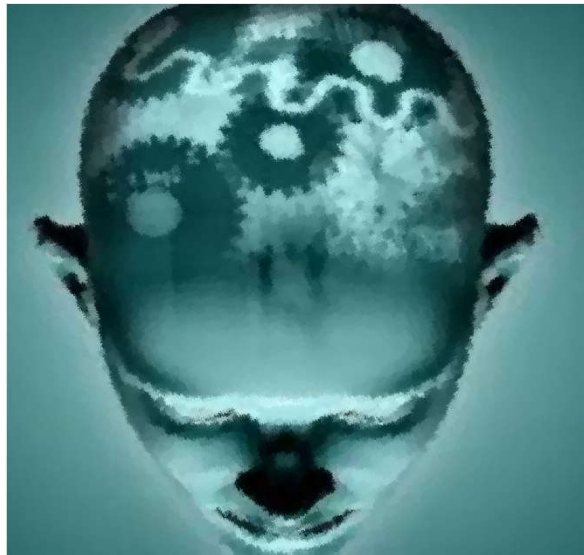


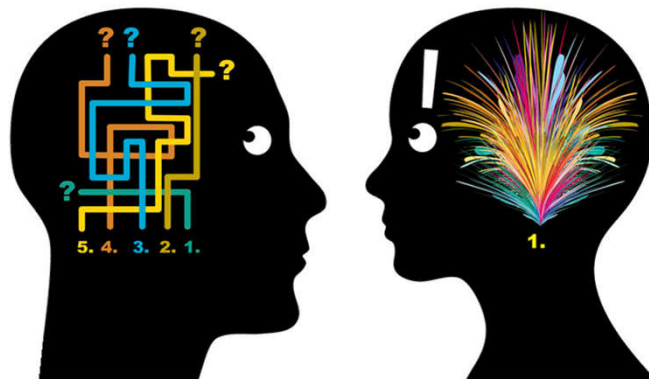
Lógica Nebulosa

## LÓGICA FUZZY



## Lógica Clássica

- Utilização de valores definidos
  - Lógica matemática: Verdadeiro, Falso
  - Níveis lógicos: 0, 1
  - Decisão: Sim, Não
  - Hardware: 0V, 5V
  - Etc.



## Lógica *Fuzzy*

- Rompimento com a rigidez da lógica clássica
  - Utilização de valores intermediários entre os dois extremos
  - $\{0,1\} \rightarrow [0,1]$
- O “porquê” da lógica *fuzzy*?
  - Imprecisão do mundo real
  - Dificuldade de modelamento utilizando a lógica tradicional

## Grau de Crença vs Grau de Verdade

### Teoria das Probabilidades

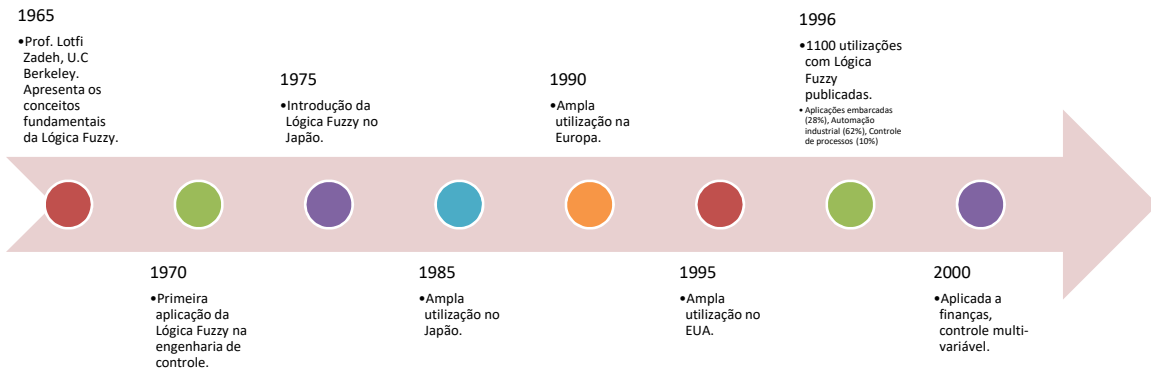
- Ex.: 80% dos *pacientes com dor de dentes têm cáries*
- Uma probabilidade de 0.8 não significa “80% verdade” mas sim um grau de crença de 80% na regra, ou seja, em 80% dos casos a regra é verdadeira

