Conjuntos Dominantes Mínimos

Thiago Santiago de Matos

Janeiro 2025 – Presente

Resumo

Este trabalho é composto pelos assuntos relacionados a artigos estudados durante iniciação científica com bolsa CNPq, sob orientação da prof. Márcia Rosana Cerioli. Os temas principais são: relações entre conjuntos dominantes múltiplos mínimos, cotas superiores para o número de dominação em classes de grafos planares, com foco em outerplanares maximais e árvores, e conexões da teoria de dominação com a teoria de emparelhamentos.

Na primeira seção introduziremos os conceitos necessários. A segunda parte é dedicada a expor notas e análises autorais feitas em cima do tópico. Por fim, são sintetizados os artigos estudados ao longo da IC, destacando-se definições e resultados principais.

1 Introdução

1.1 Definições

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, finito e não direcionado, em que V representa o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas, adotamos as seguintes definições.

A *vizinhança aberta* de um vértice $v \in V$ é o conjunto $N(v)$ de todos os seus vértices adjacentes, enquanto a *vizinhança fechada* $N[v]$ inclui o próprio.

$$N(v) = \{y \in V : vy \in E\} \quad N[v] = \{v\} \cup N(v).$$

Para um subconjunto $R \subseteq V$, definimos

$$N(R) = \bigcup_{v \in R} N(v) \quad N[R] = R \cup N(R).$$

Em um grafo, diz-se que um vértice domina a si mesmo e todos os seus vizinhos. Um vértice (ou conjunto de vértices) v *domina* um conjunto $S \subseteq V$ se todo vértice em S é vizinho de v (ou é vizinho de algum vértice em v), i.e. $S \subseteq N[v]$.

Um conjunto $D \subseteq V$ é dito *k-tupla dominante*[1] de G se D domina cada vértice de V pelo menos k vezes. Ou seja,

$$|N[v] \cap D| \geq k$$

Por consequência direta,

$$V = \bigcup_{v_i \in D} N[v_i].$$

O *número de dominação* de um grafo é a cardinalidade do menor conjunto dominante, denotado $\gamma(G)$ na dominação simples ($k = 1$), e $\gamma_{\times k}(G)$ na *k-tupla dominância*. Existem muitas outras noções de dominância (total, segura, independente, ...) mas aqui o foco principal são as dominâncias simples e dupla. No entando, olharemos ainda para outros aspectos da dominação.

Vamos denotar por $\Delta_{\gamma_{\times k}}(G)$ o conjunto de todas as dominâncias *k-tuplas* mínimas de G, e seu número total de elementos por $\delta_{\gamma_{\times k}}(G) = |\Delta_{\gamma_{\times k}}(G)|$.

[1] Harary e Haynes, 2000.

Dentro da dominação simples D, dizemos que ela é *reforçada* quando existe ao menos um vértice em V dominado por dois ou mais vértices distintos de D. Denotamos por $\varsigma_\gamma(G)$ o número de vértices reforçadamente dominados em G. De modo complementar, a *dominação estrita* é quando todo vértice de V é dominado exatamente uma vez por D. Se houver mais de um vértice dominante, então todo par de dominantes deve estar separado por uma distância de pelo menos três arestas. Essas últimas quatro definições não são amplamente discutidas na literatura estudada, mas serão comentadas sempre que for oportuno.

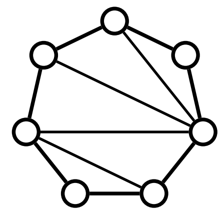
Por último, um *emparelhamento* $M \subseteq E$ é um conjunto de arestas disjuntas em vértices. Certos tipos de conjuntos dominantes podem ser caracterizados a partir de emparelhamentos máximos, o que motiva o estudo conjunto das duas teorias.

Vamos nos restringir essencialmente a duas classes de grafos, de modo que suas estruturas permitam uma análise mais precisa dos parâmetros de dominação.

Árvores

Árvores são grafos conexos acíclicos.

Outerplanares Maximais (MOG)



Um grafo é outerplanar se ele é plano e todos os seus vértices pertencem à face exterior. Maximal em arestas: não é possível adicionar mais arestas sem perder a propriedade de ser outerplanar.

