Ejercicios capitulos 4 y 5

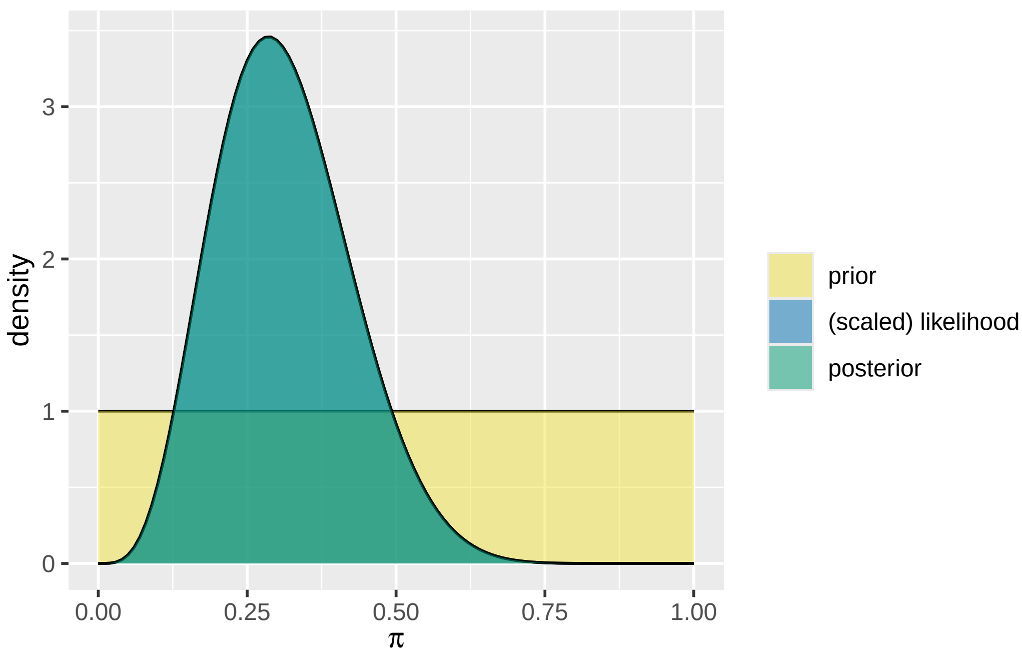
Sofia Terra, Santiago Robatto

2025-09-16

Ejercicio 4.19

```
binary  n   percent
  FAIL 10 0.7142857
  PASS  4 0.2857143
 Total 14 1.0000000
```

Generamos el grafico de prior, verosimilitud y posterior con plot beta binomial



Se observa que la verosimilitud es igual al posterior. Esto ocurre porque el prior es una beta (1,1) que es uniforme en el recorrido. Inter pretando esto de una manera bayesiana, signfiica que no aporta nada de informacion. Se utiliza para repersentar neutralidad absoltua. Siempre que partimos de una beta con tales parametros, la verosimilud sera igual al posterior.

Para el **Calculo teorico de la esperanza y modo** utilizaremos el calculo del posterior del modelo beta binomial, que sabemos que distribuye Beta (α+y,β+n-y).

Table 1: Medidas de resumen beta-binomial(1, 1, 4, 14)

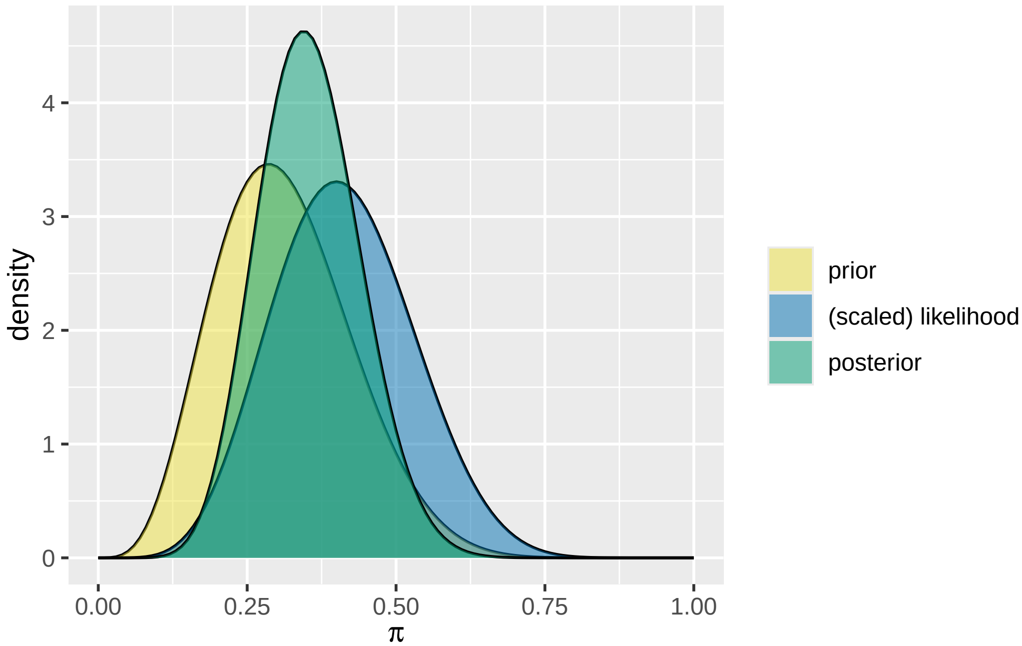
model	alpha	beta	mean	mode	var	sd
prior	1	1	0.5000	NaN	0.0833	0.2887
posterior	5	11	0.3125	0.2857	0.0126	0.1124

