

Tarea 7

Santiago Robatto y Sofia Terra

Ejercicio 8.9 Bayes Rules!

Exercise 8.9 (Hypothesis tests: Part I) For parameter π , suppose you have a $\text{Beta}(1,0.8)$ prior model and a $\text{Beta}(4,3)$ posterior. You wish to test the null hypothesis that $\pi \leq 0.4$ versus the alternative that $\pi > 0.4$.

- What is the posterior probability for the alternative hypothesis?
- Calculate and interpret the posterior odds.
- Calculate and interpret the prior odds.
- Calculate and interpret the Bayes Factor.
- Putting this together, explain your conclusion about these hypotheses to someone who is unfamiliar with Bayesian statistics.

Respuestas:

Contexto: estamos trabajando con pruebas de hipótesis, una tarea fundamental en el análisis bayesiano. Este ejercicio tiene el objetivo de funcionar como un acercamiento básico a este tema.

a. Primero nos piden calcular la **probabilidad a posteriori de la hipótesis alternativa**. Para ello, calcularemos la probabilidad de que π pertenezca al intervalo de la hipótesis alternativa, es decir que sea mayor que 0.4.

[1] 0.8208

El resultado revela que hay gran evidencia a favor de la hipótesis alternativa. La probabilidad de que π será mayor a 0.4 es aproximadamente 82%

b. Ahora calculamos las **posterior odds**.

Para ello, realizaremos el cociente entre la probabilidad a posteriori de la hipótesis alternativa y su opuesto.

Ya sabemos que la probabilidad a posteriori de la alternativa es 0.8202, por lo tanto, nuestra probabilidad posteriori de la hipótesis nula será $1 - 0.8202 = 0.1792$. Entonces:

$$\text{posterior odds} = \frac{0.8202}{0.1792} \approx 4.58$$

De esta manera es casi 5 veces más plausible que π supere 0.4. Los posterior odds representan nuestra información actualizada con respecto a π luego de observar los datos muestreados.

c. A continuación, vamos a ver cuáles son nuestros **prior odds**. Primero calculamos la probabilidad a priori de la hipótesis alternativa. Esta es aproximadamente 0.6645:

Con este resultado obtenemos que la probabilidad a priori de la nula es aproximadamente 0.3354. Por lo tanto, la prior odds es 1.98. Esto significa que es casi 2 veces más plausible que π supere 0.4.

d. Ahora, vamos a trabajar con el **Factor de Bayes**. Esta medida compara la posterior odds con la prior odds. Nos da información sobre cuánto evolucionó nuestra variable de estudio luego de observar los datos de la muestra.

La fórmula es:

$$\text{Bayes Factor} = \frac{\text{posterior odds}}{\text{prior odds}}$$

En nuestro ejercicio, el factor de Bayes es ≈ 2 . Esto implica que al observar la información recabada, la posterior odds es 2 veces más grande que la prior odds. La plausibilidad de la alternativa aumentó, sin embargo, no lo hizo a gran escala. Para que hubiera mayor evidencia sobre la alternativa, el factor de Bayes debería ser mucho más alto. Como punto de comparación, en el ejemplo del capítulo 8 de Bayes Rules!, el factor de bayes que se obtiene es 60, aportando esta gran evidencia sobre la hipótesis alternativa.

e. Explicación cualitativa de los resultados:

En este ejercicio queríamos evaluar la probabilidad de que el parámetro π sea mayor o menor que 0.4, y para eso realizaremos las cuentas antes y después de mirar nuestros datos.

Antes de observar los datos, nuestras creencias estaban representadas por una distribución Beta(1, 0.8), lo que reflejaba una ligera inclinación hacia valores grandes de π .

Luego, al incorporar los datos, nuestra creencia se actualizó a una Beta(4, 3). A partir de esa nueva información (posterior), la probabilidad de que π sea mayor a 0.4 aumentó considerablemente; lo que implica que los datos brindaron evidencia a favor de que π efectivamente es mayor que 0.4.

