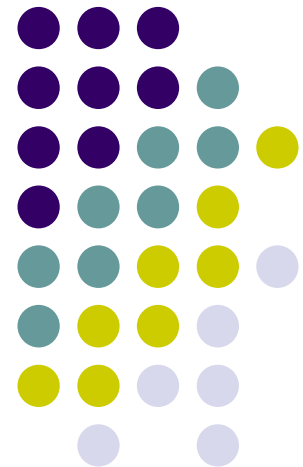


GRAFOS

ESTRUCTURAS DE DATOS 2006

Prof. Ing. M.Sc. Fulbia Torres



GRAFOS

DEFINICIÓN



Un grafo consta de un conjunto de nodos(o vértices) y un conjunto de arcos (o aristas). Cada arco de un grafo se especifica mediante un par de nodos. Denotemos al conjunto de nodos de un grafo dado G , por V_G y al conjunto de aristas por A_G .

GRAFOS

DEFINICIÓN



- Sea un colección cuyos datos son:
 - ciudades
 - aeropuertos
 - computadores de una red
 - puntos del plano de una ciudad
- Queremos modelar:
 - rutas entre ciudades
 - rutas aéreas
 - envío de correo electrónico
 - recorridos turísticos

Ejemplo: el grafo G de la figura

$$V_G = \{a, b, c, d\}$$

$$A_G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

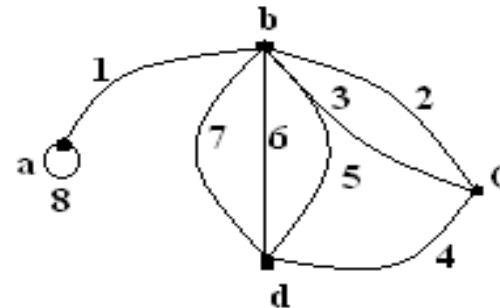


Figura 1. Ejemplo de grafo

GRAFOS

DEFINICIÓN



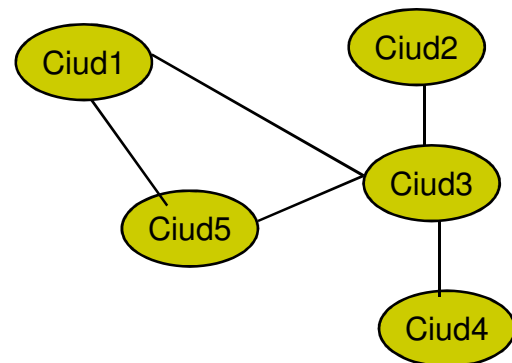
Relación binaria entre los datos de la colección:

- Una relación **R** sobre un conjunto **G** se define como un conjunto de pares (a, b) / $a, b \in G$
- Si $(a, b) \in R$, se escribe " $a R b$ " y denota que a está relacionado con b

Ejemplo: grafo cuyos **vértices** (G) se relacionan vía **aristas** (R)

$G = \{\text{Ciud1}, \text{Ciud2}, \text{Ciud3}, \text{Ciud4}, \text{Ciud5}\}$

$R = \{(\text{Ciud2}, \text{Ciud3}), (\text{Ciud3}, \text{Ciud4}), (\text{Ciud3}, \text{Ciud5}), (\text{Ciud1}, \text{Ciud5}), (\text{Ciud1}, \text{Ciud3})\}$



Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

DEFINICIÓN



El número de elementos de V_G es llamado **orden del grafo G**. Un grafo nulo es un grafo con orden cero.

Una arista esta determinada por los nodos que conecta. Un grafo esta completamente definido por sus conjuntos de nodos y aristas.

La arista 4, por ejemplo, conecta los nodos c y d y se dice que es de la forma (c, d).

Nótese que puede haber varias aristas conectando a dos nodos, por ejemplo, las aristas 5, 6, 7 todas de la forma (b, d).

Algunos pares de nodos pueden estar desconectados, por ejemplo, no hay aristas de la forma (a, c) o (a, d). Algunas aristas pueden conectar un nodo a si mismo, por ejemplo, la arista 8 es de la forma (a, a), a estas aristas se llaman **bucles**.

$$V_G = \{a, b, c, d\}$$

$$A_G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

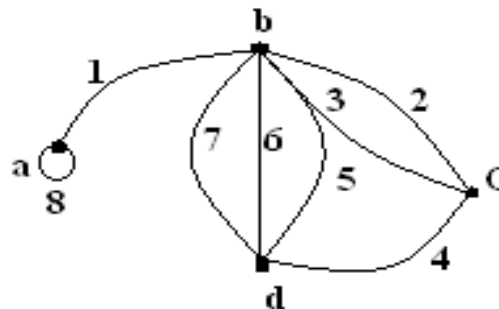


Figura 1. Ejemplo de grafo

Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

TIPOS



GRAFO SIMPLE

Un grafo **G** se llama **grafo simple** si las siguientes condiciones son válidas:

- No tiene ciclos, esto es, no existe una arista en A_G de la forma (v, v) , donde v esta en V_G
- No hay más de un arista uniendo un par de nodos, esto es, no existe más de una arista en A_G de la forma (v_1, v_2) , para cualquier par de elementos v_1 y v_2 en V_G .