Parte dos: Calculo para 1990

Busqueda de la informacion para 1990 (Verosimilitud)

```
binary  n percent
  FAIL  9     0.6
  PASS  6     0.4
 Total 15     1.0
```

Partimos del posterior anterior que ya sabemos como distribuye gracias a la formula del posterior en el modelo beta binomial y cargamos la verosimilitud buscada en el paso anterior. Dicho “posterior” se convirtio en nuestro nuevo prior y se agrega una nueva verosimilitud.



Calculo de la esperanza teorica

Table 2: Medidas de resumen beta-binomial(5, 11, 6, 15)

model	alpha	beta	mean	mode	var	sd
prior	5	11	0.3125	0.2857	0.0126	0.1124
posterior	11	20	0.3548	0.3448	0.0072	0.0846

Parte 3: Ano 2000

Nuestro nuevo prior distribuira Beta(11, 20)

```
 binary  n   percent
   FAIL 34 0.5396825
   PASS 29 0.4603175
  Total 63 1.0000000
```

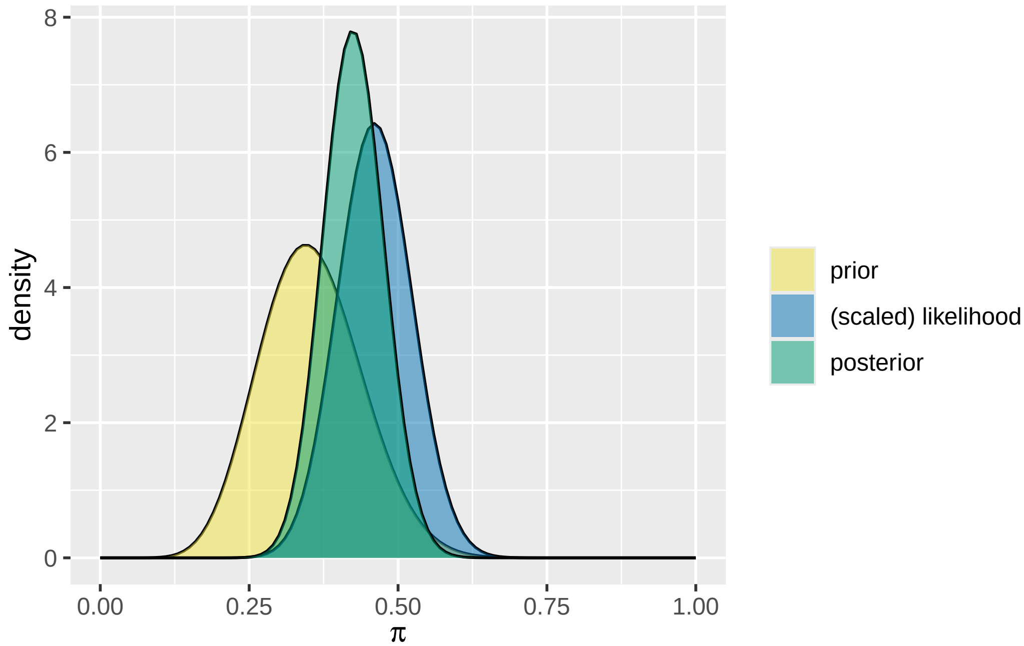


Table 3: Medidas de resumen beta-binomial(11, 20, 29, 63)

model	alpha	beta	mean	mode	var	sd
prior	11	20	0.3548	0.3448	0.0072	0.0846
posterior	40	54	0.4255	0.4239	0.0026	0.0507

Parte 4: Calculo de Jenna

```
binary  n  percent
  FAIL 53 0.576087
  PASS 39 0.423913
 Total 92 1.000000
```

