

Recursão e iteração

- Considere por exemplo que queremos definir a operação de multiplicação, em termos da operação mais simples de adição (apenas como exemplo ilustrativo de definições usando recursão e iteração, pois certamente essa operação está disponível na linguagem).
- A multiplicação de um número inteiro por outro inteiro maior ou igual a zero pode ser definida **por indução** como a seguir:

$$m \times 0 = 0$$

$$m \times n = m + (m \times (n - 1)) \quad \text{se } n > 0$$

Iteração

- Mais informalmente, multiplicar m por n (n não-negativo) é somar m , n vezes:

$$m \times n = \underbrace{m + \dots + m}_{n \text{ vezes}}$$

- Solução de problema que realiza operações repetidamente pode ser implementada (em linguagens imperativas) usando **comando de repetição** (também chamado de **comando iterativo** ou **comando de iteração**).



Comandos de repetição

Comando `while`

```
while (e) c
```



Comandos de repetição

Comando `while`

```
while (e) c
```

Avalia *e*; se false,



Comandos de repetição

Comando `while`

```
while (e) c
```

Avalia *e*; se false, termina;
se true,

Comandos de repetição

Comando `while`

```
while (e) c
```

Avalia *e*; se `false`, termina;
se `true`, executa *c* e repete o processo.



Comandos de repetição

Comando for

```
for ( $c_0$ ;  $e$ ;  $c_1$ )  $c$ 
```

Comandos de repetição

Comando for

```
for ( $c_0$ ;  $e$ ;  $c_1$ )  $c$ 
```

Executa c_0 .

Em seguida, faça o seguinte:

Comandos de repetição

Comando for

```
for ( $c_0$ ;  $e$ ;  $c_1$ )  $c$ 
```

Executa c_0 .

Em seguida, faça o seguinte:

avalia e ;

se false,

Comandos de repetição

Comando for

```
for ( $c_0$ ;  $e$ ;  $c_1$ )  $c$ 
```

Executa c_0 .

Em seguida, faça o seguinte:

- avalia e ;

- se false, termina;

- se true,

Comandos de repetição

Comando for

```
for ( $c_0$ ;  $e$ ;  $c_1$ )  $c$ 
```

Executa c_0 .

Em seguida, faça o seguinte:

avalia e ;

se false, termina;

se true, execute c , depois c_1 e repita o processo.



Comandos de repetição

Comando do while

```
do c while (e)
```



Comandos de repetição

Comando do while

```
do c while (e)
```

Executa *c*

Avalia *e*; se false,



Comandos de repetição

Comando do while

```
do c while (e)
```

Executa *c*

Avalia *e*; se false, termina;
se true,

Comandos de repetição

Comando do while

```
do c while (e)
```

Executa *c*

Avalia *e*; se false, termina;
se true, repete o processo.

Exemplo de iteração com comando `for`

```
static int mult (int m, int n)  
{ int r=0;  
  for (int i=1; i<=n; i++) r += m;  
  return r;  
}
```


Iteração

- Exemplo a seguir segue passo a passo a execução de *mult(3,2)*
- São mostrados:
 - ★ **Comando a ser executado** ou **expressão a ser avaliada**
 - ★ **Resultado** (no caso de expressão)
 - ★ **Estado** (após execução do comando ou avaliação da expressão)

Detalhamento da execução de $mult(3,2)$

Comando/ Expressão	Resultado (expressão)	Estado (após execução/avaliação)
$mult(3,2)$...	$m \mapsto 3, n \mapsto 2$
<code>int r = 0</code>		$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 0$
<code>int i = 1</code>		$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 0, i \mapsto 1$
$i \leq n$	true	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 0, i \mapsto 1$
$r += m$	3	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 3, i \mapsto 1$
$i ++$	2	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 3, i \mapsto 2$
$i \leq n$	true	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 3, i \mapsto 2$
$r += m$	6	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 6, i \mapsto 2$
$i ++$	3	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 6, i \mapsto 3$
$i \leq n$	false	$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 6, i \mapsto 3$
<code>for ...</code>		$m \mapsto 3, n \mapsto 2, r \mapsto 6$
<code>return r</code>		
$mult(3,2)$	6	

Chamada de método

- Expressões — chamadas de **parâmetros reais** — são avaliadas, fornecendo valores dos **argumentos**.
- Argumentos são copiados para os **parâmetros** — também chamados **parâmetros formais** — do método.
- Corpo do método é executado.

Chamada de método

- Chamada cria novas **variáveis locais**.
- Parâmetros formais são variáveis locais do método.
- Outras variáveis locais podem ser declaradas (ex: *r* em *mult*).
- Quando execução de uma chamada termina, execução retorna ao ponto da chamada.