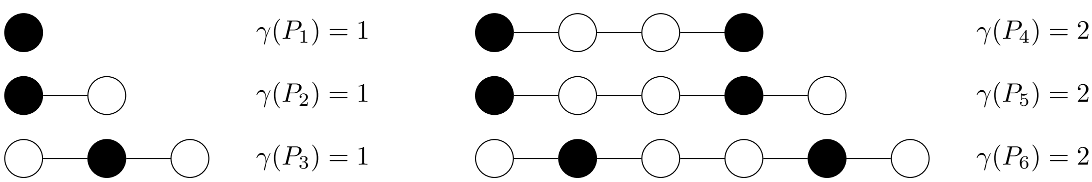
Outra definição comum de outerplanar é como triangulação maximal de ciclos.

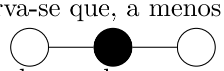
Escreveremos $MOG(n)$ para denotar um outerplanar maximal com n vértices.

1.2 Exploração dos conceitos

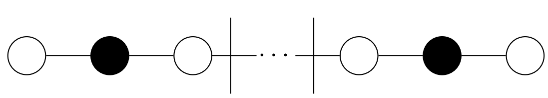
Número de dominação - γ

Vamos explorar os grafos caminho $P_n = (V_n, E_n), n \in \mathbb{N}$, a fim de ilustrar alguns dos conceitos definidos anteriormente. Convencionalmente, representamos por vértices pretos aqueles que pertencem ao conjunto dominante. Abaixo observamos um exemplo de dominação em cada P_n, com $1 \leq n \leq 6$.

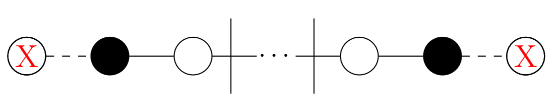


Observa-se que, a menos dos vértices das extremidades, é possível cobrir P_n utilizando $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ subgrafos do tipo T :  , garantindo uma dominação. Evidenciamos essa cobertura para os três casos possíveis, de acordo com o valor de $n \pmod 3$.

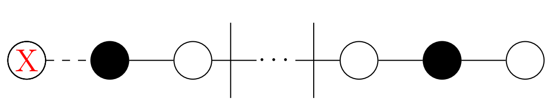
- $n \equiv 0 \pmod 3$



- $n \equiv 1 \ \equiv -2 \pmod 3$



- $n \equiv 2 \ \equiv -1 \pmod 3$



Em todos os casos, conclui-se que $\gamma(P_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja agora $D = \{v_1, ..., v_{\gamma(P_n)}\}$, um conjunto dominante mínimo de P_n. Dada a estrutura de P_n, temos $|N[v_i]| \leq 3 \; \forall v_i \in D$. Como é possível que $N[v_i] \cap N[v_j] \neq \emptyset$, segue que,

$$n = |V_n| = |\bigcup_{v_i \in D} N[v_i]| \leq 3|D| = 3\gamma(P_n) \tag{I}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, as vizinhanças fechadas de vértices dominantes forem disjuntas e de tamanho 3, caracterizando uma *dominação estrita*. Assim,

$$\frac{n}{3} \leq \gamma(P_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

Portanto,

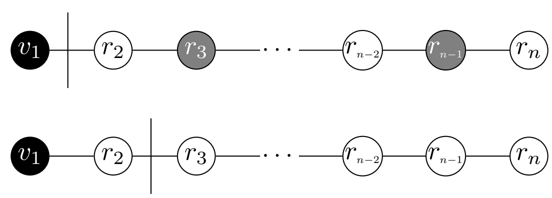
$$\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

Quantidade de dominações mínimas distintas - δ_γ

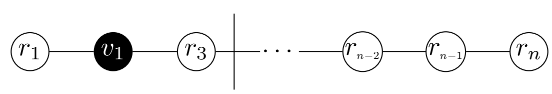
Pelas condições de igualdade na inequação (I), temos que $\delta_\gamma(P_{3k}) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, quando $n = 3k$, existe apenas uma maneira de dominar P_n de maneira mínima.

Para o caso $n = 3k + 1$, seja $V_n = \{r_1, ..., r_n\}$. Temos dois cenários a serem considerados: quando r_1 é dominante e quando r_2 é dominante. Se r_3 for dominante, então necessariamente r_1 ou r_2 também o será, pois, caso contrário, r_1 não estaria dominado.

Fixando r_1 como dominante ($v_1 = r_1$), temos $|V - v_1| = 3k$. Nesse caso, r_2 não pode ser dominante pois o subgrafo $V - v_1$ é dominado estritamente pelos grafos T, com os vértices dominantes sendo $r_3, r_6, \ldots$. Assim, a contagem total de dominações pode ser reduzida ao subgrafo iniciado em r_2, resultando em $\delta_\gamma(P_{n-2})$ configurações possíveis.