### Lógica Fuzzy

- Ex.: *Mario é alto*
- a proposição é verdadeira para uma altura de Mario 1.65m?  
... mais ou menos ...
- Observar que não há incerteza, estamos seguros da altura de Mario.
- O termo linguístico “alto” é vago, como interpretá-lo?

A Teoria de conjuntos Fuzzy permite especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga.

## Histórico

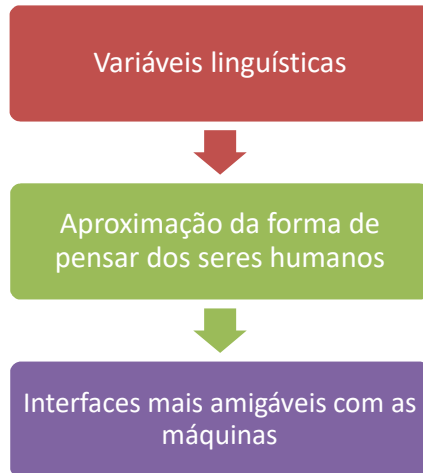


## Características

- Intenso uso de palavras ao invés de números
  - Termos linguísticos: *frio, quente, morno, alto, longe, ligeiro, devagar, lento*, etc.
- Modificadores de predicado
  - **Muito rápido, pouco elevado, mais ou menos**, etc.
- Uso de probabilidades linguísticas
  - *Provável, improvável*, etc.
- Manipulação de infinitos valores entre 0 e 1.

## Vantagens

- Poucas regras, valores e decisões
- Observação de um maior número de variáveis
- Sua utilização simplifica a solução de problemas
- Fácil implementação



## Conjuntos *Fuzzy*

- **Lógica clássica:** elemento pertence ou não a um conjunto.
  - Conjunto: “Alto”
  - Ex.: João *é* alto / João *não é* alto
- **Lógica fuzzy:** elemento pertence, não pertence ou está parcialmente presente em um conjunto
  - Ex.: João *é um pouco* alto.

## Conjuntos *Fuzzy*

- Um **conjunto fuzzy** corresponde a ideia de alargar a noção de conjunto, permitindo a representação de conceitos definidos por fronteiras difusas, tais como os que surgem a linguagem natural ou conceitos qualitativos.
- A **função de pertença** a um conjunto fuzzy indica com que grau um conceito específico é membro de um conjunto

## Conjuntos *Fuzzy* (cont.)

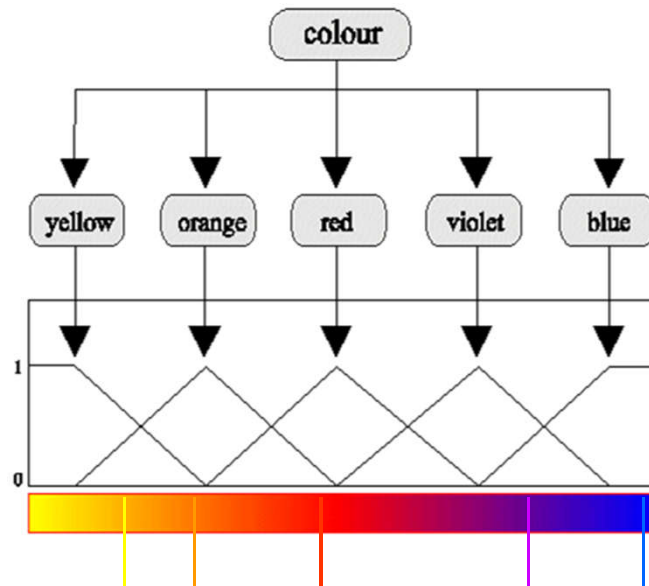
- São funções que mapeiam o valor que poderia ser um membro do conjunto para um número entre 0 e 1
  - O grau de pertença 0 indica que o valor não pertence ao conjunto
  - O grau 1 significa que o valor é uma representação completa do conjunto
- A definição do conceito depende do contexto

