Soma de Séries

1) Soma de série geométrica

$$\sum_{1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

a é o primeiro termo da série e $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

2) Soma de série telescópica

Se $a_n = b_n - b_{n+1}$, a série $\sum a_n$ se diz telescópica, então:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + (b_4 - b_5) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1})$$
$$= (b_1 - b_{n+1})$$

Portanto, existe o limite de s_n se e somente se existe o limite de b_{n+1}, então:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = b_1 - \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = 0.$ Substituindo o segundo termo por $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, temos portanto:

$\sum_1^\infty a_n = b_1 - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Critérios de Convergência de Séries

1) Condição necessária à convergência de uma série:

Se uma série é convergente, então: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2) Consequência: se não ocorrer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então a_n é divergente.

3) Critério da comparação: Seja $0 \leq a_n \leq b_n$:

Se $\sum b_n$é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Se $\sum b_n$é divergente, então $\sum a_n$ é divergente.

4) Critério da comparação por limite: Sejam $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

Se $0 < L < \infty$, então $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes ou convergentes.

Se $L = 0$ e $\sum b_n$é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

Se $L = \infty$ e $\sum b_n$é divergente, então $\sum a_n$ é divergente.

5) Critério de razão ou D'Lambert:

Se $\sum a_n$ é uma série de termos positivos e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é convergente.

Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então $\sum a_n$ é divergente.

6) Critério da raiz ou de Cauchy:

   Seja $\sum a_n$ um série de termos positivos e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

   Se $L < 1$, então $\sum a_n$ é convergente.

   Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então $\sum a_n$ é divergente.

7) Critério de Leibniz: Seja (a_n) uma sequência que obedece a condição de que $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$, para a qual existe um índice N, tal que n ≥ N e $a_n \geq\ a_{n+1} \geq 0$, então a série $\sum(-1)^{n-1}a_n$ é convergente.

8) A série $\sum c_n(x - x_o)^n$ ocorre somente se:
   a. A série é absolutamente convergente para todo x real.
   b. A série é convergente apenas para $x = x_0$.
   c. Existe um (único) número positivo R tal que a série é (absolutamente) convergente, se $|x -\ x_0| < R$ e divergente se $|x -\ x_0| > R$.

   O número R é denominado de raio de convergência da série $\sum c_n(x - x_o)^n$. No caso: a) o raio de convergência é infinito ($R = \infty$), no caso b) o raio de convergência é 0 ($R = 0$).

   O conjunto dos x para os quais a série converge é denominado de intervalo de convergência (IC).

9) Série de Taylor em função de f em torno de a:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$