Familia Exponencial

Santiago Robatto y Sofia Terra

¿Qué es una familia de distribuciones?

Intuitivamente, una familia de distribuciones es un conjunto de distribuciones que comparten ciertas propiedades y estructura. Cada familia tiene propiedades específicas, y algunas de ellas son únicas para cada familia. Esto permite simplificar cálculos y verificar si una distribución cumple ciertas propiedades estadísticas.

Formalmente, podemos definir una familia como un conjunto de funciones de distribución definidas sobre el mismo espacio probabilístico:

$$\mathcal{F} = \{F_X(\cdot|\theta) : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}_{F=\{fx(x|\theta):\theta\in\Theta\subset R\ k\}}$$

Donde Θ es el espacio paramétrico y θ es un vector de parámetros (por ejemplo, en una Gamma (α, β), $\theta = (\alpha, \beta)$).

La familia exponencial

La familia exponencial se define de la siguiente manera:

$$f_X(x|\theta) = h(x) \cdot c(\theta) \cdot \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} w_j(\theta) \cdot t_j(x)\right\}$$

Donde:

- $h(x)$ es una función que depende únicamente de x (es independiente de θ).
- $c(\theta)$ es una función que depende únicamente de θ, por ende que no depende de x. (Traspolando al contexto de Inferencia II, $c(\theta)$ no dependería de los datos observados).
- $w(\theta)$ es una función de tita que aparece multiplicada por $t(x)$ en el exponente.
- $t(x)$ es una función del estadístico suficiente.
- K es la dimensión del vector de parámetros.

La suma en el exponente indica que la cantidad de estadísticos suficientes coincide con la dimensión del parámetro.

Forma canónica

Una manera alternativa de escribir una familia exponencial es la siguiente:

$$f_X(x;\theta) = h(x) \exp\left(\sum_{i=1}^{s} \eta_i(\theta) T_i(x) - A(\theta)\right)$$

Esta forma será útil para demostrar que algunas distribuciones pertenecen a la familia exponencial, dado que nos permite "forzar" la inclusión del término exponencial que se "contraerresta" con un logaritmo.

Ejemplo: ¿Beta pertenece a la familia exponencial?

Aunque la función Beta (α, β) no parece a simple vista pertenecer a la familia exponencial, podemos "forzar" la forma exponencial mediante pequeñas modificaciones, lo que resulta en:

$$f(x|\alpha, \beta) = \mathbb{1}_{h(x)} \cdot \exp\left[(\alpha - 1)\log x + (\beta - 1)\log(1 - x) - \log B(\alpha, \beta)\right]$$

Donde $B(\alpha, \beta)$ es la función beta (la constante de normalización).

Entonces, sí cumple la forma:

- $T(x) = (\log x, \log(1 - x))$
- $\eta(\theta) = (\alpha - 1, \beta - 1)$
- $A(\theta) = \log B(\alpha, \beta)$
- $h(x) = 1$

Propiedades

Saber que una distribución pertenece a la familia exponencial es útil porque cumplirá ciertas propiedades de especial interés en diferentes áreas de la estadística.

- **Estimación puntual**: Por el teorema de Neyman-Fisher, al escribir la función de una manera exponencial se observa una función del estadístico suficiente. El estimador de máxima verosimilitud suele ser una función de los estadísticos suficientes y a menudo tiene propiedades deseables como la eficiencia y la consistencia.

- **Contraste de hipótesis**: Saber que una función pertenece a la familia exponencial permite encontrar la región crítica uniformemente más potente (RCUMP) directamente para el contraste $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contra $H_1 : \theta < \theta_0$, siempre y cuando se cumplan algunas condiciones particulares.
- **Inferencia bayesiana**: Las familias exponenciales son **familias conjugadas** en esta rama de la inferencia.

¿Qué significa esto último?

"Se dice que una familia de distribuciones de θ es conjugada respecto a un modelo probabilíistico $f(x|\theta)$ si para cualquier distribuciónn inicial perteneciente a tal familia, la distribución final correspondiente pertenece a la misma familia"[1].

Es decir, si elegimos correctamente el modelo del prior y de la verosimilitud, obtendremos un posterior que se mantiene dentro de la familia exponencial.

Por ejemplo, haciendo referencia lo visto en clase, teníamos un prior que era beta, una verosimilitud (datos) binomiales, ambos pertenecientes a la familia exponencial, y obtuvimos un posterior perteneciente a la familia exponencial también. Esto nos da mayor información sobre los parámetros y nos permite obtener soluciones de manera analítica.

Ejemplo de distribuciones exponenciales

Muchas distribuciones conocidas y estudiadas pertenecen a la familia exponencial, incluyendo la distribución Gamma y sus casos particulares (exponencial y chi-cuadrado), la Beta, la Normal, la Poisson y discretas como la Bernoulli y la Binomial.

Referencias

- **1**: http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/coloquios/6to%20Coloquio/Notas%20Coloquio/Introduccio%CC%81n%20a%20la%20estadi%CC%81stica%20bayesiana.pdf
- **2**: https://www.mariushobbhahn.com/2021-06-10-ExpFam_tutorial/
- **3**: https://gente.itam.mx/mendoza/Malaga.pdf
- **4**: Librillo de Estadistica II
- **5**: https://es.wikipedia.org/wiki/Familia_exponencial