Cotas superiores para o número de dominação de grafos

Thiago Santiago de Matos
Bacharelado em Matemática
Bolsista PIBIC-CNPq
Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

25 Setembro 2025

14ª SIAc SEMANA DE INTEGRAÇÃO ACADÊMICA DA UFRJ | 2025

UFRJ UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

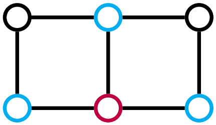
Definições básicas

$G = (V, E)$ é um **grafo**, se

V: Conjunto finito e não vazio
E: Conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V.

Dado $v \in V$, a **vizinhança**

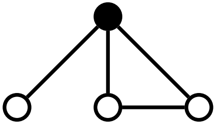
Aberta de v: $N(v) = \{y \in V : vy \in E\}$
Fechada de v: $N[v] = \{v\} \cup N(v)$



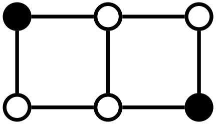
$N(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$
$N[v] = \{v, v_1, v_2, v_3\}$

Dominação

$D \subseteq V$ é **conjunto dominante** de G se todo vértice de $V \setminus D$ tem um vizinho em D.



$\gamma(G) = 1$



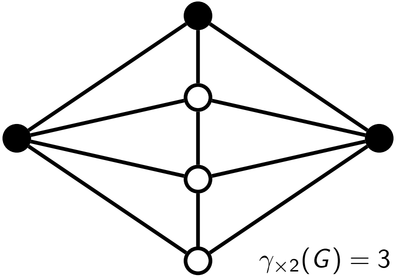
$\gamma(G) = 2$

Número de dominação $\gamma(G)$: A cardinalidade mínima de um conjunto dominante de G.

Conjunto-γ ou γ-set: Conjunto dominante de cardinalidade $\gamma(G)$.

Dominação múltipla

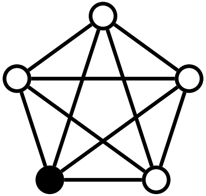
$D \subseteq V$ é **conjunto** k**-dominante** se $\forall v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq k$.
Harary e Haynes, 2000.



$\gamma_{\times 2}(G) = 3$

$\gamma_{\times k}(G)$ é o número de k-dominação.

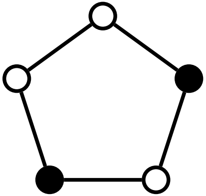
Grafos no geral



K_n

$\gamma = 1$

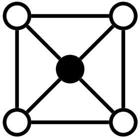
$\gamma_{\times 2} = 2$



C_n

$\gamma = \lceil \frac{n}{3} \rceil$

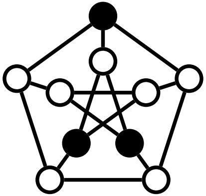
$\gamma_{\times 2} = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$



W_n

$\gamma = 1$

$\gamma_{\times 2} = 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$



P

$\gamma = 3$

$\gamma_{\times 2} = 6$

Grafos no geral

G com n vértices:

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$$

G sem vértices isolados:

$$\gamma(G) \leq \alpha'(G)$$

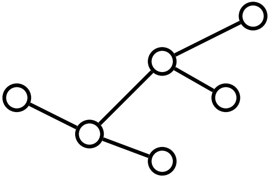
$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$$

Determinar se um grafo possui um conjunto k-dominante de tamanho t ou menor é NP-completo. [2]

Classes estudadas

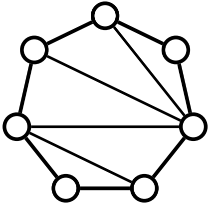
Árvores:

Grafo conexo sem ciclos.



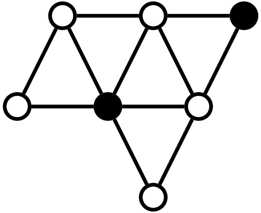
Outerplanares Maximais (MOG):

Grafo plano e com todos os vértices na borda exterior da região desenhada, maximal em arestas.



Primeiro resultado

Tokunaga, 2013. Seja G MOG de tamanho $n \geq 3$, com k vértices de grau 2.
$\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$.

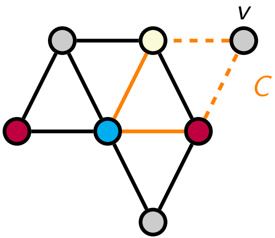


$n = 7$, $k = 3$
$\gamma(G) \leq \lfloor \frac{7+3}{4} \rfloor = 2$.

Primeiro resultado

Lema 1. Todo *MOG* pode ser 4-colorido de forma que todo 4-ciclo contenha todas as cores.

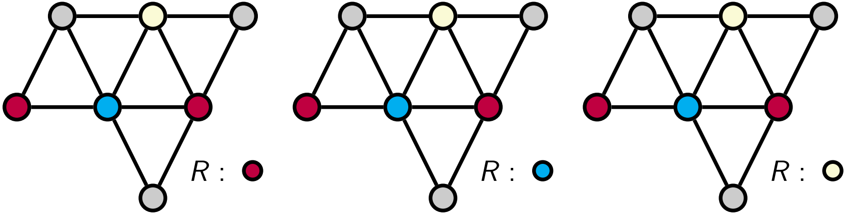
Prova. Todo *MOG* tem pelo menos um vértice v de grau 2, e $G - v$ ainda é *MOG*. Seja C o único 4-ciclo que contém $v \in V(G)$ de grau 2. Por indução, podemos 4-colorir $G - v$ e então atribuímos a v a cor não presente em C.