Lo que buscamos con este ejercicio es saber si la información que recolectamos sobre nuestro estudio apoya nuestra hipótesis alternativa, la “idea” que queremos probar como verdadera, en contraste con la hipótesis nula, la que queremos rechazar. Para obtener una conclusión adecuada calculamos primero la probabilidad de nuestra distribución a posteriori (nuestra información actualizada luego de llevar a cabo la investigación), la probabilidad de la distribución a priori (nuestra información inicial, nuestra “base”) y luego las comparamos haciendo el cociente entre ellas. Esto nos mostró que nuestra creencia sobre la veracidad de la hipótesis alternativa aumentó. Si bien no fue de forma pronunciada, ahora tenemos mayor evidencia sobre la idea que queremos probar como cierta.

Ejercicios 8.14

Exercise 8.14 (Climate change: estimation) Let π denote the proportion of U.S. adults that do not believe in climate change. To learn about π , we'll use survey data on n adults and count up the number of these that don't believe in climate change, Y .

- Explain which Bayesian model is appropriate for this analysis: Beta-Binomial, Gamma-Poisson, or Normal-Normal.
- Specify and discuss your own prior model for π .
- For the remainder of the exercise, we'll utilize the authors' Beta(1,2) prior for π . How does your prior understanding differ from that of the authors?
- Using the `pulse_of_the_nation` data from the `bayesrules` package, report the sample proportion of surveyed adults with the opinion that `climate_change` is `Not Real At All`.
- In light of the Beta(1,2) prior and data, calculate and interpret a (middle) 95% posterior credible interval for π . NOTE: You'll first need to specify your posterior model of π .

Tenemos que π representa la proporción de adultos que no cree en el cambio climático. Para aprender sobre π , se utiliza información de una encuesta de n adultos, y se cuenta el número de estos que no cree en el cambio climático, al cual llamamos Y .

a. Se considera como más apropiado el modelo Beta-Binomial. Estamos trabajando con una proporción. Nuestro objetivo es saber si un adulto americano cree o no en el cambio climático. Podemos modelar esto con una variable Bernoulli, la cual vale 1 si la persona no cree en el cambio climático, y vale 0 en caso contrario. Como tenemos una población de n adultos, hacemos la sumatoria de todos estos casos, lo cual distribuye de manera binomial. Por otro lado, al no ser constante la probabilidad de “éxito” (que no crea), conjugamos la binomial con una beta, la cual nos proporcionará justamente la distribución de la probabilidad de “éxito”.

b. Buscamos definir el modelo a priori de $\pi \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, donde α es el número de “éxitos” y β es el número de “fracasos”.

Al no tener información previa, se pueden considerar tres situaciones diferentes:

- $\pi \sim \text{Beta}(1, 1)$: Aquí seríamos completamente neutrales, la cantidad de “éxitos” y “fracasos” es la misma.
- $\pi \sim \text{Beta}(1, 5)$: En este caso tenemos la creencia de que pocas personas creen que el cambio climático es falso. Hay más “fracasos” que “éxitos”.
- $\pi \sim \text{Beta}(5, 1)$: Finalmente, aquí consideramos lo contrario a lo anterior. Muchas personas creen que es falso. Hay más “éxitos” que “fracasos”.

Creemos que la más adecuada de todas estas es la segunda, ya que el cambio climático es un fenómeno que está ampliamente considerado por la población como cierto. En general, son pocos los que lo consideran como no existente. **c.** Ahora se aclara que se trabajará con una

Beta(1, 2), se utilizará esa priori definida por el autor. La misma sigue una tendencia similar a la especificada en la pregunta anterior, ambas tienen la creencia, o “información base” de que hay más personas que creen en el cambio climático, que las que no creen. Sin embargo, la dada por el libro no es tan extrema como la definida en la pregunta b. Aquí hay menos “fracasos” que en la otra distribución Beta.

d.

