, podemos representarlos con números y fórmulas, lo que permite calcular distancias, pendientes, puntos de intersección, etc.

- Se trabaja normalmente en plano cartesiano.
- Las figuras como líneas, rectas, círculos y parábolas se pueden describir con ecuaciones algebraicas.

En resumen, **traduce la geometría en números y ecuaciones**.

# 6 Límites y continuidad

## Límites

El límite de una función nos dice hacia qué valor se acerca la función cuando la variable  $x$  se acerca a un número específico

**Idea clave:** No importa lo que pase en ese punto, sino hacia qué valor se aproxima la función.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

"El límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es  $L$ ".

Ante  $\frac{0}{0}$ , al ser indeterminada, habría que factorizar.

## Continuidad

Una función es continua en un punto si no tiene saltos, agujeros ni interrupciones.

### Condiciones para que $f(x)$ sea continua en $x=a$

1.  $f(a)$  existe
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas falla, la función **no es continua** en ese punto.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

- En  $x = 3$ , tenemos  $f(3) = 9$
- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$
- Coinciden  $\rightarrow$  La función es continua en  $x = 3$

## 7 Derivadas y aplicaciones

La derivada de una función mide **la velocidad de cambio** de esa función en un punto.

- Qué tan rápido cambia  $y$  y cuando cambia  $x$ .
- En geometría: es la **pendiente de la tangente a la curva** en un punto.

$$f'(x) \quad o \quad \frac{dy}{dx}$$

### Reglas de implementación

Regla del potencia:  $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Regla del producto:  $(uv)' = u'v + uv'$

Regla de Suma/Resta:  $(u \pm v') = u' \pm v'$

Regla de cociente:  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Cadena:  $(f(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$

### Interpretación

Si  $f(x) = x^2$ , en  $x = 3$

$$f'(x) = 2 \times 3 = 6$$

Esto significa que  $x = 3$ , **la curva sube 6 unidades de  $y$  por cada unidad que avanzamos de  $x$** .

Geométricamente: **la pendiente de la tangente en  $x = 3$  es 6.**

## Derivadas básicas

- $(c)' = 0$
- $(x)' = 1$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$

## 8 Integrales

La integración es la operación inversa de la derivación y se utiliza para calcular áreas, volúmenes y acumulaciones.

### Reglas de integración

- **Potencia:**  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$
- **Exponentiales:**  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- **Logarítmicas:**  $\int e^x dx = e^x + c$
- **Suma / resta:**  $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- **Reglas trigonométricas:**

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

### Integral indefinida

Representa una **familia de funciones** cuya derivada es  $f(x)$ :

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde  $C$  es la constante de integración

## Integral definida

Representa el **área bajo la curva** de  $f(x)$  entre  $a$  y  $b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Propiedades:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

## Métodos de integración

### Por sustitución

Si  $u = g(x)$ , entonces:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

### Por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

## Fracciones parciales

Descomposición de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

## Trigonométricas y sustituciones especiales

- $x = a \sin \theta \longrightarrow$  para  $\sqrt{a^2 - x^2}$
- $x = a \tan \theta \longrightarrow$  para  $\sqrt{a^2 + x^2}$

## Teorema fundamental del cálculo

Conecta derivación e integración:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

## 9 Matrices y determinantes

## 10 Vectores, espacios vectoriales, álgebra lineal básica

## 11 Lógica matemática y combinatoria