Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística

Cálculo 1A - Lista 4 - Derivada

Questão 1. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(1) = 0$.

Questão 2. Mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se} \quad x < 1, \\ -x + 4, & \text{se} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

não é derivável em $p = 1$. Esboce o gráfico de g.

Questão 3. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f definida, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$.

Questão 4. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se} \quad x < 1, \\ 2x + 1, & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que g é derivável em $p = 1$ e calcule $g'(1)$.

(b) Esboce o gráfico de g.

Questão 5. Seja $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico que f que tem reta tangente paralela à reta $y = -2x + 1$.

Questão 6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad x \geq 0, \\ x^2 + 2, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

(1) Esboce o gráfico de f.

(2) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

Questão 7. Seja $g(x) = 2\cos x + 1$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico que f que tem reta tangente paralela ao eixo x.

Questão 8. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se} \quad x < 2, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

(a) f é contínua em 2? Por quê?

(b) f é derivável em 2? Por quê?

Questão 9. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico que f que tem reta tangente ortogonal à reta $y = -x - 5$.

Questão 10. Encontre a derivada da função dada utilizando a regra da potência.

(a) $f(x) = 4x + 7$

(b) $f(x) = x^{75} - x + 3$

(c) $f(x) = x^3 + e^3$

(d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + x^{-3}$.

(e) $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^4}$

(f) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x}$

(h) $f(r) = \dfrac{3e^2 + r^{\frac{5}{2}}}{r}$

(i) $f(x) = -3x^{-8} + 2\sqrt{x}$

(j) $f(x) = x^e + \dfrac{1}{x^{\sqrt{10}}}$

(k) $f(t) = \dfrac{1 + 16t^2}{(4t)^3}$.

(l) $f(w) = \dfrac{2w^2 - w + 4}{\sqrt{w}}$

m) $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{x}$

Questão 11. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -x^2, & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

(1) f é contínua em 0? Justifique.

(2) f é derivável em 0? Justifique.

Questão 12. Seja $h(x) = 4\ \mathrm{sen}(x)$. Determine o(s) ponto(s) do gráfico que f que tem reta tangente ortogonal à reta $y = x$.

Questão 13. Utilize a regra do produto ou do quociente para encontrar a derivada da função dada.

(a) $f(x) = (4x^2 + 3)(2x + 5)$

(b) $f(x) = (2 - x - 3x^3)(7 + x^5)$

(c) $f(x) = (x^3 + 7x^2 - 8)(2x^{-3} + x^{-4})$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)(3x^3 + 27)$.

(e) $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^4 + x + 1}$

(g) $f(x) = \dfrac{6x^4 - 5x}{x + 1}$

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

(i) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{3x - 4}$

Questão 14. Encontre a equação da reta tangente a curva no ponto dado.

(a) $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$ em $P\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

(b) $y = \dfrac{3x}{1 + 5x^2}$ em $P\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

(c) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ em $P\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$

Questão 15. Encontre a derivada das funções dadas.

(a) $f(x) = 4\cos(x) + 2\ \mathrm{sen}(x)$

(b) $f(x) = \dfrac{5}{x^2} + \mathrm{sen}(x)$

(c) $f(x) = -4x^2\cos(x)$

(d) $f(x) = 2\ \mathrm{sen}^2(x)$.

(e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x^2 + \mathrm{sen}(x)}$

(f) $f(x) = (x^2 + 1)\sec(x)$

(g) $f(x) = \cos(x) - x\, cossec(x)$

(h) $f(x) = \dfrac{cotg(x)}{1 + cossec(x)}$

(i) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)\sec(x)}{1 + x\, tg(x)}$

(j) $f(x) = \dfrac{x}{2 - tg(x)}$

(k) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 - \mathrm{sen}(x)}$

(l) $f(x) = 3x + x^2\cos(x)$

(m) $f(x) = \sec(x)\, tg(x)$

Questão 16. Encontre a derivada da função

(a) $f(x) = \sqrt{5x+1}$

(b) $f(x) = (x^5 + 3x^2 - x)^{50}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(d) $f(t) = \left(\dfrac{1}{2t+1}\right)^4$