Primeiro resultado

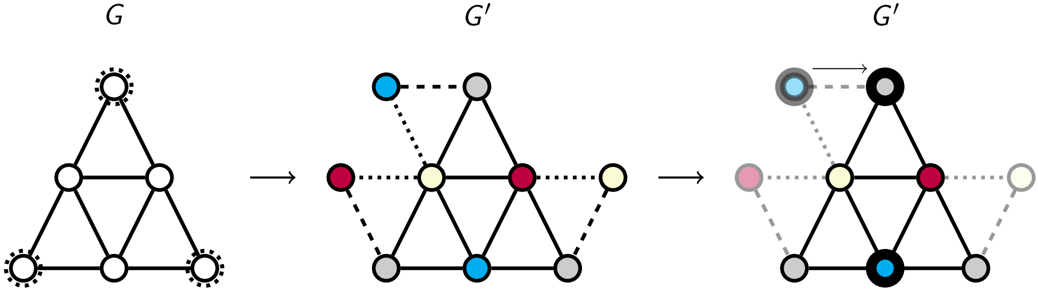
Lema 2. Seja G *MOG* 4-colorido tal qual *lema 1*, e seja $R \subset V(G)$ contendo todos os vértices de uma cor dada. R domina todos os vértices de G com grau maior que 2.

Prova. Sejam $v \in V$ com grau maior que 2, e r, s, t três vértices consecutivos em $N(v)$, nesta ordem. $vrst$ forma um 4-ciclo, um destes vértices está em R, i.e. $\{v\}$ é dominado por R.



Primeiro resultado

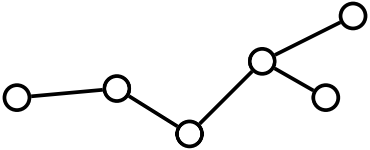
Prova teorema.



Escolhendo uma cor adequada $|R| \leq \lfloor \frac{|V'|}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$. Onde $\gamma(G) \leq |R|$.

Resultados em árvores

Cabrera-Martínez, 2024. $\gamma(T) \leq \frac{n(T)+|S(T)|-|SL(T)|}{3} - \frac{|L_s(T)|-|S_s(T)|}{3}$.



Resultados em árvores

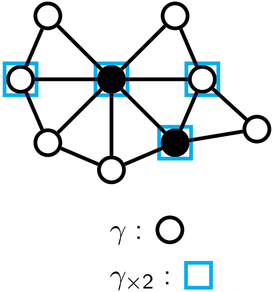
Boyer, 2024. Se uma árvore T tem um único conjunto γ, então existe um emparelhamento M em T tal que $\gamma(T - M) > \frac{3}{2}\gamma(T)$.

Dominação dupla

Harary e Haynes, 2000. Se existem dois conjuntos γ disjuntos em G então $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$.

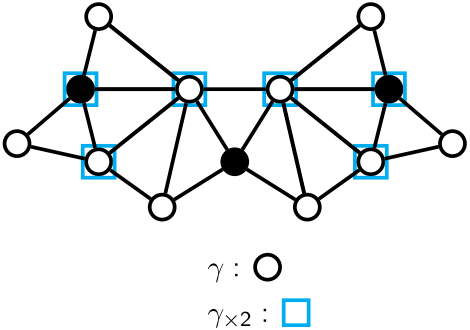
Dominação dupla

Harary e Haynes, 2000. Se existem dois conjuntos γ disjuntos em G então $\gamma_{\times 2}(G) \leq 2\gamma(G)$.
Pergunta 1. Vale a volta?



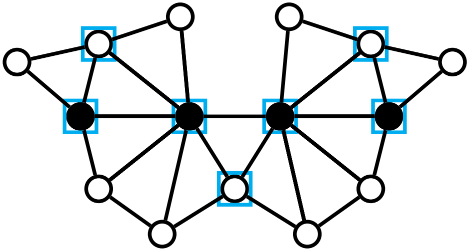
Dominação dupla

Pergunta 2. Em *MOGs*, sempre existe um conjunto $\gamma_{\times 2}$ que contenha um conjunto γ?



Dominação dupla

Pergunta 3. Em *MOGs*, daados conjuntos $\gamma \subset \gamma_{\times 2}$. É possível usar $\gamma_{\times 2} \setminus \gamma$ para construir outro conjunto γ disjunto do primeiro?



γ :

$\gamma_{\times 2}$:

Referências

[1] F. Harary e T. W. Haynes. Double domination in graphs. *Ars Combinatoria*, **55** (2000), 201–213.

[2] M. A. Henning. Bounds on domination parameters in graphs: a brief survey. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **42**(3) (2022), 665–708.

[3] M. R. Garey e D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.

[4] S. Tokunaga. Dominating sets of maximal outerplanar graphs. *Discrete Appl. Math.*, **161** (2013), 3097–3099.

[5] A. Cabrera-Martínez. An improved upper bound on the domination number of a tree. *Discrete Appl. Math.*, **343** (2024), 44–48.

[6] G. Boyer. Domination in graphs and the removal of a matching. Master's Thesis, Clemson University, 2024. TigerPrints Repository.