Conjuntos

Intuitivamente, un **conjunto** es una colección de objetos, reales o imaginarios, llamados **elementos** del conjunto. Esta definición tiene algunos problemas cuando los conjuntos son muy grandes, pero lo importante es que cada conjunto está determinado por sus elementos:

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Para decir que x es elemento de A escribimos $x \in A$, y al conjunto que contiene a x,y,z se le denota por $\{x,y,z\}$ donde el orden no importa y no hay repeticiones.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los seres vivos.
- El conjunto de las especies de seres vivos.
- El alfabeto ingles = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}
- El conjunto de los números naturales $\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$.
- El conjunto **R** de todos los números reales.

Aunque los conjuntos pueden ser muy heterogéneos, los conjuntos mas útiles están formados por elementos con alguna propiedad en común, algo como

$$\{ x / P(x) \} = \text{El conjunto de los x que tienen la propiedad } P(x)$$

Ejemplos:

- El conjunto de las canciones de los Beatles = {x /x es canción y x fue escrita por los Beatles}
- El conjunto de los números primos = $\{ n \in \mathbf{N} / n$ no es divisible por ningún m con $1<m<n \}$
- El conjunto de los números *racionales* $\mathbf{Q} = \{ r \in \mathbf{R} / \exists\, m,n \in \mathbf{N}, r=m/n\}$
- El conjunto de los números *irracionales* $\mathbf{I} = \{ r \in \mathbf{R} / \nexists\, m,n \in \mathbf{N}, r=m/n\}$

Un **conjunto vacío** es un conjunto que no tiene elementos, así que todos los conjuntos vacíos son iguales, lo denotamos por {} o por $\varnothing$.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los perros voladores = $\varnothing$ = El conjunto de los triángulos con 4 lados.
- $\varnothing = \{\} \neq \{\{\}\} = \{\varnothing\}$

Si A y B son conjuntos, decimos que A esta **contenido** en B, o que A es **subconjunto** de B, si todos los elementos de A son elementos de B, y escribimos $A \subset B$ o $A \subseteq B$ (significan lo mismo).

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \to x \in B$$

Por el contrario, cuando A no esta contenido en B escribimos $A \not\subset B$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x,\ x \in A \quad x \notin B$$

Ejemplos.

- Si A = El conjunto de todas las aves

  B = El conjunto de todos los animales con alas

  C = El conjunto de todos los animales que vuelan

  Entonces $A \subset B$, $B \not\subset A$, $B \not\subset C$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $C \not\subset A$.

- Las rectas y planos son conjuntos de puntos. Los puntos son *elementos* del plano mientras que las rectas son *subconjuntos* del plano.

Afirmación. Si A, B y C son conjuntos y $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Demostración. $A \subset B$ y $B \subset C \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x,\ x \in B \rightarrow x \in C) \Rightarrow$

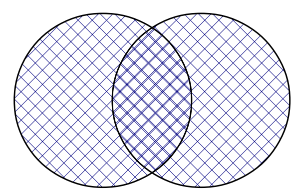
$\overset{silog}{\Rightarrow} (\forall x,\ x \in A \rightarrow x \in C) \Leftrightarrow A \subset C$ $\square$

Afirmación. A = B si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Demostración. $A = B \overset{def}{\Leftrightarrow}$ A y B tienen los mismos elementos $\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow$

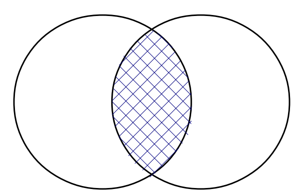
$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x\ (x \in B \rightarrow x \in A) \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subset B$ y $B \subset A$ $\square$

Operaciones con conjuntos.



