Taller 23

Por medio de polinomios de interpolación de Lagrange, halle los polinomios de grados 1 y 2 para estimar el valor de $f(2{,}75)$. Además, estime $f(2{,}75)$ para los grados 1, 2 y 3. Utilice como puntos base:

x	$f(x)$
0	2
2	0
4	3
6	4,5
8	7

1. Grado 1

Usamos los puntos (2,0) y (4,3).

El polinomio de Lagrange de grado 1 tiene la forma:

Donde:

- f(x_0) = 0, x_0 = 2
- f(x_1) = 3, x_1 = 4

Los términos l_0 (x) y l_1 (x) son:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-4}{2-4} = \frac{x-4}{-2} = -\frac{x-4}{2}$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-2}{4-2} = \frac{x-2}{2}$$

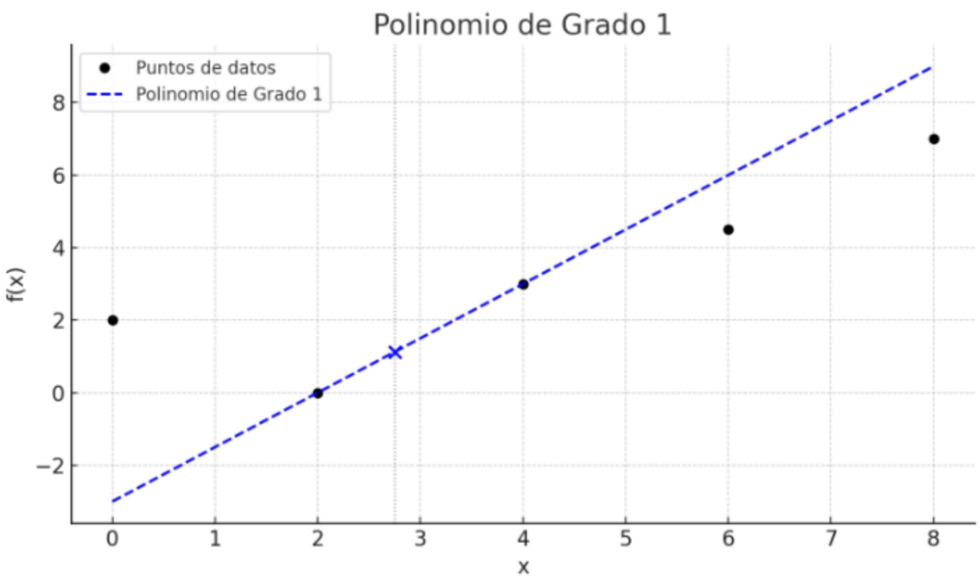
Sustituimos en L_1 (x):

$$L_1(x) = 0 \cdot \left(-\frac{x-4}{2}\right) + 3 \cdot \frac{x-2}{2} = \frac{3(x-2)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{3x-6}{2} = 1.5x - 3$$

Ahora evaluamos L_1 (2.75):

$$L_1(2.75) = 1.5(2.75) - 3 = 4.125 - 3 = 1.125$$



2. Grado 2

Usamos los puntos (0,2) , (2,0) y (4,3).

El polinomio de Lagrange de grado 2 es:

$$L_2(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + f(x_2) \cdot l_2(x)$$

donde:

- f(x_0) = 0, x_0 = 2
- f(x_1) = 0, x_1 = 2
- f(x_2) = 3, x_0 = 4

Calculamos los términos l_0 (x), l_1 (x) y l_2 (x):

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(0-2)(0-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{8}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-4)}{(2-0)(2-4)} = \frac{x(x-4)}{-4} = -\frac{x(x-4)}{4}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(4-0)(4-2)} = \frac{x(x-2)}{8}$$

Sustituimos en L_2 (x):

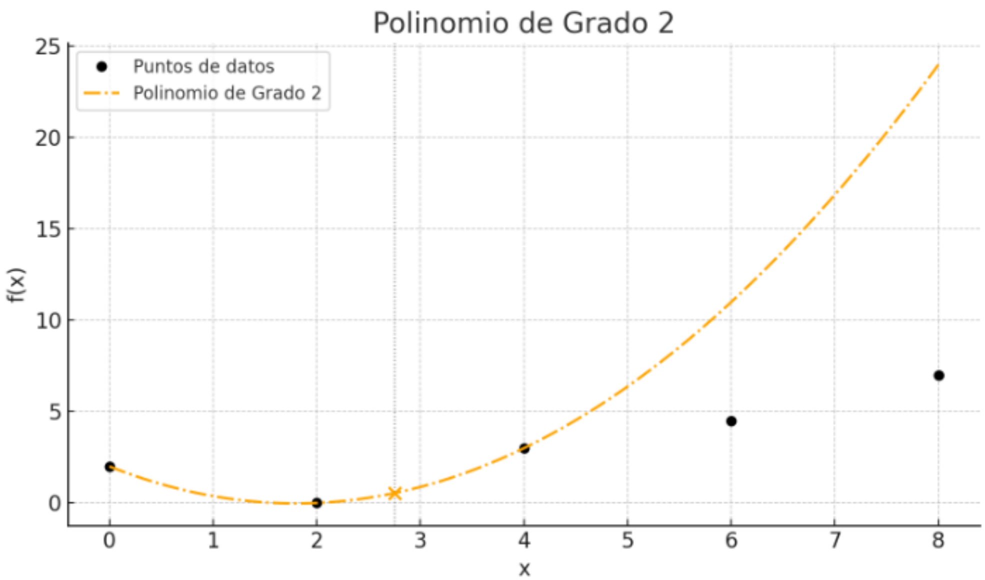
$$L_2(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)}{8} + 0 \cdot \left(-\frac{x(x-4)}{4}\right) + 3 \cdot \frac{x(x-2)}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{2(x-2)(x-4)}{8} + \frac{3x(x-2)}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4) + 1.5x(x-2)}{4}$$

Evaluación de L_2 (2.75):

$$L_2(2.75) \approx 0.5391$$



3. Grado 3

El polinomio de Lagrange de grado 3 es:

$$L_3(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + f(x_2) \cdot l_2(x) + f(x_3) \cdot l_3(x)$$

donde:

- f(x_0) = 2, x_0 = 0
- f(x_1) = 0, x_1 = 2
- f(x_2) = 3, x_0 = 4

- f(x_3) = 4.5, x_0 = 6

Calculamos los términos l_0 (x), l_1 (x), l_2 (x), $l_3(x)$:

Cálculo de l_0 (x):

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(0-2)(0-4)(0-6)}$$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{-48}$$

Cálculo de l_1 (x):

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-4)(x-6)}{(2-0)(2-4)(2-6)}$$

$$l_1(x) = \frac{x(x-4)(x-6)}{48}$$

Cálculo de l_2 (x):

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-6)}{(4-0)(4-2)(4-6)}$$

$$l_2(x) = -\frac{x(x-2)(x-6)}{48}$$

Cálculo de l_3 (x):

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(6-0)(6-2)(6-4)}$$

$$l_3(x) = \frac{x(x-2)(x-4)}{48}$$

Sustituimos en L_3 (x):

$$L_3(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{-48} + 0 \cdot \frac{x(x-4)(x-6)}{48} + 3 \cdot \left(-\frac{x(x-2)(x-6)}{48}\right) + 4.5 \cdot \frac{x(x-2)(x-4)}{48}$$

Evaluación de $L_3(2.75)$

$$L_3(2.75) \approx 0.0503$$