Dynamical behaviour of a Lotka–Volterra competitive-competitive–cooperative model with feedback controls and time delays - 2019

ABSTRACT

The aim of this paper is to investigate the dynamical behaviour of a class of three species Lotka–Volterra competitive-competitive-cooperative models with feedback controls and time delays. By developing a new analysis technique, we obtain some sufficient conditions that ensure these models have the dynamical property of permanence. We also give some sufficient conditions that guarantee the global attractivity of positive solutions for this system by constructing a new suitable Lyapunov function. Finally, we give some numerical simulations to illustrate our results in this paper.

El objetivo de este artículo es investigar el comportamiento dinámico de una clase de tres modelos Lotka-Volterra competitivo-competitivo-cooperativo con controles de retroalimentación y retardos temporales. Mediante el desarrollo de una nueva técnica de análisis, obtenemos condiciones suficientes que garantizan la propiedad dinámica de permanencia de estos modelos. También proporcionamos condiciones suficientes que garantizan la atracción global de soluciones positivas para este sistema mediante la construcción de una nueva función de Lyapunov adecuada. Finalmente, presentamos algunas simulaciones numéricas para ilustrar nuestros resultados.

1. Introduction

The modelling and analysis of the dynamics of biological populations by means of differential equations are of the primary concern in population growth problems. A well-known and extensively studied class of models in population dynamics is the Lotka–Volterra system which models certain types of interactions among various species. In the real world, the growth rate of a natural species will not often respond immediately to changes in its own species or that of an interacting species, but will rather do so after a time lag. Time delays are introduced to make the model respond better to impersonal law (see, [1–11]).

El modelado y análisis de la dinámica de poblaciones biológicas mediante ecuaciones diferenciales es fundamental en los problemas de crecimiento poblacional. Un modelo bien conocido y ampliamente estudiado en dinámica poblacional es el sistema Lotka-Volterra, que modela ciertos tipos de interacciones entre diversas especies. En el mundo real, la tasa de crecimiento de una especie natural no suele responder inmediatamente a los cambios en su propia especie o en la de una especie con la que interactúa, sino que lo hará con un cierto desfase temporal. Se introducen desfases temporales para que el modelo responda mejor a la ley impersonal (véase [1–11]).

Lu et al. in [2] proposed and studied the following Lotka–Volterra system with discrete delays

Lu et al. en [2] propusieron y estudiaron el siguiente sistema Lotka-Volterra con retrasos discretos

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1 - a_1x_1(t) - a_{11}x_1(t-\tau_{11}) + a_{12}x_2(t-\tau_{12}) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[r_2 - a_2x_2(t) - a_{21}x_1(t-\tau_{21}) + a_{22}x_2(t-\tau_{22}) \end{cases}$$

(1)

with initial conditions

$$x_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, t \in [-\tau_0, 0]; \phi_i(0) > 0, (i = 1, 2)$$

where r_i, a_i, a_{ij} and τ_{ij} are constants with $a_i > 0$, $a_{ij} \geq 0$ (i, j = 1, 2) and 0 = max ij : i, j = 1, 2 , ϕ_{ij} is continuous on [-τ 0 , 0]. They show that delays can change the permanence for Lotka–Volterra cooperative systems. For certain delays with the same length, the delayed system has a similar property to the corresponding system without delays in the sense of permanence, but for a general delay case, the delays may destroy the permanence for the system. In 2010, Nakata and Muroya considered the following nonautonomous Lotka–Volterra cooperative systems with time delays (see, [3])

donde r_i, a_i, a_{ij} y τ_{ij} son constantes con $a_i > 0, a_{ij} \geq 0$ (i, j = 1, 2) y $\tau_0 =$ máxτ_{ij}: i, j = 1, 2 , ϕ_{ij} es continuo en $[-\tau 0, 0]$. Demuestran que los retrasos pueden cambiar la permanencia de los sistemas cooperativos Lotka-Volterra. Para ciertos retrasos con la misma duración, el sistema retrasado tiene una propiedad similar a la del sistema correspondiente sin retrasos en cuanto a la permanencia, pero para un caso general de retraso, los retrasos pueden destruir la permanencia del sistema. En 2010, Nakata y Muroya consideraron los siguientes sistemas cooperativos Lotka-Volterra no autónomos con retrasos temporales (véase [3]).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x_1(t)[r_1(t) - a_{11}^1(t)x_1(t) - \tau) - a_{11}^2(t)x_1(t-2\tau) + a_{12}^1(t)x_2(t-\tau)], \\ \dot{x}(t) = x_2(t)[r_2(t) + a_{21}^0(t)x_1(t) + a_2 1^1(t)x_1(t-\tau) - a_{22}^0(t)x_2(t) - a_{22}^1(t)x_2(t-\tau) \end{cases}$$

where $x_i(t)$ (i = 1, 2) denote the density of i-species at time t, τ is a positive constant and $r_i(t), a_{ij}^l(t)(1 \leq i, j \leq 2; 0 \leq l \leq 2)$ are continuous, bounded and strictly positive functions as $t \in [-\tau, +\infty)$. They obtained some sufficient conditions for the permanence of the system (2). Xu and Zu [4] investigated the following two-species delayed competitive model with stage structure and harvesting

