Teoría de Conjuntos

L. González-Santos

February 1, 2026

Conjuntos

Intuitivamente, un **conjunto** es una colección de objetos, reales o imaginarios, llamados **elementos** del conjunto. Esta definición tiene algunos problemas cuando los conjuntos son muy grandes, pero lo importante es que cada conjunto está determinado por sus elementos:

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Para decir que x es elemento de A escribimos $x \in A$, y al conjunto que contiene a x,y,z se le denota por $\{x, y, z\}$ donde el orden no importa y no hay repeticiones.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los seres vivos.
- El conjunto de las especies de seres vivos.
- El alfabeto ingles $=$ $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$
- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

Aunque los conjuntos pueden ser muy heterogéneos, los conjuntos mas útiles están formados por elementos con alguna propiedad en común, algo como

$\{x|P(x)\} =$ El conjunto de los x que tienen la propiedad P(x)

Ejemplos:

- El conjunto de las canciones de los Beatles $=$ $\{x|$x es canción y x fue escrita por los Beatles$\}$
- El conjunto de los números primos $=$ $\{n \in \mathbb{N}|n$ no es divisible por ningún m con $1 < m < n\}$
- El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \{r \in R|\exists m, n \in Z, r = m/n\}$
- El conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \{r \in R|$ NO $\exists m, n \in N, r = m/n\}$

Conjuntos

Un **conjunto vacío** es un conjunto que no tiene elementos, así que todos los conjuntos vacíos son iguales, lo denotamos por $\{\}$ o por $\emptyset$.

Ejemplos.

- El conjunto de todos los perros voladores $= \emptyset =$ El conjunto de los triángulos con 4 lados.
- $\emptyset = \{\} \neq \{\{\}\} = \{\emptyset\}$

Si A y B son conjuntos, decimos que A esta **contenido** en B, o que A es **subconjunto** de B, si todos los elementos de A son elementos de B, y escribimos $A \subset B$.

$$A \subset B \ \forall \ x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Por el contrario, cuando A no esta contenido en B escribimos $A \not\subseteq B$

$$A \not\subseteq B \ \forall \ \exists \ x, x \in A \notin B$$

Ejemplos.

1. Si A $=$ El conjunto de todas las aves
B $=$ El conjunto de todos los animales con alas
C $=$ El conjunto de todos los animales que vuelan
Entonces $A \subset B, B \not\subset A, B \not\subset C, C \subset B, A \not\subset C, C \not\subset A$.

2. Las rectas y planos son conjuntos de puntos. Los puntos son elementos del plano mientras que las rectas son subconjuntos del plano.

Afirmación. Si A, B y C son conjuntos y $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Afirmación. A $=$ B si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Conjuntos

Operaciones con conjuntos.

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cup B = x|x \in A\&x \in B$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ formado por los elementos de A y los elementos de B, es decir

$$A \cap B = \{x|x \in A \ \& \ x \in B\}$$

La **diferencia** entre dos conjuntos A y B es el conjunto A-B formado por los elementos de A que no son elementos de B.

$$A - B = \{x|x \in A \ y \ x \notin B\}$$

Conjuntos

La unión y la intersección son operaciones entre conjuntos, que tienen propiedades parecidas a la suma y la multiplicación de números naturales.
Lema. Si A, B y C son conjuntos entonces se cumplen:

1. $A \cup B = B \cup A$ La unión es conmutativa
2. $A \cap B = B \cap A$ La intersección es conmutativa
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ La unión es asociativa
4. $(A \cup B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ La intersección es asociativa
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ La intersección se distribuye sobre la unión
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ La unión se distribuye sobre la intersección

Conjuntos

Hay otras maneras de combinar conjuntos para obtener otros conjuntos.

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ cuyos elementos son todas las parejas ordenadas (a,b) formadas por un elemento de A y un elemento de B:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Ejemplos.

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$ entonces $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\}$ entonces $A \times B = \{\}$
- Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, también denotado por $\mathbb{R}^2$

En el producto cartesiano el orden importa: si $A \neq B$ entonces $A \times B \neq B \times A$.

Ejercicios.

1. Demuestra o da contraejemplos. a) $A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B = C$ b. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B = C$
2. Demuestra que $\cap$ es conmutativa y asociativa, y que se distribuye sobre $\cup$.
3. ¿La diferencia de conjuntos es asociativa? Es decir, (A-B)-C = A-(B-C) ?
4. Muestra que a. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ b. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
5. Encuentra 3 conjuntos A, B y C tales que $A \cap B \neq \emptyset$, $\cap C \neq \emptyset$ y $B \cap C \neq \emptyset$ pero $A \cap B \cap C = \emptyset$.
6. Si A, B, C son conjuntos, muestra que $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. ¿Como definirías $A \times B \times C$?

Conjuntos universales, complementos.

Si fijamos un conjunto universal U y A está contenido en U, el **complemento** de A (en U) es el conjunto A^c formado por los elementos de U que no están en A.

$$A^c = \{x \in U | x \notin A\} = U - A$$

Ejemplos.

- Si pensamos en el universo A de todos los animales y el conjunto de los animales que vuelan es V entonces su complemento V^c es el conjunto de los animales que no vuelan.
- La propiedad que define al complemento A^c es la negación de la propiedad que define a A, pero A^c depende de cual sea el universo.

Conjuntos universales y complementos

- Si $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ es primo } \}$ entonces se entiende que el conjunto universal es $\mathbb{N}$ (los números naturales) y su complemento es $\mathbb{P}^c = \{n \in \mathbb{N} | n \text{no es primo}\}$

Conjuntos universales y complementos

Lema. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A - B = A \cap B^c$

Lema. Si A y B son conjuntos en un universo U, entonces $A \subset B$ si y solo si $B^c \subset A^c$

Leyes de De Morgan

Leyes de Morgan

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejercicios

1. Si $U = \mathbb{Z}, A = \{n \in \mathbb{Z} | \text{n es múltiplo de 3}\}, B = \{n \in \mathbb{Z} | \text{n es múltiplo de 4}\}$ calcula $(A \cup B)^c$ y $(A \cap B)^c$
2. Demostrar la segunda ley de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
3. Demuestra que el complemento de $(A \cup B) \cap C$ es $(A^c \cap B^c) \cup C^c$.
4. Si $A \subset U$ y $B \subset V$, calcula el complemento de $A \times B$ en $U \times V$ en términos de los complementos de A y B en U y V respectivamente (la respuesta es corta pero no es trivial)

Conjuntos de conjuntos.
Podemos considerar a conjuntos cuyos elementos sean otros conjuntos.

Ejemplos.

- El conjunto formado por los grupos en una escuela.
- El conjunto de todos los intervalos en la recta.
- El conjunto de todas las rectas en el plano (este conjunto no es el plano, que es un conjunto de puntos, sino un conjunto cuyos elementos son las rectas)

Si A es cualquier conjunto, el **conjunto potencia** de A, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A, y es denotado por 2^A.

Ejemplos.

1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces
   $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
2. Si $A = \emptyset$ entonces el único subconjunto de A es $\emptyset$ así que $2^\emptyset = \emptyset$