Vamos a trabajar con los datos de `pulse_of_the_nation`, del paquete `bayesrules`. Si filtramos por creencias sobre cambio climático obtenemos la siguiente tabla:

Observamos que 150 personas consideran que la existencia del cambio climático es falsa. Estos son nuestros “éxitos”. Si calculamos la proporción entre el total de encuestados obtenemos: $150/1000 = 0.15$. Esto es un 15% de la población encuestada.

e. Tenemos que nuestro modelo inicial es:

$$Y|\pi \sim \text{Bin}(1000, \pi)$$

$$\pi \sim \text{Beta}(1, 2)$$

Por lo tanto, al haber observado que $Y = 150$, nuestro modelo posteriori queda de la siguiente manera:

$$\pi|(Y = y) \sim \text{Beta}(\alpha_{\text{prior}} + y, \beta_{\text{prior}} + (n - y))$$

Si sustituimos los datos que tenemos obtenemos:

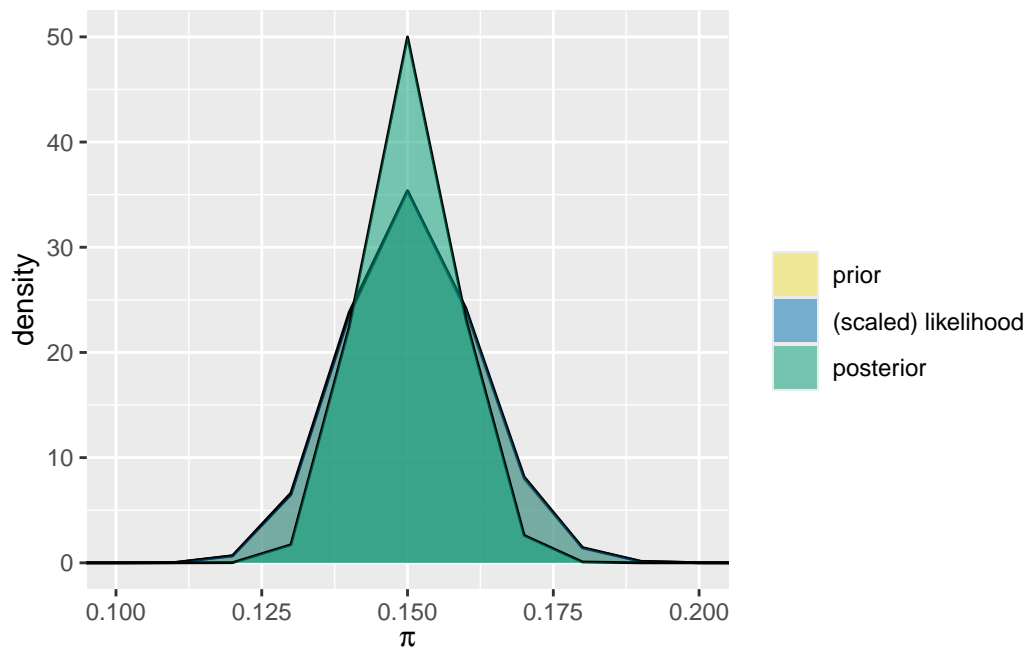
$$\pi|(Y = y) \sim \text{Beta}(1 + 150, 2 + (1000 - 150))$$

