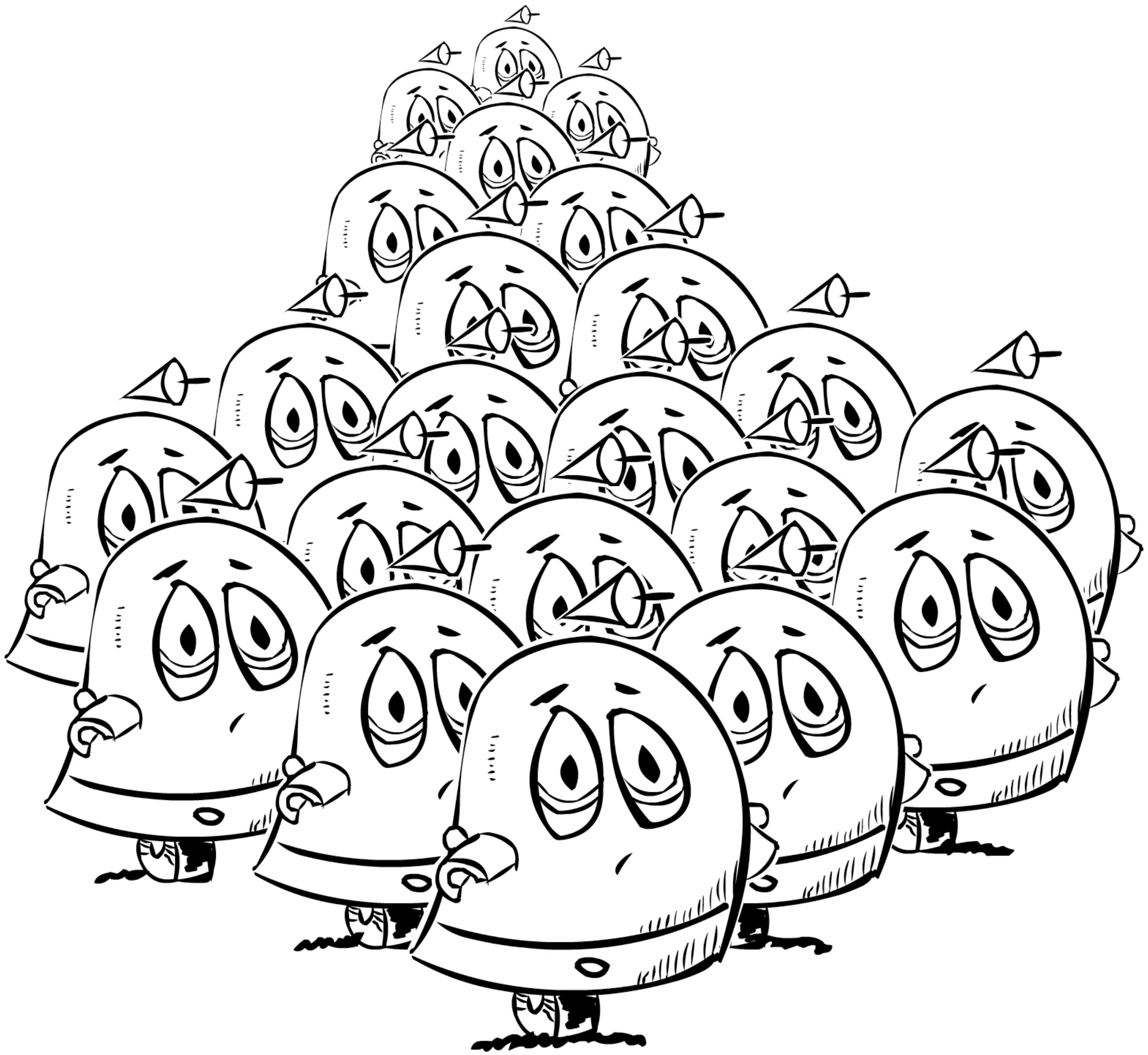
3 – Linguagens Regulares

3.1 Sistema de Estados Finitos
3.2 Composição Seqüencial, Concorrente e Não-Determinista
3.3 Autômato Finito
3.4 Autômato Finito Não-Determinístico
3.5 Autômato Finito com Movimentos Vazios
3.6 Expressão Regular
3.7 Gramática Regular