## Exemplo de Conjunto Fuzzy

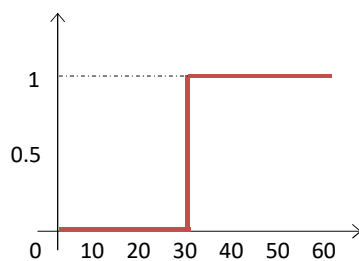
Note que a *cor* pode assumir os valores *amarelo*, *laranja*, *vermelho* *violeta* e *azul*.

Entretanto, quando observamos a paleta de cores, fica evidente que há uma transição suave entre essas “categorias” (ou valores possíveis)

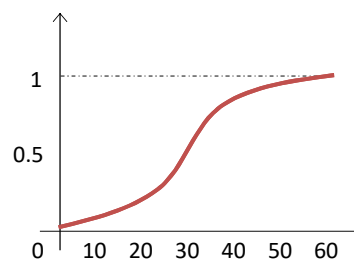
É muito comum que pessoas diferentes digam que, por exemplo, determinada cor é *vermelha* enquanto outras digam que é *laranja*.



## Lógica Fuzzy



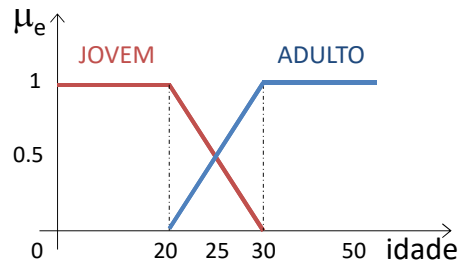
Lógica Clássica



Lógica Fuzzy

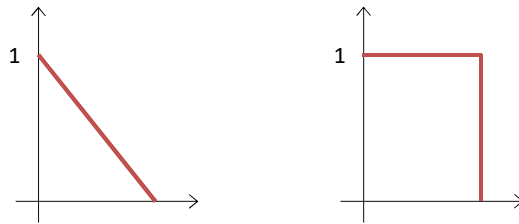
## Lógica *Fuzzy*

- No gráfico abaixo:
  - O valor 1 significa que a pessoa pertence ao grupo de jovens;
  - O valor 0 significa que a pessoa não pertence o grupo;
  - Os valores intermédios indicam o grau de pertença da pessoa ao grupo:
    - se possui 25 anos é 50% jovem e 50% adulto



## Lógica *Fuzzy*

- A transição entre **ser** e **não ser** é gradual e não é abrupta!



- Os conceitos vagos (inteligente, rico, bonito) são subjetivos e dependentes do contexto

## Lógica *Fuzzy*

- **Conjuntos Normais:** função característica, equivale a medida de pertença associada ao conjunto A.

$$\mu_A(x) \in [0,1]$$

- **Conjunto Vago:** quando os elementos têm um grau de pertença relativamente ao conjunto.