Comando `for`: terminologia

`for (c0; e; c1) c`

- *c₀: comando de “inicialização”*

No caso em que é uma declaração, variável criada é comumente chamada de **contador de iterações**.

- *e: teste de terminação*
- *c₁: comando de atualização*
- *c₁: corpo*

Recursão

Definição indutiva dá origem a implementação recursiva:

```
static int multr (int m, int n)  
{ if (n==0) return 0;  
  else return (m + multr(m, n-1)); }
```



Recursão

- Cada chamada recursiva cria novas variáveis locais.
- Em chamadas recursivas, existem em geral várias variáveis locais de mesmo nome, mas somente as variáveis do último método chamado podem ser usadas (são acessíveis) diretamente.
- Quando execução de uma chamada recursiva termina, execução retorna ao método que fez a chamada.
- Assim, chamadas recursivas são executadas em **estrutura de pilha**.

Recursão

- Exemplo a seguir ilustra a execução de *mult*(3,2)
- São mostrados, passo a passo:
 - ★ **Comando a ser executado** ou **expressão a ser avaliada**
 - ★ **Resultado** (no caso de expressão)
 - ★ **Estado** (após execução do comando ou avaliação da expressão)

$mult(3, 2)$...	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$		
$n == 0$	false	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$		
return $m + mult(m, n - 1)$...	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 1$	
$n == 0$	false	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 1$	
return $m + mult(m, n - 1)$...	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 1$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 0$
$n == 0$	true	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 1$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 0$
return 0		$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$	$m \mapsto 3$ $n \mapsto 1$	
return $m + 0$		$m \mapsto 3$ $n \mapsto 2$		
return $m + 3$				
$mult(3, 2)$	6			



Recursão

- Estrutura de pilha: último conjunto de variáveis (da pilha) são variáveis locais do último método chamado,
- penúltimo conjunto de variáveis são do penúltimo método chamado, e assim por diante.
- Espaço em memória de variáveis alocadas na pilha para um método é chamado de **registro de ativação** desse método.



Valor inicial de variáveis locais

- Registro de ativação é alocado no início e desalocado no fim da execução de um método.
- **Variáveis locais a um método não são inicializadas automaticamente com valor *default*,**

Valor inicial de variáveis locais

- Registro de ativação é alocado no início e desalocado no fim da execução de um método.
- **Variáveis locais a um método não são inicializadas automaticamente com valor *default*,**
- ao contrário de variáveis de objetos e de classes.

Variável local tem que ser inicializada “em todos os caminhos até seu uso”

Por exemplo, programa a seguir contém um erro:

```
import javax.swing.*;

class V
{ public static void main (String[] a)
  int x;
    boolean b = Boolean.valueOf(
        JOptionPane.showInputDialog("Digite \"true\" ou \"false\"")).booleanValue();
    if (b) x = Integer.parseInt(
        JOptionPane.showInputDialog("Digite um valor inteiro"));
    System.out.println(x); }

}
```

Recursão simulando processo iterativo

```
static int multIter (int m, int n, int r)  
{ if (n == 0) return r;  
  else return multIter(m, n-1, r+m);  
}
```

Recursão simulando processo iterativo

- Como na versão iterativa, a cada recursão valor de r (“acumulador”) é incrementado de m .
- Diferença:

versão recursiva	acumulador é nova variável a cada recursão
versão iterativa	acumulador é a mesma variável em cada iteração

Exponenciação: implementações análogas

```
static int exp (int m, int n)  
{ int r=1;  
  for (int i=1; i<=n; i++) r*=m;  
  return r; }
```

```
static int expr (int m, int n)  
{ if (n==0) return 1;  
  else return (m * expr(m, n-1)); }
```


Math.pow e *Math.exp*

- `public static double pow (double a, double b)` fornece como resultado valor de tipo `double` mais próximo de a^b .
- `public static double exp (double a)` fornece como resultado valor de tipo `double` mais próximo de e^a (sendo e a base dos logaritmos naturais).

Eficiência

Definição indutiva da exponenciação:

$$\begin{aligned} m^0 &= 1 \\ m^n &= m \times m^{n-1} \quad \text{se } n > 0 \end{aligned}$$

Definição alternativa (também indutiva):

$$\begin{aligned} m^0 &= 1 \\ m^n &= (m^{n/2})^2 \quad \text{se } n \text{ é par} \\ m^n &= m \times m^{n-1} \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{aligned}$$

Eficiência

Definição alternativa dá origem a implementação **mais eficiente**:

```
static int exp2 (int m, int n)  
{ if (n == 0) return 1;  
  else if (n % 2 == 0) // n é par  
    { int x = exp2(m, n/2);  
      return x*x; }  
  else return m * exp2(m, n-1);  
}
```

Eficiência

Diferença em eficiência é significativa:

- **Chamadas recursivas** na avaliação de $exp2(m, n)$
dividem o valor de n por 2 a cada chamada
- na avaliação de $exp(m, n)$
valor de n é decrementado de 1 a cada iteração
- assim como na avaliação de $expr(m, n)$, valor de n é decrementado de 1 a cada chamada recursiva

Eficiência

- Exemplo: chamadas recursivas durante avaliação de $\text{exp2}(2, 20)$:

$\text{exp2}(2, 20)$	$\text{exp2}(2, 10)$	$\text{exp2}(2, 5)$	
$\text{exp2}(2, 4)$	$\text{exp2}(2, 2)$	$\text{exp2}(2, 1)$	$\text{exp2}(2, 0)$

- Quanto maior n , maior a diferença em eficiência.
- São realizadas da ordem de $\log_2(n)$ chamadas recursivas durante avaliação de $\text{exp2}(m, n)$ — n é em média dividido por 2 em chamadas recursivas**
- ao passo que avaliação de $\text{exp}(m, n)$ requer n iterações.

Fatorial recursivo

$$\begin{array}{ll} n! = 1 & \text{se } n = 0 \\ n! = n \times (n - 1)! & \text{em caso contrário} \end{array}$$

```
static int fatr (int n)  
{ if (n == 0) return 1;  
  else return n * fatr(n-1); }
```

Fatorial iterativo

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots 3 \times 2 \times 1$$

```
static int fat (int n)  
{ int f=1;  
  for (int i=1; i<=n; i++) f *= i;  
  return f; }
```

Fatorial recursivo que se espelha no algoritmo iterativo

```
static int fatIter (int n, int i, int f)  
    // fatIter(n,1,1) = n!   i funciona como contador de recursões e  
    //                           f como acumulador (de resultados parciais)  
{ if (i > n) return f;  
  else return fatIter(n,i+1,f*i); }  
  
static int fatr1 (int n)  
{ return fatIter (n,1,1); } }
```


Progressão aritmética de passo 1

Implementação baseada em iteração

```
static int pa1 (int n)  
{ int s = 0;  
  for (int i=1; i<=n; i++) s += i;  
  return s; }
```

Progressão aritmética de passo 1

Implementação recursiva



```
static int par (int n)  
{ if (n==0) return 0;  
  else return n + par(n-1); }
```

Progressão aritmética de passo 1

Recursão espelhando algoritmo iterativo

```
static int pa1Iter (int n, int i, int s)  
{ if (i > n) return s;  
  else return pa1Iter(n, i+1, s+i); }
```

```
static int pa1rIter (int n)  
{ return pa1Iter(n, 1, 0); }
```



Progressão aritmética

- Exemplos apenas ilustrativos: seriam implementações mal feitas na prática, pois ineficientes. . .
- Uma vez que . . .

Progressão aritmética

- Exemplos apenas ilustrativos: seriam implementações mal feitas na prática, pois ineficientes. . .
- Uma vez que . . .

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$



Progressão geométrica: $\sum_{i=0}^n x^i$

- Implementação iterativa:

Progressão geométrica: $\sum_{i=0}^n x^i$

- Implementação iterativa:

```
static int pg (int n, int x)
{ int s = 1, parc = x;
  for (int i=1; i<=n; i++)
    { s += parc; parc *= x; }
  return s; }
```

- *parc* usada para evitar cálculo de x^i a cada iteração.

Progressão geométrica

Mostre analogia pa - pg :

- Implemente pgr e $pgrIter$.
- Mostre que pg , pgr e $pgIter$ são ineficientes. . .

Progressão geométrica

Mostre analogia pa - pg :

- Implemente pgr e $pgrIter$.
- Mostre que pg , pgr e $pgIter$ são ineficientes. . . deduzindo fórmula para cálculo direto de pgs .
- Dica?

Progressão geométrica

Mostre analogia *pa-pg*:

- Implemente *pgr* e *pgrIter*.
- Mostre que *pg*, *pgr* e *pgIter* são ineficientes. . . deduzindo fórmula para cálculo direto de *pgs*.
- Dica? multiplique $s = \sum_{i=0}^n x^i$ por

Progressão geométrica

Mostre analogia *pa-pg*:

- Implemente *pgr* e *pgrIter*.
- Mostre que *pg*, *pgr* e *pgIter* são ineficientes. . . deduzindo fórmula para cálculo direto de *pgs*.
- Dica? multiplique $s = \sum_{i=0}^n x^i$ por $-x$ e

Progressão geométrica

Mostre analogia *pa-pg*:

- Implemente *pgr* e *pgrIter*.
- Mostre que *pg*, *pgr* e *pgIter* são ineficientes. . . deduzindo fórmula para cálculo direto de *pgs*.
- Dica? multiplique $s = \sum_{i=0}^n x^i$ por $-x$ e some a s .

