Untitled

Santiago Robatto, Sofía Terra

Tarea 6: Ejercicios 6.7 6.15 7.9 y 7.10

Exercise 6.7 (Normal-Normal grid approximation)

Parte A:

Como primer paso definimos la grilla de valores posibles de μ, entre 5 y 15 by 1, dado que es el recorrido indicado en la letra.

```
 [1]  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15
```

Para cada valor de μ evaluaremos el prior y la verosimilitud.

Para el prior utilizaremos el dato de letra que $\mu \sim \mathcal{N}(10, 1.2^2)$ y evaluaremos eso.

A su vez, creamos un vector con el valor de las observaciones $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (7.1,\ 8.9,\ 8.4,\ 8.6)$ para poder hallar la verosimilitud.

```
   mu_grid        prior   likelihood
1        5 5.646917e-05 1.889473e-08
2        6 1.285232e-03 1.267972e-05
3        7 1.460692e-02 7.979256e-04
4        8 8.289762e-02 4.708682e-03
5        9 2.349266e-01 2.605676e-03
6       10 3.324519e-01 1.352152e-04
7       11 2.349266e-01 6.579829e-07
8       12 8.289762e-02 3.002533e-10
9       13 1.460692e-02 1.284828e-14
10      14 1.285232e-03 5.155686e-20
11      15 5.646917e-05 1.940045e-26
```

Finalmente ya podemos aproximar el posterior, haciendo el producto de likelihood x prior y dividiendo entre su suma. Hacer el cociente lo que hace es asegurarnos de obtener una probabilidad, dado que estamos normalizando la funcion.

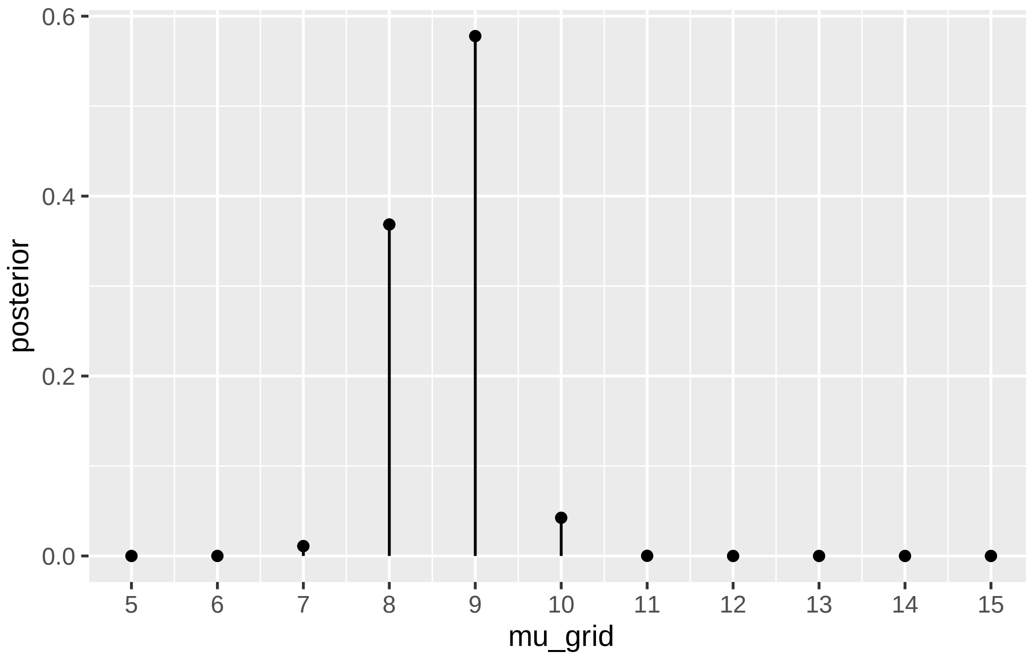
$$p(\mu_j \mid y) = \frac{p(y \mid \mu_j)\, p(\mu_j)}{\sum_k p(y \mid \mu_k)\, p(\mu_k)}$$