La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto AUB formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cup B = \{\ x\ /\ x \in A \vee x \in B\}$$



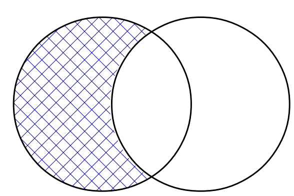
La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto AUB formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cap B = \{\ x\ /\ x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo. Si A = El conjunto de los números naturales impares = {1,3,5,7,9,11,13,..}

y B = El conjunto de los múltiplos de 3 = {3,6,9,12,15,...}

entonces $A \cup B = \{1,3,5,6,7,9,11,12,13,15,...\}$ $A \cap B = (3,9,15,21,27,...)$



La **diferencia** entre dos conjuntos A y B es el conjunto A-B formado por los elementos de A que *no* son elementos de B.

$$A - B = \{\ x\ /\ x \in A \wedge x \notin B\ \}$$

Ejemplo. Si A y B son los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

A-B = el conjunto de los impares que no son múltiplos de 3 = $\{1,5,7,11,13,17,19,23,...\}$

B-A = el conjunto de los múltiplos de 3 que no son impares = $\{6,12,18, 24,...\}$

La unión y la intersección son *operaciones* entre conjuntos, que tienen propiedades parecidas a la suma y la multiplicación de números naturales.

Lema. Si A, B y C son conjuntos entonces se cumplen:

1. $A \cup B = B \cup A$ *La unión es conmutativa*
2. $A \cap B = B \cap A$ *La intersección es conmutativa*
3. $(A\cup B) \cup C = A \cup (B\cup C) = A \cup B \cup C$ *La unión es asociativa*
4. $(A\cap B) \cap C = A \cap (B\cap C) = A \cap B \cap C$ *La intersección es asociativa*
5. $A \cap (B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$ *La intersección se distribuye sobre la unión*
6. $A \cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$ *La unión se distribuye sobre la intersección*

Demostración.

1. Tenemos que ver que $A \cup B$ y $B \cup A$ tienen los mismos elementos:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A \qquad \square$$

3. Hay que ver que $(A\cup B) \cup C$ y $A \cup (B\cup C)$ tienen los mismos elementos:

$$x \in (A\cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A\cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B\cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B\cup C) \qquad \square$$

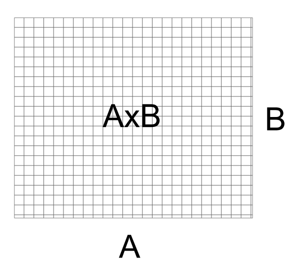
5. Veamos que $A \cap (B\cup C)$ Φ $(A\cap C) \cup (B\cap C)$ tienen los mismos elementos:

$$x \in A \cap (B\cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B\cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A\cap B) \cup (A\cap C) \qquad \square$$

Hay otras maneras de combinar conjuntos para obtener otros conjuntos.

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto AxB cuyos elementos son todas las *parejas ordenadas* (a,b) formadas por un elemento de A y un elemento de B:



$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A , y \in B \}$$

Ejemplos.

- Si A = {1,2,3} y B ={1,2} entonces A x B = { (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) }
- Si A = {1,2,3} y B ={ } entonces A x B = { }
- Si **R** es el conjunto de los números reales, entonces **R** x **R** es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, también denotado por $\mathbf{R}^2$.

En el producto cartesiano el orden importa: si A ≠ B entonces AxB ≠ BxA.

Ejercicios.

1. Demuestra o da contraejemplos.

   a. AUB = AUC ⇔ B=C   b. A∩B = A∩C ⇔ B=C

2. Demuestra que ∩ es conmutativa y asociativa, y que se distribuye sobre U.
3. ¿La diferencia de conjuntos es asociativa? Es decir, (A-B)-C = A-(B-C) ?
4. Muestra que

   a. (AUB)-C = (A-C)U(B-C)   b. (A∩B)-C = (A-C)∩(B-C)

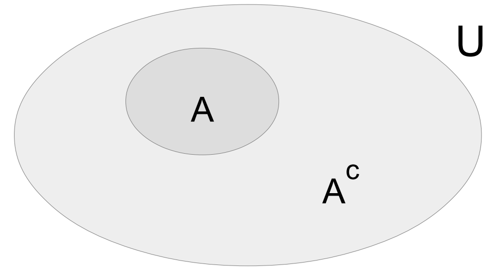
5. Encuentra 3 conjuntos A, B y C tales que A∩B≠∅, A∩C≠∅ y B∩C≠∅ pero A∩B∩C = ∅.
6. Si A, B, C son conjuntos, muestra que (A x B) x C ≠ A x (B x C). ¿Como definirías A x B x C?

Conjuntos universales, complementos.

Los conjuntos interesantes son aquellos cuyos elementos tienen algo en común, donde no se revuelvan por ejemplo manzanas, poemas, números y marcianos (a menos que todos estos tengan algo en común que los separe de todo lo demás).

