

## Punto 2

Santiago Ortiz  
C.C 1214748358

### Método de integración Leapfrog

El método de integración Leapfrog consiste en actualizar la posición y la velocidad (variable dependiente y su derivada) haciendo uso de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t^2, \\v_{i+1} &= v_i + \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \Delta t.\end{aligned}$$

Figure 1: leapfrog equations [1]

En el caso del tiro parabólico, la aceleración para  $x$  es nula ( $a_i = 0$ ) mientras que para  $y$  se cumple que  $a_{y,i} = a_{y,i+1} = g$ . Las ecuaciones de movimiento quedan entonces como:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + v_{x,i} \Delta t & v_{x,i+1} &= v_{x,i} \\y_{i+1} &= y_i + v_{y,i} \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2 & v_{y,i+1} &= v_{y,i} + g \Delta t\end{aligned}$$

Ecuaciones que, al tomar diferenciales de tiempo, coinciden con la solución analítica.

### Leapfrog vs Euler

El código implementado permitió comparar el método de integración de leapfrog con el de Euler obteniéndose que, a medida que aumenta el número de pasos de integración, los métodos convergen hacia la misma trayectoria (figuras 2, 3, 4) y que el método de leapfrog necesita menos pasos para converger (figura 5).

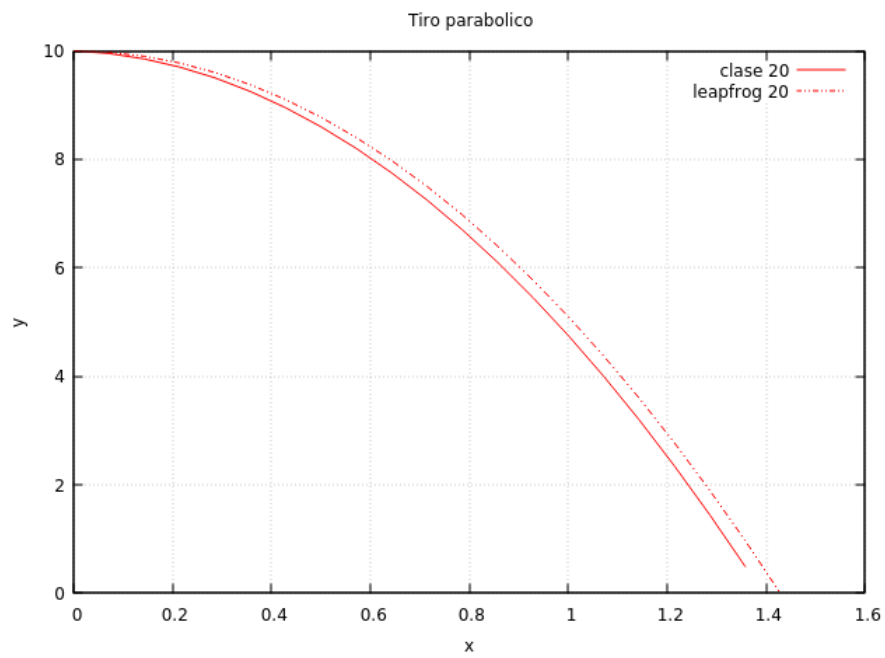


Figure 2: Euler vs Leapfrog. 20 pasos de integración

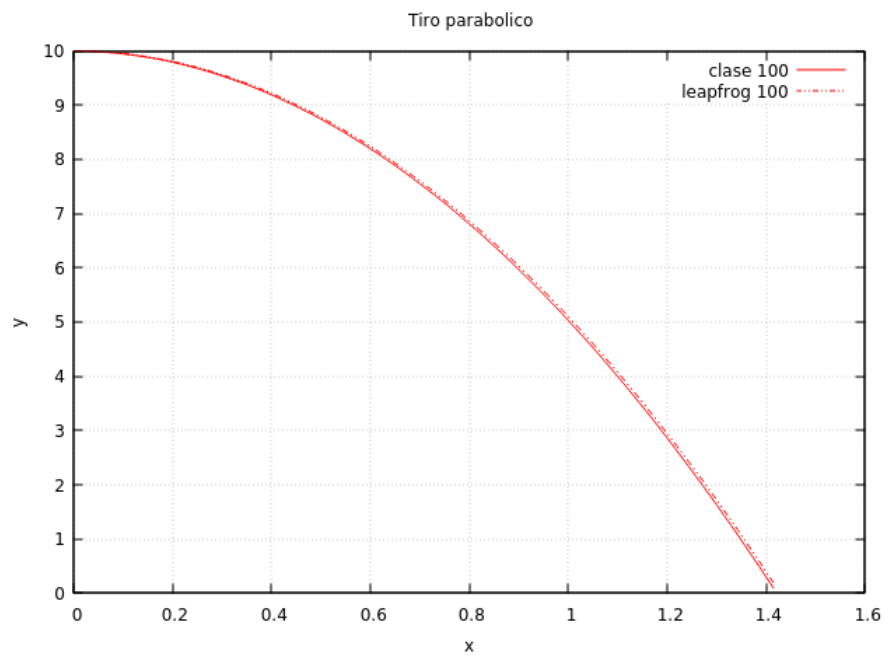


Figure 3: Euler vs Leapfrog. 100 pasos de integración

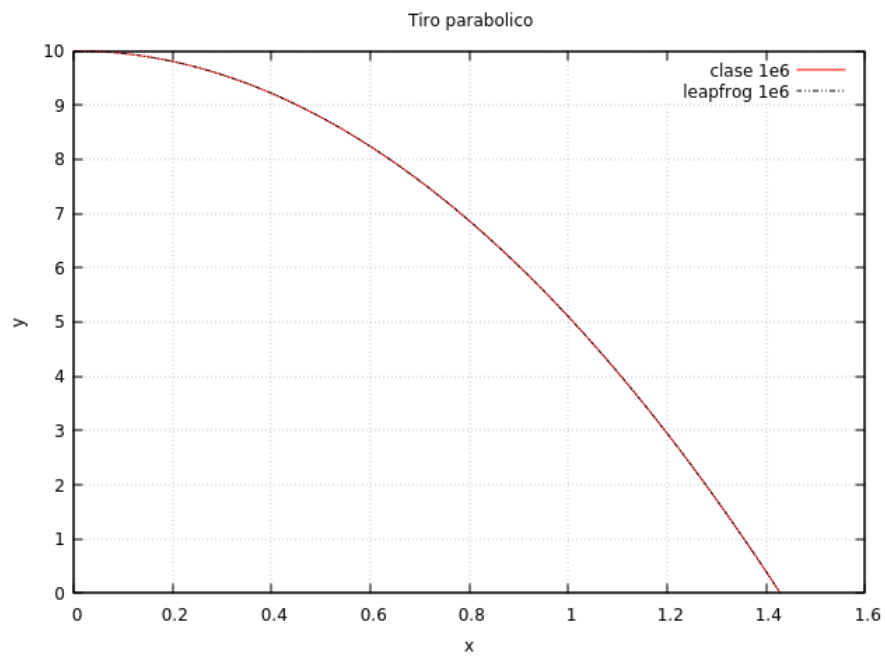


Figure 4: Euler vs Leapfrog. 1e6 pasos de integración

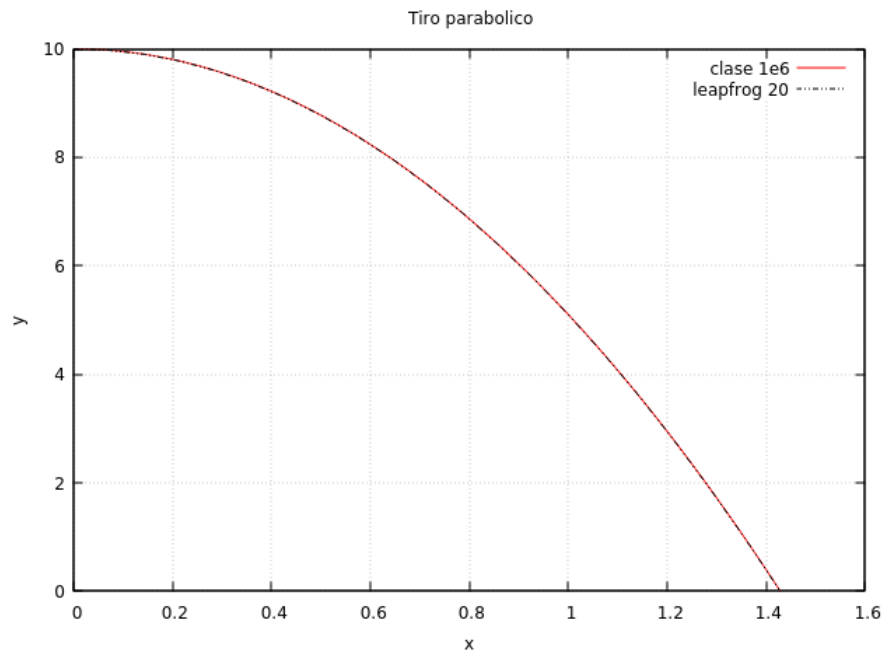


Figure 5: Euler (1e6 pasos) vs Leapfrog (20 pasos)

## References

- [1] Wikipedia Contributors. (2022, January 29). Leapfrog integration. Wikipedia; Wikimedia Foundation.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Leapfrog\\_integration](https://en.wikipedia.org/wiki/Leapfrog_integration)