$$\pi|(Y = y) \sim \text{Beta}(151, 852)$$

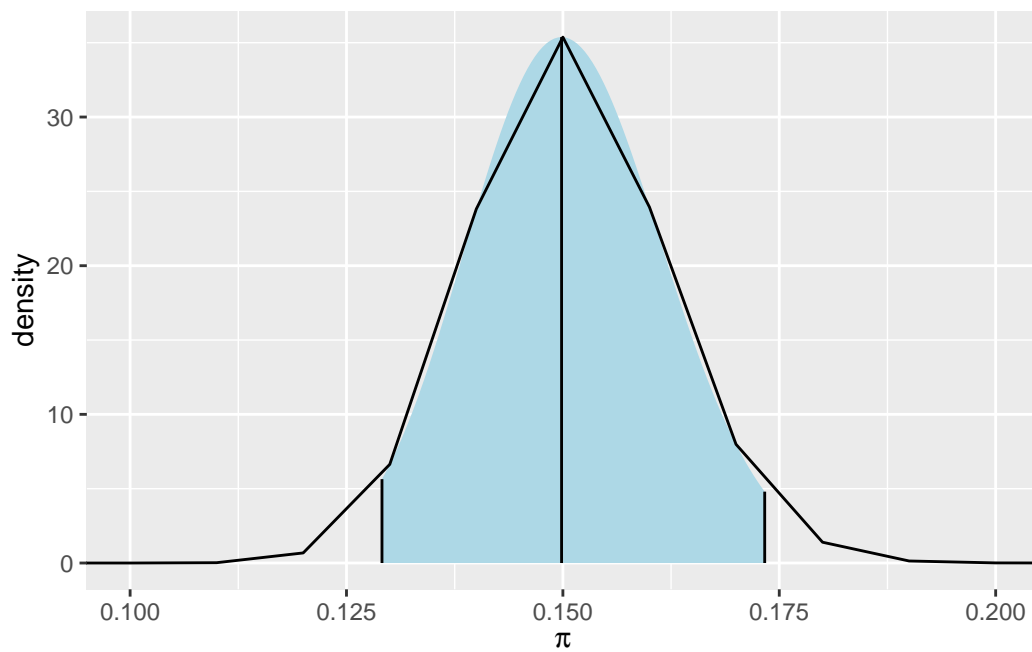
La función de densidad posteriori queda de la forma:

$$f(\pi|y = 150) = \frac{\Gamma(151 + 852)}{\Gamma(151)\Gamma(852)} \pi^{151-1} (1 - \pi)^{852-1} \quad \text{for } \pi \in [0, 1].$$

Nuestro modelo graficado es el siguiente:



Observación: se ve de esa forma, como “cortado” ya que se tuvo que ajustar el eje de coordenadas, hubo que arreglar la escala porque si no, no se visualizaba bien. Ocurre lo mismo en el próximo gráfico, donde se observa el intervalo de confianza del 95% para π .



Tenemos los percentiles 2.5 y 97.5, los cuales son aproximadamente 0.129 y 1.733. Estos nos marcan el 95% de los valores posterioris plausibles de π . El intervalo de confianza resultante para π es (0.129, 1.733), el mismo que se visualiza en el gráfico, representado por la zona pintada de celeste. El área de esta región, por lo tanto, la fracción de valores que “caen” en la misma, es 0.95. Esto nos muestra una interpretación más intuitiva sobre el intervalo de confianza. Hay una confianza del 95% de que entre el 12.9% y el 17.33% de los adultos americanos crea que la existencia del cambio climática es falsa. Si bien se calculó el intervalo de confianza del 95%, esta no es la única opción, no existe un intervalo de confianza “correcto”. Dependiendo del contexto se usará uno u otro. En este caso, uno del 95% es adecuado.

Observación: como fue mencionado, estamos calculando el área celeste:

$$P(\pi \in (0.129, 1.733) | Y = 150) = \int_{0.129}^{1.733} f(\pi | y = 150) d\pi = 0.95.$$

Ejercicio 8.15

Exercise 8.15 (Climate change: hypothesis testing) Continuing the analysis from Exercise 8.14, suppose you wish to test a researcher's claim that more than 10% of people believe in climate change: $H_0 : \pi \leq 0.1$ versus $H_a : \pi > 0.1$.

- What decision might you make about these hypotheses utilizing the credible interval from the previous exercise?
- Calculate and interpret the posterior probability of H_a .
- Calculate and interpret the Bayes Factor for your hypothesis test.
- Putting this together, explain your conclusion about π .

a. Como observamos que la mayoría de la función de densidad posteriori cubre un espacio mayor a 0.1 y que el intervalo de confianza es mayor que 0.1, se rechaza la hipótesis nula, esto es, que la proporción de adultos americanos que cree que el cambio climático no existe es menor o igual al 10%.