3.4 Autômato Finito Não-Determinístico

◆ Não-determinismo

- importante generalização dos modelos de máquinas
- fundamental no estudo
  - Modelos para Concorrência
  - Teoria da Computação
  - Linguagens Formais, …

◆ Semântica de não-determinismo adotada

- usual no estudo das Linguagens Formais
- objetiva determinar a capacidade de
  - reconhecer linguagens
  - solucionar problemas

- pode causar alguma confusão com semântica da concorrência

◆ Nem sempre não-determinismo aumenta o poder

- reconhecimento de linguagens de uma classe de autômatos
  - * qualquer autômato finito não-determinístico pode ser simulado por um autômato finito determinístico

◆ Não-determinismo no programa, é uma função parcial

dependendo do estado corrente e do símbolo lido,
determina um conjunto de estados do autômato.

◆ Assume um conjunto de estados alternativos

- como uma multiplicação da unidade de controle
- uma para cada alternativa
- processando independentemente
- sem compartilhar recursos

Def: Autômato Finito Não-Determinístico (AFN)

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

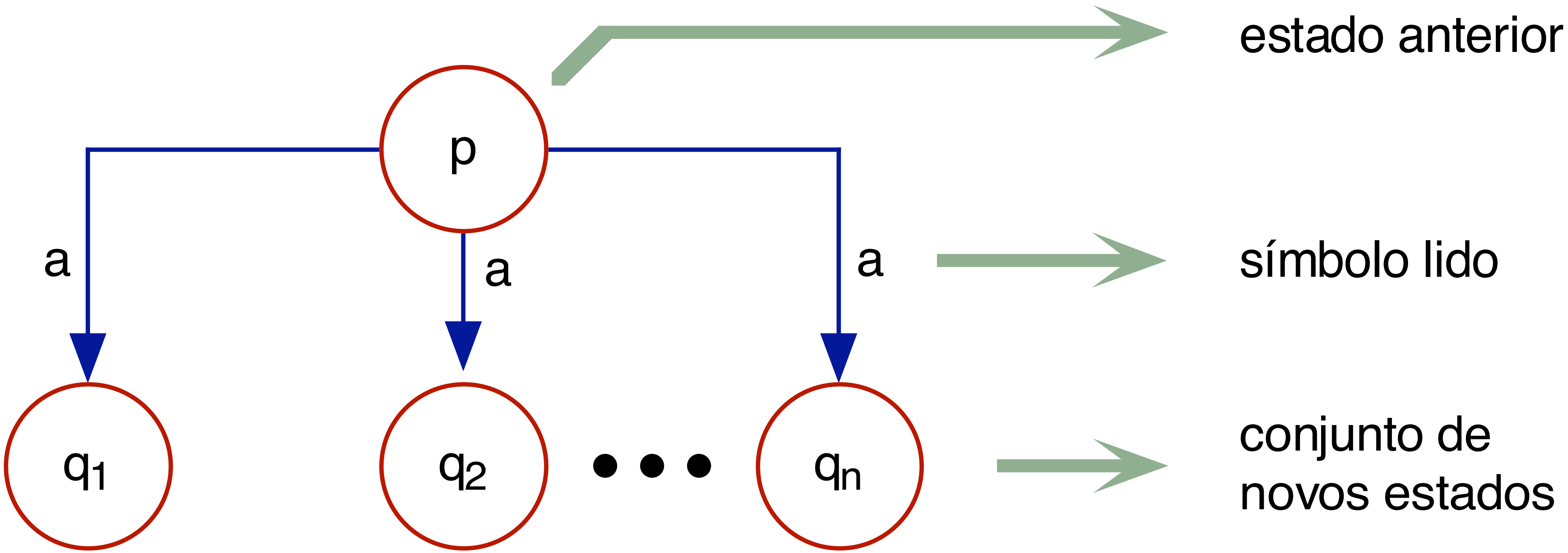
- Σ - alfabeto (de símbolos) de entrada
- Q - conjunto de estados possíveis (finito)
- δ - (função) programa ou função de transição (função parcial)