	mu_grid	prior	likelihood	unnormalized	posterior
1	5	5.646917e-05	1.889473e-08	1.066970e-12	1.007279e-09
2	6	1.285232e-03	1.267972e-05	1.629638e-08	1.538469e-05
3	7	1.460692e-02	7.979256e-04	1.165523e-05	1.100319e-02
4	8	8.289762e-02	4.708682e-03	3.903385e-04	3.685013e-01
5	9	2.349266e-01	2.605676e-03	6.121424e-04	5.778965e-01
6	10	3.324519e-01	1.352152e-04	4.495254e-05	4.243770e-02
7	11	2.349266e-01	6.579829e-07	1.545777e-07	1.459299e-04
8	12	8.289762e-02	3.002533e-10	2.489028e-11	2.349781e-08
9	13	1.460692e-02	1.284828e-14	1.876738e-16	1.771745e-13
10	14	1.285232e-03	5.155686e-20	6.626255e-23	6.255553e-20
11	15	5.646917e-05	1.940045e-26	1.095528e-30	1.034239e-27

El siguiente paso es solo un checkeo que haya funcionado bien todo. El hecho de que la suma de la variable posterior sume 1 nos asegura que esta efectivamente es una probabilidad.

	sum(unnormalized)	sum(posterior)
1	0.00105926	1

Graficamos el posterior obtenido en grid data, el cual nos devolvera los valores mas probables de μ. De esta manera, a partir de un priori normal (continuo) y 4 observaciones, generamos una distribucion a posteriori discreta para μ. Los valores mas probables son 8 y 9, pero al usar solo 10 valores para modelar $/mu$ perdimos mucha precision. Es por ello que repetiremos el experimento en la parte b, pero usando 201 valores posibles para μ.



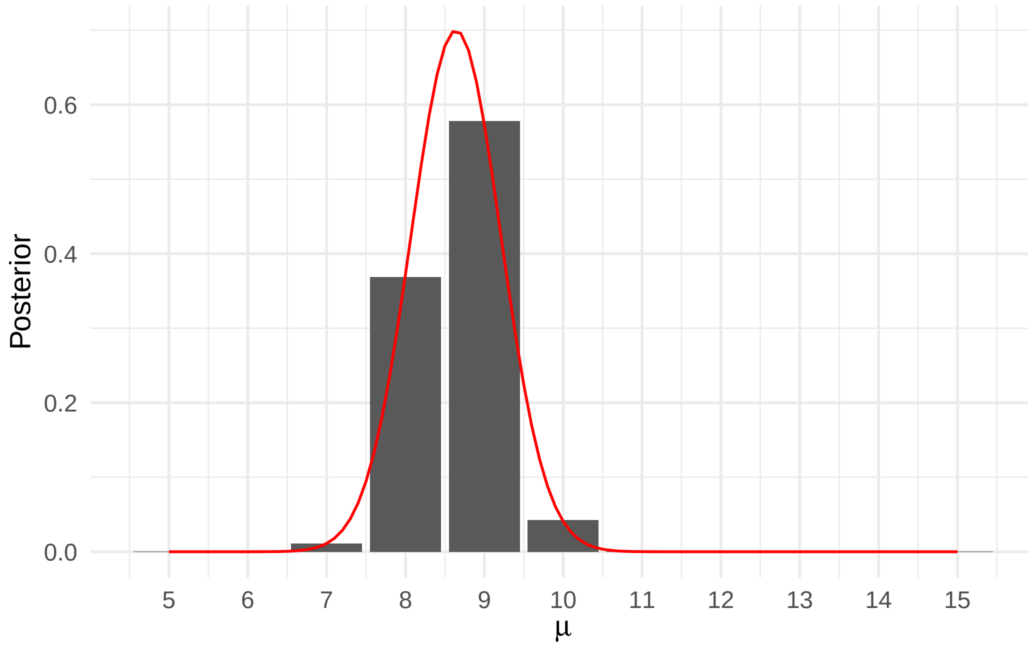
Ademas, podemos samplear a partir de lo obtenido anteriormente y compararlo contra el posterior real:

```
      model     mean     mode       var        sd
1     prior 10.00000 10.00000 1.4400000 1.2000000
2 posterior  8.64698  8.64698 0.3266577 0.5715398
```