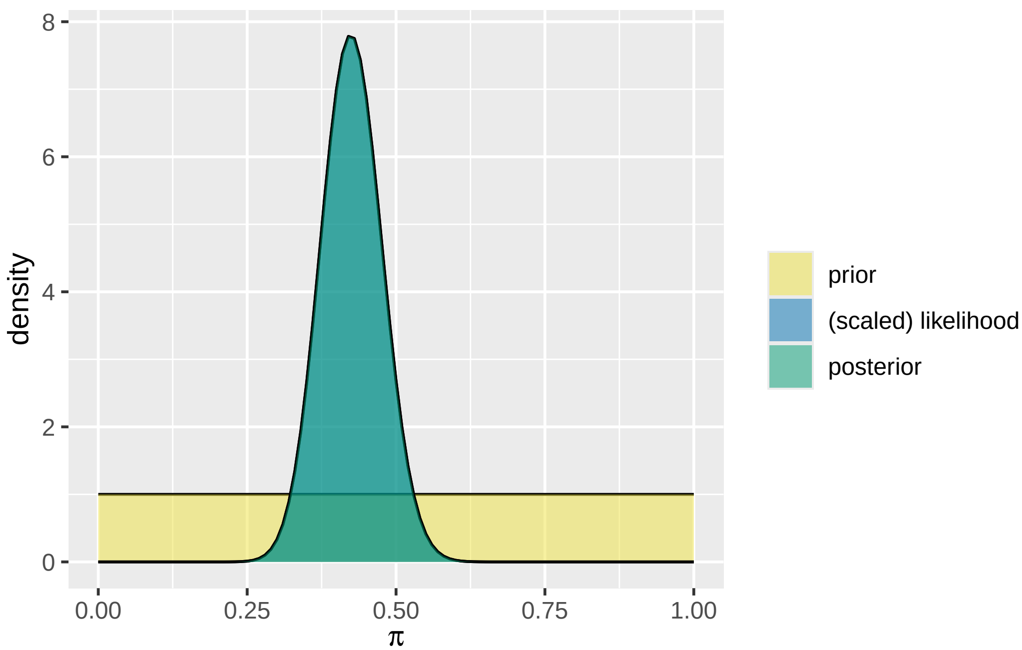


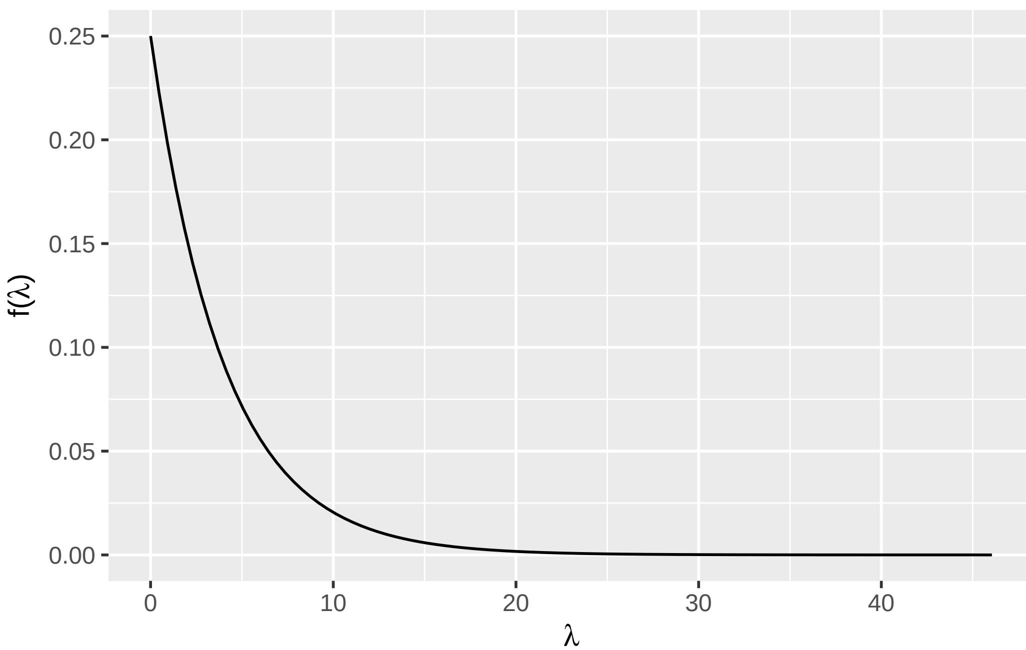
Table 4: Medidas de resumen beta-binomial(1, 1, 39, 92)

model	alpha	beta	mean	mode	var	sd
prior	1	1	0.5000	NaN	0.0833	0.2887
posterior	40	54	0.4255	0.4239	0.0026	0.0507

Se observa que Jenna llega a la misma posterior que John; probando que no importa el orden en el que mires la informacion, se llegara a los mismos resultados. John realiza su analisis en tres dias (pasos), mientras que Jenna solo en uno. Pero al partir del mismo prior (Beta(1,1)) y utilizar las mismas muestras, llegan a los mismos posteriors.

Ejercicio 5.7: Womens world cup

Utilizaremos plot_gamma (1, 0.25) dado que es el prior dado.