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

  - ∗ transição: $\delta(p, a) = \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \}$
- q_0 é um elemento distinguido de Q: estado inicial
- F é um subconjunto de Q: conjunto de estados finais

◆ Autômato como diagrama

$$\delta(p, a) = \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \}$$



Computação de um autômato finito não-determinístico

- sucessiva aplicação da função programa
- para cada símbolo da entrada (da esquerda para a direita)
- até ocorrer uma condição de parada

Argumentos: computação/função programa estendida

- conjunto finito de estados e uma palavra

Def: Função Programa Estendida, Computação

$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ autômato finito não-determinístico

$$\underline{\delta}^*: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

indutivamente definida

- $\underline{\delta}^*(P, \varepsilon) = P$
- $\underline{\delta}^*(P, aw) = \underline{\delta}^*(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$

◆ Transição estendida (a um conjunto de estados)

$$\underline{\delta}^*(\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \}, a) = \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \ldots \cup \delta(q_n, a)$$

◆ Parada do processamento

- Aceita a entrada
  - ⁎ após processar o último símbolo da fita, *existe* pelo menos um *estado final* pertencente ao conjunto de estados alternativos atingidos

- Rejeita a entrada. Duas possibilidades
  - ⁎ após processar o último símbolo da fita, *todos* os estados alternativos atingidos são *não-finais*
  - ⁎ programa indefinido para o argumento (conjunto de estados e símbolo)

Def: Linguagem Aceita, Linguagem Rejeitada

Seja $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um autômato finito não-determinístico

Linguagem Aceita ou Linguagem Reconhecida por M

$$L(M) = ACEITA(M) = \{ w \mid \delta^*(\{ q_0 \}, w) \cap F \neq \varnothing \}$$

Linguagem Rejeitada por M

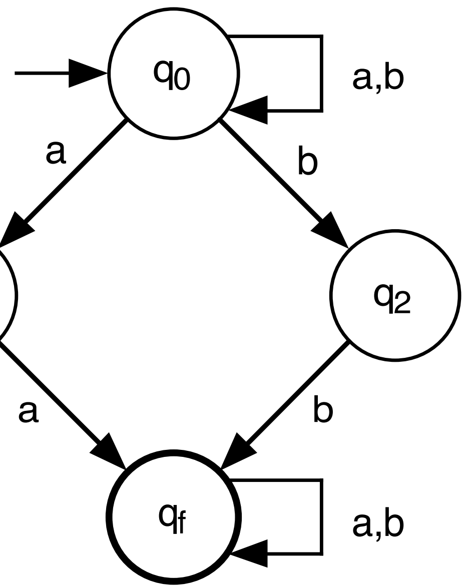
$$REJEITA(M) = \{ w \mid \delta^*(\{ q_0 \}, w) \cap F = \varnothing \text{ ou } \delta^*(\{ q_0 \}, w) \text{ é indefinida} \}$$