b. Para calcular exactamente qué tan plausible es que $\pi > 0.1$, podemos calcular la probabilidad posteriori de este caso específico:

$$P(\pi > 0.1 | Y = 150) = \int_{0.129}^{1.733} f(\pi | y = 150) d\pi$$

Podemos calcular esta probabilidad con la función `pbeta()`:

```
[1] 0.9999997
```

Esto es aproximadamente 1, lo que significa de que casi se puede asegurar por completo que la probabilidad de que más del 10% de las personas cree que el cambio climático es falso.

c. Ahora queremos calcular el Factor de Bayes, lo hacemos de la misma forma que en el ejercicio 8.9, calculando las posterior odds y las prior odds y haciendo el cociente entre ellas. (ver archivo .qmd)

Obtenemos que el factor de bayes es aproximadamente 750017. Esto significa que los datos de la muestra de 1000 personas proveen evidencia de que es ~750.000 veces más fuerte a favor de la hipótesis alternativa ($\pi > 0.1$) contra la hipótesis nula ($\pi \leq 0.1$). Hay gran evidencia sobre que más del 10% de la población no cree en el cambio climático.

d. Se concluye que la proporción de adultos que no cree en el cambio climático es mucho menor que la creída inicialente. Realizando un contraste de hipótesis se mostró que se rechazó la hipótesis nula, por lo tanto se llegó a que la proporción es mayor que el 10%. Asimismo, se

calculó un intervalo de confianza, en cual se midió que con 95% de confianza, la proporción sería entre 0.129 y 1.733 (observar que la media posterior es de 0.15). Se actualizó la información con la que comenzamos nuestro estudio, luego de muestrear la población. Notar que la priori que seleccionamos en la parte b del ejercicio 8.14 era mucho más acertada que la dada por el autor del libro. En nuestra priori la proporción era de ~16%, mucho menor que el ~33% dado proporcionado por el libro. Esto indica que nos encontrábamos más informados sobre el tema que el autor.

Ejercicio 8.16

Exercise 8.16 (Climate change with MCMC: simulation) In the next exercises, you'll repeat and build upon your climate change analysis using MCMC simulation.

- a. Simulate the posterior model of π , the proportion of U.S. adults that do not believe in climate change, with **rstan** using 4 chains and 10000 iterations per chain.
- b. Produce and discuss trace plots, overlaid density plots, and autocorrelation plots for the four chains.
- c. Report the effective sample size ratio and R-hat values for your simulation, explaining what these values mean in context.

Ejercicio Gibbs Sampling: análisis de sensibilidad a los hiperparámetros.

Buscamos comparar cómo nuestros resultados al utilizar Gibbs Sampling se ven afectados dependiendo de los valores de nuestros hiperparámetros. Vamos a considerar tres casos: los valores iniciales dados por el problema, valores poco informativos y valores muy informativos.

Observación: Una priori no informativa es más débil, tiene una varianza muy grande. No se tiene una creencia fuerte. En cambio, una priori informativa sí es fuerte y tiene varianza muy baja.

Lo que haremos será ejecutar el código proporcionado por el docente y se irán guardando todos los resultados en una tabla, la cual hará la visualización de las diferencias más clara.