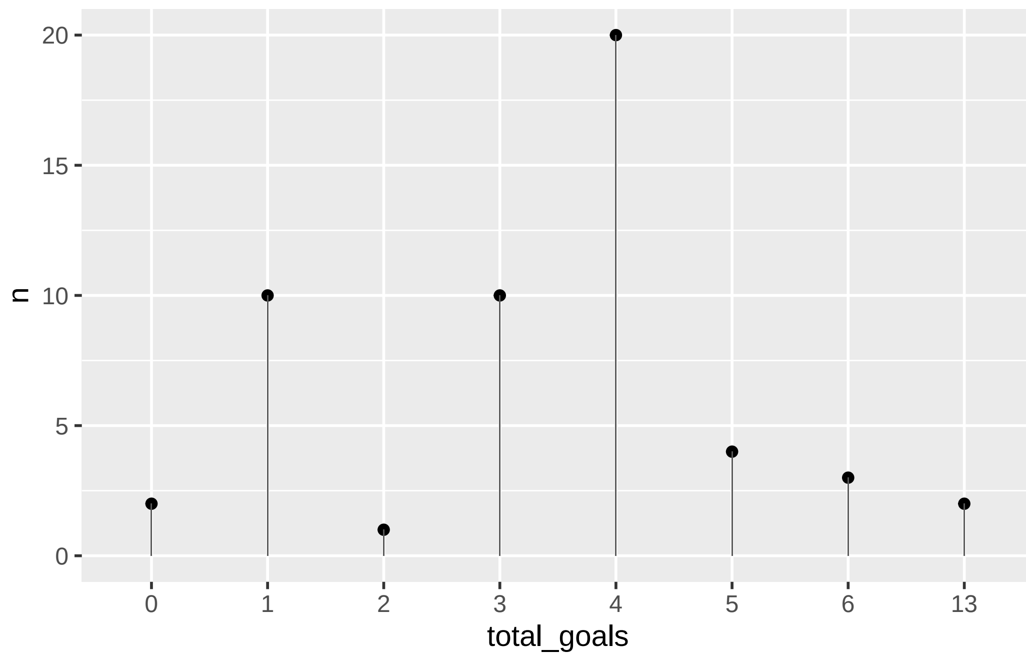
Se observa que λ es decreciente y parte desde cero, con asimetria a la derecha. Es sumamente coherente con el contexto de que λ representa la cantidad de goles promedio, seria extrano que 20 tenga probabilidad alta, por ejemplo. Sugiere que no habra goles en la mayoria de partidos.

Parte 2: Yi para modelo Poisson

Se utiliza el modelo Poisson para representar a Y dado que este es util para los conteos. Y es una variable aleatoria para representar los goles.

Cada Yi es una observacion, es decir los goles de cada partido puntual. Por otro lado λ representa la tasa media de ocurrencia, osea, la cantidad promedio de goles por partido.

Parte 3: Total de goles por partido

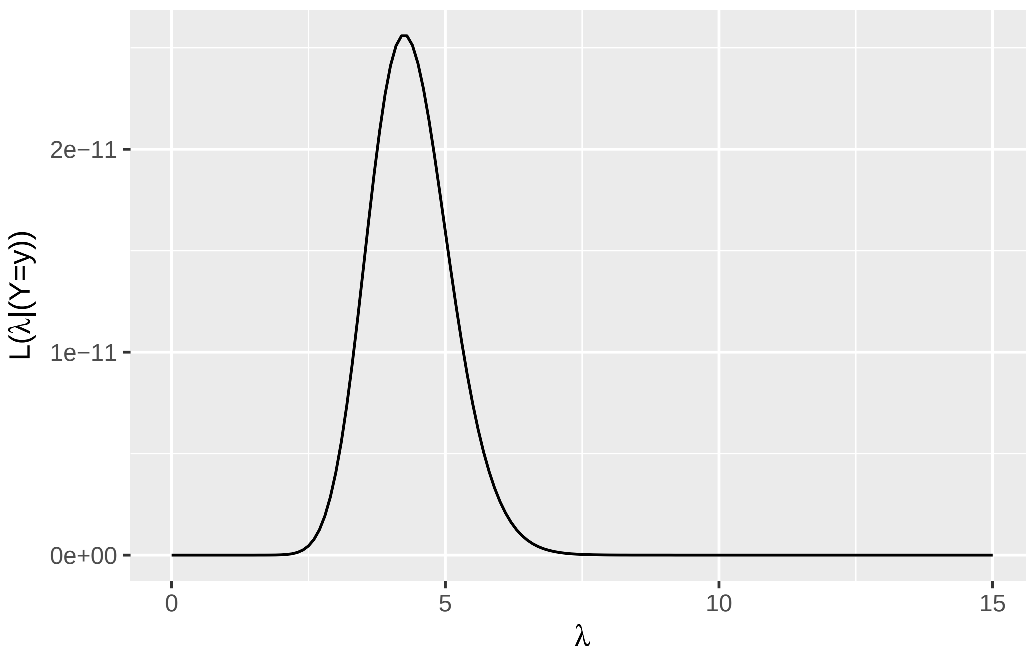


Se observan la cantidad de goles por partido y cuantas veces se repite ese resutado, es decir la frecuencia para cada resultado.