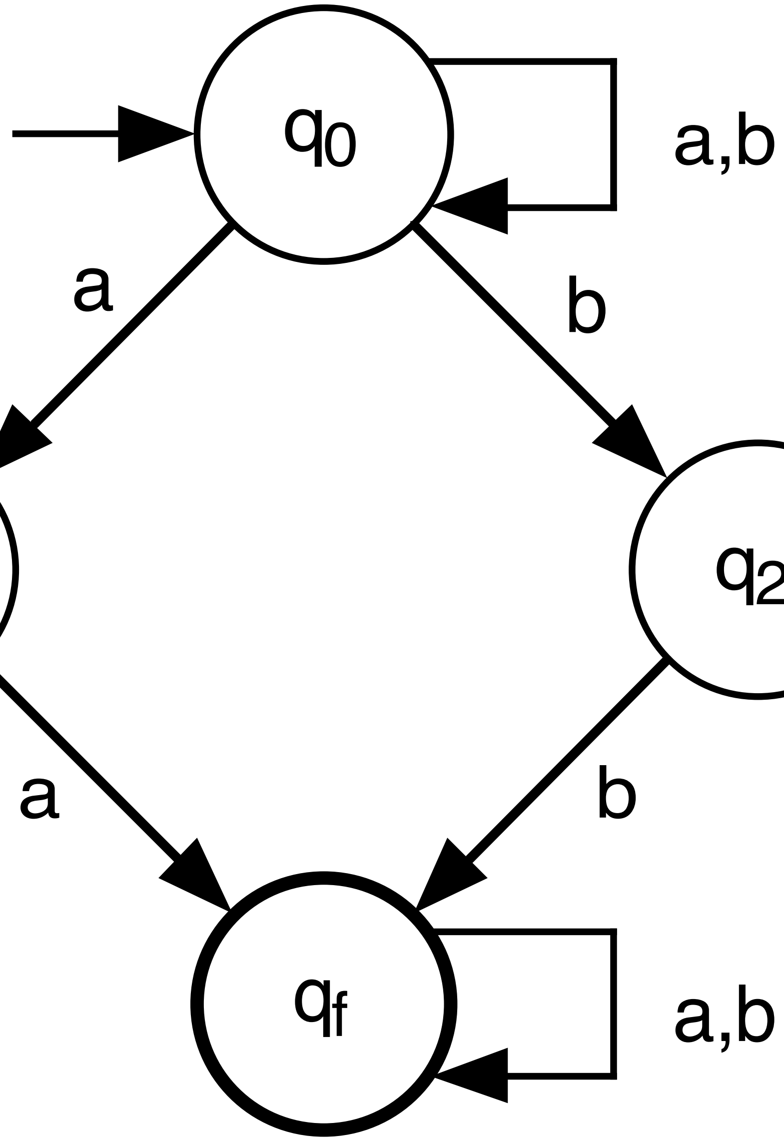
Exp: Autômato Finito Não-Determinístico: aa ou bb como subpalavra

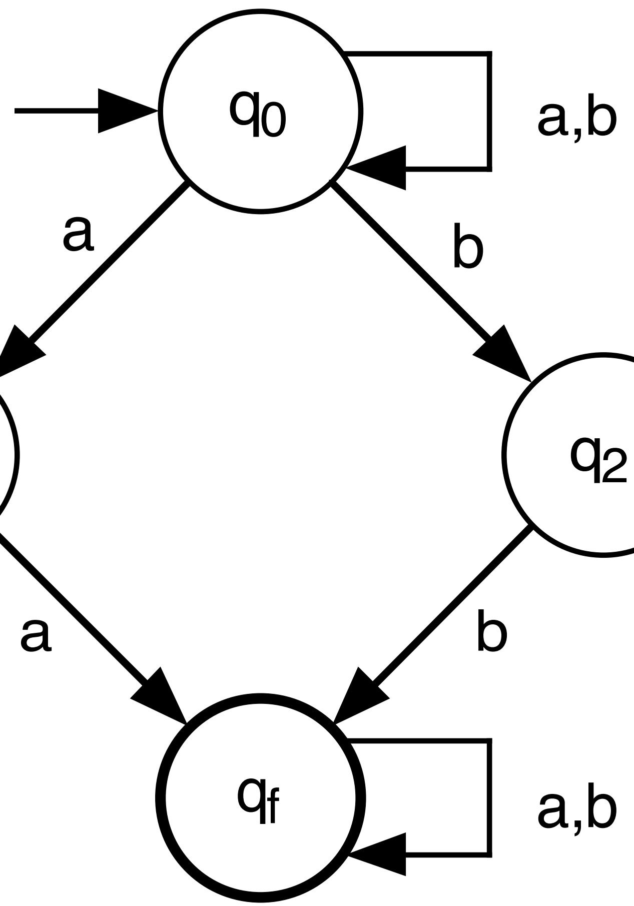
$$L_5 = \{\ w \mid w \text{ possui aa ou bb como subpalavra } \}$$