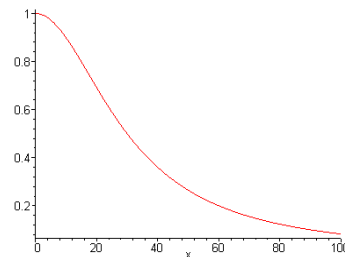
$$A = \{(\mu_A(x), x) : x \in U\}$$

- Exemplo:

–  $U = \{x \mid x \text{ é uma idade entre 0 e 100}\}$

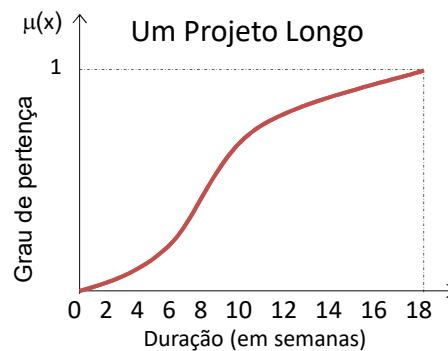
– A = conjunto das idades jovens

$$\mu_A(x) = \left(1 + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right)^{-1}$$



## Lógica *Fuzzy*

- Pensando, por exemplo, no tempo de duração que pode ter um projeto ...





## Lógica *Fuzzy*

- Como se obtém  $\mu$ ?
  - É subjetivo!
  - Por muitas vezes é considerada uma medida consensual
- É necessário exprimir  $\mu$  em termos numéricos?
  - Não necessariamente!
  - Podem ser usados números vagos
- O valor de  $\mu$  é uma probabilidade?
  - Não! É uma **medida de compatibilidade** entre um objeto e o conceito denotado pelo conjunto vago

## Lógica *Fuzzy*

- Projeto Longo
  - O que significa Longo ?
  - A que conjunto Longo pertence ?
- **Modelo dependente do Contexto**
- Esta variação de grau de **Longo** significa que alguns projetos estarão mais fortemente associados com a categoria Longo do que outros.
- Este grau pode assumir qualquer valor num determinado intervalo, não ficando restrito apenas a **pertencer** ou **não pertencer** aquele intervalo.

## Variáveis Linguísticas

- São elementos centrais da técnica de modelagem dos sistemas, pois uma variável linguística é o nome do conjunto fuzzy.
- Pode ser usado num sistema baseado em regras para tomada de decisão
  - Exemplo:
 

*if projeto.duração is LONGO*  
*then risco is maior*
- Transmitem o conceito de qualificadores
- Qualificadores mudam a forma do conjunto fuzzy

## Variáveis Linguísticas

- Algumas variáveis linguísticas do conjunto LONGO com qualificadores:
  - muito LONGO
  - um tanto LONGO
  - ligeiramente LONGO
  - positivamente não muito LONGO



## Variáveis Linguísticas

- Permitem que a linguagem da modelagem *fuzzy* expresse a semântica usada por especialistas:

Exemplo:

*if projeto.duração is positivamente não muito LONGO*

*then risco is ligeiramente reduzido*

- Encapsula as propriedades dos conceitos imprecisos numa forma usada computacionalmente.
- Reduz a complexidade do problema
- Sempre representa um espaço *fuzzy*

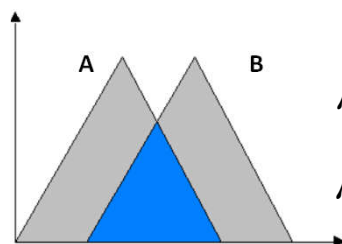
## Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

### Intersecção

Sejam

X um conjunto de pontos

A e B conjuntos contidos em X



$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

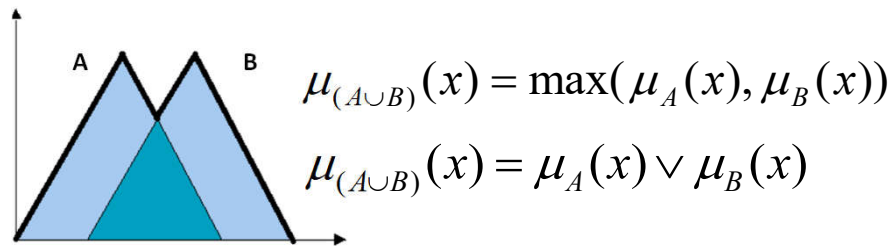
## Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

### União

Sejam:

X um conjunto de pontos

A e B conjuntos contidos em X



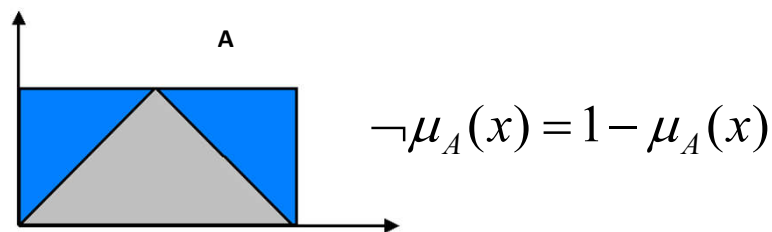
## Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

### Complemento

Sejam:

X um conjunto de pontos

A um conjunto contido em X



## Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

### Exemplo:

- Sejam A e B dois Conjuntos Fuzzy dados sobre X

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A = \{(-2, 0.5), (-1, 0.4), (0, 1.0), (1, 0.3), (2, 0.7)\}$$

$$B = \{(-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.9), (1, 0.2), (2, 0.6)\}$$

- Temos que:

$$A \cup B = \{(-2, 0.5), (-1, 0.4), (0, 1.0), (1, 0.3), (2, 0.7)\}$$

$$A \cap B = \{(-2, 0.1), (-1, 0.4), (0, 0.9), (1, 0.2), (2, 0.6)\}$$

$$\neg A = \{(-2, 0.5), (-1, 0.6), (0, 0.0), (1, 0.7), (2, 0.3)\}$$

## Operadores dos Conjuntos *Fuzzy*

- Note que em se tratando de conjuntos Fuzzy,  $\mu(\neg A \cup A) \neq \mu(true)$  e  $\mu(\neg A \cap A) \neq \mu(false)$ , o que não satisfaz a teoria dos conjuntos clássica!

Considere:  $\mu(A) = 1/2$

- $\mu(\neg A \cup A) = \max(\mu(\neg A), \mu(A))$   
 $= \max(1 - 1/2, 1/2) = 1/2 \neq 1$
- $\mu(\neg A \cap A) = \min(\mu(\neg A), \mu(A))$   
 $= \min(1 - 1/2, 1/2) = 1/2 \neq 0$

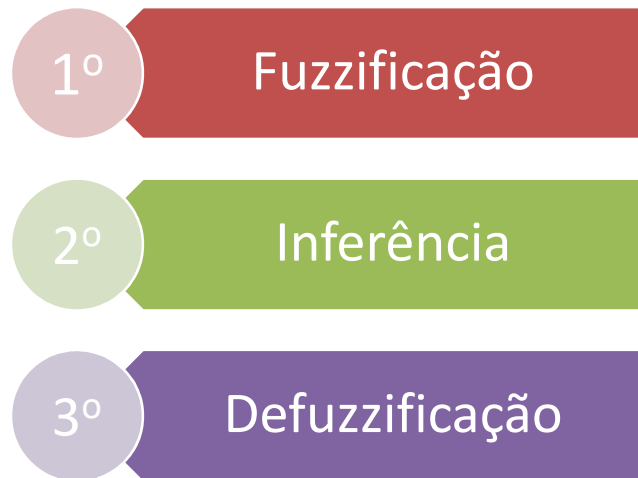
## Sistemas *Fuzzy*

- Sistemas avaliadores incertos são modelados a partir de:
  - probabilidade Bayesiana
  - alguns fatores de confiança ou certeza  
*if altura > 1.75 and altura < 1.80*  
*then peso is 80, CF = 0.082*
- Sistemas Fuzzy fornecem aos sistemas avaliadores um método mais consistente e matematicamente mais forte para manipulação de incertezas
  - *if altura is ALTA then peso is PESADO*