Implementação de somatórios

- Usar variável para armazenar soma.
- Decidir se parcela a ser somada vai ser obtida da parcela anterior ou do contador de iterações.
- No 1º caso, usar variável para armazenar valor calculado na parcela anterior (como *parc* em *pg*).
- Exemplo do 2º caso: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

Implementação de somatórios

- Em vários casos, cálculo não usa a própria parcela anterior, mas valores usados no cálculo dessa parcela.
- Exemplo: cálculo aproximado do valor de π , usando:

$$\pi = 4 * \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

- Precisamos guardar não valor mas **sinal** e **denominador** da parcela anterior.

Implementação de somatórios

```
static float piAprox (int n)  
{ float s = 0.0f, denom = 1.0f; int sinal = 1;  
  for (int i=1; i<=n; i++)  
    { s += sinal/denom;  
      sinal = -sinal; denom += 2; }  
  return 4 * s; }
```

Implementação de somatórios

$$e^x = 1 + (x^1/1!) + (x^2/2!) + \dots$$

```
static float eExp (float x, int n)
{ float s = 1.0f; int i=1;
  float numer = x; int denom = 1;
  while (i<=n)
    { s += numer/denom;
      i++;
      numer *= x; denom *= i; }
  return s; }
```


Não-terminação

Podem ocorrer programas cuja execução, em princípio, não-termina:

```
static int infinito()  
{ return infinito() + 1; }
```

```
static void cicloEterno()  
{ while (true) ; }
```

Não-terminação

Existem programas cuja execução não termina apenas em alguns casos (para alguns valores de entrada). Exemplo:

```
static int fat (int n)  
{ int f=1;  
  for (int i=1; i!=n; i++) f *= i;  
  return f; }
```

Seleção múltipla

(seleção de um dentre vários casos)

```
switch (e)
{ case e1:   c1;
  case e2:   c2;
  ...
  case en:   cn;
}
```

Expressão e avaliada.

Executado então primeiro comando c_i ($1 \leq i \leq n$), caso exista, para o qual $e = e_i$.

Se não for executado comando de “saída anormal” (como `break`), são também executados comandos c_{i+1}, \dots, c_n , se existirem, nessa ordem.

Comando break e caso default

- Execução de qualquer c_i pode ser finalizada (e geralmente deve ser) por meio do comando break.
- Se $e \neq e_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, caso *default* pode ser usado.

Veja exemplo a seguir: ►

Comando break com caso default

```
static double op (char c, double a, double b)
{ switch (c)
  { case '+': { return a + b; }
    case '*': { return a * b; }
    case '-': { return a - b; }
    case '/': { return a / b; }
    default: { System.out.println
               ("Caractere diferente de +,*,-,/");
               return 0.0; } // convenção
  }
}
```

Caso default

- default pode ser usado no lugar de case e_i , para qualquer $i = 1, \dots, n$.
- Em geral usado depois do último caso.
- Se default não for especificado, execução de switch pode terminar sem que nenhum dos c_i seja executado (isso ocorre se resultado da avaliação de $e \neq e_i$, para $i = 1, \dots, n$).

Comando `switch`: crítica e restrições

- Necessidade de uso de `break` sempre que se deseja executar apenas uma alternativa em comando `switch` considerada ponto fraco de Java (herança de C).
- Expressão e deve ter tipo `int`, `short`, `byte` ou `char`, e deve ser compatível com tipo de e_1, \dots, e_n .
- Expressões e_1, \dots, e_n têm que ser valores constantes e distintos.

break seguido de nome de rótulo

- Comandos `switch` e comandos de repetição podem ser precedidos de **rótulo**: nome seguido do caractere “:”.
- `break` pode ser seguido de nome de rótulo.
- Ao ser executado, tal comando causa terminação da execução do comando precedido pelo rótulo.

Exemplo: break seguido de nome de rótulo

```
static String ident (String s)
/* Procura marca em s; se encontrar, retorna
 * marca encontrada; caso contrário, null.
 * Supõe: marca = cadeia de caracteres que:
 *   começa com caractere 'i'
 *   segue cadeia de caracteres não contendo 'i','j'
 *   termina com caractere 'j'
 */
```

```
{ int i = 0; String marca;
  while (i < s.length())
  { pesq: while (true)
    { while (s.charAt(i) != '<') { inci }
      marca = "<"; inci
      while (s.charAt(i) != '<' && s.charAt(i) != '>')
      { marca+=Character.toString(s.charAt(i)); inci }
      if (s.charAt(i) == '>')
      { marca += ">"; return marca; }
      else break pesq;
    } return null; } }
```

Abreviação: inci = i++; if (i>=s.length()) return null;