Así que empezamos con fijarnos en un “universo” mas pequeño, por ejemplo el de los números, y pensamos en conjuntos contenidos en este Universo o **conjunto universal** (que puede cambiar de acuerdo a lo que nos interese). Mas adelante veremos que no puede existir un conjunto tan universal que contenga a todo.

Si fijamos un conjunto universal U y A está contenido en U, el **complemento** de A (en U) es el conjunto A^c formado por los elementos de U que no están en A.



$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$

Ojo: El complemento A^c depende del conjunto universal U, pero muchas veces U no se escribe si es claro en que universo estamos trabajando.

Ejemplos.

- Si pensamos en el universo A de todos los animales y el conjunto de los animales que vuelan es V

  entonces su complemento V^c es el conjunto de los animales que no vuelan.
- La propiedad que define al complemento A^c es la *negación* de la propiedad que define a A, pero A^c depende de cual sea el universo.
- Si $\mathbf{P} = \{n \in \mathbf{N} \ / \ n \text{ es primo}\}$ entonces se entiende que el conjunto universal es **N** (los números naturales) y su complemento es $\mathbf{P}^c = \{n \in \mathbf{N} \ / \ n \text{ no es primo}\}$
- El conjunto de los *números racionales* es el conjunto

  $\mathbf{Q} = \{ x \in \mathbf{R} \ / \text{ existen enteros m y n tales que } x = m/n \}$

  Su complemento (en el universo de los números reales) es el conjunto de los *números irracionales*:

  $\mathbf{I} = \{ x \in \mathbf{R} \ / \text{ no existen enteros m y n tales que } x = m/n \}$

Lema. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A - B = A \cap B^c$

Demostración. $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ □

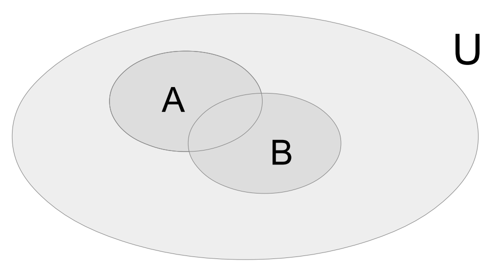
Lema. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A \subset B$ si y solo si $B^c \subset A^c$

Demostración. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \rightarrow x \in B \Leftrightarrow \forall x, x \notin B \rightarrow x \notin A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x, x \in B^c \rightarrow x \in A^c \Leftrightarrow B^c \subset A^c$ □

Las relaciones entre la unión, la intersección y el complemento están dadas por las

Leyes de De Morgan:

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Demostración. 1. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

Ejercicios.

7. Si $U = \mathbf{Z}$, $A = \{n \in \mathbf{Z} \ / \ n \text{ es múltiplo de } 3\}$ $B = \{n \in \mathbf{Z} \ / \ n \text{ es múltiplo de } 4\}$ calcula $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$

8. Demostrar la segunda ley de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

9. Demuestra que el complemento de $(A \cup B) \cap C$ es $(A^c \cap B^c) \cup C^c$.

10. Si $A \subset U$ y $B \subset V$, calcula el complemento de AxB en UxV en términos de los complementos de A y B en U y V respectivamente (la respuesta es corta pero no es trivial)

Conjuntos de conjuntos.

Podemos considerar a conjuntos cuyos elementos sean otros conjuntos.

Ejemplos.

- El conjunto formado por los grupos en una escuela.
- El conjunto de todos los intervalos en la recta.
- El conjunto de todas las rectas en el plano (este conjunto *no* es el plano, que es un conjunto de puntos, sino un conjunto cuyos *elementos* son las rectas)

Si A es cualquier conjunto, el **conjunto potencia** de A, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, y es denotado por 2^A.

Ejemplos.

- Si $A = \{1,2,3\}$ entonces $2^A = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$
- Si $A = \varnothing$ entonces el único subconjunto de A es $\varnothing$ así que $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$

A veces es necesario considerar familias grandes de conjuntos y hacer operaciones con ellos, como intersectarlos o unirlos todos.

Ejemplos.

- Considerar la familia G de todos los grupos de la facultad de ciencias:

  $$G = \{g \,/\, g \text{ es un grupo de la facultad}\}$$

  La unión de todos los grupos de la facultad se denota por $\bigcup_{g\in G} g$ y la intersección por $\bigcap_{g\in G} g$.