Autômato finito não-determinístico:

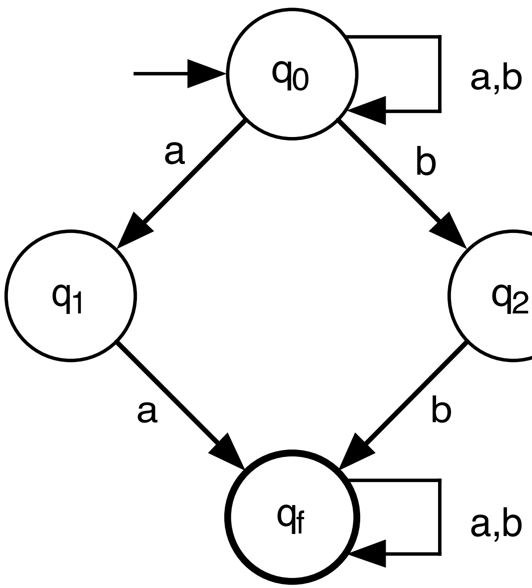
$$M_5 = (\{\ a, b\ \}, \{\ q_0, q_1, q_2, q_f\ \}, \delta_5, q_0, \{\ q_f\ \})$$




q0
a,b
a
b
q1
q2
a
b
qf
a,b



- o ciclo em q_0 realiza uma varredura em toda a entrada
- o caminho $q_0/q_1/q_f$ garante a ocorrência de aa
- o caminho $q_0/q_2/q_f$ garante a ocorrência de bb



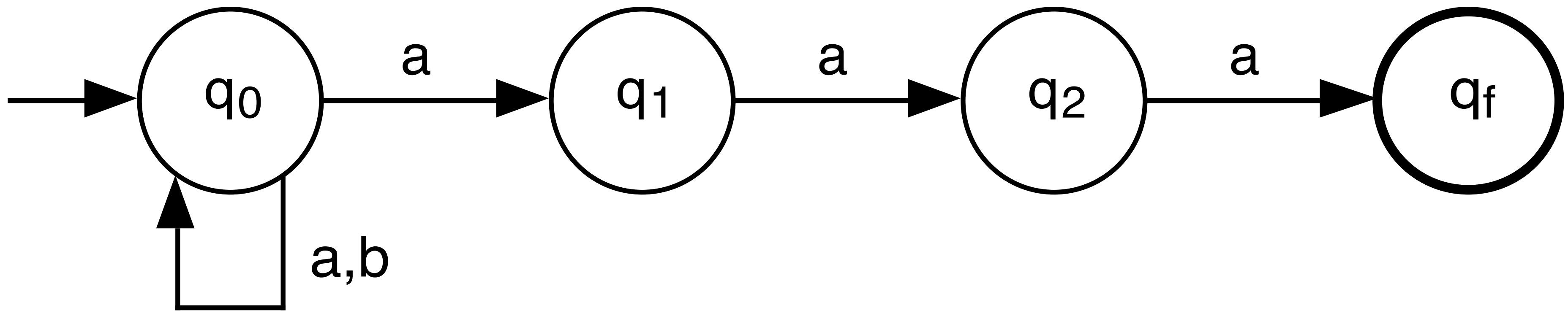
δ_5	a	b
q_0	$\{ q_0, q_1 \}$	$\{ q_0, q_2 \}$
q_1	$\{ q_f \}$	-
q_2	-	$\{ q_f \}$
q_f	$\{ q_f \}$	$\{ q_f \}$