Por ende sabemos que el posterior teorico del ejemplo distribuye $\mu \sim \mathcal{N}(8.64698, 0.571^2)$

Para el sampleo:

```
 mu_grid     n percent
       7   112  0.0112
       8  3687  0.3687
       9  5770  0.5770
      10   430  0.0430
      11     1  0.0001
   Total 10000  1.0000
```



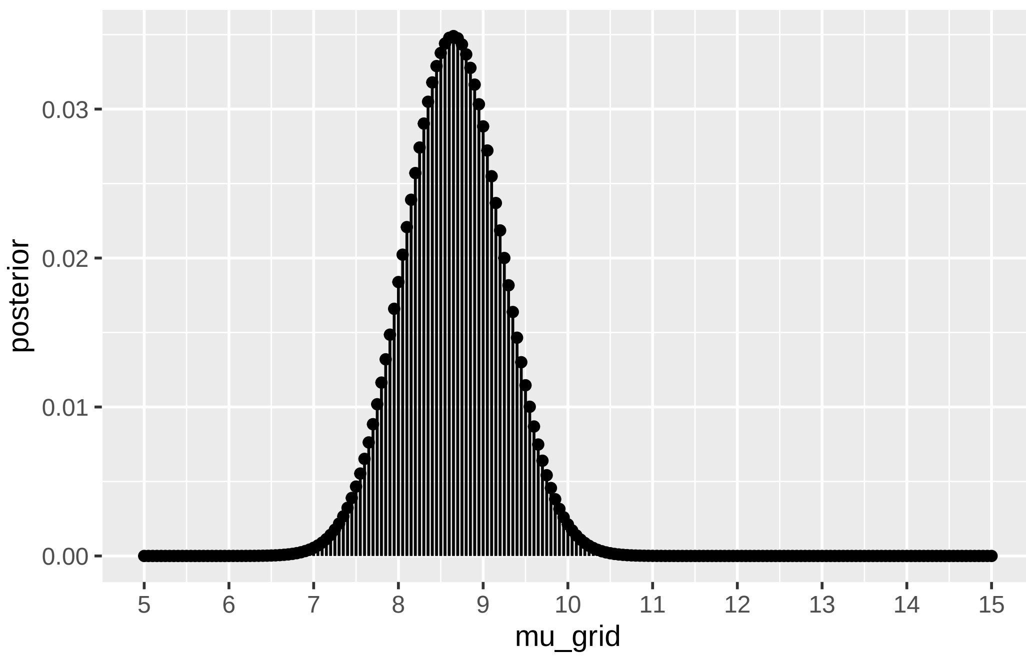
De esta manera vemos que el histograma de aproximacion por grilla es sumamente similar al posterior real.

Sin embargo, como ya vimos antes, al haber elegido pocos valores posibles para μ la aproximacion no es precisa.

Parte B:

Replicaremos el codigo realizado en la parte anterior, con la unica diferencia que la secuencia para valores de μ sera de a 0.05 en vez de a 1.

Ahora, al haber graficado para 201 casos, la aproximacion por grilla se aproxima de manera casi perfecta a la normal del posteriori que calculamos teoricamente. Al tener la variable discreta, pero ser la diferencia entre valores muy pequena, se aproxima en mayor proporcion a una normal.



Si nuevamente sampleamos, observamos que los datos practicamente la misma distribucion normal del posteriori.