  $\bigcup_{g\in G} g$ = el conjunto de alumnos de la facultad y $\bigcap_{g\in G} g = \varnothing$.

  La familia G tiene muchas subfamilias, por ejemplo la familia M de los grupos de la mañana.

  $\bigcup_{g\in M} g$ = el conjunto de alumnos que toman algún curso en la mañana

  y el complemento de este conjunto es

  $\left(\bigcup_{g\in M} g\right)^c$ = el conjunto de alumnos que toman todos sus cursos en la tarde

  Si a es un alumno de la facultad entonces

  $\bigcup_{g\in G, a\in g} g$ = el conjunto de todos los alumnos que llevan *alguna* clase con a.

  $\bigcap_{g\in G, a\in g} g$ = el conjunto de todos los alumnos que llevan *todas* sus clases con a.

Ejercicios.

11. Da un ejemplo de un conjunto cuyos elementos sean conjuntos de conjuntos.

12. Si $A = \{1,2\}$ ¿quienes son 2^A y 2^{2^A}?

13. Muestra que si A y B son dos conjuntos entonces

a. $2^{A\cap B} = 2^A \cap 2^B$ b. $2^{A\cup B} \supset 2^A \cup 2^B$.

14. ¿Como definirías una pareja ordenada (a,b) usando conjuntos? (recuerda que en la pareja (a,b) el orden importa y en el conjunto {a,b} el orden no importa)

15. Si S_n denota al conjunto de los números naturales menores o iguales a n, calcula

a. $\bigcup_{n\in N} S_n$ b. $\bigcap_{n\in N} S_n^c$ c. $\bigcup_{m,n\in N} S_m - S_n$

16. Si $\{A_i\}$ es una familia de conjuntos ¿quienes son $\left(\cup A_i\right)^c$ y $\left(\cap A_i\right)^c$ en términos de los complementos individuales?

Conjuntos y lógica.

Casi todas las matemáticas modernas están basadas en conjuntos, y los conjuntos están íntimamente ligados a la lógica. Dado un *conjunto universal* U, a cada elemento $x \in U$ y a cada conjunto $A \subset U$ podemos asociarle una proposición:

A(x) = *x es elemento de* A

que es verdadera si x está en A y falsa si x no está en A.

Entonces las operaciones lógicas corresponden a operaciones con conjuntos:

- $A(x) \wedge B(x)$: *x es elemento de* A y *x es elemento de* B =
  = *x es elemento de* $A \cap B$: $(A\cap B)(x)$

- $A(x) \vee B(x)$: *x es elemento de* A o *x es elemento de* B =
  = *x es elemento de* $A \cup B$: $(A\cup B)(x)$

- $\neg A(x)$: *x no es elemento de A* = *x es elemento de* A^C : $A^C(x)$

- $A(x) \rightarrow B(x)$: Si *x es elemento de* A entonces *x es elemento de* B : $A \subset B$

- La igualdad $\neg(A(x) \vee B(x)) = \neg A(x) \wedge \neg B(x)$
  equivale a la *primera ley de De Morgan*: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

- La igualdad $\neg(A(x) \wedge B(x)) = \neg A(x) \vee \neg 8(x)$

equivale a la *segunda ley de De Morgan*: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Axiomas

La definición intuitiva de conjunto como una colección de cualquier clase de cosas lleva a paradojas lógicas. Si pudiéramos hablar de conjuntos sin ninguna restricción, podríamos considerar el conjunto C de todos los conjuntos y C seria elemento de si mismo (porque C es un conjunto) lo que suena raro pero no es paradójico. Pero también podríamos considerar el siguiente conjunto:

> *Sea N el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos si mismos. Entonces podemos preguntarnos si N es elemento de sí mismo, o si no lo es.*
>
> *Si N fuera elemento de sí mismo, entonces sería uno de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, así que N debería ser elemento de N, lo que es una contradicción.*
>
> *Y si N sí fuera elemento de sí mismo, entonces N no sería uno de los conjuntos que no son elementos de sí mismos, y por lo tanto N no debería ser elemento de N, lo que es otra contradicción.*

Esta es la paradoja de Russell, que muestra que no puede existir un “conjunto universal” que contenga a todos los conjuntos y que es necesario definir a los conjuntos de manera mucho mas cuidadosa. Pero queda la duda de que los conjuntos, aun definidos con mas cuidado, no lleven a otras contradicciones lógicas, y que las matemáticas, que están basadas en los conjuntos, no vayan a ser ilógicas. En los últimos 100 años se ha trabajado muchísimo para mostrar que las reglas que definen a los conjuntos no llevan a contradicciones lógica (esto se expresa diciendo que la teoría de conjuntos es *consistente*).