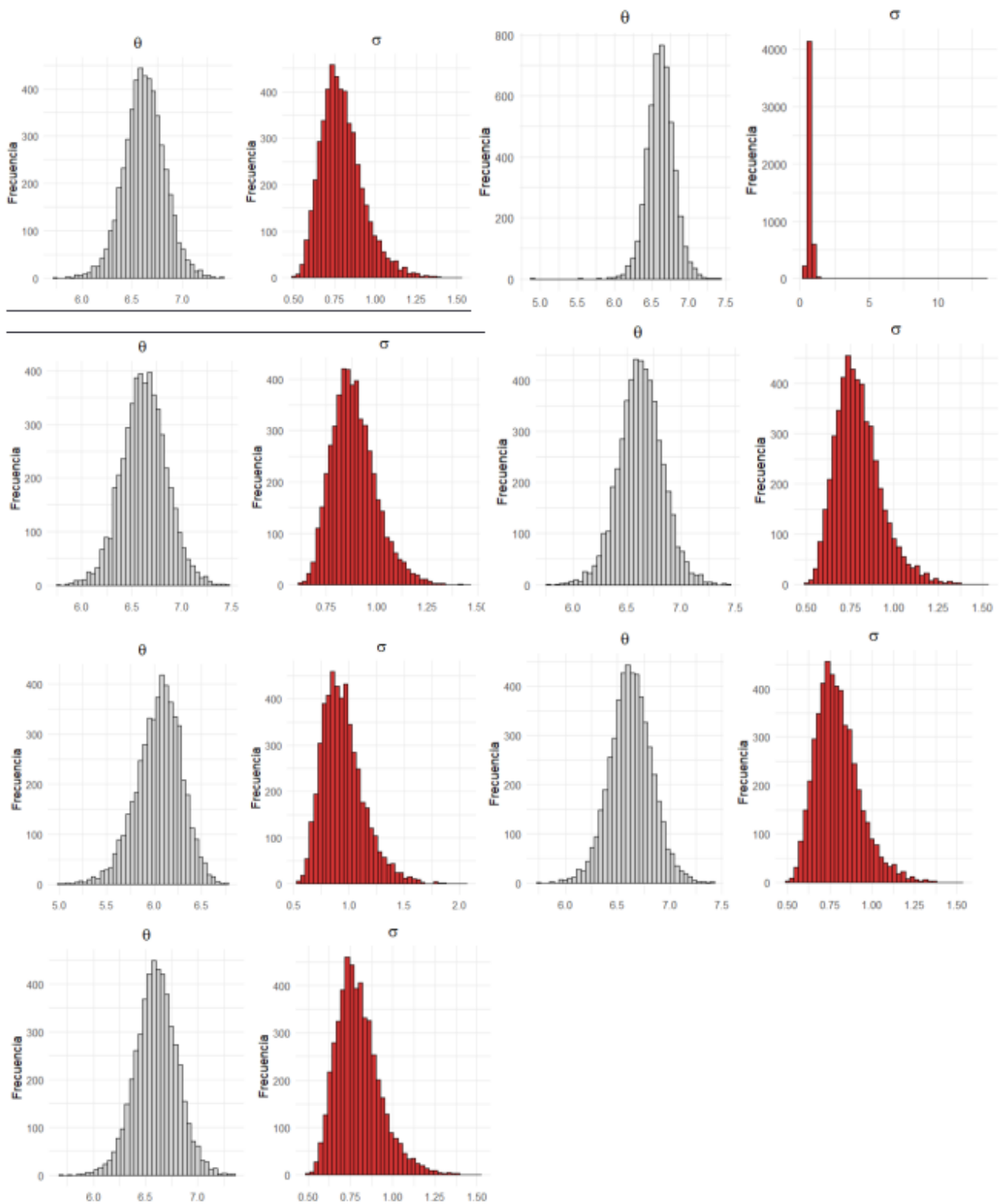
Utilizaremos los siguientes valores para realizar la comparación:

Caso	alpha	beta	tau ²	theta0	¿Qué se evalúa?
1	3.0	3.0	10.0	5.0	Valores iniciales del problema (neutrales)
2	0.1	0.1	10.0	5.0	Valores no informativos de tau ²
3	10.0	10.0	10.0	5.0	Valores informativos de tau ²
4	3.0	3.0	100.0	5.0	Valores no informativos de theta0
5	3.0	3.0	0.1	5.0	Valores informativos de theta0
6	3.0	3.0	10.0	6.6	Utilización de la media (theta0 está centrada en los datos dados)
7	3.0	3.0	10.0	0.0	Valor de theta0 que muestra una creencia sobre que el hiperparámetro no está centrado en los datos dados

