Calculo Numérico: Trabalho 1

Jean Jordanou, Eduardo Camponogara e Laio Seman

(Setembro 2024)

1 Problema 1: Equação Não Linear

A função $\texttt{sinc}(x)$ é bastante conhecida no contexto de processamento de sinais, sendo bastante utilizada no contexto de reconstrução de sinais discretizados, de volta no tempo contínuo.

A sua versão padrão possui a seguinte equação:

$$\texttt{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{1}$$

Tarefas

1. Plote a função $f(x)$ para o intervalo $x = [0.1, 8]$. Dica: repare no gráfico os pontos onde $f(x) = 0$.

2. Dado o plot obtido, escolha dois pontos do eixo x e execute o método da bissecção para encontrar um zero da função.

3. Dado o plot obtido, escolha dois pontos do eixo x e execute o método da falsa posição. Encontre um zero ($f(x) = 0$) diferente que o utilizado na questão anterior.

4. Escolha um ponto inicial para executar o método de Newton. Execute o algoritmo para encontrar o mesmo ponto escolhido para a bissecção.

5. Escolha pontos iniciais para executar o método da secante. Execute o algoritmo para encontrar o mesmo ponto escolhido para a falsa posição.

Importante

- Use como critérios de parada um número máximo de 100 iterações e $|f(x)| < 10^{-6}$.

- Para cada método utilizado, plote os pontos intermediários e erros ($|f(x)|$) obtidos em cada iteração.

2 Problema 2: Equação de Calor (Resolução de Sistemas Lineares)

Equações Diferenciais Parciais (EDP) servem como ferramentas para resolver inúmeros problemas de física e engenharia. Começando por problemas de distribuição de esforço mecânico em corpos como robôs e vigas, aerodinâmica, modelagem e simulação de reservatórios de petróleo, mecânica quântica, teoria da relatividade geral, entre outras diversas aplicações.

Um tipo de EDP bastante estudado, devido a sua simplicidade, é a equação de calor, descrita da seguinte forma:

$$k\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} = q(x) \tag{2}$$

Essa equação descreve os valores de temperatura T ao longo de um eixo unidimensional onde $x \in (0, 1)$. Também é considerado um fluxo de calor exógeno $q(x)$. Para resolver uma EDP, primeiramente é preciso saber suas condições de contorno. Para esse caso, elas são definidas como:

$$\begin{cases} T(0) = T_{begin} \\ T(1) = T_{end} \end{cases}. \tag{3}$$

É possível resolver de forma linear a equação de calor da forma apresentada em (2), porém não é garantido que EDPs, lineares ou não, tenham uma solução analítica disponível (Não foi encontrado um jeito de representar T como uma função conhecida). Para esses casos, utilizamos métodos de aproximação numérica, de forma a transformar o problema de resolver uma EDP em algo computacionalmente viável.

É possível utilizar um método chamado **Diferenças Finitas** para transformar EDPs como a equação de calor, em um sistema de equações lineares.

Dito isso, a equação de calor possui a seguinte aproximação discreta:

$$(k/h^2)\mathbf{D_2 T} = \mathbf{Q} - (k/h^2)\mathbf{BC} \tag{4}$$

onde $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{BC}$ são matrizes e vetores de dimensões adequadas definidos abaixo. O parâmetro h é o espaçamento dos pontos de interesse, sendo os mesmos definidos da seguinte forma:

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{5}$$

A matriz $\mathbf{T}$ é organizada de tal forma que o elemento i corresponde a $T(x_i)$, obtendo:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(x_1) \\ T(x_2) \\ \vdots \\ T(x_N) \end{pmatrix} \tag{6}$$

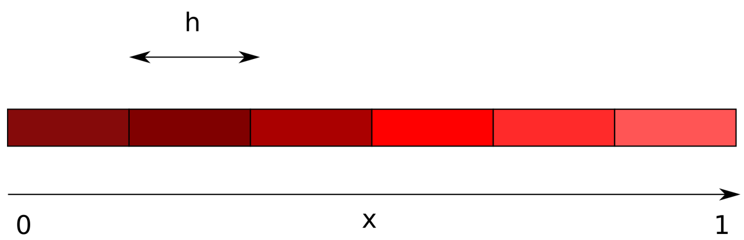

Figure 1: Representação gráfica da discretização da barra sujeita à equação de calor.