(e) $f(x) = \cos(x^2)$

(f) $f(x) = \cos^2(x)$

(g) $f(x) = e^{x^2-x}$

(h) $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$

(i) $f(x) = x^2e^{-3x}$

(j) $f(t) = t\ \text{sen}(\pi t)$

(k) $f(t) = e^{at}\ \text{sen}(bt)$

(l) $f(x) = (4x+5)^3(x^2-2x+5)^4$

(m) $f(z) = (1-4z)^2\sqrt{z^2+1}$

(n) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^3}{(2x+1)^5}$

(o) $f(\theta) = tg^2(n\theta)$

(p) $f(x) = sen(x)cos(1-x^2)$

(q) $f(x) = e^{-x}\cos(x^2)$

(r) $f(x) = \ \text{sen}\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$

(s) $f(x) = tg(sec(cos(x)))$

(t) $f(x) = e^{\ \text{sen}^2(x^2)}$

Questão 17. Calcule $f'(x)$ e $f'(p)$ onde

(a) $f(x) = x^6 + 4x$ e $p = \dfrac{3}{5}$

(b)$f(x) = x^{\frac{3}{20}} + \pi x^{-7}$ e $p = \dfrac{1}{2}$

(c) $f(x) = x^{\frac{3}{20}} + \pi x^{-7}$ e $p = 3$

(d) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x^3 - 3e^x}$ e $p = 1$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$ e $p = 1$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + e^x(x^3 - 4x)$ e $p = 1$

(g) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\ x\cos x}{x^7}$ e $p = \pi$

(h) $f(x) = \log_3 x$ e $p = 1$

Questão 18. Seja $f(x) = a^x$ em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$.

Questão 19. Calcule as derivadas das funções abaixo

(a) $f(x) = tg\,x + e^x\cos x$

(b) $g(x) = \sec(x^2 + 3x)$

(c) $h(x) = (4x^2 - x)^7 e^{2x}$

(d) $y = \cos(\text{sen}\ x)\text{cossec}\ x$

(e) $f(t) = e^{sen(t)}$

(f) $u = \sqrt{x + e^x}$

(g) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{1/3}$

(h) $f(x) = [\ln(x^2+1)]^3$

(i) $f(x) = \pi^x$

(j) $h(x) = 5^x$

(k) $g(x) = \dfrac{\ln(x^3e^x)}{x^4+1}$

(l) $y = (\text{sen}\ x + \cos x)^4$

(m) $f(x) = \ln(2t+1)$

(n) $u = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

(o) $x = te^{\frac{1}{t}}$

(p) $u = (t^2 + \text{cotg}\ t^2)^3$

Questão 20. Determine f', f'' e f'''

(a) $f(x) = 4x^2 + 2x$

(b) $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

(c) $f(x) = x|x|$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(e) $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 5x - 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$

Questão 21. Seja $y = te^t$. Verifique que $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + y = 0$.

Obs: $\dfrac{d^iy}{dt^i}$ é a notação de Leibniz para derivada de ordem i, $1 < i \in \mathbb{N}$.

Questão 22. Seja $y = \dfrac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\dfrac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

Questão 23. Considere a função $y = xt^3$, na qual $x = x(t)$ é uma função derivável. Calcule $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=2}$ sabendo que $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 3$ e que $x(2) = 1$ (isto é, $x = 1$ para $t = 2$).

Questão 24. Suponha que $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $h(x) = f(g(x))$, onde f é derivável em 3. Prove que $h'(0) = 0$.

Questão 25. Suponha que $y = f(x)$ seja uma função dada implicitamente pela equação

$$xy^2 + y + x = 1.$$

Mostre que $f'(x) = \dfrac{-1 - [f(x)]^2}{2xf(x) + 1}$ em todo $x \in \operatorname{dom} f$ com $2xf(x) + 1 \neq 0$.

Questão 26. Determine uma função $y = f(x)$ que seja dada implicitamente pela equação

$$xy^2 + y + x = 1$$

Questão 27. Se $x^n y^m = (x + y)^{n+m}$, prove que $x \cdot \dfrac{dy}{dx} = y$.