Evaluando los valores de los hiperparámetros en cada caso se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Caso	Media a posteriori de theta	Media a posteriori de sigma	Intervalo de Confianza del 90% para theta	Intervalo de Confianza del 90% para sigma
1	6.622	0.797	(6.290 ; 6.945)	(0.615 ; 1.039)
2	6.220	0.696	(6.333 ; 6.908)	(0.510 ; 0.948)
3	6.230	0.888	(6.257 ; 6.987)	(0.727 ; 1.091)
4	6.628	0.797	(6.295 ; 6.953)	(0.615 ; 1.039)
5	6.049	0.948	(5.637 ; 6.409)	(0.688 ; 1.308)
6	6.628	0.797	(6.297 ; 6.953)	(0.615 ; 1.039)
7	6.601	0.798	(6.269 ; 6.924)	(0.616 ; 1.041)

Asimismo, utilizando el código proporcionado por el profesor, también se pueden hacer gráficas para visualizar cada caso. Podemos verlo en la siguiente imagen, ordenadas por caso de izquierda a derecha.



Por otro lado, también se pueden visualizar dos casos más distintivos: uno donde todos los valores de los hiperparámetros son poco informativos y otro donde todos los valores de los hiperparámetros son muy informativos.

Primer caso: Una priori muy poco informativa:

Aquí, $\alpha=0.1$, $\beta=0.1$, $\tau^2=100.0$, y $\theta_0=0.0$. Obtenemos:

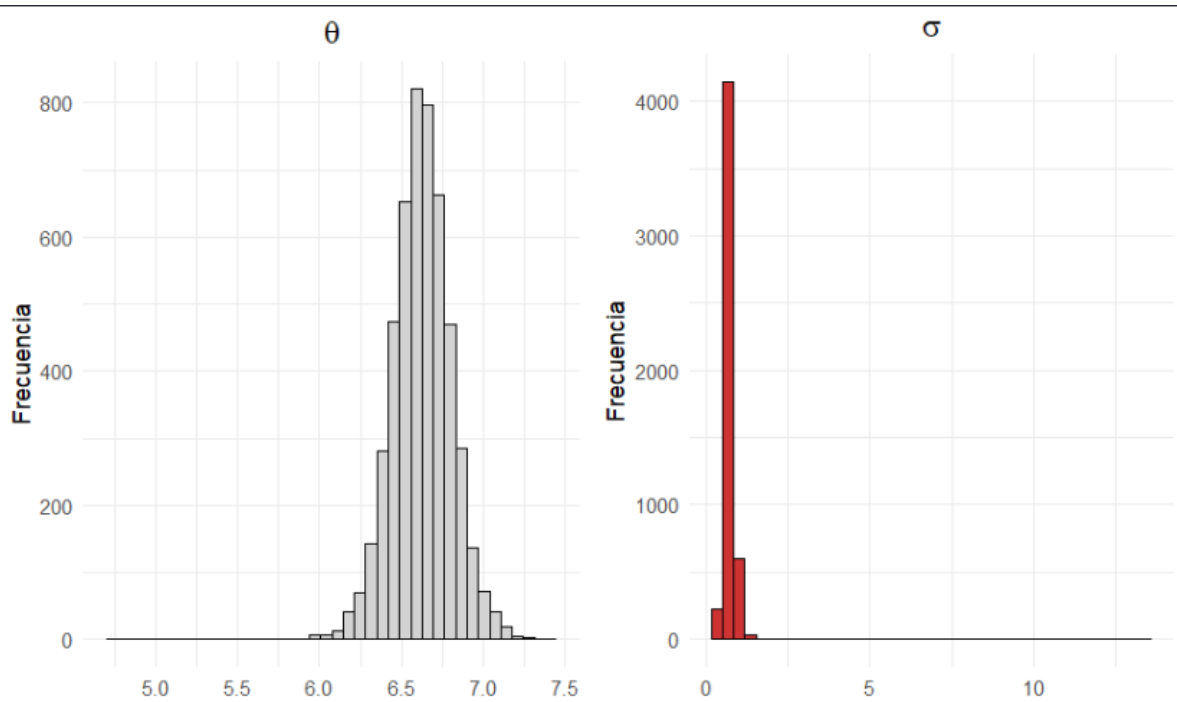
Media de posteriori de θ : 6.625

Media de posteriori de σ : 0.696

Intervalo de confianza al 90% para θ : (6.341 ; 6.911)