Por outro lado, se r_2 é dominante ($v_1 = r_2$), há duas possibilidades: se r_3 for dominante e se não for. No segundo caso, podemos olhar para o subgrafo a partir de r_3, que contribui com $\delta_\gamma(P_{n-3})$ formas de atingir o mínimo.



Já quando r_3 é dominante, o subgrafo restante, iniciado em r_4, possui $n-4 = 3(k-3)$ vértices que é dominado de forma única. Assim,

$$\delta_\gamma(P_{3k+1}) = \delta_\gamma(P_{3k-1}) + \delta_\gamma(P_{3k-2}) + 1. \tag{II}$$

Para $n = 3k + 2$, uma análise análoga nos leva a $\delta_\gamma(P_{3k+2}) = \delta_\gamma(P_{3k-1}) + 1$, ou seja, $\delta_\gamma(P_{3k+2}) = k + 2$. Resolvendo a recorrência (II), obtemos $\delta_\gamma(P_{3k+1}) = \frac{k^2}{2} + \frac{5k}{2} + 1$. Em resumo,

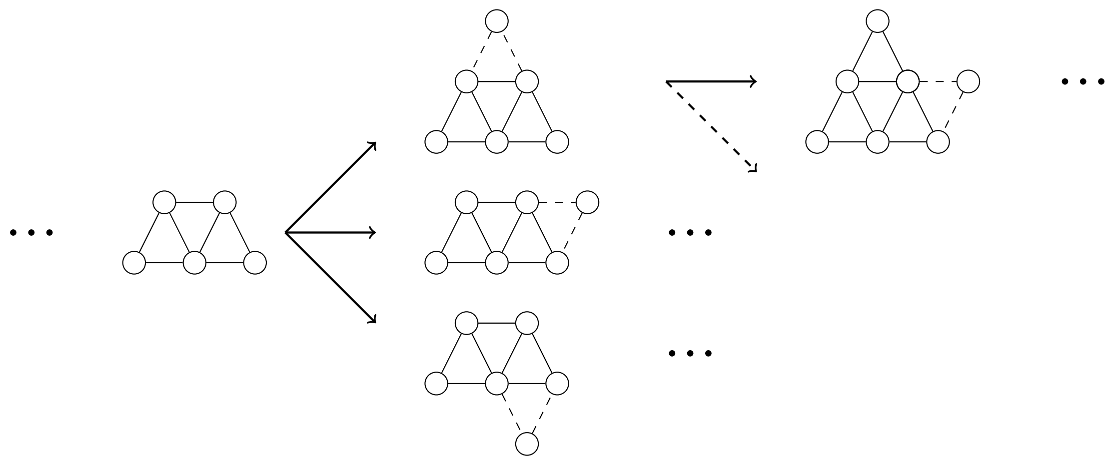
$$\delta_\gamma(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 3k \\ \frac{k^2}{2} + \frac{5k}{2} + 1 & \text{se } n = 3k+1 \\ k+2 & \text{se } n = 3k+2 \end{cases}$$

2 Resultados

2.1 Outerplanares Maximais

Uma propriedade conhecida dos MOGs é que a remoção de um vértice de grau 2 preserva sua estrutura de outerplanar maximal. Podemos, portanto, utilizar esse resultado na direção inversa: construir qualquer $MOG(n)$ a partir de um $MOG(n-1)$ apropriado, adicionando um novo vértice de grau 2.

Adotando essa abordagem de forma iterativa, é possível determinar o número total de $MOGs$ com n vértices, iniciando a construção a partir de $MOG(3)$. Nesta contagem, desconsideramos grafos isomorfos por rotação ou reflexão, considerando apenas configurações distintas.