A Figura 1 demonstra uma representação gráfica dessa discretização da barra, sendo cada intersecção dos blocos um ponto de medida de temperatura.

O numero $N \in \mathbb{N}$ de elementos da matriz $\mathbf{T}$ é definido da seguinte forma:

$$N = 1/h + 1 \tag{7}$$

A matriz $\mathbf{D_2} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é obtida pela discretização da derivada parcial no espaço, $\mathbf{BC} \in \mathbb{R}^N$ oriundo das condições de contorno e $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^N$ advindo do termo $q(x_i)$. As mesmas possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{D_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} T_{begin} \\ 0 \\ \vdots \\ T_{end} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q(x_1) \\ q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_N) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Alternativamente, pode-se dizer que os elementos da matriz $\mathbf{D_2}$, com linha i e coluna j, possuem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{D_2}(i,j) = \begin{cases} -2 & i = j \\ 1 & i = j+1, i = j-1 \\ 0 & \text{outros} \end{cases} \tag{11}$$

Dado os seguintes valores para os parâmetros do problema:

$$\begin{aligned} k &= 2.5 \\ T_{begin} &= 60 \\ T_{end} &= 40 \\ q(x) &= \sin(x) + 1 \end{aligned}$$

Considere estes 3 casos:

$$h = \begin{cases} 0.2 & \text{caso a)} \\ 0.1 & \text{caso b)} \\ 0.05 & \text{caso c)} \end{cases}$$

Para cada valor de h, Faça:

1. Calcule o número de elementos N de $\mathbf{T}$.
2. Represente o sistema na forma $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$.
3. Encontre $\mathbf{T}$ (vetor de temperaturas no espaço) utilizando o algoritmo de resolução de sistemas lineares a sua escolha. Demonstre a implementação.
4. Apresente um gráfico de T ao longo do espaço.

3 Problema 3: Sistemas Não Lineares

As equações de equilíbrio para uma aeronave específica consistem em um sistema de 5 equações e 8 variáveis com a forma:

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + g(\mathbf{x}) = 0 \tag{12}$$

onde $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, e a matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -3.933 & 0.107 & 0.126 & 0 & -9.99 \\ 0 & -0.987 & 0 & -22.95 & 0 \\ 0.002 & 0 & -0.235 & 0 & 5.67 \\ 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 0 & -0.196 \end{bmatrix}$$

A parcela não-linear é definida como

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0.727x_2x_3 + 8.39x_3x_4 - 684.4x_4x_5 + 63.5x_4x_2 + 0.2 \\ 0.949x_1x_3 + 0.173x_1x_5 + 0.35 \\ -0.716x_1x_2 - 1.578x_1x_4 + 1.132x_4x_2 + 0.6 \\ -x_1x_5 + 0.7 \\ x_1x_4 + 1 \end{bmatrix}$$

As primeiras três variáveis (x_1, x_2 e x_3) representam as taxas de roll, pitch e yaw, respectivamente, enquanto x_4 é o ângulo de ataque incremental e x_5 é o ângulo de derrapagem.

Tarefas:

1. Utilize $\mathbf{x}^{(0)} = [0.2, 0.5, 0.85, 0.93, 0.22]^T$ como condição inicial e implemente o método de Newton multivariável para calcular os valores de x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 que resolvem a Eq. (12). Utilize o critério de parada $\|f(\mathbf{x})\| < 10^{-6}$.

2. Plote a norma quadrática $\|f(\mathbf{x})\|$ ao longo do runtime do algoritmo.

3. Coloque em uma tabela os 5 primeiros valores achados para $\mathbf{x}$ pelo método de Newton.