Questão 28. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e de y, onde $y = f(x)$ é uma função diferenciável dada implicitamente por:

a) $x^2 - y^2 = 4$

b) $xy^2 + 2y = 3$

c) $xe^y + xy = 3$

d) $5y + \cos y = xy$

e) $y + \ln(x^2 + y^2) = 4$

f) $2y + \operatorname{sen} y^2 = x$

g) $y^5 + \cos y = 3x^2$

h) $x^2y^3 + xy = 2$

Questão 29. Sabendo que $e^{\ln x} = x$, prove que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot$

Questão 30. Sabendo que $(\sqrt[n]{x})^n = x$, prove que $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\cdot$

Questão 31. Suponha que $y = f(x)$ seja uma função derivável dada implicitamente pela equação $y^3 + 2xy^2 + x = 4$. Suponha, ainda, que $1 \in D_f$. Calcule $f(1)$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Questão 32. Calcule a inversa das funções $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ e determine suas derivadas.

Questão 33. Seja $f(x) = x + e^x$ e seja g a inversa de f. Mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{g(x)}}$.

Questão 34. Calcule os seguintes limites usando as regras de L'Hospital, se necessário.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[1+\dfrac{1}{x^2}\right]^x$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec^3 x}{1-\cos x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(3x)-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{x}{x^2+1}\right]^x$

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 3x)^{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}$

Questão 35. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x}{1+x^2}$

b) $g(u) = \dfrac{\ln u}{u}$

c) $h(y) = e^{1/y}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{2(x-1)}$

e) $h(u) = e^{2u} - e^u$

f) $g(y) = 3y^5 - 5y^3$

Questão 36. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão.

a) $f(x) = xe^{-2x}$

b) $g(u) = \dfrac{u}{1+u^2}$

c) $h(y) = \sqrt[3]{x^2-x^3}$

d) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

e) $h(u) = u \ln u$

f) $g(y) = y^4 - 2y^3 + 2y$

Questão 37. Esboce os gráficos das funções abaixo.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

c) $h(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{4x+3x^2}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

f) $g(x) = \sqrt[3]{x^3-x}$

g) $h(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$

h) $f(x) = x^3 + 3x^2$

i) $fx = x^4 - 4x$

j) $fx = x(x-4)^3$

k) $fx = \dfrac{2x+3}{x+2}$

l) $fx = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

m) $fx = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

n) $fx = x\, e^x$

o) $fx = \dfrac{2x-6}{4-x}$

p) $fx = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

Questão 38. Estude a função dada com relação a máximos e mínimos locais e globais:

a) $f(x) = e^x - e^{-3x}$

b) $g(u) = u^2 + 3u + 2$

c) $h(y) = \sqrt[3]{y^3-y^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

e) $h(u) = \operatorname{sen} u + \cos u,\ u \in [0,\pi]$

Questão 39. Determine as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro $2p$ é dado (i.e., $2p$ é um valor constante fixado).

Questão 40. Determine um número real positivo cuja soma com o inverso de seu quadrado seja mínima.

Questão 41. Determine a altura do cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R.

Questão 42. Um triatleta se encontra numa praia reta, a $900\,m$ do Bar X, quando vê uma criança cair de um barco no mar a $300\,m$ da praia, na altura deste bar. Se o atleta corre na areia a $500\,m/min$ e nada a $400\,m/min$, determine o caminho que ele deve escolher para chegar mais rápido possível ao resgate da criança e mostre que é o mais rápido. Quanto tempo vai demorar para percorrer este caminho?

Questão 43. Determinado produto é produzido e vendido a um preço unitário p. O preço de venda não é constante, mas varia em função da quantidade q demandada pelo mercado, de acordo com a equação $p = \sqrt{20-q}$, $0 \leq q \leq 20$. Admita que, para produzir e vender uma unidade do produto, a empresa gasta em média $R\$3,50$. Que quantidade deverá ser produzida para que o lucro seja máximo?

Questão 44. Considere a curva $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Trace uma reta tangente à curva tal que área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima.

Questão 45. Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos $0x$ e $0y$. A função de posição de P é $x\sqrt{t}$ e a de Q, $y = t^2 - \frac{3}{4}$, $t \geq 0$. Determine o instante em que a distância entre P e Q seja menor possível.