## Raciocínio *Fuzzy*

- Nos sistemas avaliadores convencionais:
  - as proposições são executadas sequencialmente
  - heurísticas e algoritmos são usados para reduzir o número de regras examinadas
- Nos sistemas avaliadores *Fuzzy*:
  - o protocolo de raciocínio é um paradigma de processamento paralelo
  - todas as regras são disparadas

## Etapas do Raciocínio *Fuzzy*



## Etapas do Raciocínio *Fuzzy*



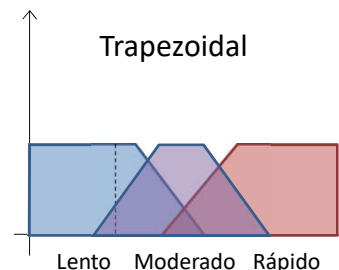
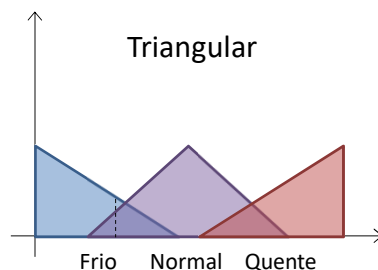
1º

## Fuzzificação

- Durante a modelagem é a etapa na qual as variáveis linguísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertença)
- Engloba:
  - Análise do Problema (*Modelagem*)
  - Definição das Variáveis (*Modelagem*)
  - Definição das Funções de Pertença e Criação das Regiões (*Modelagem*)
  - Determinação dos graus de pertença nos conjuntos (*durante o uso*)


## Fuzzificação

- Na definição das funções de pertença para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
  - Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, etc ...



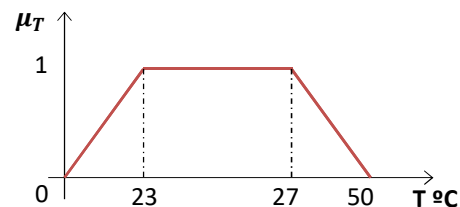


## Exemplo do processo de Fuzzificação

- Valores crisp  $\longrightarrow$    $\longrightarrow$  Valores fuzzy
- Definição da Função de pertinência
  - Ex.: Temperatura,  $x = 37^\circ$  (valor crisp)
    - Conjuntos fuzzy = frio, morno, quente
    - $\mu_T(x)$  é a função de pertinência de  $x$  em  $T$
    - $\mu_T(37^\circ) = 0.2/\text{frio}, 0.4/\text{morno}, 0.8/\text{quente}$

## Exemplo do processo de Fuzzificação

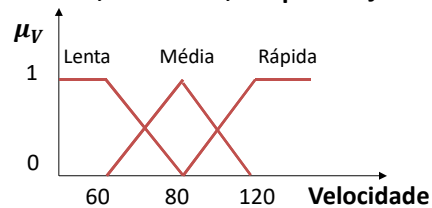
- $\mu_T(23)$  a  $\mu_T(27) = 1$ 
  - Temperatura ambiente
- $\mu_T(21)$  ou  $\mu_T(29)$ 
  - Temperatura **quase** ambiente
- $\mu_T(0)$  ou  $\mu_T(50)$ 
  - Temperatura **não** ambiente



## Exemplo do processo de Fuzzificação

Outro exemplo:

- $T(\text{velocidade}) = \{ \text{lenta, média, rápida} \}$



- Variável linguística = velocidade
- Termos (conj.fuzzy) = lenta, média, rápida

2º

## Inferência

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e, depois, examinadas de modo paralelo
- Engloba:
  - Definição das proposições, i.e. regras *fuzzy* (*modelagem*)
  - Análise das Regras (*durante o uso*)
  - Criação da região resultante (*durante o uso*)

## Etapas do Raciocínio *Inferência*



## Regras *Fuzzy*

- O mecanismo chave do modelo *Fuzzy* são as regras (ou proposição). São elas que estabelecem o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões *Fuzzy*.
- Formam a **base de conhecimento**.
  - **IF x IS A THEN y IS B ...** em outras palavras  $A \Rightarrow B$
- Exemplo:
  - **if** pressão **is** alta **then** volume **is** pequeno
    - “Se a pressão é alta implica que o volume é pequeno”