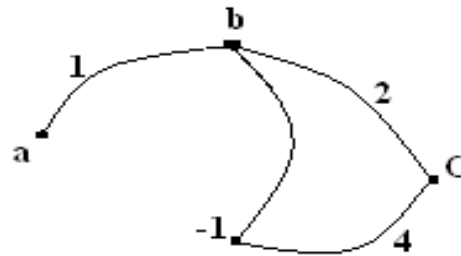


Figura 2. Grafo Simple

GRAFOS

TIPOS



GRAFO CONEXO

Es un gráfica que no se puede dividir en dos gráficas, sin eliminar por lo menos una de las aristas.

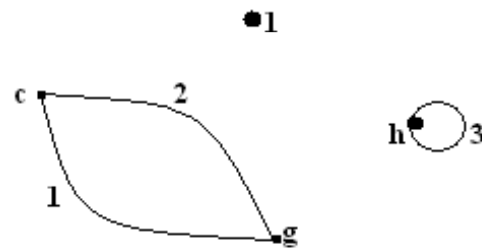


Figura 3. Grafo Simple

GRAFOS

TIPOS



GRAFOS DIRIGIDOS (DIGRAFOS)

Un **grafo dirigido** (*gd*) es un par $G = (V, A)$

- V es un conjunto finito de **vértices** (o nodos o puntos)
- A es un conjunto de **aristas** (o arcos) dirigidas

Arista: par ordenado de vértices $(u, v): u \rightarrow v$

Ejemplo:

$V = \{\text{Ciud1}, \text{Ciud2}, \text{Ciud3}, \text{Ciud4}, \text{Ciud5}\} \quad |V| = 5$

$A = \{(\text{Ciud2}, \text{Ciud2}), (\text{Ciud2}, \text{Ciud3}), (\text{Ciud3}, \text{Ciud1}), (\text{Ciud3}, \text{Ciud4}), (\text{Ciud3}, \text{Ciud5}),$
 $(\text{Ciud1}, \text{Ciud3}), (\text{Ciud1}, \text{Ciud5})\} \quad |A| = 7$

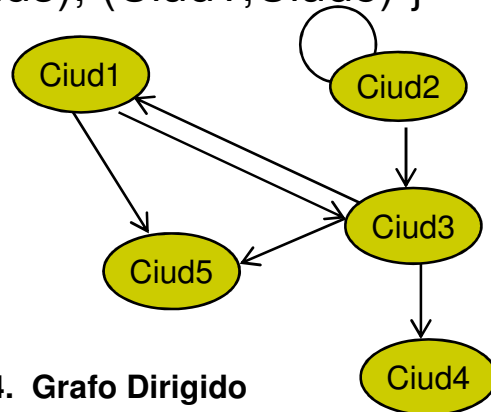


Figura 4. Grafo Dirigido

GRAFOS

TIPOS



GRAFOS DIRIGIDOS (DIGRAFOS)

Cada arista del grafo dirigido incluye una flecha para indicar la dirección. La punta de cada flecha representa el segundo nodo del par ordenado de nodos que constituye un arco y la cola de la flecha representa el primer nodo del par

El **grado interno** de un nodo en un grafo, es el número de aristas que terminan en ese nodo; el **grado externo** de un nodo, es el número de aristas que salen de ese nodo. El **grado** de un nodo, es la suma de sus grados internos y externos.