Donde $x_i(t)$ (i = 1, 2) denota la densidad de i-especies en el tiempo t, τ es una constante positiva y $r_i(t), a_{ij}^l(t)(1 \leq i, j \leq 2; 0 \leq l \leq 2)$ son funciones continuas, acotadas y estrictamente positivas cuando $t \in [-\tau, +\infty]$. Obtuvieron algunas condiciones suficientes para la permanencia del sistema (2). Xu y Zu [4] investigaron el siguiente modelo competitivo retardado de dos especies con estructura de etapas y cosecha.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha(t)x_2(t) - \gamma x_1(t) - \alpha(t-\tau)e^{\gamma\tau}x_2(t-\tau), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \alpha(t-\tau)e^{-\gamma\tau}x_2(t-\tau) - \beta(t)x_2^2(t) - a_1(t)x_2(t)\gamma(t) - E(t)x_2(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(r_1(t) - a_2(t)x_2(t) - b(t)y(t)). \end{cases}$$

By using the differential inequality theory, some new sufficient conditions which ensure the permanence of the system are established. In [5], the authors considered the following competitor-competitor–mutualist Lotka–Volterra systems with discrete time delays

Mediante la teoría de la desigualdad diferencial, se establecen nuevas condiciones suficientes que garantizan la permanencia del sistema. En [5], los autores consideraron los siguientes sistemas Lotka-Volterra competidor-competitivo-mutualista con retardos discretos.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1(t) - a_{11}^1(t)x_1(t-\tau) - a_{11}^2(t)x_1(t-2\tau) - a_{12}(t)x_2(t-2\tau) + a_{13}(t)x_3(t-\tau)], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[r_2(t) - a_{21}(t)x_1(t-2\tau) - a_{22}^1(t)x_2(t-\tau) - a_{22}^2(t)x_2(t-2\tau) + a_{23}(t)x_3(t-\tau)], \\ \dot{x} = x_3(t)[r_3(t) + a_{31}(t)x_1(t-\tau) + a_{32}(t)x2(t-\tau) - a_{33}^1(t)x_3(t) - a_{33}^2(t)x_3(t-\tau)]. \end{cases}$$

(4)

And some sufficient conditions which guarantee the boundedness, permanence and global attraction for system (4) were obtained. In 2011, Xu et al. [6] studied the dynamical behaviours for the following Lokta–Volterra predator–prey model with two delays

Se obtuvieron condiciones suficientes que garantizan la acotación, la permanencia y la atracción global del sistema (4). En 2011, Xu et al. [6] estudiaron los comportamientos dinámicos del siguiente modelo depredador-presa de Lokta-Volterra con dos retrasos.

$$\{\dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1 - a_{11}x_1(t-\tau_1) - a_{12}y(t-\tau_2)], \dot{x}_2(t) = x_2(t)[-r_2 - a_{21}x_1(t-\tau_1) - a_{22}y(t-\tau_2)].$$

(5)

Its linear stability and Hopf bifurcation are investigated by analysing the associated characteristic transcendental equation. Some explicit formulate for determining the stability and the direction of the Hopf bifurcation periodic solutions are obtained by using normal form theory and centre manifold theory.

Se investiga su estabilidad lineal y la bifurcación de Hopf mediante el análisis de la ecuación trascendental característica asociada. Se obtienen fórmulas explícitas para determinar la estabilidad y la dirección de las soluciones periódicas de la bifurcación de Hopf mediante la teoría de la forma normal y la teoría de la variedad central.

One can find that an ecosystem in the real world is continuously distributed by some forces, which can result in changes in the biological parameters such as survival rates. The practical interest in ecology is the question of whether or not an ecosystem can withstand those disturbances which persist for a finite period of time. In the control systems, we regard the disturbance functions as control variables. These are of significance in the control of ecology balance. One of the methods to research it is to alter the system structurally by introducing feedback control variables. The feedback control mechanism might be implemented by means of some biological control schemes or harvesting procedure. In fact, during the last decade, the qualitative behaviour of the population dynamics with feedback control has been studied extensively. In 2009, Nie et al. [12] considered the following nonautonomous predator–prey Lotka–Volterra system with feedback controls

En la vida real, un ecosistema se distribuye continuamente por ciertas fuerzas, lo que puede provocar cambios en parámetros biológicos como las tasas de supervivencia. El interés práctico en ecología radica en determinar si un ecosistema puede soportar perturbaciones que persisten durante un período finito. En los sistemas de control, consideramos las funciones de perturbación como variables de control. Estas son importantes para controlar el equilibrio ecológico. Uno de los métodos para investigarlo es alterar la estructura del sistema mediante la introducción de variables de control de retroalimentación. El mecanismo de control de retroalimentación podría implementarse mediante esquemas de control biológico o procedimientos de cosecha. De hecho, durante la última década, se ha estudiado ampliamente el comportamiento cualitativo de la dinámica poblacional con control de retroalimentación. En 2009, Nie et al. [12] consideraron el siguiente sistema Lotka-Volterra depredador-presa no autónomo con controles de retroalimentación.