Para poder graficar el posterior y la verosimilitud necesitaremos calcular el total de goles que se convirtieron y el total de partidos. Este ultimo se observa que es 52 en wwc_2019_matches.

Para calcular el total de goles, debemos multriplcar la frecuencia de cada resultado por el total de goles de ese resultad yluego sumarlo.

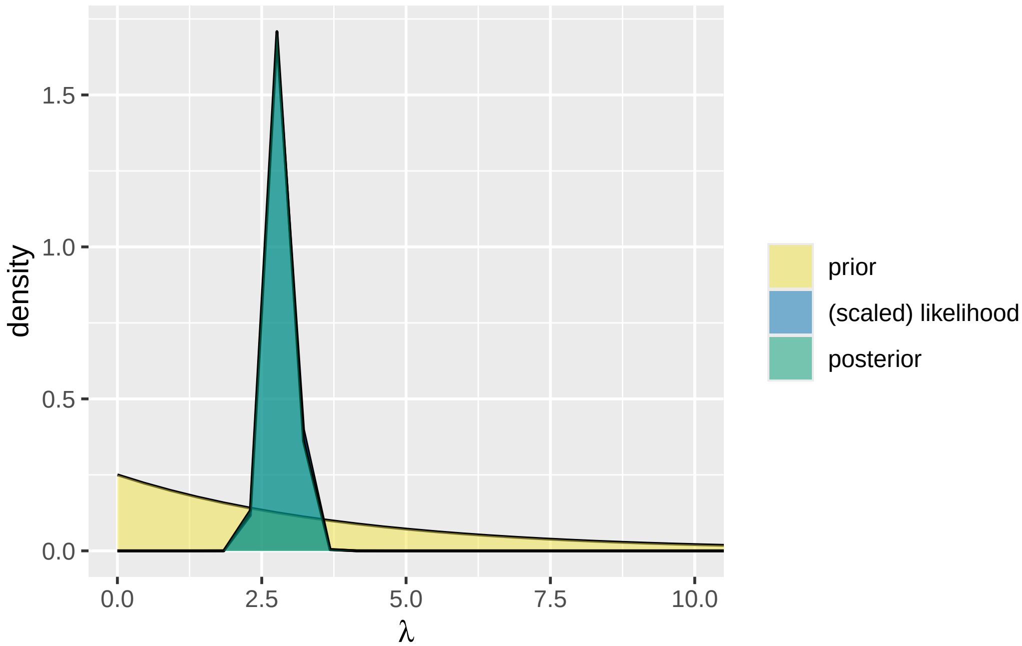
Removeremos el valor NA que generamos antes al utilizar as.numeric (generamos NA el total, que NO interesa graficarlo y alteraria la consistencia de nuestros datos)



Se observa que los valores mas verosimiles de λ rondan entre 3 y 5 goles de media por partido. Es una likelihood muy agresiva, en el sentido de que asigna probabilidad practicamente nula a 0 y 1 gol.

Grafico del posterior

Ahora interesa calcular el posterior. Para ello utilizaremos la funcion plot_gamma_poisson.



En este caso, el posterior y la likelihood son practicamente iguales. Recien al hacer zoom encontramos una pequena diferencia:

Figure 1: Diferencia entre Posterior y likelihood

Pensamos que esto ocurre por varios motivos: Tenemos un n considerablemente grande (52), la funcion de verosimilitud esta sumamente concentrada entorno a un valor y el prior no esta tan concentrado, sino que es mas disperso.

De esta manera, hay un cambio radical en nuestro entendimiento de la media de goles por partido. De pasar de pensar que la media podia ser 0, 1 o 2, pasamos a poder afirmar que la media de goles por partido estara en el entorno de 3.