GRAFOS

TIPOS



GRAFOS DIRIGIDOS (DIGRAFOS)

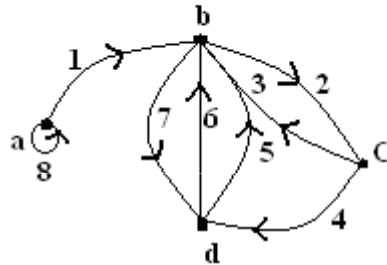


Figura 5. Grafo Dirigido

Grado _ interno (a) = 1

Grado _ interno (b) = 4

Grado _ interno (c) = 1

Grado _ interno (d) = 2

Grado _ externo (a) = 2

Grado _ externo (b) = 2

Grado _ externo (c) = 2

Grado _ externo (d) = 2

Grado (a) = 3

Grado (b) = 6

Grado (c) = 3

Grado (d) = 4

Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

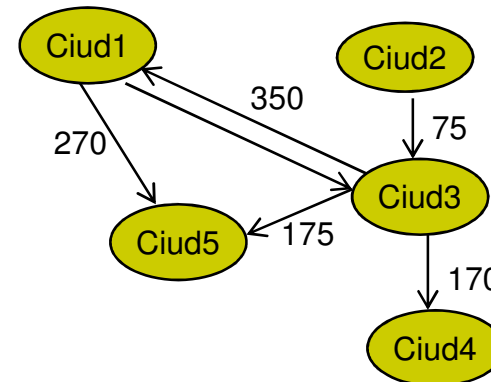
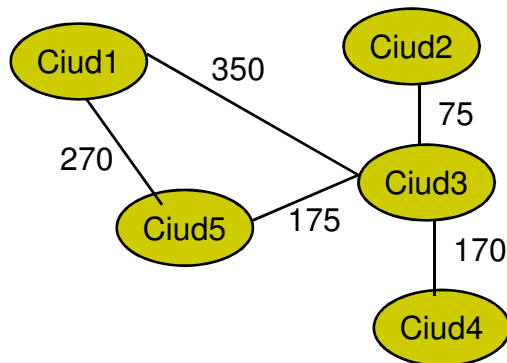
TIPOS



GRAFOS PONDERADOS

Un **grafo ponderado**, es un grafo etiquetado con números reales.

Ejemplo:



GRAFOS

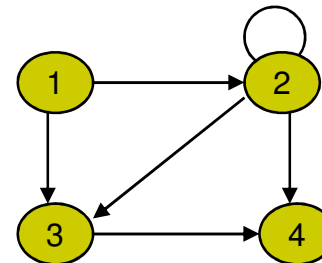
CONCEPTOS BÁSICOS



Relaciones de incidencia

Sea $G = (V, A)$ un **grafo dirigido**. Si $(u, v) \in A$, decimos que **incide** desde u (sale de ...) e **incide** en v (llega a ...)

$(2, 2) \in A$, incide desde 2 e incide en 2
 $(1, 2) \in A$, incide desde 1 e incide en 2
 $(2, 3) \in A$, incide desde 2 e incide en 3
 $(2, 4) \in A$, incide desde 2 e incide en 4
 $(3, 4) \in A$, incide desde 3 e incide en 4



GRAFOS

CONCEPTOS BÁSICOS



Relaciones de incidencia

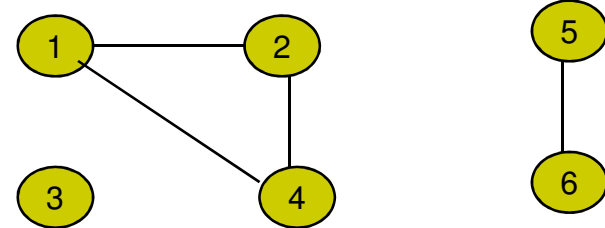
Sea $G = (V, A)$ un **grafo no dirigido**. Si $(u, v) \in A$, decimos que **incide** sobre u y v .

$(1, 2)$ ó $(2, 1) \in A$, incide sobre 1 y 2

$(2, 4)$ ó $(4, 2) \in A$, incide sobre 2 y 4

$(1, 4)$ ó $(4, 1) \in A$, incide sobre 1 y 4

$(5, 6)$ ó $(6, 5) \in A$, incide sobre 5 y 6



GRAFOS

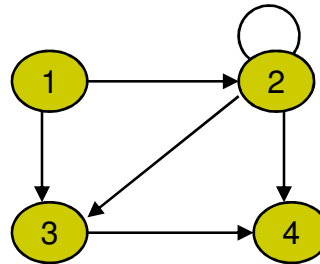
CONCEPTOS BÁSICOS



Relaciones de adyacencia

Sea $G = (V, A)$ un **grafo**. Si $(u, v) \in A$, decimos que el vértice v es adyacente al vértice u .

Ejemplo con el vértice 2:
2 es adyacente a 1
1 no es adyacente a 2



En un grafo no dirigido la relación es simétrica.