Questão 46. Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semiesfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

Questão 47. Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

Questão 48. Um balão esférico está sendo inflado de tal forma que seu volume aumenta a uma taxa de 5 m^3/min. Qual a taxa de crescimento do diâmetro quando ele mede 12 m?

Questão 49. Um estudo demográfico modela a população P de uma comunidade (em milhares de habitantes) pela função

$$P(Q) = 3Q^2 + 4Q + 200$$

onde Q é um índice de qualidade de vida que varia de $Q = 0$ (qualidade extremamente baixa) a $Q = 10$ (quantidade excelente). Suponha que o índice varia com o tempo de tal forma que daqui a t anos,

$$P(Q) = \frac{t^2 + 2t + 3}{2t + 1}$$

para $0 \leqslant t \leqslant 10$.

a) Qual será o valor do índice de qualidade de vida daqui a 4 anos? Qual será a população nesta ocasião?

b) Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 4 anos? A população estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?

Questão 50. Um ***metabolismo basal*** é o calor produzido por um animal em repouso por unidade de tempo. As observações indicam que o metabolismo basal de um a animal de sangue quente com w quilogramas (kg) de massa é dado por

$$M = 70w^{3/4}$$

quilocalorias por dia.

(1) a) Determine a taxa de variação do metabolismo basal de uma onçaa de 80 kg que está ganhando massa á taxa de 8,8 kg por dia.
(2) b) Determine a taxa de variação do metabolismo basal de uma avestruz de 50 kg que está perdendo massa a taxa de 0,5 kg por dia.

Questão 51. Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de 10 m^3/min, formando um monte monte. Se a altura do monte for o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8 m de altura?

Questão 52. A ***lei de Boyle*** para a expansão de um gás é $PV = C$, onde P é o número de quilos por unidade quadrada de pressão, V é o número de unidades cúbica do volume do gás e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 150 kg/m^2, o volume é 1,5 m^3 e está crescendo a uma taxa de 1 m^3/min. Ache a taxa de variação da pressão neste instante.

Questão 53. A população P de uma colônia de bactérias t dias após ser iniciado um experimento pode ser modelada pela função cúbica

$$P(t) = 1,035t^3 + 103,5t^2 + 6.900t + 230.000.$$

a) Determine e interprete a derivada $P'(t)$.
b) Com que taxa a população está variando após 1 dia? E após 10 dias?

Questão 54. A demanda por um determinado tipo de cereal é dada pela equação $px + 50p = 16.000$, onde x milhares de caixas são demandadas quando o preço por caixa for p. Se o preço corrente for de \$1,60 por caixa e se os preços por caixa crescerem a uma taxa de \$0,4 por semana, ache a taxa de variação da demanda.

Questão 55. A medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo está crescendo a uma de $\frac{1}{32}\pi$ rad/s. Se o comprimento da hipotenusa for constante e igual a 40 cm, ache a velocidade com que a área está variando, quando a medida do ângulo agudo for $\frac{1}{6}\pi$.

Questão 56. Uma tina horizontal tem 16 m de comprimento e seus extremos são trapézios isósceles com uma altura de 4 m, uma base menor de 4 m e uma base maior de 6 m, se a água está fluindo dentro da tina a uma taxa de 10 m^3/min. Com que velocidade o nível de água está subindo quando a profundidade da água é de 2 m?

Questão 57. Um meteorito entra na atmosfera da Terra e infla-se a uma taxa que, em cada instante, é proporcional à área de sua superfície. Supondo que o meteorito é sempre esférico, mostre que o raio decresce a uma taxa constante.

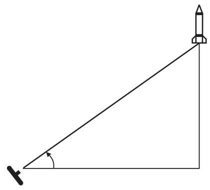
Questão 58. Um homem com 1,80 m de altura caminha em direção a um edifício com uma velocidade de 1,20 m/s. Há um ponto de luz no chão a 12 m, do edifício. Com que velocidade diminui a sombra do homem, no edifício, quando ele está a 9 m do edifício?