## Regras de Inferência

- (R1) *if* duração = longa **and** qualidade = alta  
**then** risco = médio
- (R2) *if* duração = média **and** qualidade = alta  
**then** risco = baixo
- (R3) *if* duração = curta **and** qualidade = baixa  
**then** risco = baixo
- (R4) *if* duração = longa **and** qualidade = média  
**then** risco = alto

## Inferência

- A inferência é o procedimento para se chegar a conclusões a partir de regras **if – then** e corresponde ao “Raciocínio fuzzy”.

Neste processo acontecem duas operações importantes:

- Agregação:
  - Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente
- Composição:
  - Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída.

## As operações definem as regiões fuzzy

Relembrando:

- Sejam A e B dois Conjuntos Fuzzy sobre X:

– Variável  $X = \{ 1, 2, 3 \}$

– Conjunto A =  $\{ (1, 0.3), (2, 0.5), (3, 0.8) \}$

– Conjunto B =  $\{ (1, 0.1), (2, 0.7), (3, 0.6) \}$

- Assim:

$A \cup B = \{ (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 0.8) \}$

$A \cap B = \{ (1, 0.1), (2, 0.5), (3, 0.6) \}$

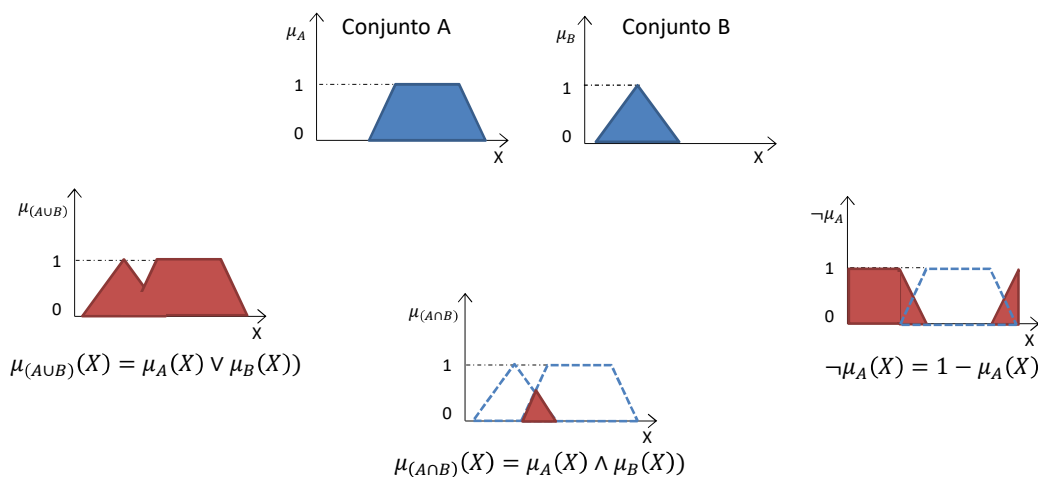
$\neg A = \{ (1, 0.7), (2, 0.3), (3, 0.2) \}$

$$\mu_{(A \cup B)}(X) = \max(\mu_A(X), \mu_B(X))$$

$$\mu_{(A \cap B)}(X) = \min(\mu_A(X), \mu_B(X))$$

$$\neg \mu_A(X) = 1 - \mu_A(X)$$

## Graficamente ...



## Exemplo de Inferência

- Controle *fuzzy* de frenagem
  - Entradas: Distância (X1), Velocidade (X2)
  - Saída (controle): Intensidade da frenagem Y

Regra 1:

- IF a distância entre os dois carros é **curta** E a velocidade do carro é **alta**, THEN a frenagem é **forte**

Regra 2:

- IF a distância entre os dois carros é **moderadamente longa** E a velocidade do carro é **alta**, THEN a frenagem é **moderadamente forte**

- Regra 1: *if* X1 = S and X2 = H *then* Y = L
- Regra 2: *if* X1 = M and X2 = L *then* Y = M

## Exemplo de Inferência (cont.)

### 1. Grau de pertinência das entradas

- Mapeamento da distância e velocidade no intervalo de 0 a 1 para cada conjunto fuzzy uso das funções de pertinência.