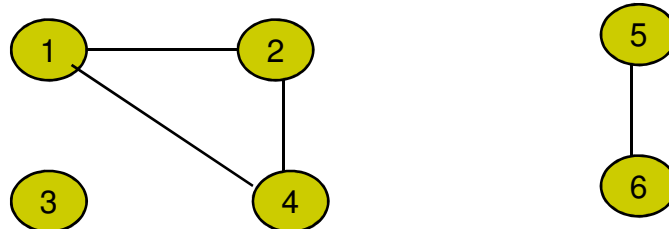
GRAFOS

CONCEPTOS BÁSICOS



Grado de un vértice

- El **grado de un vértice** en un **grafo no dirigido** es el número de aristas que inciden sobre él (o de vértices adyacentes)



Ejemplo: el grado del vértice 2 es 2

GRAFOS

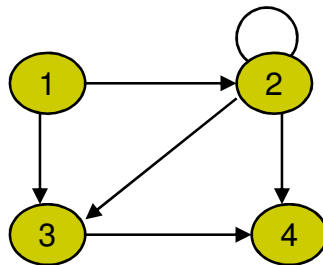
CONCEPTOS BÁSICOS



Grado de un grafo

El grado de un grafo es el de su vértice de grado máximo.

Ejemplo:



El grado de este grafo es 5 (el grado del vértice 2)

GRAFOS

CONCEPTOS BÁSICOS

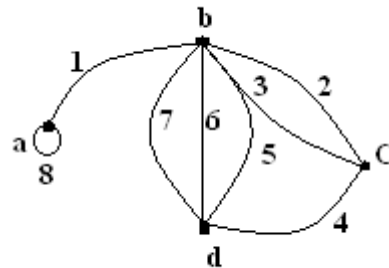


TRAYECTORIA

Una trayectoria en un grafo es una secuencia de una o más aristas que conecta a dos nodos.

En la figura se tienen las siguientes trayectorias entre los nodos b y d.

- $P(b, d) = (b, c) (c, d)$ de longitud =2
- $P(b, d) = (b, d)$ de longitud =1



Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

CONCEPTOS BÁSICOS



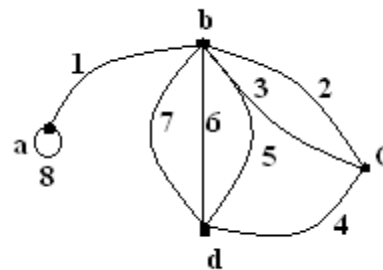
CICLO

Un ciclo es una trayectoria sobre la cual se cumplen con las siguientes dos condiciones:

- Ninguna arista puede aparecer más de una vez por una secuencia de aristas.
- El nodo inicial de la trayectoria es el mismo que el nodo Terminal, es decir, $P(v, v)$.

En otras palabras, un ciclo regresa a su punto de inicio. El grafo de la figura tiene varios ciclos, por ejemplo:

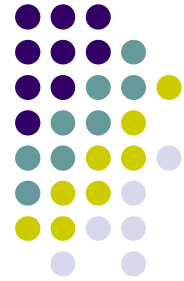
- $P(a, a) = (a, a)$
- $P(b, b) = (b, c) (c, b)$
- $P(b, b) = (b, c) (c, d) (d, b)$
- $P(d, d) = (d, b) (b, c) (c, d)$
- $P(d, d) = (d, b) (b, d)$



Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

CONCEPTOS BÁSICOS



Ejercicio

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido con pesos:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$A = \{(v_0, v_1, 2), (v_0, v_3, 1), (v_1, v_3, 3), (v_1, v_4, 10), (v_3, v_4, 2), (v_3, v_6, 4), (v_3, v_5, 8), (v_3, v_2, 2), (v_2, v_0, 4), (v_2, v_5, 5), (v_4, v_6, 6), (v_6, v_5, 1)\}$$

Se pide:

- $|V|$ y $|A|$
- Vértices adyacentes a cada uno de los vértices.
- Grado de cada vértice y del grafo.
- Caminos desde v_0 al resto de vértices, su longitud con y sin pesos.
- Vértices alcanzables desde v_0
- ¿Tiene ciclos?

Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

REPRESENTACIÓN



Matriz de adyacencia

Considere un grafo G con un conjunto de nodos o vértices V_G y un conjunto de arcos o aristas A_G . Suponga que la gráfica es de orden N , para $N \geq 1$. Una forma de representar esta gráfica es utilizando la matriz de adyacencia, la cual es un arreglo M de N por N , donde:

$$M_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si la arista } v_i, v_j, \text{ está en } A_G. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

GRAFOS

REPRESENTACIÓN MATRIZ DE ADYACENCIA



Ejemplo: representación matricial grafo no dirigido

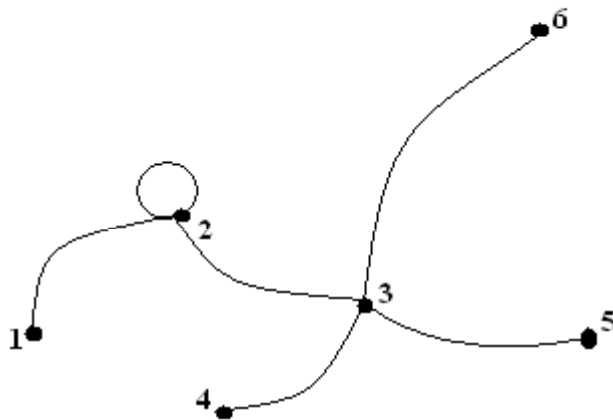


Figura 6. Ejemplo de grafo no dirigido.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0
3	0	1	0	1	1	1
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0

Figura 7. Matriz de adyacencia de grafo no dirigido de la figura 6.

GRAFOS

REPRESENTACIÓN MATRIZ DE ADYACENCIA



Ejemplo: representación matricial grafo dirigido

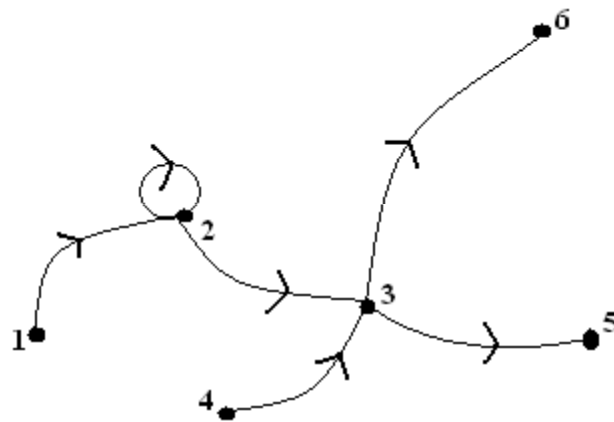


Figura 8. Ejemplo de grafo dirigido.

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

Figura 9. Matriz de adyacencia de grafo dirigido de la figura 8.

GRAFOS

REPRESENTACIÓN MATRIZ DE ADYACENCIA



Ejemplo: representación matricial grafo dirigido con arista ponderadas.

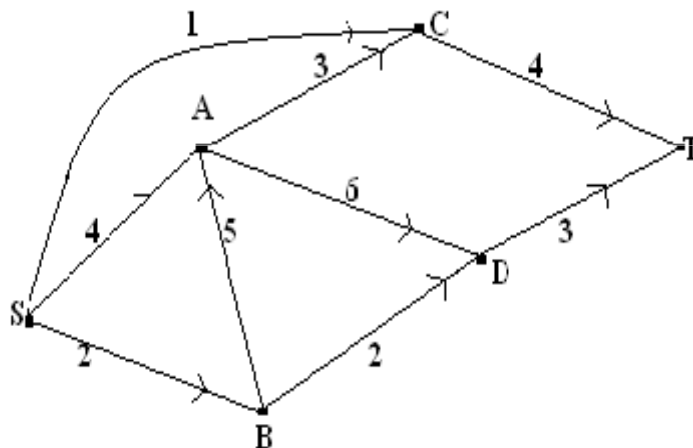


Figura 10. Ejemplo de grafo dirigido con aristas ponderadas.

	A	B	C	D	S	T
A	0	0	3	6	0	0
B	5	0	0	2	0	0
C	0	0	0	0	0	4
D	0	0	0	0	0	3
S	4	2	1	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0

Figura 11. Matriz de adyacencia de grafo dirigido con aristas ponderadas de la figura 10.

GRAFOS

REPRESENTACIÓN



Listas (directorios de nodos)

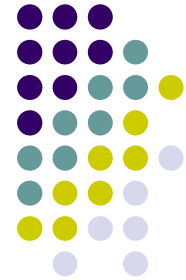
La representación de listas solamente almacena la información de las aristas que existen. Incluye dos partes: un directorio y un conjunto de listas ligada.

Hay una entrada en el directorio para cada nodo del grafo. La entrada del directorio para el nodo i apunta a una lista ligada, que representa los nodos que están conectados al nodo i .