Exp: AFN: aaa como sufixo

$$L_6 = \{ w \mid w \text{ possui aaa como sufixo} \}$$

Autômato finito não-determinístico:

$$M_6 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_6, q_0, \{ q_f \})$$



◆ Não-determinismo

- aparentemente, um significativo acréscimo ao poder computacional autômato finito
- na realidade *não* aumenta seu poder computacional

Teorema: Equivalência entre AFD e AFN

Classe dos Autômatos Finitos Determinísticos é equivalente à

Classe dos Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Prova: (*por indução*)

Mostrar que

- a partir de um AFN M qualquer
- construir um AFD M_D que realiza as mesmas computações
- M_D simula M

AFN → AFD

- estados de M_D simulam combinações de estados alternativos de M
- prova da simulação: por indução

AFD → AFN

- não necessita ser mostrado: decorre trivialmente das definições

$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um AFN qualquer. AFD construído

$$M_D = (\Sigma, Q_D, \delta_D, \langle q_0 \rangle, F_D)$$

- Q_D - todas as combinações, sem repetições, de estados de Q
  - notação $\langle q_1 q_2 \ldots q_n \rangle$
  - ordem não distingue combinações: $\langle q_u q_v \rangle = \langle q_v q_u \rangle$
  - imagem de todos os estados alternativos de M

- $\delta_D: Q_D \times \Sigma \to Q_D$

$$\delta_D(\langle q_1 \ldots q_n \rangle, a) = \langle p_1 \ldots p_m \rangle \quad \text{sse} \quad \delta^*(\{ q_1, \ldots, q_n \}, a) = \{ p_1, \ldots, p_m \}$$

- $\langle q_0 \rangle$ - estado inicial

- F_D - conjunto de estados $\langle q_1 q_2 \ldots q_n \rangle$ pertencentes a Q_D
  - alguma componente q_i pertence a F, para i em $\{ 1, 2, \ldots, n \}$

AFD M_D simula as computações do AFN M ???

- indução no tamanho da palavra
- mostrar que

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, w) = \langle q_1 \ldots q_u \rangle \quad \text{sse} \quad \delta^*(\{ q_0 \}, w) = \{ q_1, \ldots, q_u \}$$

Base de indução. $|\ w\ | = 0$. Portanto $w = \varepsilon$:

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, \varepsilon) = \langle q_0 \rangle \quad \text{se e somente se} \quad \delta^*(\{ q_0 \}, \varepsilon) = \{ q_0 \}$$

- verdadeiro, por definição de computação

Hipótese de indução. $| w | = n$ e $n \geq 1$. Suponha que:

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, w) = \langle q_1 \ldots q_u \rangle \quad \text{sse} \quad \delta^*(\{ q_0 \}, w) = \{ q_1, \ldots, q_u \}$$

Passo de Indução. $| wa | = n + 1$ e $n \geq 1$

$$\delta_D^*(\langle q_0 \rangle, wa) = \langle p_1 \ldots p_v \rangle \quad \text{sse} \quad \delta^*(\{ q_0 \}, wa) = \{ p_1, \ldots, p_v \}$$

- equivale (hipótese de indução)

$$\delta_D(\langle q_1 \ldots q_u \rangle, a) = \langle p_1 \ldots p_v \rangle \quad \text{sse} \quad \delta^*(\{ q_1, \ldots, q_u \}, a) = \{ p_1, \ldots, p_v \}$$