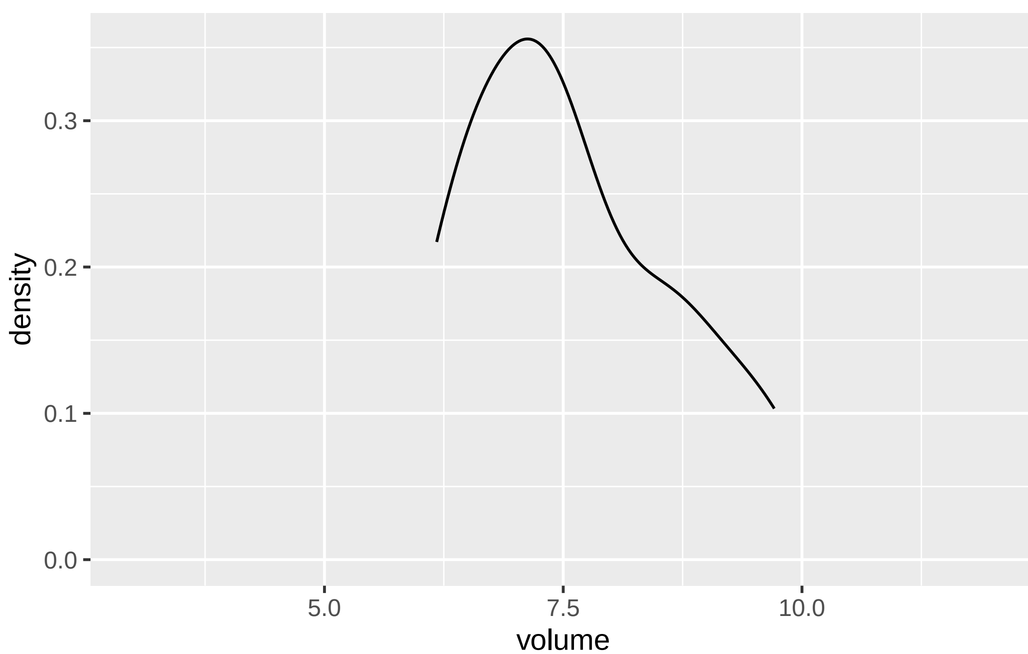
#Ejercicio 5.12: Control brains

Aclaracion: Cuando la letra del ejercicio plantea "control subjects who have not been diagnosed with a concussion", entendemos que refiere al grupo denominado control, pero puede haber habido un error de interpretacion.

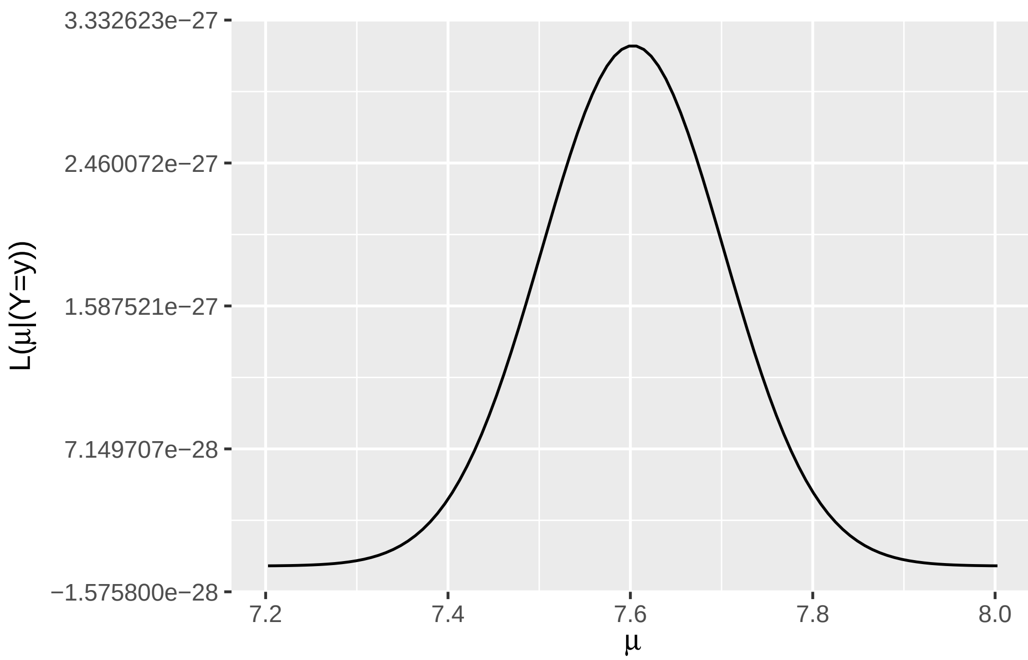
Primero procederemos con cargar la data y filtrarla para el grupo de control.

```
  mean(volume)
1       7.6026
```

El promedio de los sujetos que no tuvieron contusiones es de 7.6026 cm3 en una muestra de 25 personas.



Se observa que los valores van desde 6.175 hasta 9.71 y alcanzan el maximo de densidad entorno a 7.3, que es levemente menor al promedio (7.6026).



De esta manera se visualiza la verosimilitud de u. Los datos reflejan que la media, que calculamos anteriormente es el valor mas probable.

Calculo del posterior

Ya tenemos todo lo necesario para identificar el posterior: El prior tiene media θ=6.5 y τ=0.4 La muestra de los que no tuvieron contusion tiene media y=7.6026 y asumimos desvio conocido, pero por letra del ejercicio σ=0.5.