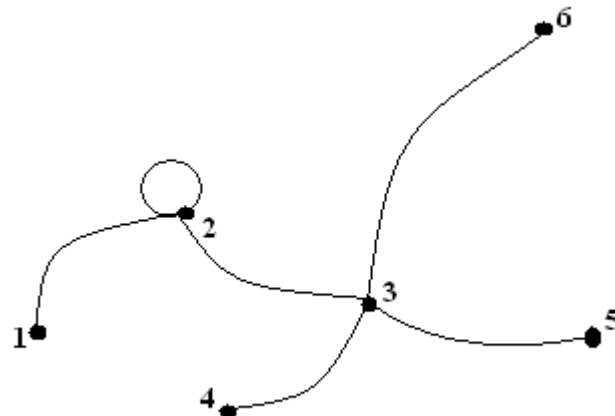
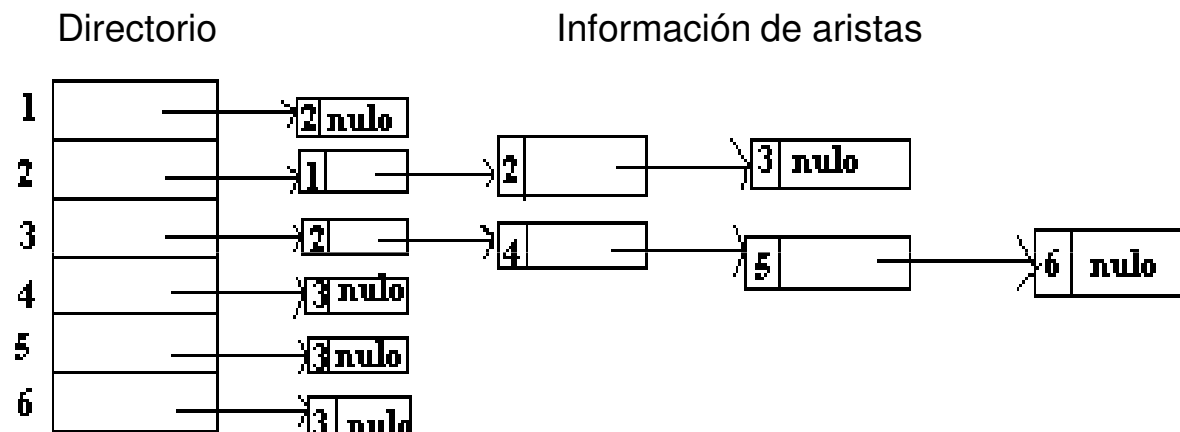
Cada registro de la lista ligada tiene dos campos: identificación del nodo, liga al siguiente elemento de la lista. El directorio representa nodos y la lista representa aristas.

GRAFOS

REPRESENTACIÓN LISTAS



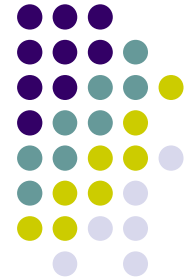
Representación del directorio de nodos del grafo no dirigido de la figura 6.



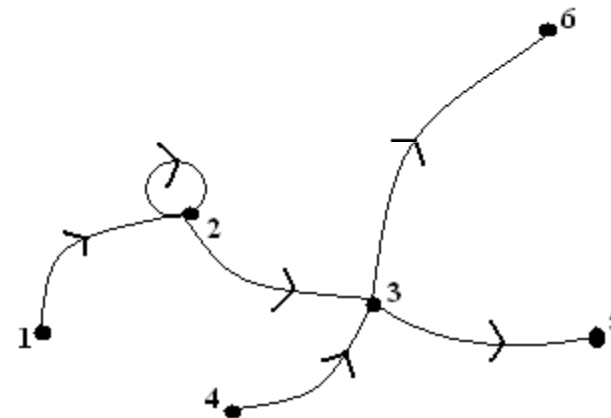
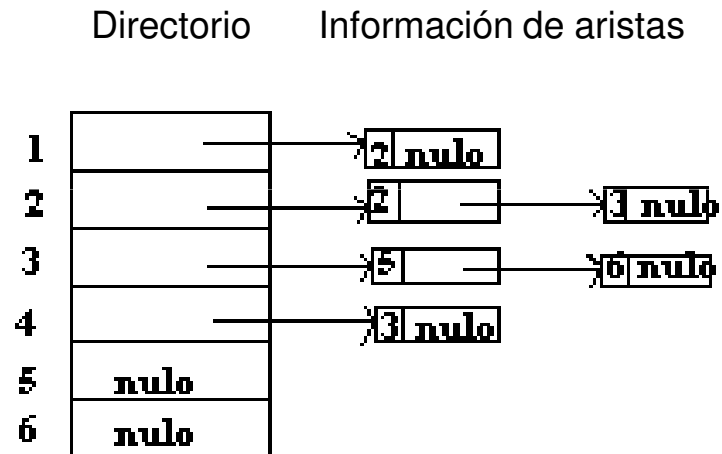
Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

REPRESENTACIÓN LISTAS



Representación del directorio de nodos del grafo dirigido de la figura 8.



Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

REPRESENTACIÓN LISTAS



El siguiente ejemplo es el de un grafo dirigido de actividades: cada nodo representa un evento y cada arista representa una tarea que al completarse ayuda a disparar el siguiente evento que inicia otras tareas. Cada peso de arista es su tiempo requerido.

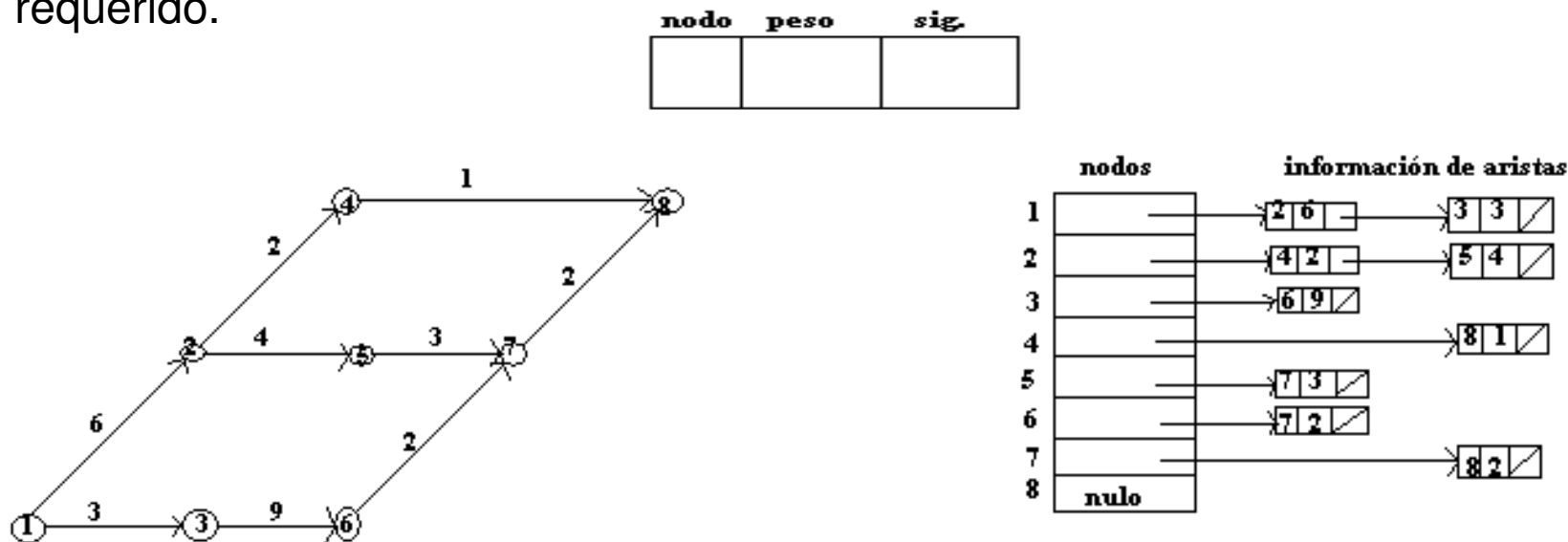


Figura 13. Representación de directorio de nodos de la figura 12.

Figura 12. Ejemplo de un grafo de actividades.

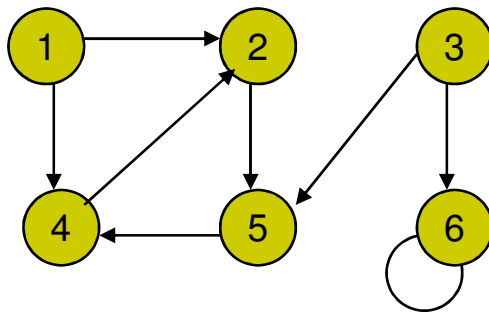
Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

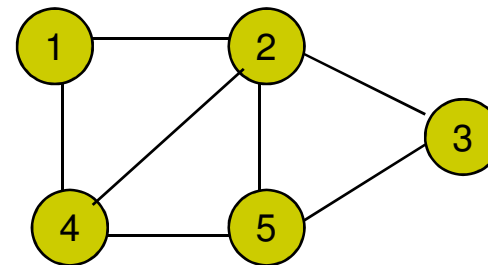


Ejercicio :
Representar los siguientes grafos mediante una matriz de adyacencia y mediante listas.

a.