Questão 59. De acordo com uma das leis de Poiseuille, a velocidade do sangue à pressão constante a r centímetros do eixo central de uma artéria é dada por

$$v = \frac{K}{L}(R^2 - r^2)$$

onde K é uma constante positiva, R é o raio da artéria e L é o comprimento da artéria. Suponha que o raio R e o comprimento L variam com o tempo de tal forma que a velocidade do sangue no eixo central da artéria se mantém constante, ou seja, que v não varia com o tempo. Mostre que, neste caso a taxa de variação relativa de L com o tempo é duas vezes maior que a taxa de variação relativa de R.

Questão 60. A Figura abaixo mostra uma câmera montada em um ponto a 3000 pés da base da rampa de lançamento de um foguete. Vamos supor que o foguete sobe verticalmente e a câmera tira uma série de fotografias dele. Como o foguete estará subindo, o ângulo de elevação da câmera terá que variar segundo uma taxa para manter o foguete à vista. Além disso, como a distância entre a câmera e o foguete estará variando constantemente, o mecanismo de focalização da câmera também terá que variar a uma certa taxa para manter a fotografia em foco. Se o foguete mostrado na figura estiver subindo verticalmente a 880 pés/s, quando ele estiver a 4000 pés, com que rapidez o ângulo de elevação da câmera estará variando naquele instante para manter o foguete à vista?



Questão 61. Seja l o comprimento da diagonal de um retângulo cujos lados têm comprimentos x e y e suponha que x e y variam com o tempo.

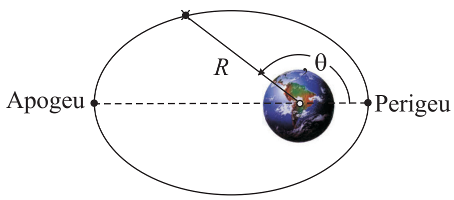
(1) (a) Como estão relacionadas $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$?
(2) (b) Se x está crescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{2}$ pé/s e y está decrescendo a uma taxa constante de $\frac{1}{4}$ pé/s, com que rapidez o comprimento da diagonal estará variando quando $x = 3$ pés e $y = 4$ pés? A diagonal está crescendo ou está decrescendo naquele instante?

Questão 62. Um satélite está em uma órbita elíptica em torno da Terra. A sua distância R (em milhares) do centro da Terra é dada por

$$R = \frac{4995}{1 + 0,12\cos(\theta)}$$

onde θ é o ângulo medido do ponto da órbita mais próximo da superfície da Terra.

a) Ache a altura do satélite no ***perigeu*** e no ***apogeu***, usando 3960 mi como o raio da Terra.
b) No instante em que θ for 120°, o ângulo está crescendo a uma taxa de 2,7°/min. Ache a altura do satélite e a taxa segundo a qual a altura estará variando neste instante. Expresse a taxa em unidades de mi/min.



Questão 63. A ***equação das lentes finas*** em Física é

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$$

onde s é a distância do objeto à lente, S é a distância da imagem à lente e f é a distância focal da lente. Suponha que uma certa lente tenha um comprimento focal de 6 cm e que um objeto move-se em direção à lente a uma taxa de 2 cm/s. Com que rapidez estará variando a distância da imagem, no instante em que o objeto estiver a 10 cm da lente? A imagem estará afastando-se ou se aproximando-se da lente?

Questão 64. A população de uma pequena cidade é dada por

$$P(t) = 10.000 + \frac{t^2}{4} + 30t,$$

onde t é o tempo en anos. Calcule os valores da população depois de 2, 4, 6 anos, e as taxas instantâneas de crescimento para esses mesmos valores de t. Suponha que a taxa se estabilize a partir de $t = 6$, qual será a população ao final de 10 anos? Compare esse valor com o valor real $P(10)$.

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1: Desenhe uma figura e classifique as quantidades que variam.

Passo 2: Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que é para ser encontrada.

Passo 3: Ache uma equação que relacione a quantidade, cuja taxa de varição é para ser encontrada com as quantidades cujas taxas de variação são conhecidas.

Passo 4: Diferencie ambos os lados desta equação em relação ao tempo e resolva a derivada que dará a taxa de variação desconhecida.

Passo 5: Calcule esta derivada em um ponto apropriado.

Gabarito

5. $P(0, 1)$.

6. A função f é derivável e $f'(0) = 0$.

7. $x = k\,\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$

8. f não é contínua e nem é derivável em 2.

