

Transformações Geométricas

Computação Gráfica
Prof. Leandro C. Fernandes

Objetivos

- Entender os princípios das transformações geométricas que realizam as operações conhecidas como: translação, rotação, escala, cisalhamento e reflexão.
- Conhecer e compreender o que são coordenadas homogêneas, entendendo que o seu emprego facilita a descrição e realização combinada de transformações.

Transformações Geométricas

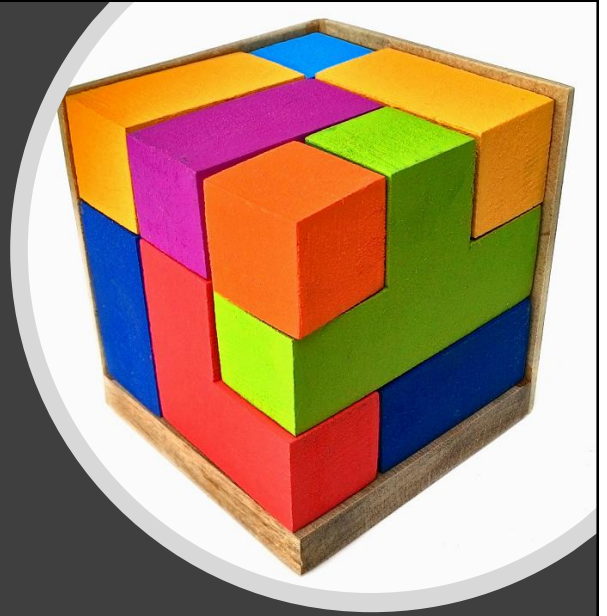
- Transformações são a base de inúmeras aplicações gráficas
- O que são elas?
 - São usadas para mostrar ou representar objetos gráficos
 - Matemática: Mapeamento entre valores (função/relação)
 - Geométrica: translação, rotação, escala, cisalhamento,...
- Por quê são importantes em computação gráfica?
 - Move o objeto na tela / no espaço
 - Mapeamento do modelo no espaço para a tela.

Exemplos de uso

- Representar layouts de circuitos eletrônicos (trilhas de circuito).
- Planejamento de cidades
 - Movimentos de translação para colocar os símbolos que definem edifícios e árvores em seus devidos lugares, rotações para orientar corretamente esses símbolos e alteração de escala para adequar o tamanho desses símbolos, etc.
- Base para o desenvolvimento de software sofisticados que permitem a construção de cenas realistas.
- Perspectiva de visão do cenário pelo jogador em games do tipo FPS (*First-Person-Shotter*).

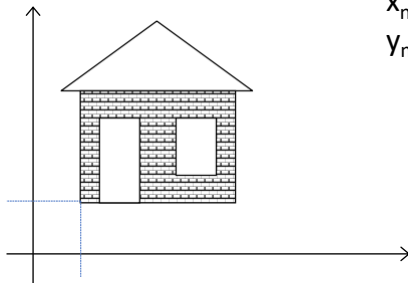
Transformações Geométricas 2D

- Transformações básicas:
 - Translação (*Translation*) (T)
 - Escala (*Scaling*) (S)
 - Rotação (*Rotation*) (R)
- Outras Transformações:
 - Reflexão (*Reflection*)
 - Cisalhamento (*Shearing*)

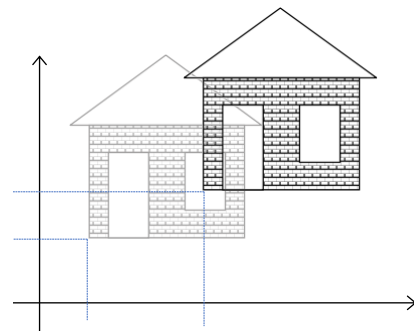


Translação

- Altera a posição do objeto no espaço (deslocamento)

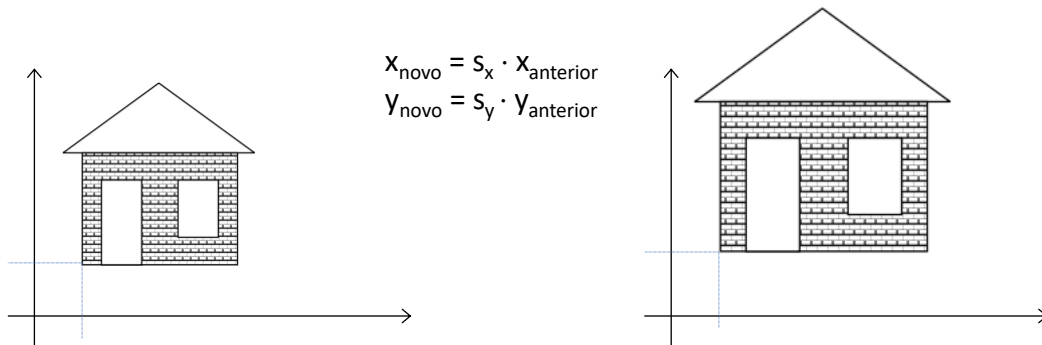


$$\begin{aligned}x_{\text{novo}} &= t_x + x_{\text{anterior}} \\ y_{\text{novo}} &= t_y + y_{\text{anterior}}\end{aligned}$$