- verdadeiro, por definição de δ_D

Logo, M_D simula M para qualquer entrada w pertencente a Σ^*

◆ Portanto, linguagem aceita por AFN

- é Linguagem Regular ou Tipo 3

Obs: Determinismo × Não-Determinismo

Muitas vezes é mais fácil desenvolver um AFN do que um AFD

- exemplo

{ w | o quinto símbolo da direita para a esquerda de w é a }

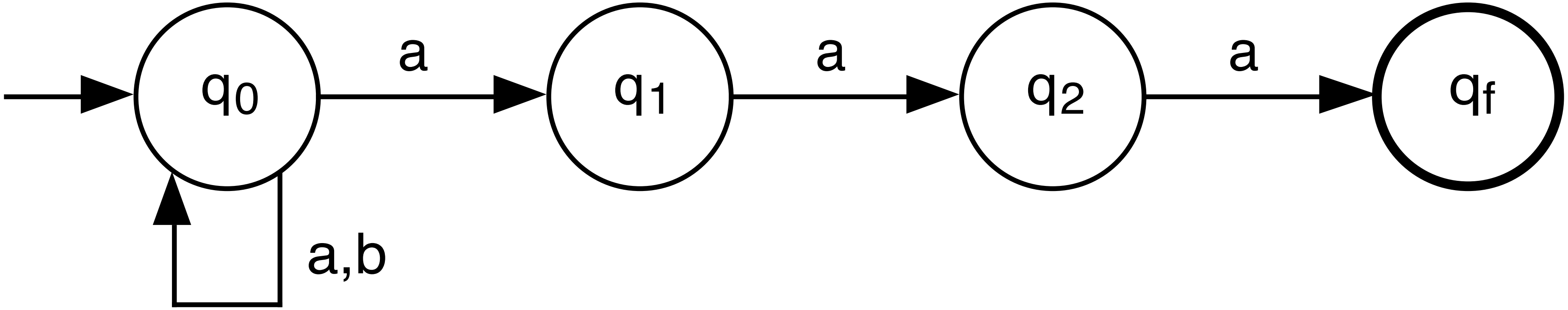
- solução determinista: não é trivial; número grande de estados
- solução não-determinista: bem simples; poucos estados

Alternativa para construir um AFD

- desenvolver inicialmente AFN
- aplicar o algoritmo apresentado na prova do teorema

Exp: AFN → AFD

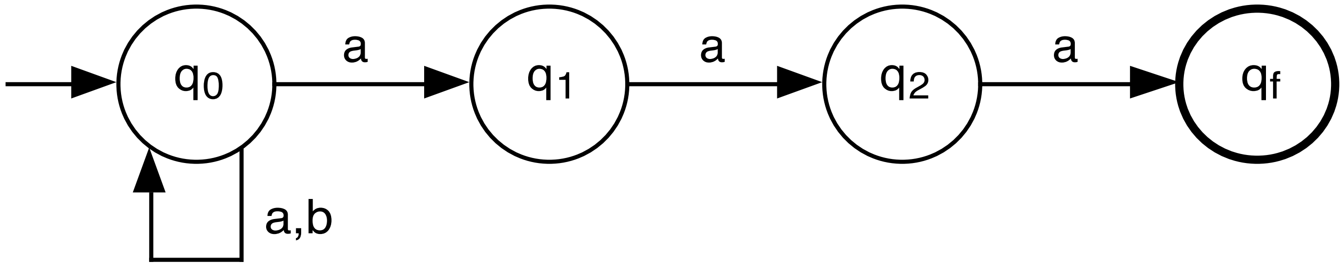
$M_6 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_6, q_0, \{ q_f \})$



$M_{6D} = (\{ a, b \}, Q_D, \delta_{6D}, \langle q_0 \rangle, F_D)$

- $Q_D = \{ \langle q_0 \rangle, \langle q_1 \rangle, \langle q_2 \rangle, \langle q_f \rangle, \langle q_0 q_1 \rangle, \langle q_0 q_2 \rangle, \ldots, \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle \}$
- $F_D = \{ \langle q_f \rangle, \langle q_0 q_f \rangle, \langle q_1 q_f \rangle, \ldots, \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle \}$

AFN



AFD

δ_{6D}	a	b
$\langle q_0 \rangle$	$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$

δ_{6D}	a	b
$p_0 = \langle q_0 \rangle$	$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_1 = \langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_2 = \langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_f = \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$