9. $P_1(0, 0)$ e $P_2(1, \frac{1}{2})$.

10. a)$f'(x) = 4$; b)$f'(x) = 75x^{74} - 1$; c)$f'(x) = 3x^2$; d)$f'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}x^4\sqrt{x} - 3}{x^4}$;
e)$f'(x) = \dfrac{-ax^3 - 4b}{x^5}$; f)$f'(x) = \dfrac{4\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$; g)$f'(x) = \dfrac{-2\sqrt{x} + x\sqrt[4]{x}}{4x^2}$;
h)$f'(r) = \dfrac{-3e^2 + \frac{3}{2}r^2\sqrt{r}}{r^2}$; i)$f'(x) = \dfrac{24 + x^8\sqrt{x}}{x^9}$; j)$f'(x) = ex^{e-1} - \sqrt{10}x^{\sqrt{10}-1}$;

k)$f'(t) = -3 - 16t^2 64t^4$; l)$f'(w) = \dfrac{6w^2 - w - 4}{2w\sqrt{w}}$;

m)$f'(x) = \dfrac{-1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6}{x^2}$.

11. f é contínua e derivável em $x = o$.

12. $P(arccos(-\frac{1}{4}), \frac{\sqrt{15}}{4})$.

13. a)$f'(x) = 24x^2 + 40x + 6$; b)$f'(x) = -24x^2 - 6x^5 + 10x^4 - 63x^2 - 7$;
c)$f'(x) = \dfrac{32 + 48x - 14x^2 - 15x^3}{x^5}$; d)$f'(x) = \dfrac{-54 - 27x + 3x^3 + 6x^4}{x^3}$; e)$f'(x) = \dfrac{3 - 8x - 3x^2}{(x^2+1)^2}$;
f)$f'(x) = \dfrac{3 + 8x^3 - 3x^4}{(x^4 + x + 1)^2}$; g)$f'(x) = \dfrac{-5 + 24x^3 + 18x^4}{(x+1)^2}$; h)$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$;
i)$f'(x) = \dfrac{-15 - 16x + 6x^2}{(3x-4)^2}$;

14. a)$4y - 3x = -1$; b)$y = \dfrac{-x}{3} + \dfrac{5}{6}$; c)$2y - x = 2$;

15. a) $f'(x) = -4sen(x) + 2cos(x)$; b)$f'(x) = \frac{-10}{x^3} + cos(x)$; c)$f'(x) = -8\,x\,cos(x) + 4\,x^2\,sen(x)$
d)$f'(x) = 4\,sen(x)\,cos(x)$; e)$f'(x) = \dfrac{x^2\,cos(x) - 2x\,sen(x)}{[x^2 + sen(x)]^2}$;
f)$f'(x) = \dfrac{2x\,cos(x) + x^2\,sen(x) + sen(x)}{cos^2(x)}$ g)$f'(x) = \dfrac{x\,cos(x) - sen(x) - sen^3(x)}{sen^2(x)}$
h)$f'(x) = \dfrac{-sen(x) - 1}{(sen(x)+1)^2}$ i)$f'(x) = \dfrac{cos^2(x)}{[cos(x) + x\,sen(x)]^2}$
j)$f'(x) = \dfrac{x\,cos^2(x) + 2cos^2(x) + x\,sen^2(x) - sen(x)\,cos(x)}{[2cos(x) - sen(x)]^2}$ k)$f'(x) = \dfrac{-sen(x) + 1}{(1 - sen(x))^2}$
l)$f'(x) = -x^2\,sen(x) + 2x\,cos(x) + 3$ m)$f'(x) = \dfrac{cos^2(x) + 2sen^2(x)}{cos^3(x)}$