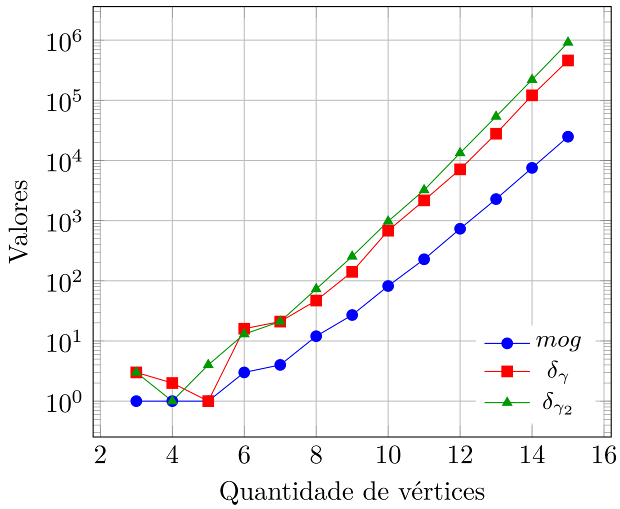


$n = 5$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 7$

Tendo enumerado explicitamente todos os $MOGs$ para cada valor de n, podemos agora calcular diversos parâmetros de interesse. Denotamos por *mog* a quantidade total de outerplanares maximais distintos com n vértices. As colunas $\gamma^{min|max}$ e $\gamma_{\times 2}^{min|max}$ indicam os menores e maiores valores dos números de dominação γ e $\gamma_{\times 2}$, respectivamente, encontrados entre todos os $MOGs$ de tamanho n. Por fim, apresentamos também os parâmetros naturais δ_γ e $\delta_{\gamma_{\times 2}}$.

Dados de dominância em MOGs

n	mog	$\gamma^{min\|max}$	$\gamma_{\times 2}^{min\|max}$	δ_γ	$\delta_{\gamma_{\times 2}}$
3	1	1 | 1	2 | 2	3	3
4	1	1 | 1	2 | 2	2	1
5	1	1 | 1	3 | 3	1	4
6	3	1 | 2	3 | 4	16	13
7	4	1 | 2	3 | 4	21	21
8	12	1 | 2	4 | 5	47	73
9	27	1 | 3	4 | 6	141	254
10	82	1 | 3	4 | 6	681	973
11	228	1 | 3	5 | 7	2170	3222
12	733	1 | 4	5 | 8	7113	13297
13	2282	1 | 4	5 | 8	27845	53667
14	7528	1 | 4	6 | 9	120871	219734
15	24834	1 | 5	6 | 10	458953	913766



É interessante notar a característica exponencial da quantidade de *MOGs*. Também podemos observar que $\gamma_{mog}(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, e portanto $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$, para todo *MOG* G, que é um caso particular do resultado citado no *artigo 1*.

2.2 Cobertura de vértices

Dado $G = (V, E)$, dizemos que $\mathcal{C}_1 \subset V$ é uma cobertura ímpar de G se

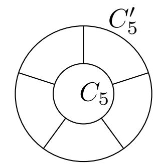
$$|N[v] \cap \mathcal{C}_1| \text{ é ímpar } \forall v \in V.$$

Para cobertura par $\mathcal{C}_2$, pedimos $|N[v] \cap \mathcal{C}_2|$ par maior que zero, porque deste modo ambas as coberturas são conjuntos dominantes. Todo grafo possui cobertura ímpar? Podemos obter alguns resultados de forma direta.

Proposição 1. P_{3n}, P_{3n+1} e P_{3n+2} admitem cobertura ímpar, por indução em n.

Proposição 2. Se G é $2k$-regular então $\mathcal{C}_1 = V$.

Proposição 3. Se G tem G' $2k$-regular induzdo de modo que $|N[v] \cap V'|$ é impar $\forall v \in V \setminus V'$, então $\mathcal{C}_1 = V'$.



Exexmplo: Petersen

3 Artigos

3.1 Dominating sets of maximal outerplanar graphs

Shin-ichi Tokunaga

Definições

- Triangulation / Maximal planar graph

Um grafo em que não é possível adicionar arestas sem violar a planaridade. i.e. um grafo em que todas as faces, incluindo a externa, são delimitadas por triângulos.

- Triangulated disc

Um grafo plano em que todas as faces internas são triângulos.

Resumo

Sendo G um n-grafo outerplanar maximal, $n \geq 3$, com k vértices de grau 2. Então G tem um conjunto dominante de tamanho máximo $\lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$, por um método de coloração simples.

Introdução

Qualquer disco triangulado G com n vértices satisfaz $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Esse resultado foi posteriormente extendido para triangulação de outras superfícies.

Qualquer triangulação G de n vértices, com grau máximo 6, satisfaz $\gamma(G) \leq \frac{n}{4}$, desde que n seja suficientemente grande.

Note que precisamos de dois vértices para dominar o grafo octaedro, por isso não podemos omitir a condição de n suficientemente grande.

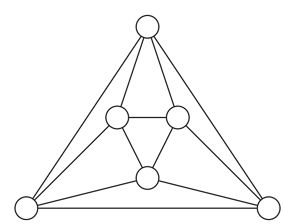


Figura 2: Grafo octaedro.