Sabemos que el Modelo Normal-Normal distribuye de la siguiente manera:

$$Y_i|\mu \overset{ind}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$
$$\mu \sim N(\theta, \tau^2)$$

$$\mu|\vec{y} \sim N\left(\theta\frac{\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2} + \bar{y}\frac{n\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}, \frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)$$

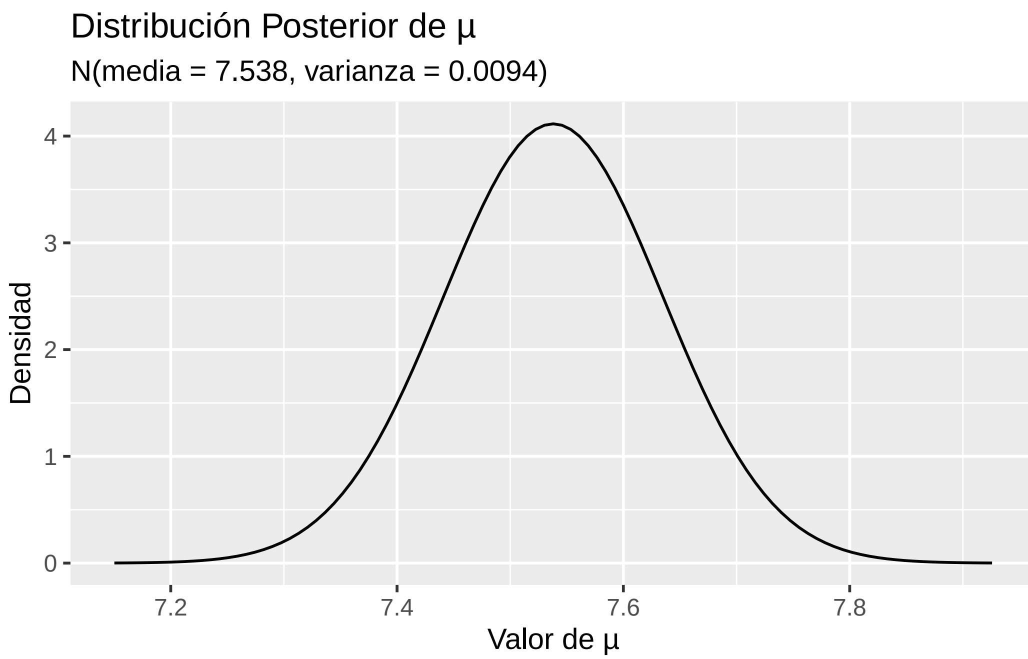
Por lo tanto, sustituyendo los valores que obtuvimos llegammos a que el modelo bayesiano conjugado Normal-Normal es el siguiente:

$$\mu|\vec{y} \sim N\left(6.5\frac{0.5^2}{25*0.4^2+0.5^2} + 7.6\bar{0}26\frac{25*0.4^2}{25*0.4^2+0.5^2}, \frac{0.4^2 0.5^2}{25*0.4^2+0.5^2}\right)$$

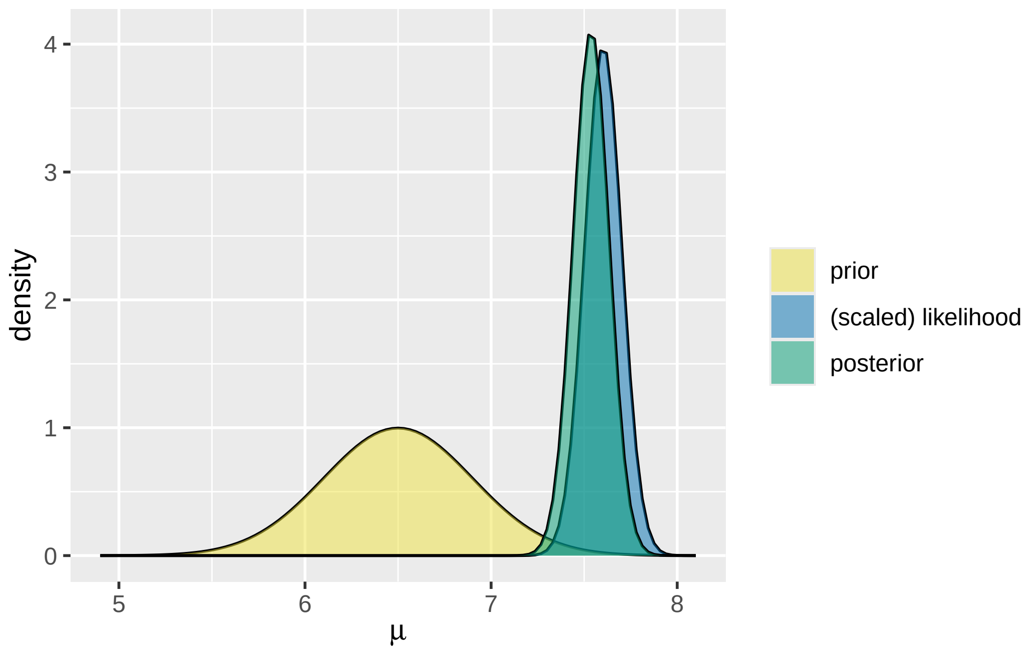
Entonces:

$$\mu|\vec{y} \sim N(7.538,\ 0.0094)$$

El grafico de nuestra distriubucion queda de la forma:



Parte 3: Plot del prior, verosimilitud y posterior



Nuevamente, dado que tenemos una verosimilitud cuyos datos estan tan concentrados, el posterior se pega mucho a la verosimilitud, siendo estos muy similares en forma y media.

