UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Métodos Numéricos para las Ecuaciones Diferenciales (Grado) Examen Final (Práctica) 19 Enero 2023

1. **(3 puntos)** Se desea determinar computacionalmente el orden de convergencia del método de Runge-Kutta

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3),\\
k_1 &= f(t_n, y_n),\\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right),\\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hk_2\right)
\end{aligned}
$$

aproximando la solución de la ecuación diferencial

$$
\begin{cases}
y'(t) = t^3 - 2ty(t),\ t \in [1,5],\\
y(1) = 1,
\end{cases}
$$

cuya solución exacta es $y(t) = 0.5(t^2-1) + e^{1-t^2}$. **Generar y enviar por correo el código y la recta de pendiente** del método junto con una **recta adicional que sirva de contraste** para verificar el valor de la pendiente. Poner leyendas a cada una de las rectas obtenidas. Como título de la figura ponga su nombre junto con el orden p estimado.

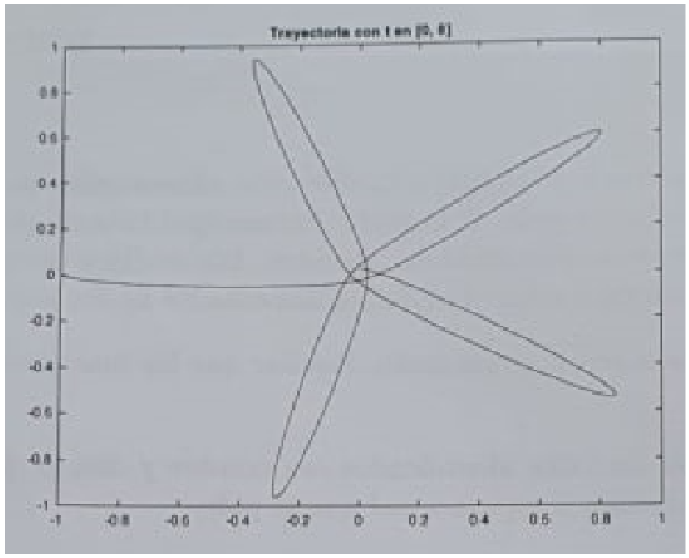
2. **(4 puntos)** Usar el método clásico de Runge-Kutta de orden 4 para describir el movimiento de una partícula con posición $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ y velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) \in \mathbb{R}^2$ en un campo de fuerzas conservativo generado por un cable que transporta corriente y está centrado en el origen $0 \in \mathbb{R}^2$. El movimiento viene determinado por:

$$
\mathbf{x}''(t) = -\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathbf{x}(0) = (-1,0)^T, \quad \mathbf{x}'(0) = (0.1, -0.1)^T,
$$

donde $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ para $\mathbf{x} = (x,y)$.

(a) Convertir la ecuación de segundo orden en una ecuación de primer orden y aproximar la solución en el intervalo de tiempo $[0,8]$.

(b) Reproducir la gráfica de la trayectoria $\mathbf{x}$ en el espacio $\mathbb{R}^2$ de una partícula cargada en $t \in [0,8]$ dada por la figura:



Generar y enviar por correo el código y la gráfica de la trayectoria (x, y) indicando el valor de h usado.

3. **(3 puntos)** Comprobar computacionalmente el efecto de la 0-estabilidad usando el método

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + a y_n = \frac{h}{2}[(3-a)f(t_{n+1}, y_{n+1}) - (1+a)f(t_n, y_n)]$$

para aproximar la solución $y(t) = 0.5(t^2 - 1) + e^{1-t^2}$ en el intervalo $[1, 5]$ de la ecuación $y' = t^3 - 2ty$ con $y(1) = 1$. Usar los valores $a = 0$ y $a = -5$ con pasos $h = 0.1$, 0.05, 0.025.

Generar y enviar el código usado junto con las gráficas que ilustren los resultados.