Resultados

Lema 1. Um MOG $G = (V, E)$ pode ser 4-colorido de forma que todo ciclo de tamanho 4 em G contenha todas as cores.

Prova.

Proposição 1. Todo MOG tem pelo menos dois vértices de grau 2.

Proposição 2. Sendo $v \in V$ de grau 2, $G - v := (V - v, E - E_v)$ também é MOG.

Vamos provar por indução em $|V|$. A conclusão é trivial se G é um triângulo, vamos assumir $|V| \geq 4$.

Qualquer vértice $v \in V$ de grau 2 pertence a um único 4-ciclo, digamos C.

Por hipótese, podemos 4-colorir $G - v$ e portanto atribuímos a v a cor que não aparece em C.

Proposição 1. Seja G um $MOG(n)$. Suponha que G é 4-colorido, tal como o *lema 1*, e seja $R \subset V$ contendo todos os vértices de uma cor dada. Então R domina todos os vértices de V, exceto os com grau 2.

Prova. Seja $v \in V$ com grau maior que 2. Agora, sejam r, s, t três vértices consecutivos em $N(v)$, nesta ordem. Dado que $vrst$ forma um 4-ciclo, um destes vértices está em R, i.e. $\{v\}$ é dominado por R.

Teorema 1. Sendo G um $MOG(n)$, $n \geq 3$, com k vértices de grau 2. Então G tem um conjunto dominante de tamanho máximo $\lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$.

Prova. Sejam $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o conjunto de vértices de G de grau 2 e u_i um dos dois vértices adjacentes a v_i para cada $1 \leq i \leq k$.

Seja $S' = \{v'_1, ..., v'_k\}$ um conjunto de k novos vértices, construímos um grafo $G' = (V', E')$ tal que

$V' = V \cup S$

$E' = E \cup \{v'_1 v_1, ..., v'_k v_k\} \cup \{v'_1 u_1, ..., v'_k u_k\}$

G' também é MOG, pois continua sendo planar; por contrução, v_i, v'_i, u_i estão na borda exterior, e é maximal pois G é maximal, então qualquer aresta a ser adicionada em G' deve ser adicionada partindo de um dos v'_i, o que excluiría algum vértice de G da borda exterior.

Logo, G' pode ser colorido tal como *lema 1*.

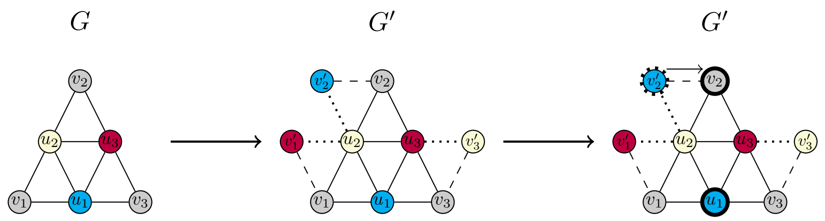
Seja T o conjunto de todos os vértices de uma dada cor na coloração acima. Ao escolher uma cor adequada, podemos assumir $|T| \leq \lfloor \frac{|V'|}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$ (observe por contradição).

Finalmente, sejam $T \cap S' = \{v'_{i_1}, ..., v'_{i_{k'}}\}$ e $T' = (T - S') \cup \{v_{i_1}, ..., v_{i_{k'}}\}$.

Note que cada vértice de S tem grau 3 em G'. Portanto, aplicando a *proposição 1* em G', podemos ver que T domina V.

A contribuição de cada $v'_{i_j} \in T \cap S'$ na dominação são os vértices u_{i_j} e v_{i_j} , portanto ao considerar T' estamos trocando cada v'_{i_j} por v_{i_j}, que tem no mínimo a mesma contribuição. Por consequência T' também domina V.

i.e. T' é um conjunto dominante de G satisfazendo $|T'| \leq \lfloor \frac{n+k}{4} \rfloor$.



Seja $T = \{u_1, v'_2\}$
$T \cap S' = \{v'_2\}$
$T' = \{u_1\} \cup \{v_2\}$
Note que T' domina G

3.2 A note on the double domination number in maximal outerplanar and planar graphs

Noor A'lawiah Abd Aziz, Nader Jafari Rad e Hailiza Kamarulhaili

Definições

- HPM

Usaremos essa sigla para denotar um grafo Hamiltoniano planar maximal.

- Striped

MOG que não tem triângulos internos (faces que não são adjacentes a face externa).

- Bad vertex

Sejam $v_1, \ldots, v_t$ todos os vértices de grau 2 que aparecem em sentido horário no ciclo Hamiltoniano C de G. Um vértice v_i é dito ruim se a distância para v_{i+1} é ao menos 3, para $i = 1, ..., t$.

- G^C_{in} e G^C_{out}

Sendo G um grafo HPM com ciclo Hamiltoniano C, G^C_{in} representa o MOG que consiste de C e as arestas interioes (exteriores para G^C_{out}) a C.

Resumo

Melhora o Teorema de Zhuang mostrando que $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n+k}{2}$, onde k é o número de pares de vértices consecutivos de grau 2 com distância pelo menos 3 no ciclo externo. Também prova que $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{5n}{8}$ para um grafo HPM de ordem $n \geq 7$, melhorando teoremas anteriores.

Introdução

Faremos uso dos teoremas abaixo.

Teorema 1. Para G, um grafo HPM de ordem n, existe um ciclo Hamiltoniano C de G tal que G_{in}^C ou G_{out}^C tem no máximo $\frac{n}{4}$ vértices ruins.

Teorema 2. Todo grafo 4-conexo planar maximal é Hamiltoniano.

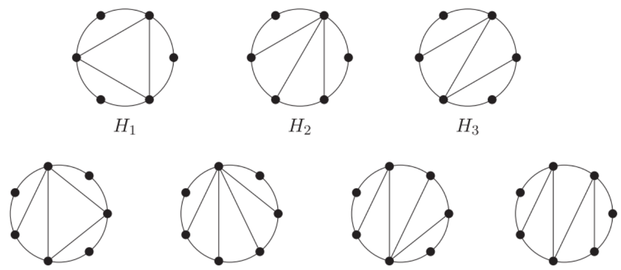
Resultados

Seja G um MOG, existe um embedding de G no plano, tal que todos os seus vértices estão no ciclo externo C, que é o limite da face externa, e cada face interna é um triângulo. Vamos provar o seguinte.

Teorema 3. Se G tem $k \geq 0$ vértices ruins, então $\gamma_{\times 2}(G) \leq \frac{n+k}{2}$, onde $n \geq 4$.

Prova.

Sejam H_i os grafos da figura abaixo, $i = 1, ..., 7$.

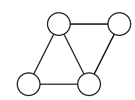


A prova é por indução em $n + k$. Para $4 \leq n \leq 5$ o resultado é óbvio.

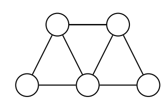
Assuma que $n = 6$. Se $k = 0$, então $G = H_1$ no qual $\gamma_{\times 2}(G) = 3 = \frac{6+0}{2}$. Se $k = 1$, então $G = H_2$, $\gamma_{\times 2}(G) = 3 < \frac{6+1}{2}$. Caso $k = 2$, $G = H_3$, $\gamma_{\times 2}(G) = 4 = \frac{6+2}{2}$.

Para $n = 7$ temos, $k = 1$ então $G \in \{H_4, H_5\}$, nos quais $\gamma_{\times 2}(G) = 4 = \frac{7+1}{2}$. Caso $k = 2$, $G \in \{H_6, H_7\}$, $\gamma_{\times 2}(G) = 4 \leq \frac{7+2}{2}$.

Isso é suficiente para a base da indução. Assuma que o resultado vale para todos os $MOGs$ de ordem n' com k' vértices ruins, onde $n' + k' < n + k$.



$n = 4$



$n = 5$

Agora, considere G o MOG de ordem $n \geq 8$ com k vértices ruins. Primeiro, assuma $k = 0$. Seja C o ciclo externo de G e $v_1, \dots, v_t$ seus vértices de grau 2, em sentido horário. Já que G não tem vértices ruins, a distância entre cada v_i e v_{i+1} em C é exatamente 2, para $i = 1, \dots, t$ (não pode ser 1 pois G é MOG). Logo, $n = 2t$, Então $V(G) - \{v_1, \dots, v_t\}$ é um conjunto de dominação dupla de G, implicando em $\gamma_{\times 2}(G) \leq n - t = \frac{n}{2} = \frac{n+0}{2}$.

Portanto, assuma $k > 0$. Existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que a distância entre v_i e v_{i+1} em C é pelo menos 3. Seja $G_1 = G - \{v_1, \dots, v_t\}$, G_1 é MOG. Seja u um vértice de grau 2 em G_1, então $3 \leq deg_G(u) \leq 4$.

4 Referências

1. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X1300303X
2.https://www.rairo-ro.org/articles/ro/pdf/2022/05/ro210319.pdf