16. a) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$; b)$f'(x) = 50(x^5 + 3x^2 - x)^{49}(5x^4 + 6x - 1)$; c)$f'(x) = \dfrac{-2x}{3(x^2-1)\sqrt[3]{x^2-1}}$;
d)$f'(t) = \dfrac{-8}{(2t+1)^5}$ e)$f'(x) = -2x\,sen(x^2)$; f)$f'(x) = -2\,sen(x)\,cos(x)$; g)$f'(x) = e^{x^2-x}(2x-1)$
h)$f'(x) = \dfrac{5^{\sqrt{x}}\,ln(5)}{2\sqrt{x}}$; i)$f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x}{e^{-3x}}$ j)$f'(x) = sen(\pi t) + \pi t\,cos(\pi t)$;
k)$f'(x) = e^{at}(a\,sen(bt) + b\,cos(bt))$; l)$f'(x) = 4(4x+5)^2(x^2 - 2x + 5)^3(11x^2 - 4x + 5)$
m)$f'(z) = -8(1-4z)\sqrt{z^2+1} + \dfrac{2z(1-4z)^2}{2\sqrt{z^2+1}}$ n)$f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)^2(x^2+3x+5)}{(2x+1)^6}$
o)$f'(\theta) = 2\,n\,tg(n\theta)\,sec^2(n\theta)$; p)$f'(x) = cos(x)\,cos(1-x^2) + 2x\,sen(x)\,sen(1-x^2)$
q)$f'(x) = \dfrac{-cos(x^2) - 2xsen(x^2)}{e^x}$ r)$f'(x) = \dfrac{e^x\,cos(\frac{e^x}{1+e^x})}{(e+e^x)^2}$
s)$f'(x) = -sex^2(sec(cos(x)))\,tg(cos(x))\,sec(cos(x))\,sen(x)$ t)$f'(x) = 4x\,sen(x^2)\,cos(x^2)\,e^{sen^2(x^2)}$

17. a) $f'(x) = 6x^5 + 4$; ; b) $f'(x) = \dfrac{3}{20x^{\frac{17}{20}}} + \dfrac{-7\pi}{x^8}$; ; d) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 3e^x - 6x^3\,ln(x) + 3xe^x\,ln(x)}{x(2x^3 - 3e^x)^2}$; ;
e) $f'(x) = \dfrac{-7}{x^8}$; ; f) $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} + e^x(x^3 + 3x^2 - 4x - 4)$; ; g) $f'(x) = \dfrac{x\,cos(2x) - 7\,sen(x)\,cos(x)}{x^8}$; ;
h) $f'(x) = \dfrac{1}{x\,ln(3)}$;

19. a) $f'(x)=sec^2(x)+e^x(cos(x)-sen(x))$; b) $f'(x)=tg(x^2+3x)sec(x^2+3x)(2x+3)$; c) $f'(x)=e^{2x}(4x^2-x)^6(8x^2+54x-7)$; d) $f'(x)=-cossec(x)\,sen(sen(x))\,cos(x)+cotg(x)\,cos(sen(x))$; e) $f'(x)=e^{sen(x)}\,cos(x)$; f) $f'(x)=\dfrac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$; g) $f'(x)=\dfrac{2\sqrt[3]{(x+1)^2}}{3(x+1)^2\,\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; h) $f'(x)=\dfrac{6x\,ln^2(x^2+1)}{x^2+1}$; i) $f'(x)=\pi^x\,ln(\pi)$; j) $f'(x)=5^x\,ln(5)$; k) $f'(x)=\dfrac{(3+x)(x^4+1)-4x^4\,ln(x^3\,e^x)}{x(x^4+1)^2}$; l) $f'(x)=4(sen(x)+cos(x))^3(cos(x)-sen(x))$; m) $f'(x)=\dfrac{2}{2x+1}$; n) $f'(x)=\dfrac{4x\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x^3+xe^{\sqrt{x}}}}$; o) $f'(x)=\dfrac{\sqrt[t]{e}(t-1)}{t}$; p) $f'(x)=6t(t^2+cotg(t^2)^2(1-cossec^2(t^2)))$;

28. a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$; b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y^2}{2xy+2}$; c) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y+y}{x\,e^y+x}$; d) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{5-sen(y)-x}$; e) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x}{x^2+2y+y^2}$; f) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2+2ycos(y^2)}$; g) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6x}{5y^4-sen(y)}$; h) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy^3+y}{3y^2x^2+x}$;

34. a) 1 ; b) 1 ; c) e^3 ; d) e ; e) 0 ; f) 0 ; g) 9,9 ; h) 0 ; i) $+\infty$; j) $+\infty$; k) 0 ; l) 0 ;