Intervalo de confianza al 90% para σ : (0.510 ; 0.947)

El histograma es el siguiente:



Segundo caso: Una priori muy informativa:

Aquí, $\alpha=10.0$, $\beta=10.0$, $\tau^2=0.1$, y $\theta_0=6.6$. Obtenemos:

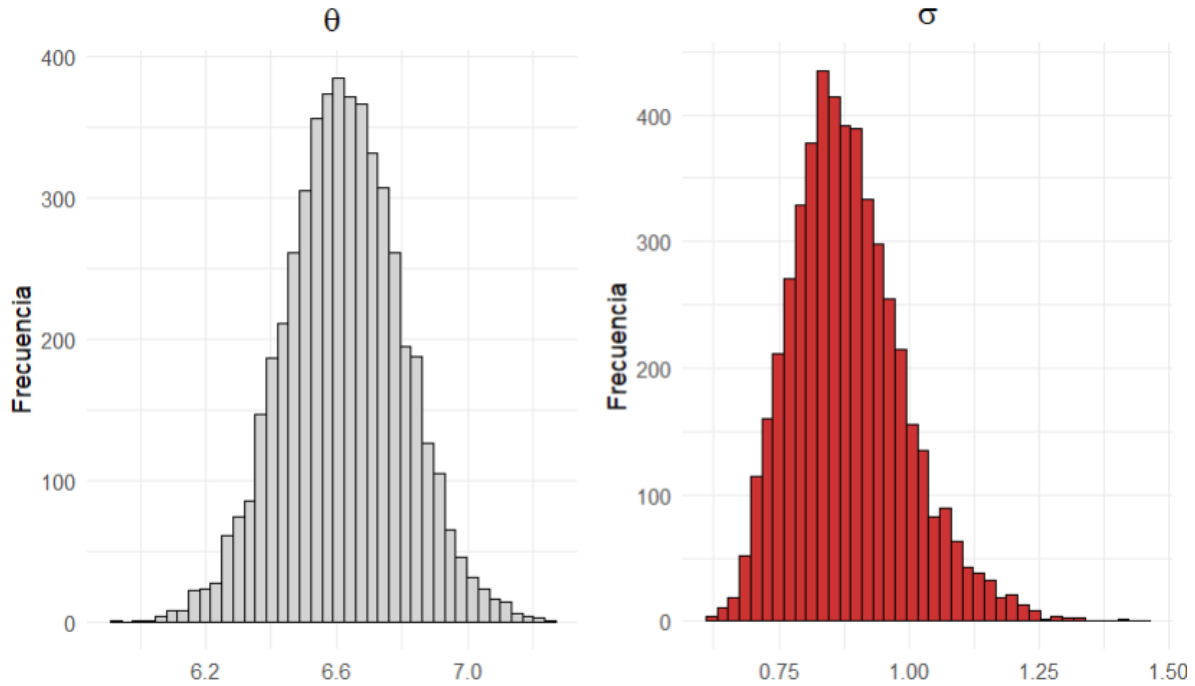
Media de posteriori de θ : 6.621

Media de posteriori de σ : 0.883

Intervalo de confianza al 90% para theta: (6.326 ; 6.916)

Intervalo de confianza al 90% para sigma: (0.725 ; 1.082)

El histograma es el siguiente:



Ahora volvamos a comparar con nuestro “caso base”. los datos neutrales que nos proporcionaron inicialmente:

Aquí, $\alpha=3.0$, $\beta=3.0$, $\tau^2=10.0$, y $\theta_0=5.0$. Obtenemos:

Media de posteriori de theta: 6.622

Media de posteriori de sigma: 0.797

Intervalo de confianza al 90% para theta: (6.290 ; 6.945)

Intervalo de confianza al 90% para sigma: (0.615 ; 1.039)

El histograma es el siguiente:

