Trabajo Práctico - Probabilidades 2025

Iguaran, Carlos; Olszevicki, Santiago

Se indica a continuación el valor de lambda de la entrega 7a de uno de los integrantes:

```
lambda <- params$lambda
lambda
```

```
## [1] 3.71
```

1) Calcular la función de densidad de X. ¿A qué familia pertenece?

$$f_X(x) = \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y}\,dy = \lambda^2 \int_x^\infty e^{-\lambda y}\,dy = \lambda^2 \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\right]_x^\infty = \lambda^2 \left(0 + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Dicha densidad indica que la variable X tiene distribución exponencial de parámetro λ.

b) Calcular la función de densidad condicional de Y | X = x. ¿A qué familia pertenece?

Nota: la densidad de Y dado X=x está definida solo para $x \geq 0$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \lambda e^{-\lambda(y-x)} \quad \text{para } y \geq x$$

Se puede apreciar que Y es una exponencial desplazada. Es decir, $Y \mid X = x \sim W + x, \quad \text{donde } W \sim \text{Exp}(\lambda)$

c) Calcular E(X), E(Y), Cov(X,Y)

- $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0.2695418$, dado que $X \sim \text{Exp}(3.71)$
- $E(Y) = [Integral] = \frac{2}{\lambda} = 0.5390836$ Ver bien cómo se resueve esta integral
- $E(X,Y) = [Integral] = \frac{3}{\lambda^2} = 0.1453055$
- $Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X).E(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 0.0726528$

d) Calcular la función de distribución acumulada de Y | X = x, para x >= 0.

$$P(Y \leq y \mid X = x) = P(W \leq y - x) = 1 - e^{-\lambda(y-x)}$$

Nota para nosotros: Si quisieramos agregar la integral, lo hacemos

e) Simular una muestra de tamaño 100 de la variable Y | X = 1 a partir de una Uniforme en (0, 1). Para ello, realizar y mostrar los cálculos correspondientes.

```r
simulate_y_cond_x <- function(n, lambda = lambda){
u = runif(n, 0, 1) # Para usar de random generator
ws <- -log(u) / lambda # Exponenciales de parametro lambda (w1...wn ~ W(lambda))
ys <- ws+1   # Exponencial desplazada Y = W + 1
ys
}
muestra <- simulate_y_cond_x(100, lambda = params$lambda)
muestra[1:5]
```

```
## [1] 1.001906 1.127361 1.286014 1.009392 1.292192
```

f) Implementar una función generar_pares que tenga por parámetro a n, donde n denota la cantidad de datos a generar, y devuelva una matriz con un par generado con la distribución de (X, Y) en cada fila.

g) Generar n = 2000 datos y estimar con ellos E(X), E(Y), Cov(X, Y). ¿Qué se observa?