Ex.:

Conjunto S (distância curta) = 0.4, p/ distância de 30m

Conjunto H (velocidade alta) = 0.2, p/ velocidade de 40Km/h

### 2. Grau de pertinência da parte antecedente

- Operações com as variáveis, por exemplo, determinação do mínimo (min).

Ex.:

distância curta (0.4) E velocidade alta (0.2) = 0.2 (min)

## Exemplo de Inferência (cont.)

### 3. Ajuste da parte consequente

- Operadores de implicação (Mandani, Larsen)
- Obter as conclusões de cada regra

### 4. Determinação da quantidade de controle (intensidade da frenagem)

- Combinação das conclusões de todas as regras, isto é, determinação do máximo (max)

$R1 = 0.6, R2 = 0.2$  Conclusão = 0.6

### 5. Agora basta “defuzzificar” o resultado (i.e., apresentar saída em forma de valores crisp)

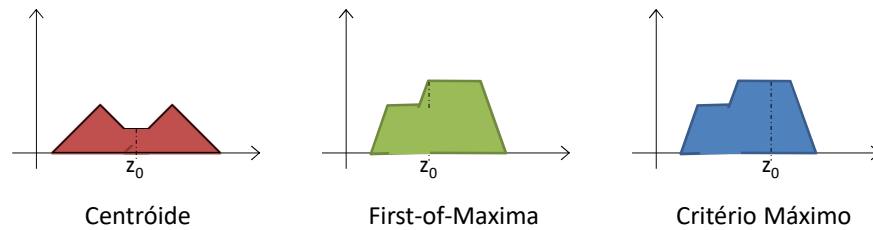
3º

## Defuzzificação

- Fase na qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema. Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado.
- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
  - Centróide
  - First-of-Maxima
  - Middle-of-Maxima
  - Critério Máximo

## Defuzzificação

- Exemplos



## Sistemas *Fuzzy*

- Benefícios para os especialistas:
  - habilidade em codificar o conhecimento de uma forma próxima da linguagem usada pelos peritos
- O processo de aquisição do conhecimento é:
  - mais fácil
  - menos propenso a falhas e ambiguidades
- Fácil modelar sistemas envolvendo múltiplos especialistas
  - Nos sistemas do mundo real, há vários especialistas sob um mesmo domínio
  - Representam bem a cooperação múltipla, a colaboração e os conflitos entre os especialistas



## Sistemas *Fuzzy*

- Lógica Fuzzy tornou-se uma tecnologia padrão é aplicada em análise de dados e sinais de sensores, finanças e negócios, ...
  - Aproximadamente 1100 aplicações bem sucedidas foram publicadas em 1996
  - Utilizada em sistemas de Máquinas Fotográficas, Máquina de Lavar Roupas, Freios ABS, Ar Condicionado, etc.

## O que vimos então?

Podemos dizer que, o projeto de um Sistema Fuzzy implica na:

- Seleção das variáveis de entrada e saída
- Definição das regras e conjuntos fuzzy.
- Mecanismo de inferência (MIN-MAX)
- Escolha da estratégia de defuzzificação

## Links interessantes

- Artigo sobre fundamentos e aplicações em controle  
<ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/gudwin/publications/ifsa95.pdf>
- Conteúdo e applet sobre lógica Fuzzy da San José University  
<http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/fuzzysets.htm>
- Ferramenta FuzzyLite:  
<http://www.fuzzylite.com/>