No sólo los conjuntos definidos de manera arbitraria llevan a contradicciones lógicas, las proposiciones definidas de manera arbitraria también. Considerar por ejemplo la afirmación:

Esta afirmación es falsa

Observar que esa afirmación no puede ser cierta (porque entonces sería falsa) y tampoco puede ser falsa (porque entonces sería cierta). Así que no cualquier afirmación es una proposición (algo que es o cierto o falso, pero no ambas o ninguna) y tenemos que tener mas cuidado en que clase de afirmaciones permitimos.

Aunque la idea que tenemos de los conjuntos es muy sencilla, definir rigurosamente que son los conjuntos y sus elementos no es fácil (es como tratar de definir lo que son puntos y rectas).

Pero para estudiar conjuntos no necesitamos saber exactamente que son, siempre y cuando sepamos cuales son sus *propiedades*, lo que hace que se comporten como los conjuntos que conocemos. Estas propiedades fundamentales, a partir de las cuales solo necesitamos usar la lógica para averiguar todas las demás, se llaman *axiomas*.

Los primeros intentos por axiomatizar la teoría de conjuntos fueron hechos por Cantor y Fregel en el siglo XIX, pero luego Russell descubrió que sus suposiciones llevaban a una paradoja. A principios del siglo XX, Zermelo y Fraenklen pudieron conseguir un sistema de axiomas *consistentes* (que no pueden llevar a contradicciones).

Algunos de los axiomas de Zermelo-Fraenkel son (hay muchos mas):

- *Existe un conjunto sin elementos.*
- *Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.*
- *Ningún conjunto es elemento de sí mismo.*
- *Si A es un conjunto y P es una propiedad entonces* $\{x \in A \ / \ P(x)\}$ *también es un conjunto.*
- *Si A es un conjunto entonces hay un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A.*

Los axiomas no dicen que son los conjuntos, ni que significa que algo sea elemento de un conjunto. Para demostrar formalmente algo sobre conjuntos solo se vale usar los axiomas y la lógica, y no otras ideas que tengamos acerca de lo que son.

Ejercicios de repaso.

17. Demuestra que son equivalentes

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B.$$

18. Muestra que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ si y solo si $C \subset A$.

19. Prueba que $C-(A \cup B) = (C-A) \cap (C-B)$

20. Muestra que si $A(x)$ es la afirmación *x es elemento de A*, entonces la igualdad

$\neg(A(x) \vee B(x)) = \neg A(x) \wedge \neg B(x)$ equivale a la primera ley de De Morgan: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

21. Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto universal U. Si A(x) significa *x es elemento de A* ¿que implican las siguientes proposiciones acerca de los conjuntos A y B?

   a. $\forall x, A(x) \rightarrow \neg B(x)$
   b. $\forall x, A(x) \rightarrow A^C(x)$
   c. $\forall x, A(x) \vee B(x)$

22. La *diferencia simétrica* o *suma booleana* de dos conjuntos A y B es el conjunto A+B formado por los elementos que están en alguno de los conjuntos pero no en el otro, es decir

$$A+B = (A-B) \cup (B-A)$$

a. Para $A = \{1,2,3\}$ y $B= \{3,4\}$ calcula A+B.

b. Muestra que $A+B = A \cup B - A \cap B$

c. Muestra que para todo conjunto A, existe un único conjunto A' tal que $A+A' = \emptyset$.

d. Muestra que existe un único conjunto Z tal que para todo conjunto A, $A+Z = A$.

e. Demuestra que + es una operación conmutativa.

f. Demuestra que + es una operación asociativa.

g. ¿La unión y la intersección se distribuyen sobre +?

h. ¿+ se distribuye sobre la unión? ¿Y sobre la intersección?

23. Da otros ejemplos de “conjuntos imposibles” y de afirmaciones paradójicas.