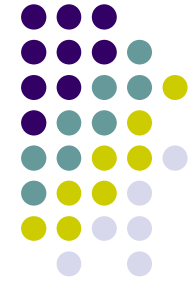


b.



GRAFOS

RECORRIDOS



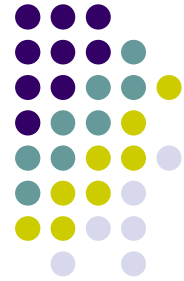
Recorrido en Amplitud

En un recorrido en amplitud de grafos un nodo se selecciona como posición inicial, este se visita y se marca, después, todos los nodos no visitados adyacentes a ese nodo, se visitan y se marcan en algún orden secuencial. Por último los nodos no visitados, inmediatamente adyacentes a esos nodos, se visitan y se marcan, y así sucesivamente, hasta que todos los nodos del grafo hayan sido visitados en el recorrido.

El algoritmo de recorrido utiliza una cola para almacenar los nodos de cada nivel del grafo que se visita. Estos nodos almacenados son tratados uno por uno, luego sus nodos adyacentes son visitados. Esta condición se alcanza cuando la cola queda vacía. Procede nivel por nivel.

GRAFOS

RECORRIDOS



Recorrido en Amplitud

En el siguiente ejemplo se muestra el recorrido en amplitud del grafo (figura 12): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 1, 3, 2, 6, 5, 4, 7, 8.

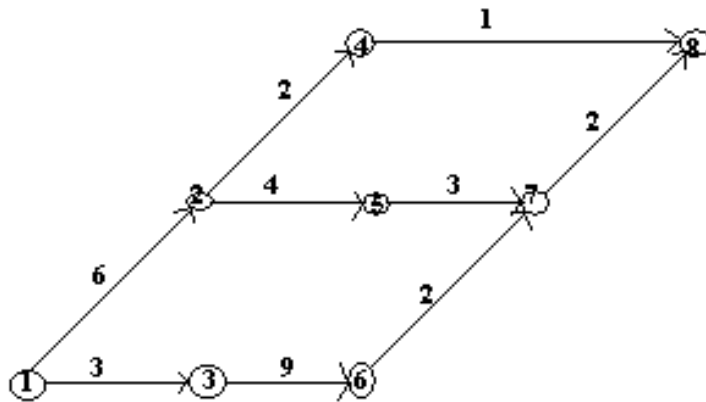


Figura 12. Ejemplo de un grafo de actividades.

Ing. M.Sc. Fulbia Torres
Asignatura: Estructuras de Datos
Barquisimeto 2006

GRAFOS

RECORRIDOS



Recorrido en Profundidad

El recorrido en profundidad sigue primero una trayectoria desde el nodo inicial hasta un nodo terminal, después otra trayectoria desde el mismo punto inicial hasta alcanzar otro nodo final, y así sucesivamente hasta que todos los nodos hayan sido visitados.

Una trayectoria se sigue hasta que todos los nodos no visitados hayan sido alcanzados; después el algoritmo regresa al último nodo que fue visitado y que tiene un nodo adyacente no visitado. Para este recorrido el algoritmo es recursivo.

GRAFOS

RECORRIDOS



Recorrido en Profundidad

En el siguiente ejemplo se muestra el recorrido en profundidad del grafo (figura 12):
1, 2, 4, 8, 5, 7, 3, 6. Otra secuencia válida es 1, 3, 6, 7, 8, 2, 5, 4.

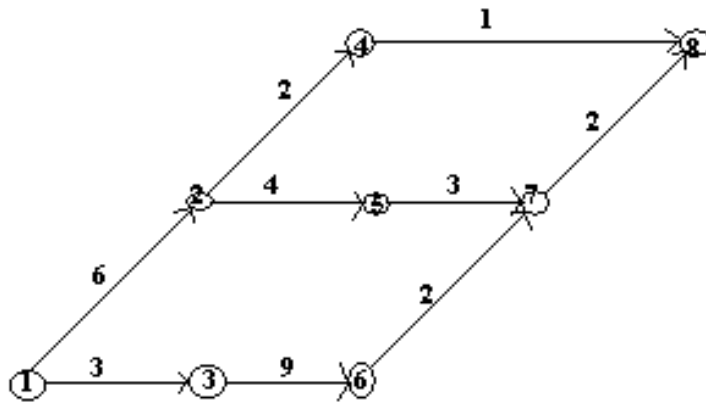


Figura 12. Ejemplo de un grafo de actividades.

GRACIAS POR SU
ATENCIÓN

HASTA LA PRÓXIMA
CLASE