Table 5: Medidas de resumen para Normal-Normal(6.5, 0.4, 0.5, 7.6026, 25)

model	mean	mode	var	sd
prior	6.5000	6.5000	0.1600	0.400
posterior	7.5377	7.5377	0.0094	0.097

De esta manera confirmamos que nuestrio posterior calculado manualmente en la Parte 2 era correcto.

Ejercicio Normal-Normal Conjugada

Consigna:

(i) Calcular la distribución a posteriori para μ.

(ii) Demostrar que la distribución a posteriori para μ es normal con media igual a un promedio ponderado de la media a priori θ y de la media muestral.

(iii) Analizar la influencia del tamaño muestral n sobre la media y la varianza de la distribución a posterior para μ. Conclusión: la distribución a priori normal para μ es conjugada con el modelo muestral de observaciones independientes de una población normal con media μ y varianza conocida σ2

Respuestas: Nos basamos en la guia del libro para demostrar la consigna paso a paso. Vamos a probar que la posteriori del modelo Normal-Normal sigue tambien una distribucion normal

Primero, tenemos que la funcion de densidad de mu es proporcional al producto de la funcion de densidad priori de la Normal y la funcion de verosimilitud. Para todo mu perteneciente a los reales tenemos:

$$f(\mu|\vec{y}) \propto f(\mu)L(\mu|\vec{y}) \propto \exp\left[-\frac{(\mu-\theta)^2}{2\tau^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(\bar{y}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}\right]$$

Luego, podemos desarrollar los numeradores, haciendo comun denominador y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
f(\mu|\vec{y}) &\propto \exp\left[\frac{-\mu^2+2\mu\theta-\theta^2}{2\tau^2}\right]\exp\left[\frac{-\mu^2+2\mu\bar{y}-\bar{y}^2}{2\sigma^2/n}\right] \\
&\propto \exp\left[\frac{-\mu^2+2\mu\theta}{2\tau^2}\right]\exp\left[\frac{-\mu^2+2\mu\bar{y}}{2\sigma^2/n}\right] \\
&\propto \exp\left[\frac{(-\mu^2+2\mu\theta)\sigma^2/n}{2\tau^2\sigma^2/n}\right]\exp\left[\frac{(-\mu^2+2\mu\bar{y})n\tau^2}{2\tau^2\sigma^2/n}\right] \\
&\propto \exp\left[\frac{(-\mu^2+2\mu\theta)\sigma^2+(-\mu^2+2\mu\bar{y})n\tau^2}{2\tau^2\sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

Ahora, combinamos los terminos mu y reordenamos para que mu^2 “se encuentre sola”:

$$\begin{aligned}
f(\mu|\vec{y}) &\propto \exp\left[\frac{-\mu^2(n\tau^2+\sigma^2)+2\mu(\theta\sigma^2+\bar{y}n\tau^2)}{2\tau^2\sigma^2}\right] \\
&\propto \exp\left[\frac{-\mu^2+2\mu\left(\frac{\theta\sigma^2+\bar{y}n\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)}{2(\tau^2\sigma^2)/(n\tau^2+\sigma^2)}\right]
\end{aligned}$$

Ahora podemos factorizar:

$$f(\mu|\vec{y}) \propto \exp\left[-\frac{\left(\mu-\frac{\theta\sigma^2+\bar{y}n\tau^2}{n\tau^2+\sigma^2}\right)^2}{2(\tau^2\sigma^2)/(n\tau^2+\sigma^2)}\right]$$

Obtenemos el nucleo de una funcion de densidad de una Normal para mu. Utilizando esto podemos concluir que la distribucion queda de esta forma:

$$\mu|\vec{y} \sim N\left(\frac{\theta\sigma^2 + \bar{y}n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}, \frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2}\right)$$

Podemos reorganizar la media de la posteriori para demostrar que es el promedio ponderado de la media a priori de μ ($E(\mu) = \theta$) y la media de la muestra de $\bar{y}$.

$$\frac{\theta\sigma^2 + \bar{y}n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2} = \theta\frac{\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} + \bar{y}\frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}$$

Obtenemos tambien que la varianza a posteriori obtiene informacion de la variabilidad a priori de τ y la variabilidad en los datos de σ. Ambos se ven afectados por el tamano de la muestra, n.

En primer lugar, a medida que n aumente, la media a posteriori toma una ponderacion menos en la media a priori y mayor ponderacion en la media de la muestra $\bar{y}$. Tenemos entonces:

$$\frac{\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{n\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \to 1$$

Luego, cuando n aumenta, la variana posteriori disminuye:

$$\frac{\tau^2\sigma^2}{n\tau^2 + \sigma^2} \to 0$$

Esto significa que, a medida que obtenemos mayor cantidad de datos, la certeza de la posterior con respecto a μ aumenta y se vuelve mas cercana a los valores de la informacion.