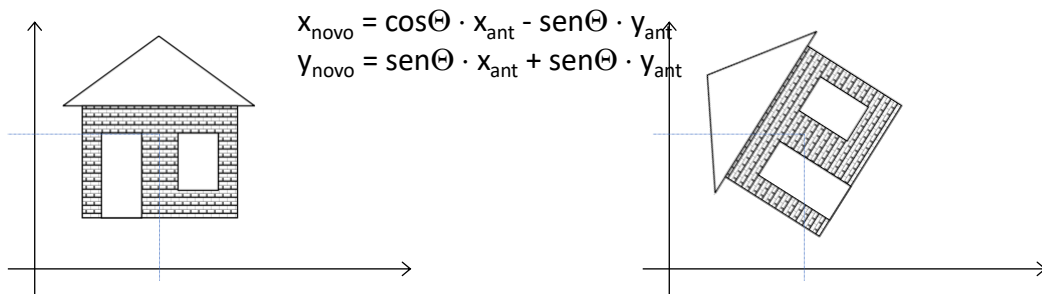
Escala

- Altera das dimensões do objeto
 - O uso clássico desta operação em computação gráfica é a função ampliação (*zoom in*) ou redução (*zoom out*).



Rotação

- Modifica a orientação do objeto em relação ao sistema.
 - Corresponde a rotação de um ponto formando certo ângulo em relação a um ponto de referência. A transformação ocorre sem que haja alteração na distância entre eles.

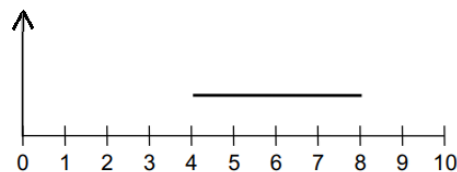
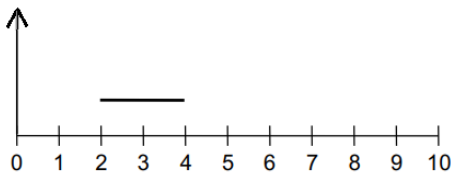


Transformações como Matrizes

- Translação: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x + x \\ t_y + y \end{bmatrix}$
- Escala: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + s_y \cdot y \end{bmatrix}$
- Rotação: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \end{bmatrix}$

Transformações com Ponto Fixo

- Note que as transformações de escala e de rotação, por serem definidas a partir da origem, acabam deslocando o objeto se este não estiver lá posicionado.
 - Exemplo: Mudança de escala em 2x para a linha de (2,1) até (4,1)
- Deste modo, para que não ocorra translação indesejada decorrente da rotação ou do escalamento é necessário:
 - (1) Transladar o objeto para a origem;
 - (2) Aplicar a transformação desejada; e
 - (3) Transladá-lo novamente ao ponto inicial.



Como aplicar consecutivas transformações?

- Observe que a translação é tratada de forma diferente das outras.
 - A Translação corresponde a uma operação de soma, enquanto as transformações de Rotação e de Escala são multiplicações.
 - $P' = T + P$
 - $P' = S \cdot P$
 - $P' = R \cdot P$
- Para que possamos **combinar essas transformações**, devemos tratar todas as transformações da mesma forma.
- Se expressarmos os **pontos em Coordenadas Homogêneas**, todas as transformações poderão ser tratadas como multiplicações!

Coordenadas Homogêneas

- As coordenadas homogêneas de um ponto (x, y) são:

$$(x', y', w)$$

... em que $x = x'/w$, $y = y'/w$ e w é qualquer número real diferente de 0.
- Um conjunto de coordenadas homogêneas é dado na forma $(x, y, 1)$
 - Essa forma representa o ponto (x, y)
- Todas as outras coordenadas homogêneas são da forma (wx, wy, w)
 - Note que a representação em coordenadas homogêneas não é única.
 - Por exemplo: $(6,4,2)$, $(12,8,4)$, $(3,2,1)$ representam o mesmo ponto $(3,2)$

Transformações usando Coord. Homogêneas

- Desta forma todas as transformações de um ponto em coordenadas homogêneas podem ser tratadas como multiplicações.
- $P' = \begin{cases} T \cdot P \\ S \cdot P \\ R \cdot P \end{cases}$
- Translação: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
- Escala: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$
- Rotação: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Transformações combinadas

- Suponha que queremos realizar múltiplas transformações sobre um ponto:
 - Translação de $x=3$ e $y=1$: $P' = T_{3,1} \cdot P$
 - Escala de 2 vezes em x e y .: $P'' = S_{2,2} \cdot P'$
 - Rotação de 30° a esquerda: $P''' = R_{30} \cdot P''$
- Isso resultado é equivalente se fazemos a multiplicação por uma matriz combinada M , de modo que:
 - $M = R_{30} \cdot S_{2,2} \cdot T_{3,1}$
- Ou seja: $P''' = M \cdot P$

Transformação combinada (exemplo)

- Realizar uma rotação de 45° em torno do ponto (x,y)

- Translade (x,y) para a origem;
- Faça a Rotação; e
- Translade a origem para (x,y)

- Isto é:

$$P' = T_{x,y} \cdot R_{30} \cdot T_{-x,-y} \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eficiência

- Uma composição genérica de transformações R, S e T, produz:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde a sub-matriz 2x2 esquerda corresponde a composição de R e S, enquanto o último vetor coluna provém da translação.

- Como o última linha da matriz é fixa, ao multiplicarmos a matriz M pelo vetor P (ponto), temos que computamos apenas:

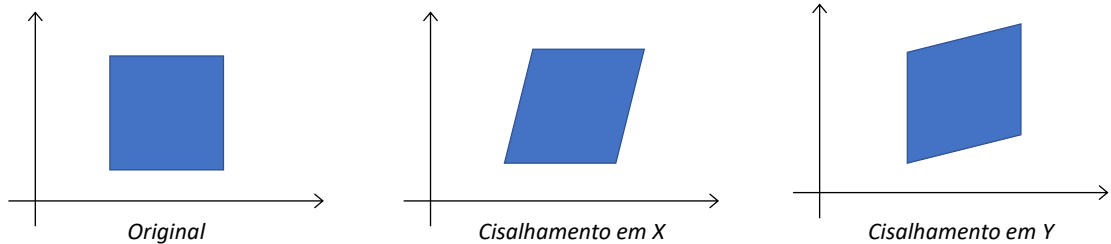
$$\begin{aligned} x' &= x \cdot r_{11} + y \cdot r_{12} + t_x \\ y' &= x \cdot r_{21} + y \cdot r_{22} + t_y \end{aligned}$$

reduzindo o processo a apenas 4 multiplicações e 4 somas!

Cisalhamento (*Shearing*)

- Causa uma deformação/distorção no objeto em direção de uma ou de ambas as coordenadas.

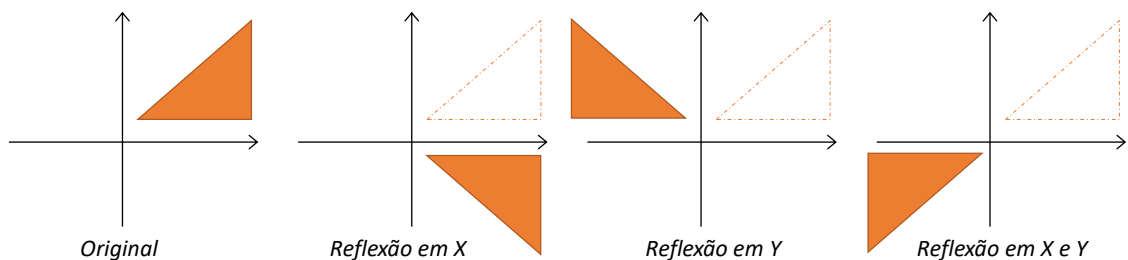
- Distorção na direção de X: $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e Distorção em Y: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

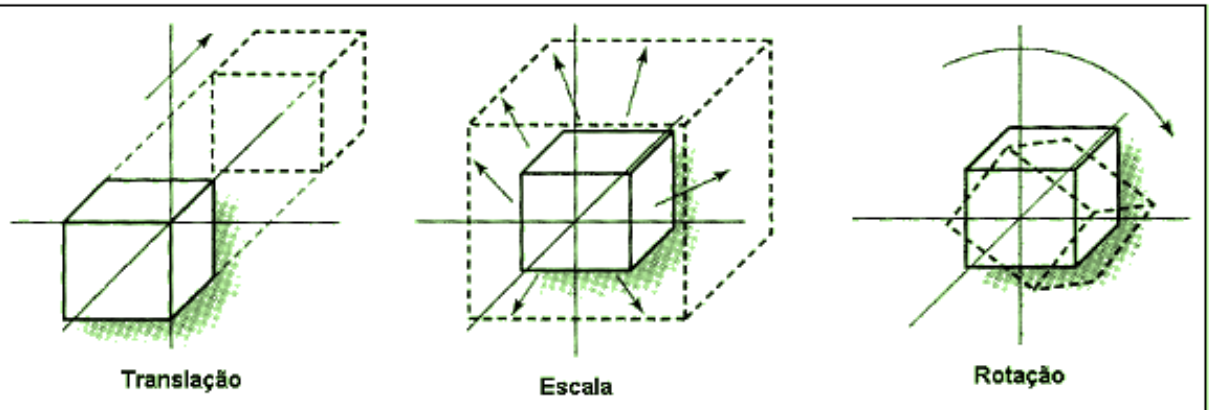


Reflexão (Espelhamento ou *Mirror*)

- Provoca um espelhamento do objeto em torno de um ou de ambos os eixos do sistema.

- Em torno de X: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, de Y: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou de ambos: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$





Transformações 3D

Transformações 3D

- Translação:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Escala:
$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Obs.:** Note que a rotação é definida separadamente para cada eixo e os ângulos são tomados no sentido anti-horário.

• Rotações:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$